คณิตศาสตร์

มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
คณะครุศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ข้อสอบปลายภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2566

รหัสวิชา	ชื่อวิชา	วันเวลาสอบ	คะแนนเต็ม
MAC3310	พีชคณิตนามธรรม	เวลา 9:00 - 12:00 วันศุกร์ ที่ 3 พฤศจิกายน 2566	100 คะแนน 25%

ชื่อ-สกุล.. **รหัสนักศึกษา**................................. **หมู่เรียน**................

คำชี้แจง

1. ข้อสอบมี 18 ข้อ 13 หน้า แบ่งออกเป็น 3 ตอน ประกอบด้วย
    - **ตอนที่** 1 ข้อสอบแบบ 5 ตัวเลือก จำนวน 5 ข้อ (ข้อละ 2 คะแนน รวม 10 คะแนน)
    - **ตอนที่** 2 ข้อสอบแบบเติมคำตอบ จำนวน 5 ข้อ (ข้อละ 2 คะแนน รวม 10 คะแนน)
    - **ตอนที่** 3 ข้อสอบแบบแสดงวิธีทำ จำนวน 8 ข้อ (ข้อละ 10 คะแนน รวม 80 คะแนน)
2. เขียนรหัสนักศึกษา และหมู่เรียนด้วย**ตัวบรรจงลงในข้อสอบทุกหน้า**
3. ไม่อนุญาตให้ใช้เครื่องคำนวณและเครื่องมือสื่อสาร
4. **ห้าม**นำข้อสอบออกจากห้องสอบโดยเด็ดขาด
5. หากมี**การทุจริต**ในการสอบ จะได้รับการลงโทษตามระเบียบของมหาวิทยาลัย

ข้าพเจ้าจะปฏิบัติตามข้อตกลงอย่างเคร่งครัด
ลงชื่อผู้เข้าสอบ

....

อาจารย์ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย

ตอนที่	1	2	3								รวม
ข้อ	1-5	6-10	11	12	13	14	15	16	17	18	
คะแนน											

ตอนที่ 1 : (10 คะแนน) จงกากบาททับข้อที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว ข้อละ 2 คะแนน

1. ให้ $(R,+,\cdot)$ เป็นริง ข้อใดกล่าว**ไม่ถูกต้อง**

   ก. $(R,+)$ เป็นอาบีเลียนกรุป (abelian group)

   ข. $(R,\cdot)$ เป็นกึ่งกรุป (semi-group)

   ค. R มีสมบัติการแจกแจง (distributive law)

   ง. R มีเอกลักษณ์การคูณคือ 1 เรียกว่า ยูนิตี (unity)

   จ. R มีเอกลักษณ์การบวกคือ 0 เรียกว่า ศูนย์ (zero)

2. ให้ R และ S เป็นริง โดยที่ $\varphi : R \to S$ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของริง (ring homomorphism) ข้อใดต่อไปนี้กล่าว**ไม่ถูกต้อง** สำหรับ $a, b \in R$

   ก. $\varphi(a^3) = [\varphi(a)]^3$

   ข. $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$

   ค. $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$

   ง. $\varphi(0_R) = 0_S$

   จ. $\varphi(1_R) = 1_S$

3. สมาชิกข้อใดต่อไปนี้ **ไม่ใช่ ตัวหารศูนย์ (zero divisor)** ของ $\mathbb{Z}_{12}$

   ก. $\bar{7}$

   ข. $\bar{6}$

   ค. $\bar{4}$

   ง. $\bar{3}$

   จ. $\bar{2}$

4. ข้อใดกล่าว**ไม่ถูกต้อง**

   ก. อินทิกรัลโดเมนมีสมบัติการตัดออกสำหรับการคูณ (cancellation for multiplication)

   ข. อินทิกรัลโดเมนเป็นฟีลด์

   ค. ฟีลด์เป็นอินทิกรัลโดเมน

   ง. ฟีลด์มีไอดีลเพียง 2 ไอดีลเท่านั้น

   จ. $\mathbb{Z}$ เป็นอินทิกรัลโดเมนที่ไม่เป็นฟีลด์

5. ให้ $R[x]$ เป็นริงพหุนาม (polynomial ring) ข้อใดกล่าว**ถูกต้อง**

   ก. $\deg(p(x)q(x)) = \deg p(x) + \deg q(x)$ เมื่อ $p(x), q(x) \in R[x]$

   ข. ถ้า $\deg p(x) = 0$ แล้ว $p(x) = a \in R$

   ค. $6x + 6$ ลดทอนได้ (reducicble) ใน $\mathbb{Z}[x]$

   ง. $\mathbb{Z}_5[x]/\langle x^2 + \bar{1} \rangle$ เป็นฟีลด์ (field)

   จ. $\langle x^2 + \bar{1} \rangle$ เป็นไอดีลใหญ่สุด (maximal ideal) ใน $\mathbb{Z}_{10}[x]$

