มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
คณะครุศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ข้อสอบปลายภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2567

รหัสวิชา	**ชื่อวิชา**	**วันเวลาสอบ**	**คะแนนเต็ม**
MAC3310	พีชคณิตนามธรรม	เวลา 15:00 - 18:00 วันศุกร์ ที่ 1 พฤศจิกายน 2567	100 คะแนน 25%

ชื่อ-สกุล... **รหัสนักศึกษา**................................ **หมู่เรียน**................

คำชี้แจง

1. ข้อสอบมี 18 ข้อ 13 หน้า แบ่งออกเป็น 3 ตอน ประกอบด้วย
   - **ตอนที่** 1 ข้อสอบแบบ 5 ตัวเลือก จำนวน 5 ข้อ (ข้อละ 2 คะแนน รวม 10 คะแนน)
   - **ตอนที่** 2 ข้อสอบแบบเติมคำตอบ จำนวน 5 ข้อ (ข้อละ 2 คะแนน รวม 10 คะแนน)
   - **ตอนที่** 3 ข้อสอบแบบแสดงวิธีทำ จำนวน 8 ข้อ (ข้อละ 10 คะแนน รวม 80 คะแนน)
2. เขียนรหัสนักศึกษา และหมู่เรียนด้วย**ตัวบรรจงลงในข้อสอบทุกหน้า**
3. ไม่อนุญาตให้ใช้เครื่องคำนวณและเครื่องมือสื่อสาร
4. **ห้าม**นำข้อสอบออกจากห้องสอบโดยเด็ดขาด
5. หากมี**การทุจริต**ในการสอบ จะได้รับการลงโทษตามระเบียบของมหาวิทยาลัย

ข้าพเจ้าจะปฏิบัติตามข้อตกลงอย่างเคร่งครัด
ลงชื่อผู้เข้าสอบ

....

อาจารย์ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย

ตอนที่	1	2	3								รวม
ข้อ	1-5	6-10	11	12	13	14	15	16	17	18	
คะแนน											

ตอนที่ 1 : (10 คะแนน) จงกากบาททับข้อที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว ข้อละ 2 คะแนน

1. ให้ G_1 และ G_2 เป็นกรุป โดยที่ $\varphi : G_1 \to G_2$ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน (homomorphism) ข้อใดต่อไปนี้กล่าว**ไม่ถูกต้อง** เมื่อ $x, y \in G_1$ โดยที่ e_1 และ e_2 เป็นเอกลักษณ์ของ G_1 และ G_2 ตามลำดับ

   ก. $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$

   ข. $\varphi(x^2) = [\varphi(x)]^2$

   ค. $\varphi(e_1) = e_2$

   ง. $\varphi(x^{-1}) = [\varphi(x)]^{-1}$

   จ. $\varphi(x^{-1}) = \varphi^{-1}(x)$

2. ให้ G_1 และ G_2 เป็น**กรุปจำกัด** โดยที่ $G_1 \cong G_2$ ข้อใดต่อไปนี้กล่าว**ถูกต้อง**

   ก. $|G_1| > |G_2|$

   ข. $|G_1| < |G_2|$

   ค. $G_1 \times G_2 \cong G_2 \times G_1$

   ง. $G_1 \leq G_2$

   จ. $G_2 \leq G_1$

3. กำหนดให้ F เป็นฟิลด์ (field) ข้อใดต่อไปนี้กล่าว**ไม่ถูกต้อง**

   ก. สมาชิกทุกตัวใน F เป็นหน่วย (unit)

   ข. F เป็นริงที่มี 1

   ค. F เป็นริงสลับที่

   ง. F เป็นอินทิกรัลโดเมน

   จ. ไอดีลของ F มีเพียง 2 ไอดีลเท่านั้น

4. สมาชิกข้อใดต่อไปนี้เป็น **ตัวหารศูนย์ (zero divisor)** ของ $\mathbb{Z}_{20}$

   ก. $\bar{3}$

   ข. $\bar{5}$

   ค. $\bar{7}$

   ง. $\overline{11}$

   จ. $\overline{13}$

5. ให้ F เป็นฟิลด์ (field) และ $p(x)$ เป็นสมาชิกที่ลดทอนไม่ได้ (irreducible) ใน $F[x]$
   ข้อใดต่อไปนี้กล่าว**ไม่ถูกต้อง**

   ก. $x + \langle p(x) \rangle$ เป็นหน่วย (unit) ใน $F[x]/\langle p(x) \rangle$

   ข. $\langle p(x) \rangle$ เป็นศูนย์ (zero) ใน $F[x]/\langle p(x) \rangle$

   ค. $F[x]$ เป็นอินทิกรัลโดเมน

   ง. $F[x]$ เป็นฟิลด์

   จ. $F[x]/\langle p(x) \rangle$ เป็นฟิลด์

ตอนที่ 2 : (10 คะแนน) จงเติมคำตอบในช่องว่าง (ด้านซ้ายบน) ให้ถูกต้อง ข้อละ 2 คะแนน

6. ______________________

ถ้า $\mathbb{Z}_{35} \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{p-2}$ แล้ว p มีค่าเท่าใด

7. ______________________

จงหาจำนวน **ริงย่อย (subring)** ทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_7$

8. ________________________

จงหาจำนวนไอดีล (ideal) ทั้งหมดที่**ไม่ใช่**ไอดีลใหญ่สุด (maximal ideal) ของ $\mathbb{Z}_{2024}$

9. ________________________

จงหาจำนวน **ตัวหารศูนย์ (zero divisor)** ทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_{2025}$

10. ________________________

จงหา**จำนวนพหุนามที่มี ระดับขั้น (degree) ไม่เกิน** 2 ใน $\mathbb{Z}_4[x]$

ตอนที่ 3 : (80 คะแนน) จงแสดงวิธีโดยละเอียด ข้อละ 10 คะแนน

11. **(10 คะแนน)** กำหนดให้ $\varphi : (\mathbb{R}, +) \to (GL_2(\mathbb{R}), \cdot)$ นิยามโดย

$$\varphi(x) = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}$$

11.1 **(5 คะแนน)** จงตรวจสอบว่า φ เป็น **ฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน (homomorphism)** หรือไม่

11.2 **(3 คะแนน)** จงหา $Ker(\varphi)$

11.3 **(2 คะแนน)** สำหรับ $x \in \mathbb{R}$ จงแสดงว่า

$$\varphi(x + \pi) = -\varphi(x)$$

12. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

12.1 **(5 คะแนน)** ให้ G_1 และ G_2 เป็นกรุป โดยที่ $\varphi : G_1 \to G_2$ เป็น**ฟังก์ชันสมสัณฐาน (isomorphism)** จงพิสูจน์ว่า

ถ้า G_1 เป็นกรุปวัฏจักร (cyclic group) แล้ว G_2 เป็นกรุปวัฏจักร

12.2 **(5 คะแนน)** ให้ มีการดำเนินการทวิภาคที่นิยามโดย

$$a \oplus b = a + 2b$$
$$a \odot b = 2ab$$

จงตรวจสอบว่า $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ **มีสมบัติการแจกแจง (distributive law)** หรือไม่

13. **(10 คะแนน)** พิจารณาริง $M_{33}(\mathbb{R})$ กำหนดให้

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$$

13.1 **(4 คะแนน)** จงตรวจสอบว่า S เป็น **ริงย่อย (subring)** ของ $M_{33}(\mathbb{R})$ หรือไม่

13.2 **(3 คะแนน)** จงตรวจสอบว่า S เป็น **ไอดีลขวา (right ideal)** ของ $M_{33}(\mathbb{R})$ หรือไม่

13.3 **(3 คะแนน)** จงตรวจสอบว่า S เป็น **ไอดีลซ้าย (left ideal)** ของ $M_{33}(\mathbb{R})$ หรือไม่

14. **(10 คะแนน)** กำหนดให้ $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{21}$ นิยามโดย

$$\varphi(x) = \overline{7x^3}$$

14.1 **(5 คะแนน)** จงตรวจสอบว่า φ เป็น **ฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของริง (ring homomorphism)** หรือไม่

14.2 **(3 คะแนน)** จงหา $Ker(\varphi)$

14.3 **(2 คะแนน)** จงใช้ทฤษฎีบทสมสัณฐานของริงบทที่ 1 (first ring isomorphism theorem)

$$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong \{\bar{0}, \bar{7}, \overline{14}\}$$

15. **(10 คะแนน)** จงหา **ไอดีลใหญ่สุด (maximal ideal)** ของ $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9$ พร้อมเขียนแลตทิซ

16. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

16.1 **(5 คะแนน)** ให้ p และ q เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่ $p > q$ ถ้า