ตอนที่ 2 : (10 คะแนน) จงเติมคำตอบในช่องว่าง (ด้านซ้ายบน) ให้ถูกต้อง ข้อละ 2 คะแนน

6. ______________________

จงหา**จำนวนตัวหารศูนย์**ของ $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{121}$

7. ______________________

จงหาจำนวนไอดีลทั้งหมด**ที่ไม่ใช่**ไอดีลใหญ่สุดของ $\mathbb{Z}_{2023}$

8. ________________________

จงหา n ที่ทำให้ $\varphi : \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_{3n+10}$ เป็น **ฟังก์ชันสมสัณฐาน (isomorphism)**

9. ________________________

จงหา**จำนวนพหุนามที่มี ระดับขั้น (degree) ไม่เกิน 3** ใน $\mathbb{Z}_3[x]$

10. ________________________

$\mathbb{Z}_5[x]/\left\langle x^2 + \bar{2} \right\rangle$ เป็น**ฟีลด์อันดับ**ที่เท่าใด

ตอนที่ 3 : (80 คะแนน) จงแสดงวิธีโดยละเอียด ข้อละ 10 คะแนน

11. **(10 คะแนน)** กำหนดให้ $\varphi : (\mathbb{Z}, +) \to (GL_2(\mathbb{R}), \cdot)$ นิยามโดย

$$\varphi(x) = \begin{bmatrix} 2^x & 0 \\ 0 & 2^x \end{bmatrix}$$

11.1 **(5 คะแนน)** จงตรวจสอบว่า φ เป็น **ฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน (homomorphism)** หรือไม่

11.2 **(3 คะแนน)** จงหา $Ker(\varphi)$

11.3 **(2 คะแนน)** มี $x \in \mathbb{Z}$ ที่ทำให้

$$\varphi(x+2) = \varphi(x) + \varphi(2)$$

หรือไม่เพราะเหตุใด

12. **(10 คะแนน)** ให้ G_1 และ G_2 เป็นกรุป โดยที่ $\varphi : G_1 \to G_2$ เป็นฟังก์**ชันสมสัณฐาน (isomorphism)** ให้ $K \trianglelefteq G_1$ และนิยาม

$$N = \{\varphi(k) : k \in K\}$$

12.1 **(5 คะแนน)** จงแสดงว่า $N \leq G_2$ (N เป็นกรุปย่อย G_2)

12.2 **(5 คะแนน)** จงแสดงว่า $N \trianglelefteq G_2$ (N เป็นกรุปย่อยปกติ G_2)

13. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

13.1 **(5 คะแนน)** ให้ $(R, +, \cdot)$ เป็น**ริง (ring)** ถ้านิยามการคูณใหม่ สำหรับ $x \in R$

$$a \odot b = ax^2b \qquad \text{เมื่อ } a, b \in R$$

จงแสดงว่า $(R, +, \odot)$ เป็นริงด้วย (ax^2b หมายถึง $a \cdot x \cdot x \cdot b$)

13.2 **(5 คะแนน)** กำหนดให้

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x & y & z \\ 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 \end{bmatrix} : a, b, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

จงตรวจสอบว่า S เป็น **ริงย่อย (subring)** ของ $M_{33}(\mathbb{R})$ หรือไม่

14. **(10 คะแนน)** กำหนดให้

$$I = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & x & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & z & 0 \end{bmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

จงตรวจสอบว่า

14.1 **(4 คะแนน)** I เป็น **ไอดีลขวา (right ideal)** ของ $M_{33}(\mathbb{R})$ หรือไม่

14.2 **(4 คะแนน)** I เป็น **ไอดีลซ้าย (left ideal)** ของ $M_{33}(\mathbb{R})$ หรือไม่

14.3 **(2 คะแนน)** I เป็น **ไอดีล (ideal)** ของ $M_{33}(\mathbb{R})$ หรือไม่

15. **(10 คะแนน)** ให้ p และ q เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่

$$\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_{q^2} \quad \text{มีจำนวนตัวหารศูนย์เท่ากับ 59 ตัว}$$

จงหาจำนวนตัวหารศูนย์ของ $\mathbb{Z}_{p+q}$

16. **(10 คะแนน)** จงหา **ไอดีลใหญ่สุด (maximal ideal)** ของ $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_8$ พร้อมเขียนแลตทิซ

17. **(10 คะแนน)** พิจารณาอินทริกรัลโดเมน $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$

17.1 **(5 คะแนน)** จงแสดงว่า $5+\sqrt{-6}$ เป็นสมาชิก **ลดทอนไม่ได้ (irreducible)** ใน $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$

17.2 **(5 คะแนน)** จงยกตัวอย่างสมาชิกที่**ไม่ใช่ สมาชิกเฉพาะ (prime element)** ใน $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$