$\mathbb{Z}_{pq}$ มีสมาชิกที่ **ไม่ใช่ตัวหารศูนย์ (non-zero divisor)** ทั้งหมด $pq - 11$ ตัว

แล้วจำนวนตัวหารศูนย์ใน $\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_{q^2}$ มีกี่ตัว

16.2 **(5 คะแนน)** จงแสดงว่า $3 - \sqrt{-2}$ เป็นสมาชิก **ลดทอนไม่ได้ (irreducible)** ใน $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$

17. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

17.1 **(5 คะแนน)** จงแสดงว่า 2 **ไม่เป็น สมาชิกเฉพาะ (prime element)** ใน $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$

17.2 **(5 คะแนน)** ให้ $p(x) = x^2 + x + a$ และ $q(x) = x^4 + \bar{2}x^3 + x^2$ เป็นพหุนาม $\mathbb{Z}_4[x]$ จงหา $a \in \mathbb{Z}_4$ ที่ทำให้

$$[p(x)]^2 = q(x)$$

18. **(10 คะแนน)** ให้ $p(x) = x^2 + c$ และ $\mathbb{Z}_5[x]/\langle p(x)\rangle$ เป็นฟีลด์

18.1 **(5 คะแนน)** จงเลือก $c \in \mathbb{Z}_5$ ที่ทำให้ $\mathbb{Z}_5[x]/\langle p(x)\rangle$ เป็นฟีลด์อันดับ 25

18.2 **(5 คะแนน)** ใช้ $p(x)$ จาก 18.1 (เพียงตัวเดียว) หา**ตัวผกผันการคูณ**ของ

$$x + \langle p(x)\rangle \quad \text{ใน} \quad \mathbb{Z}_5[x]/\langle p(x)\rangle$$

มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
คณะครุศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์
เฉลยข้อสอบปลายภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2567

รหัสวิชา	ชื่อวิชา	วันเวลาสอบ	คะแนนเต็ม
MAC3310	พีชคณิตนามธรรม	เวลา 15:00 - 18:00 วันศุกร์ ที่ 1 พฤศจิกายน 2567	100 คะแนน 25%

โดย ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย

ตอนที่ 1 : (10 คะแนน) จงกากบาททับข้อที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว ข้อละ 2 คะแนน

1. ให้ G_1 และ G_2 เป็นกรุป โดยที่ $\varphi : G_1 \to G_2$ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน (homomorphism) ข้อใดต่อไปนี้กล่าว**ไม่ถูกต้อง** เมื่อ $x, y \in G_1$ โดยที่ e_1 และ e_2 เป็นเอกลักษณ์ของ G_1 และ G_2 ตามลำดับ

   ก. $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$

   ข. $\varphi(x^2) = [\varphi(x)]^2$

   ค. $\varphi(e_1) = e_2$

   ง. $\varphi(x^{-1}) = [\varphi(x)]^{-1}$

   จ. $\varphi(x^{-1}) = \varphi^{-1}(x)$ Answer

   ตอบข้อ จ.

   ก. ถูกต้อง เพราะเป็นนิยามของฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน

   ข. ถูกต้อง เนื่องจาก $\varphi(x^2) = \varphi(x \cdot x) = \varphi(x)\varphi(x) = [\varphi(x)]^2$

   ค. ถูกต้อง เพราะเป็นสมบัติของฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน

   ง. ถูกต้อง เพราะเป็นสมบัติของฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน

   จ. ไม่ถูกต้อง เนื่องจาก φ อาจไม่ใช่ฟังก์ชัน 1-1 ฉะนั้น φ^{-1} ไม่จำเป็นต้องเป็นฟังก์ชัน นั่นคือ $\varphi^{-1}(x)$ อาจหาค่าไม่ได้

2. ให้ G_1 และ G_2 เป็น**กรุปจำกัด** โดยที่ $G_1 \cong G_2$ ข้อใดต่อไปนี้กล่าว**ถูกต้อง**

   ก. $|G_1| > |G_2|$

   ข. $|G_1| < |G_2|$

   ค. $G_1 \times G_2 \cong G_2 \times G_1$ Answer

   ง. $G_1 \leq G_2$

   จ. $G_2 \leq G_1$

   ตอบข้อ ค. เนื่องจาก $G_1 \cong G_2$ จะได้ว่ามีฟังก์ชัน $\varphi : G_1 \to G_2$ หนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึง ดังนั้น $|G_1| = |G_2|$ จะได้ว่า $G_1 \times G_2 \cong G_2 \times G_1$ เนื่องจากเป็นสมบัติของสมสัณฐาน

3. กำหนดให้ F เป็นฟิลด์ (field) ข้อใดต่อไปนี้กล่าว**ไม่ถูกต้อง**

   ก. สมาชิกทุกตัวใน F เป็นหน่วย (unit) Answer

   ข. F เป็นริงที่มี 1

   ค. F เป็นริงสลับที่

   ง. F เป็นอินทิกรัลโดเมน

   จ. ไอดีลของ F มีเพียง 2 ไอดีลเท่านั้น

   ตอบข้อ ก. เนื่องจาก F เป็นฟิลด์ จะได้ว่าเป็นริงสลับที่ที่มียูนิตี โดยที่สมาชิกทุกตัวใน F เป็นหน่วย (unit) ยกเว้นศูนย์

4. สมาชิกข้อใดต่อไปนี้เป็น **ตัวหารศูนย์ (zero divisor)** ของ $\mathbb{Z}_{20}$

   ก. $\bar{3}$

   ข. $\bar{5}$ Answer

   ค. $\bar{7}$

   ง. $\overline{11}$

   จ. $\overline{13}$

   ตอบข้อ ข. ตัวหารศูนย์ใน $\mathbb{Z}_{20}$ คือสมาชิก a ที่ $\gcd(a, 20) \neq 1$

5. ให้ F เป็นฟิลด์ (field) และ $p(x)$ เป็นสมาชิกที่ลดทอนไม่ได้ (irreducible) ใน $F[x]$
   ข้อใดต่อไปนี้กล่าว**ไม่ถูกต้อง**

   ก. $x + \langle p(x) \rangle$ เป็นหน่วย (unit) ใน $F[x]/\langle p(x) \rangle$

   ข. $\langle p(x) \rangle$ เป็นศูนย์ (zero) ใน $F[x]/\langle p(x) \rangle$

   ค. $F[x]$ เป็นอินทิกรัลโดเมน

   ง. $F[x]$ เป็นฟิลด์ Answer

   จ. $F[x]/\langle p(x) \rangle$ เป็นฟิลด์

   ตอบข้อ ง. เนื่องจาก $F[x]$ ไม่จำเป็นต้องเป็นฟิลด์ เป็นแค่อินทิกรัลโดเมน

ตอนที่ 2 : (10 คะแนน) จงเติมคำตอบในช่องว่าง (ด้านซ้ายบน) ให้ถูกต้อง ข้อละ 2 คะแนน

6. ตอบ 7

ถ้า $\mathbb{Z}_{35} \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{p-2}$ แล้ว p มีค่าเท่าใด

แนวคำตอบ จะได้ว่า $\gcd(p, p-2) = 1$ และ $|\mathbb{Z}_{35}| = |\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{p-2}|$ นั่นคือ

$$\begin{aligned} 35 &= p(p-2) \\ 0 &= p^2 - 2p \\ 0 &= p^2 - 2p - 35 = (p-7)(p+5) \qquad \therefore p = -5, 7 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $p > 2$ ดังนั้น $p = 7$

7. ตอบ 8

จงหาจำนวน **ริงย่อย (subring)** ทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_7$

แนวคำตอบ เนื่องจาก $\gcd(6, 7) = 1$ ฉะนั้น $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_7 \cong \mathbb{Z}_{6\cdot 7}$ จำนวนริงย่อยทั้งหมด (เท่ากับกรุปย่อย)

$$\tau(6 \cdot 7) = \tau(2 \cdot 3 \cdot 7) = (1+1)(1+1)(1+1) = 8 \quad \#$$

8. ตอบ 13

จงหาจำนวนไอดีล (ideal) ทั้งหมด**ที่ไม่ใช่**ไอดีลใหญ่สุด (maximal ideal) ของ $\mathbb{Z}_{2024}$

แนวคำตอบ เนื่องจาก

$$\tau(2024) = \tau(2^3 \cdot 11 \cdot 23) = (3+1)(1+1)(1+1) = 16$$

จะได้ว่ามีไอดีสทั้งหมด 16 ไอดีล โดยมี $\langle \overline{2} \rangle$, $\langle \overline{11} \rangle$ และ $\langle \overline{23} \rangle$ เป็นไอดีลใหญ่สุด ดังนั้นไอดีลทั้งหมด**ที่ไม่ใช่**ไอดีลใหญ่สุดของ $\mathbb{Z}_{2024}$ เท่ากับ $16 - 3 = 13$ ไอดีล $\#$