18. **(10 คะแนน)** ให้ $p(x) = x^2 + x + c$ และ $\mathbb{Z}_3[x]/\langle p(x)\rangle$ เป็นฟีลด์

18.1 **(5 คะแนน)** จงเลือก $c \in \mathbb{Z}_3$ ที่ทำให้ $\mathbb{Z}_3[x]/\langle p(x)\rangle$ เป็นฟีลด์อันดับ 9

18.2 **(5 คะแนน)** ใช้ $p(x)$ จาก 18.1 หา**ตัวผกผันการคูณ**ของ

$$x + \bar{1} + \langle p(x)\rangle \quad \text{ใน} \quad \mathbb{Z}_3[x]/\langle p(x)\rangle$$

มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

คณะครุศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์

เฉลยข้อสอบปลายภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2566

รหัสวิชา	ชื่อวิชา	วันเวลาสอบ	คะแนนเต็ม
MAC3310	พีชคณิตนามธรรม	เวลา 13:00 - 16:00 วันศุกร์ ที่ 3 พฤศจิกายน 2566	100 คะแนน 25%

โดย ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย

ตอนที่ 1 : (10 คะแนน) จงกากบาททับข้อที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว ข้อละ 2 คะแนน

1. ให้ $(R,+,\cdot)$ เป็นริง ข้อใดกล่าว**ไม่ถูกต้อง**

   ก. $(R,+)$ เป็นอาบีเลียนกรุป (abelian group)

   ข. $(R,\cdot)$ เป็นกึ่งกรุป (semi-group)

   ค. R มีสมบัติการแจกแจง (distributive law)

   ง. R มีเอกลักษณ์การคูณคือ 1 เรียกว่า ยูนิตี (unity) Answer

   จ. R มีเอกลักษณ์การบวกคือ 0 เรียกว่า ศูนย์ (zero)

   ตอบข้อ ง. โดยทั่วไปริงไม่จำเป็นต้องมีเอกลักษณ์การคูณหรือยูนิตี

2. ให้ R และ S เป็นริง โดยที่ $\varphi : R \to S$ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของริง (ring homomorphism) ข้อใดต่อไปนี้กล่าว**ไม่ถูกต้อง** สำหรับ $a, b \in R$

   ก. $\varphi(a^3) = [\varphi(a)]^3$

   ข. $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$

   ค. $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$

   ง. $\varphi(0_R) = 0_S$

   จ. $\varphi(1_R) = 1_S$ Answer

   ตอบข้อ จ. โดยทั่วไปริงไม่จำเป็นต้องมีเอกลักษณ์การคูณหรือยูนิตี

3. สมาชิกข้อใดต่อไปนี้ **ไม่ใช่ ตัวหารศูนย์ (zero divisor)** ของ $\mathbb{Z}_{12}$

   ก. $\bar{7}$ Answer

   ข. $\bar{6}$

   ค. $\bar{4}$

   ง. $\bar{3}$

   จ. $\bar{2}$

   ตอบข้อ ก. เนื่องจาก $\gcd(7, 12) = 1$ ดังนั้น $\bar{7}$ ไม่ใช่ตัวหารศูนย์ของ $\mathbb{Z}_{12}$

4. ข้อใดกล่าว**ไม่ถูกต้อง**

   ก. อินทิกรัลโดเมนมีสมบัติการตัดออกสำหรับการคูณ (cancellation for multiplication)

   ข. อินทิกรัลโดเมนเป็นฟีลด์ Answer

   ค. ฟีลด์เป็นอินทิกรัลโดเมน

   ง. ฟีลด์มีไอดีลเพียง 2 ไอดีลเท่านั้น

   จ. $\mathbb{Z}$ เป็นอินทิกรัลโดเมนที่ไม่เป็นฟีลด์

   ตอบข้อ ข. อินทิกรัลโดมเมนที่มี**สมาชิกจำกัดตัว**จะเป็นฟีลด์

5. ให้ $R[x]$ เป็นริงพหุนาม (polynomial ring) ข้อใดกล่าว**ถูกต้อง**

   ก. $\deg(p(x)q(x)) = \deg p(x) + \deg q(x)$ เมื่อ $p(x), q(x) \in R[x]$

   ข. ถ้า $\deg p(x) = 0$ แล้ว $p(x) = a \in R$

   ค. $6x + 6$ ลดทอนได้ (reducicble) ใน $\mathbb{Z}[x]$ Answer

   ง. $\mathbb{Z}_5[x]/\left\langle x^2 + \bar{1}\right\rangle$ เป็นฟีลด์ (field)

   จ. $\left\langle x^2 + \bar{1}\right\rangle$ เป็นไอดีลใหญ่สุด (maximal ideal) ใน $\mathbb{Z}_{10}[x]$

   ตอบข้อ ค. เนื่องจาก

   $$6x + 6 = 6(x + 1)$$

   ซึ่ง 6 และ $x + 1$ ไม่ใช่หน่วยใน ดังนั้น $6x + 6$ ลดทอนได้ใน $\mathbb{Z}[x]$

ตอนที่ 2 : (10 คะแนน) จงเติมคำตอบในช่องว่าง (ด้านซ้ายบน) ให้ถูกต้อง ข้อละ 2 คะแนน

6. **ตอบ** 428

จงหา**จำนวนตัวหารศูนย์**ของ $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{121}$

แนวคำตอบ เนื่องจาก $\gcd(9, 121) = 1$ ดังนั้น $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{121} \cong \mathbb{Z}_{9\times 121}$ นั่นคือ $n = 9 \times 121$ มีจำนวนตัวหารศูนย์เท่ากับ

$$\begin{aligned}(n-1)-\phi(n) &= (9\times 121 - 1) - \phi(9\times 121)\\ &= 1088 - (3^2-3^1)(11^2-11^1)\\ &= 1088 - 6(110)\\ &= 428 \quad \#\end{aligned}$$

7. **ตอบ** 4

จงหาจำนวนไอดีลทั้งหมด**ที่ไม่ใช่**ไอดีลใหญ่สุดของ $\mathbb{Z}_{2023}$

แนวคำตอบ เนื่องจาก

$$\tau(2023) = \tau(7\cdot 17^2) = (1+1)(2+1) = 6$$

จะได้ว่ามีไอดีสทั้งหมด 6 ไอดีล โดยมี $\langle \bar{7}\rangle$ และ $\langle \overline{17}\rangle$ เป็นไอดีลใหญ่สุด ดังนั้นไอดีลทั้งหมด**ที่ไม่ใช่**ไอดีลใหญ่สุดของ $\mathbb{Z}_{2023}$ เท่ากับ $6-2=4$ ไอดีล $\#$

8. **ตอบ** 5

จงหา n ที่ทำให้ $\varphi : \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_{3n+10}$ เป็น **ฟังก์ชันสมสัณฐาน (isomorphism)**

แนวคำตอบ จะได้ว่า $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{3n+10}$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}5\times n &= 3n+10\\ 2n &= 10\\ n &= 5 \quad \#\end{aligned}$$

9. **ตอบ** 80

จงหา**จำนวนพหุนามที่มี ระดับขั้น (degree) ไม่เกิน** 3 ใน $\mathbb{Z}_3[x]$

แนวคำตอบ พิจารณาพหุนาม $ax^3 + bx^2 + cx + d$ โดยที่ $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_3$ ดังนั้นจำนวนพหุนามที่มี ระดับขั้น (degree) ไม่เกิน 3 ใน $\mathbb{Z}_3[x]$ เท่ากับ

$$3\times 3\times 3\times 3 - 1 = 3^4 - 1 = 81 - 1 = 80 \quad \#$$

10. **ตอบ** 25

$\mathbb{Z}_5[x]/\langle x^2+\bar{2}\rangle$ เป็น**ฟีลด์อันดับ**ที่เท่าใด

แนวคำตอบ จะเห็นว่า $p = 5$ และ $n = \deg(x^2+\bar{1}) = 2$ ดังนั้น $\mathbb{Z}_5[x]/\langle x^2+\bar{2}\rangle$ เป็นฟีลด์อันดับ

$$p^n = 5^2 = 25 \quad \#$$

ตอนที่ 3 : (80 คะแนน) จงแสดงวิธีโดยละเอียด ข้อละ 10 คะแนน

11. **(10 คะแนน)** กำหนดให้ $\varphi : (\mathbb{Z}, +) \to (GL_2(\mathbb{R}), \cdot)$ นิยามโดย

$$\varphi(x) = \begin{bmatrix} 2^x & 0 \\ 0 & 2^x \end{bmatrix}$$

11.1 **(5 คะแนน)** จงตรวจสอบว่า φ เป็น **ฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน (homomorphism)** หรือไม่

แนวคำตอบ ให้ $x, y \in \mathbb{Z}$ จะได้ว่า

$$\varphi(x+y) = \begin{bmatrix} 2^{x+y} & 0 \\ 0 & 2^{x+y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^x \cdot 2^y & 0 \\ 0 & 2^x \cdot 2^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^x & 0 \\ 0 & 2^x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^y & 0 \\ 0 & 2^y \end{bmatrix} = \varphi(x)\varphi(y)$$

ดังนั้น φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน

11.2 **(3 คะแนน)** จงหา $Ker(\varphi)$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned} Ker(\varphi) &= \left\{ x \in \mathbb{Z} : \varphi(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{Z} : \begin{bmatrix} 2^x & 0 \\ 0 & 2^x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} : 2^x = 1\} = \{0\} \end{aligned}$$