9. ตอบ 944

จงหาจำนวน **ตัวหารศูนย์ (zero divisor)** ทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_{2025}$

แนวคำตอบ จำนวนตัวหารศูนย์ของ $\mathbb{Z}_{2025}$ เท่ากับ

$$(2025-1) - \phi(2025) = 2024 - \phi(3^4 \cdot 5^2) = 2024 - (3^4 - 3^3)(5^2 - 5) = 2024 - 54(20) = 944 \quad \#$$

10. ตอบ 63

จงหา**จำนวนพหุนามที่มี ระดับขั้น (degree) ไม่เกิน** 2 ใน $\mathbb{Z}_4[x]$

แนวคำตอบ พิจารณาพหุนาม $ax^2 + bx + c$ โดยที่ $a, b, c \in \mathbb{Z}_4$ ดังนั้นจำนวนพหุนามที่มี ระดับขั้น (degree) ไม่เกิน 2 ใน $\mathbb{Z}_4[x]$ เท่ากับ

$$4 \times 4 \times 4 - 1 = 4^3 - 1 = 64 - 1 = 63 \quad \#$$

ตอนที่ 3 : (80 คะแนน) จงแสดงวิธีโดยละเอียด ข้อละ 10 คะแนน

11. **(10 คะแนน)** กำหนดให้ $\varphi : (\mathbb{R}, +) \to (GL_2(\mathbb{R}), \cdot)$ นิยามโดย

$$\varphi(x) = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}$$

11.1 **(5 คะแนน)** จงตรวจสอบว่า φ เป็น **ฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน (homomorphism)** หรือไม่

แนวคำตอบ ให้ $x, y \in \mathbb{Z}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\varphi(x+y) &= \begin{bmatrix} \cos(x+y) & \sin(x+y) \\ -\sin(x+y) & \cos(x+y) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos x \cos y - \sin x \sin y & \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ -(\sin x \cos y + \cos x \sin y) & \cos x \cos y - \sin x \sin y \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos x \cos y - \sin x \sin y & \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ -\sin x \cos y - \cos x \sin y & \cos x \cos y - \sin x \sin y \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos y & \sin y \\ -\sin y & \cos y \end{bmatrix} = \varphi(x)\varphi(y)
\end{aligned}$$

ดังนั้น φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน

11.2 **(3 คะแนน)** จงหา $Ker(\varphi)$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}
Ker(\varphi) &= \left\{ x \in \mathbb{Z} : \varphi(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \\
&= \left\{ x \in \mathbb{Z} : \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \\
&= \{ x \in \mathbb{Z} : \cos x = 1 \text{ และ } \sin x = 0 \} \\
&= \{ 2n\pi : n \in \mathbb{Z} \} = \langle 2\pi \rangle
\end{aligned}$$

11.3 **(2 คะแนน)** สำหรับ $x \in \mathbb{R}$ จงแสดงว่า

$$\varphi(x+\pi) = -\varphi(x)$$

แนวคำตอบ ให้ $x \in \mathbb{R}$ เนื่องจาก φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\varphi(x+\pi) = \varphi(x)\varphi(\pi) &= \varphi(x) \begin{bmatrix} \cos \pi & \sin \pi \\ -\sin \pi & \cos \pi \end{bmatrix} \\
&= \varphi(x) \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \varphi(x)(-1) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= -\varphi(x)
\end{aligned}$$

12. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

12.1 **(5 คะแนน)** ให้ G_1 และ G_2 เป็นกรุป โดยที่ $\varphi : G_1 \to G_2$ เป็นฟังก์ชันสมสัณฐาน (isomorphism) จงพิสูจน์ว่า