11.3 **(2 คะแนน)** มี $x \in \mathbb{Z}$ ที่ทำให้

$$\varphi(x+2) = \varphi(x) + \varphi(2)$$

หรือไม่เพราะเหตุใด

แนวคำตอบ สมมติว่ามีจำนวนเต็ม x ซึ่ง

$$\begin{bmatrix} 2^{x+2} & 0 \\ 0 & 2^{x+2} \end{bmatrix} = \varphi(x+2) = \varphi(x) + \varphi(2) = \begin{bmatrix} 2^x & 0 \\ 0 & 2^x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{bmatrix}$$

ทำให้ได้ว่า $2^{x+2} = 2^x + 2^2$ นั่นคือ

$$\begin{aligned} 2^2 \cdot 2^x &= 2^x + 4 \\ 4 \cdot 2^x - 2^x &= 4 \\ 3 \cdot 2^x &= 4 \end{aligned}$$

จะได้ว่า $3 \mid 4$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ ดังนั้นไม่มีจำนวนเต็ม x ที่ทำให้ $\varphi(x+2) = \varphi(x) + \varphi(2)$

12. **(10 คะแนน)** ให้ G_1 และ G_2 เป็นกรุป โดยที่ $\varphi : G_1 \to G_2$ เป็นฟังก์**ชันสมสัณฐาน (isomorphism)** ให้ $K \trianglelefteq G_1$ และนิยาม

$$N = \{\varphi(k) : k \in K\}$$

12.1 **(5 คะแนน)** จงแสดงว่า $N \leq G_2$ (N เป็นกรุปย่อย G_2)

แนวคำตอบ เนื่องจาก $e_1 \in G_1$ และ $\varphi(e_1) = e_2 \in G_2$ จะได้ว่า $\varphi(e_1) \in N$ นั่นคือ $N \neq \varnothing$ ให้ $a, b \in N$ จะได้ว่ามี $k_1, k_2 \in K$ ซึ่ง $\varphi(k_1) = a$ และ $\varphi(k_2) = b$ แล้ว

$$\begin{aligned} ab^{-1} &= \varphi(k_1)[\varphi(k_2)]^{-1} \\ &= \varphi(k_1)\varphi(k_2^{-1}) \\ &= \varphi(k_1k_2^{-1}) \end{aligned}$$

เนื่องจาก $k_1k_2^{-1} \in K$ (เพราะว่า $K \leq G_1$) ดังนั้น $ab^{-1} = \varphi(k_1k_2^{-1}) \in N$ สรุปได้ว่า $N \leq G_2$

12.2 **(5 คะแนน)** จงแสดงว่า $N \trianglelefteq G_2$ (N เป็นกรุปย่อยปกติ G_2)

แนวคำตอบ ให้ $g_2 \in G_2$ จะได้ว่ามี $g_1 \in G_1$ ซึ่ง $\varphi(g_1) = g_2$ (เนื่องจาก φ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง) ให้ $x \in g_2Ng_2^{-1}$ จะได้ว่ามี $n \in N$ ซึ่ง $x = g_2ng_2^{-1}$ ฉะนั้นมี $k \in K$ ซึ่ง $\varphi(k) = n$ ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} x &= \varphi(g_1)\varphi(k)[\varphi(g_1)]^{-1} \\ &= \varphi(g_1)\varphi(k)\varphi(g_1^{-1}) \\ &= \varphi(g_1kg_1^{-1}) \end{aligned}$$

เนื่องจาก $g_1kg_1^{-1} \in K$ (เพราะว่า $K \trianglelefteq G_1$) ดังนั้น $x = \varphi(g_1kg_1^{-1}) \in N$ สรุปได้ว่า $N \trianglelefteq G_2$

13. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

13.1 **(5 คะแนน)** ให้ $(R,+,\cdot)$ เป็น**ริง (ring)** ถ้านิยามการคูณใหม่ สำหรับ $x \in R$

$$a \odot b = ax^2b \qquad \text{เมื่อ } a,b \in R$$

จงแสดงว่า $(R,+,\odot)$ เป็นริงด้วย (ax^2b หมายถึง $a \cdot x \cdot x \cdot b$)

แนวคำตอบ เนื่องจาก $(R,+)$ เป็นอาบีเลียนกรุป เพียงพอที่จะเป็นพิสูจน์ว่า $(R,\odot)$ เป็นกึงกรุป และมีสมบัติการแจกแจง

ให้ $a,b,c \in R$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} a \odot (b \odot c) &= a \odot (bx^2c) \\ &= ax^2(bx^2c) \\ &= (ax^2b)x^2c \\ &= (ax^2b) \odot c \\ &= (a \odot b) \odot c \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} a \odot (b+c) = ax^2(b+c) = ax^2b + ax^2c = a \odot b + a \odot c \\ (b+c) \odot a = (b+c)x^2a = bx^2a + cx^2a = b \odot a + c \odot a \end{aligned}$$

ดังนั้น $(R,+,\odot)$ เป็นริง

13.2 **(5 คะแนน)** กำหนดให้

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x & y & z \\ 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 \end{bmatrix} : a,b,x,y,z \in \mathbb{R} \right\}$$

จงตรวจสอบว่า S เป็น **ริงย่อย (subring)** ของ $M_{33}(\mathbb{R})$ หรือไม่

แนวคำตอบ ให้ $a,b,x,y,z,s,t,u,v,w \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} x & y & z \\ 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s & t & u \\ 0 & v & 0 \\ 0 & w & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-s & y-t & z-u \\ 0 & a-v & 0 \\ 0 & b-w & 0 \end{bmatrix} \in S$$

$$\begin{bmatrix} x & y & z \\ 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & t & u \\ 0 & v & 0 \\ 0 & w & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xs & xtyv+zw & xu \\ 0 & av & 0 \\ 0 & bw & 0 \end{bmatrix} \in S$$

ดังนั้น S เป็นริงย่อยของ $M_{33}(\mathbb{R})$

14. **(10 คะแนน)** กำหนดให้

$$I = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & x & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & z & 0 \end{bmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

จงตรวจสอบว่า

14.1 **(4 คะแนน)** I เป็น **ไอดีลขวา (right ideal)** ของ $M_{33}(\mathbb{R})$ หรือไม่

แนวคำตอบ ให้ $x, y, z, a, b, c, d, e, f, g, h, t \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \notin I$$

ดังนั้น I ไม่เป็นไอดีลขวาของ $M_{33}(\mathbb{R})$

14.2 **(4 คะแนน)** I เป็น **ไอดีลซ้าย (left ideal)** ของ $M_{33}(\mathbb{R})$ หรือไม่

แนวคำตอบ ให้ $x, y, z, a, b, c, d, e, f, g, h, t \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & x & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & z & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & ax+by+cz & 0 \\ 0 & dx+ey+fz & 0 \\ 0 & gx+hy+tz & 0 \end{bmatrix} \in I$$

ดังนั้น I เป็นไอดีลซ้ายของ $M_{33}(\mathbb{R})$

14.3 **(2 คะแนน)** I เป็น **ไอดีล (ideal)** ของ $M_{33}(\mathbb{R})$ หรือไม่

แนวคำตอบ เนื่องจาก I ไม่เป็นไอดีลขวา จากข้อ 14.1 สรุปได้ว่า I ไม่เป็นไอดีลของ $M_{33}(\mathbb{R})$

15. **(10 คะแนน)** ให้ p และ q เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่

$$\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_{q^2} \quad \text{มีจำนวนตัวหารศูนย์เท่ากับ 59 ตัว}$$

จงหาจำนวนตัวหารศูนย์ของ $\mathbb{Z}_{p+q}$

แนวคำตอบ สมมติว่า $p = q$ ตัวหารศูนย์ของ $\mathbb{Z}_{p^2}$ คือ $\bar{p}$ จะได้ว่า

ตัวหารศูนย์	เงื่อนไข	จำนวนตัวหารศูนย์
$(\bar{0}, \bar{x})$	$x = 1, 2, 3, ..., p^2 - 1$	$p^2 - 1$
$(\bar{x}, \bar{0})$	$x = 1, 2, 3, ..., p^2 - 1$	$p^2 - 1$
$(\bar{p}, \bar{x})$	$x = 1, 2, 3, ..., p^2 - 1$	$p^2 - 1$
$(\bar{x}, \bar{p})$	$x = 1, 2, 3, ..., p^2 - 1$	$p^2 - 1$

จะได้ว่าจำนวนตัวหารศูนย์ของ $\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_{q^2}$ เท่ากับ $4(p^2 - 1) = 59$ จะได้ว่า $4 \mid 59$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ ดังนั้น $p \neq q$ ฉะนั้น $\gcd(p, q) = 1$ จำนวนตัวหารศุนย์ของ $\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_{q^2}$ เท่ากับ

$$\begin{aligned}
(p^2q^2 - 1) - \phi(p^2q^2) &= 59 \\
p^2q^2 - 1 - (p^2 - p)(q^2 - q) &= 59 \\
p^2q^2 - 1 - (p^2q^2 - p^2q - q^2p + pq) &= 59 \\
pq(p + q - 1) &= 60 = 10 \cdot 6 = 15 \cdot 4
\end{aligned}$$

จะได้ว่า $1 < p, q < 6$ พิจารณาค่าจากตาราง

p	q	$pq(p+q-1)$
2	3	24
2	5	60
3	5	105

ดังนั้น $p = 2$ และ $q = 5$ หรือ $p = 5$ และ $q = 2$ ทำให้ได้ว่า $p + q = 7$
ดังนั้นจำนวนจำนวนตัวหารศูนย์ของ $\mathbb{Z}_{p+q} = \mathbb{Z}_7$ เท่ากับ

$$(7 - 1) - \phi(7) = 6 - 6 = 0 \quad \#$$

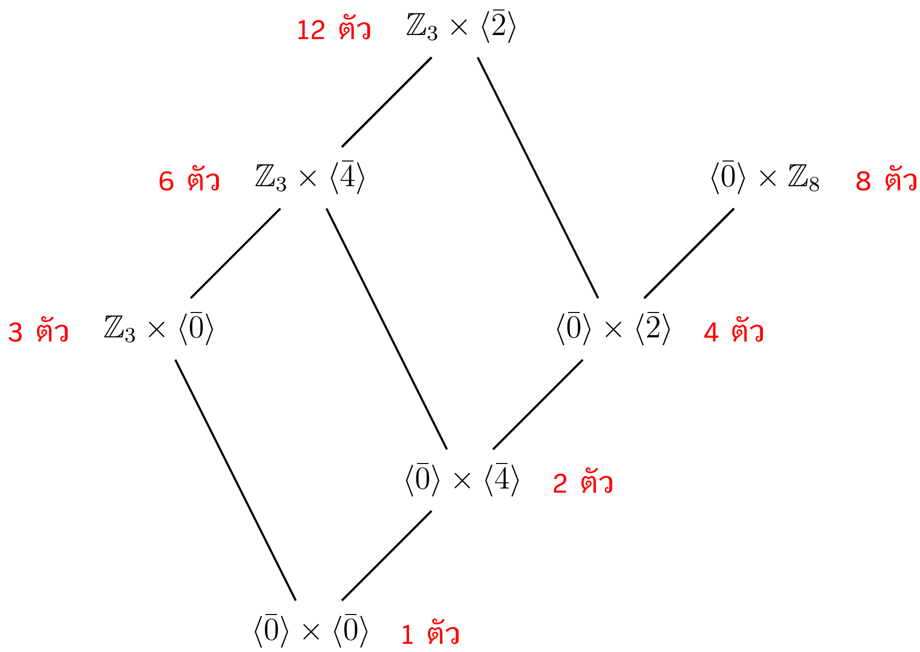
16. **(10 คะแนน)** จงหา **ไอดีลใหญ่สุด (maximal ideal)** ของ $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_8$ พร้อมเขียนแลตทิซ

แนวคำตอบ ไอดีสของ $\mathbb{Z}_3$ คือ $\langle\bar{0}\rangle, \mathbb{Z}_3$ และ ไอดีสของ $\mathbb{Z}_8$ คือ $\langle\bar{0}\rangle, \langle\bar{2}\rangle, \langle\bar{4}\rangle, \mathbb{Z}_8$

ไอดีลทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_6$ คือ

$$\begin{array}{cccc} \langle\bar{0}\rangle \times \langle\bar{0}\rangle & \langle\bar{0}\rangle \times \langle\bar{2}\rangle & \langle\bar{0}\rangle \times \langle\bar{4}\rangle & \langle\bar{0}\rangle \times \mathbb{Z}_8 \\ \mathbb{Z}_3 \times \langle\bar{0}\rangle & \mathbb{Z}_3 \times \langle\bar{2}\rangle & \mathbb{Z}_3 \times \langle\bar{4}\rangle & \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_8 \end{array}$$

เขียนแลตทิซโดยไม่มีไอดีส $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_8$ ได้ดังรูป



จากแผนภาพจะได้ว่า $\mathbb{Z}_3 \times \langle\bar{2}\rangle$ และ $\langle\bar{0}\rangle \times \mathbb{Z}_8$ เป็นไอดีลใหญ่สุดของ $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_8$

17. **(10 คะแนน)** พิจารณาอินทริกรัลโดเมน $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$

17.1 **(5 คะแนน)** จงแสดงว่า $5+\sqrt{-6}$ เป็นสมาชิก **ลดทอนไม่ได้ (irreducible)** ใน $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$

แนวคำตอบ ห้ $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ โดยที่ $5+\sqrt{-6}=(a+b\sqrt{-6})(c+d\sqrt{-6})$ จะได้ว่า

$$(ac-6bd)+(ad+bc)\sqrt{-6}=5+\sqrt{-6}$$

ดังนั้น $ac-6bd=5$ และ $ad+bc=1$ แล้ว

$$(a-b\sqrt{-6})(c-d\sqrt{-6})=(ac-6bd)-(bc+ad)\sqrt{-6}=5-\sqrt{-6}$$

ฉะนั้น

$$\begin{aligned}(a^2+6b^2)(c^2+6d^2)&=(a+b\sqrt{-6})(c+d\sqrt{-6})(a-b\sqrt{-6})(c-d\sqrt{-6})\\&=(5+\sqrt{-6})(5-\sqrt{-6})\\&=5^2+6=31=1\cdot 31 \qquad \text{(เป็นจำนวนเฉพาะ)}\end{aligned}$$

นั่นคือ $a^2+6b^2=1$ และ $c^2+6d^2=31$ หรือ $a^2+6b^2=31$ และ $c^2+6d^2=1$
จะได้ว่า $a+b\sqrt{-6}$ หรือ $c+d\sqrt{-6}$ เป็นหน่วย สรุปได้ว่า $5+\sqrt{-6}$ เป็นสมาชิกลดทอนไม่ได้ใน $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$

17.2 **(5 คะแนน)** จงยกตัวอย่างสมาชิกที่**ไม่ใช่ สมาชิกเฉพาะ (prime element)** ใน $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$

แนวคำตอบ จะเห็นว่า

$$31\cdot 1=31=(5+\sqrt{-6})(5-\sqrt{-6})$$

จะได้ว่า $31 \mid (5+\sqrt{-6})(5-\sqrt{-6})$
สมมติว่า $31 \mid (5+\sqrt{-6})$ จะได้ว่ามี $x,y\in\mathbb{Z}$ ซึ่ง

$$\begin{aligned}31(x+y\sqrt{-6})&=5+\sqrt{-6}\\31x+31y\sqrt{-6}&=5+\sqrt{-6}\end{aligned}$$

ทำให้ได้ว่า $31x=5$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้เพราะว่า $x\in\mathbb{Z}$ ดังนั้น $31\nmid(5+\sqrt{-6})$
ในทำนองเดียวกัน $31\nmid(5-\sqrt{-6})$
สรุปได้ว่า 31 ไม่เป็นสมาชิกเฉพาะของ $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$

18. **(10 คะแนน)** ให้ $p(x) = x^2 + x + c$ และ $\mathbb{Z}_3[x]/\langle p(x)\rangle$ เป็นฟีลด์

18.1 **(5 คะแนน)** จงเลือก $c \in \mathbb{Z}_3$ ที่ทำให้ $\mathbb{Z}_3[x]/\langle p(x)\rangle$ เป็นฟีลด์อันดับ 9

แนวคำตอบ สมมติว่า $p(x) = x^2 + cx + \bar{1}$ ลดทอนได้ใน $\mathbb{Z}_3[x]$ จะได้ว่ามี $a, b \in \mathbb{Z}_3$ ซึ่ง

$$x^2 + x + c = (x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

นั่นคือ $a + b = \bar{1}$ และ $ab = c$ พิจารณาค่าที่เป็นไปได้จากตาราง

a	b	$a+b$	$ab=c$
$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$

จากตารางจะเห็นได้ว่า $ab \neq \bar{2}$ จะทำให้เกิดข้อขัดแย้งเมื่อ $ab = \bar{2}$ ดังนั้นเลือก $c = \bar{2}$
จะทำให้ได้ว่า $p(x) = x^2 + x + \bar{2}$ ลดทอนไม่ได้ใน $\mathbb{Z}_3[x]$
โดยทฤษฎีบทจะสรุปได้ว่า $\mathbb{Z}_3[x]/\langle p(x)\rangle$ เป็นฟีลด์อันดับ $3^2 = 9$

18.2 **(5 คะแนน)** ใช้ $p(x)$ จาก 18.1 หา**ตัวผกผันการคูณ**ของ

$$x + \bar{1} + \langle p(x)\rangle \quad \text{ใน} \quad \mathbb{Z}_3[x]/\langle p(x)\rangle$$

แนวคำตอบ สำหรับ $p(x) = x^2 + x + \bar{2}$ ให้ $a, b \in \mathbb{Z}_3$

$$\begin{aligned}
(ax + b + \left\langle x^2 + x + \bar{2}\right\rangle)(x + \bar{1} + \left\langle x^2 + x + \bar{2}\right\rangle) &= \bar{1} + \left\langle x^2 + x + \bar{2}\right\rangle \\
(ax+b)(x+\bar{1}) + \left\langle x^2 + x + \bar{2}\right\rangle &= \bar{1} + \left\langle x^2 + x + \bar{2}\right\rangle \\
ax^2 + ax + bx + b + \left\langle x^2 + x + \bar{2}\right\rangle &= \bar{1} + \left\langle x^2 + x + \bar{2}\right\rangle \\
a(x^2 + x + \bar{2}) - \bar{2}a + bx + b + \left\langle x^2 + x + \bar{2}\right\rangle &= \bar{1} + \left\langle x^2 + x + \bar{2}\right\rangle \\
bx + (b - \bar{2}a) + \left\langle x^2 + x + \bar{2}\right\rangle &= \bar{1} + \left\langle x^2 + x + \bar{2}\right\rangle
\end{aligned}$$

จะได้ว่า $b = \bar{0}$ และ $\bar{0} - \bar{2}a = b - \bar{2}a = \bar{1}$ นั่นคือ

$$\bar{2}a = -\bar{1} = \bar{2} \quad \longrightarrow \quad a = \bar{1}$$

ดังนั้น $x + \left\langle x^2 + x + \bar{2}\right\rangle$ เป็นตักผกผันของ $x + \bar{1} + \langle x^2 + x + \bar{2}\rangle$ ใน $\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2 + x + \bar{2}\rangle$