ถ้า G_1 เป็นกรุปวัฏจักร (cyclic group) แล้ว G_2 เป็นกรุปวัฏจักร

แนวคำตอบ สมมติว่า G_1 เป็นกรุปวัฏจักร จะได้ว่ามี $a \in G_1$ ซึ่ง $\langle a \rangle = G_1$ จะแสดงว่า $\langle \varphi(a) \rangle = G_2$
เห็นได้ชัดว่า $\langle \varphi(a) \rangle \subseteq G_2$ เหลือเพียงแสดงว่า $G_2 \subseteq \langle \varphi(a) \rangle$
ให้ $y \in G_2$ เนื่องจาก φ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง จะได้ว่ามี $x \in G_1$ ซึ่ง $\varphi(x) = y$
เนื่องจาก $\langle a \rangle = G_1$ จะได้ว่า $k \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $x = a^k$ ทำให้ได้ว่า

$$y = \varphi(x) = \varphi(a^k) = (\varphi(a))^k$$

ดังนั้น $y \in \langle \varphi(a) \rangle$ สรุปได้ว่า G_2 เป็นกรุปวัฏจักร

12.2 **(5 คะแนน)** ให้ มีการดำเนินการทวิภาคที่นิยามโดย

$$\begin{aligned} a \oplus b &= a + 2b \\ a \odot b &= 2ab \end{aligned}$$

จงตรวจสอบว่า $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ มีสมบัติการแจกแจง (distributive law) หรือไม่
แนวคำตอบ ให้ $a, b, c \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} a \odot (b \oplus c) &= a \odot (b + 2c) \\ &= 2a(b + 2c) \\ &= 2ab + 4ac \\ &= 2ab + 2(2ac) \\ &= (2ab) \oplus (2ac) \\ &= (a \odot b) \oplus (a \odot c) \\ (b \oplus c) \odot a &= (b + 2c) \odot a \\ &= 2(b + 2c)a \\ &= 2ba + 4ca \\ &= 2ba + 2(2ca) \\ &= (2ba) \oplus (2ca) \\ &= (b \odot a) \oplus (c \odot a) \end{aligned}$$

ดังนั้น $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ มีสมบัติการแจกแจง

13. **(10 คะแนน)** พิจารณาริง $M_{33}(\mathbb{R})$ กำหนดให้

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$$

13.1 **(4 คะแนน)** จงตรวจสอบว่า S เป็น **ริงย่อย (subring)** ของ $M_{33}(\mathbb{R})$ หรือไม่

แนวคำตอบ ให้ $a, b \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in S$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & ab & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in S$$

ดังนั้น S เป็นริงย่อยของ $M_{33}(\mathbb{R})$

13.2 **(3 คะแนน)** จงตรวจสอบว่า S เป็น **ไอดีลขวา (right ideal)** ของ $M_{33}(\mathbb{R})$ หรือไม่

แนวคำตอบ จะเห็นว่า

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \notin S$$

ดังนั้น S ไม่เป็นไอดีลขวาของ $M_{33}(\mathbb{R})$

13.3 **(3 คะแนน)** จงตรวจสอบว่า S เป็น **ไอดีลซ้าย (left ideal)** ของ $M_{33}(\mathbb{R})$ หรือไม่

แนวคำตอบ จะเห็นว่า

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \notin S$$

ดังนั้น S ไม่เป็นไอดีลซ้ายของ $M_{33}(\mathbb{R})$

14. **(10 คะแนน)** กำหนดให้ $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{21}$ นิยามโดย

$$\varphi(x) = \overline{7x^3}$$

14.1 **(5 คะแนน)** จงตรวจสอบว่า φ เป็น **ฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของริง (ring homomorphism)** หรือไม่

แนวคำตอบ ให้ $x, y \in \mathbb{Z}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\varphi(x+y) &= \overline{7(x+y)^3} = \overline{7(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)} \\
&= \overline{7x^3+21x^2y+21xy^2+7y^3} = \overline{7x^3} + \overline{21x^2y} + \overline{21xy^2} + \overline{7y^3} \\
&= \overline{7x^3} + \bar{0} + \bar{0} + \overline{7y^3} = \overline{7x^3} + \overline{7y^3} \\
&= \varphi(x) + \varphi(y) \\
\varphi(xy) &= \overline{7(xy)^3} = \overline{7x^3y^3} \\
&= \overline{49x^3y^3} \qquad \because \overline{49} = \bar{7} \text{ ใน } \mathbb{Z}_{21} \\
&= \overline{(7x^3)(7y^3)} = \overline{7x^3} \cdot \overline{7y^3} \\
&= \varphi(x)\varphi(y)
\end{aligned}$$

ดังนั้น φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของริง

14.2 **(3 คะแนน)** จงหา $Ker(\varphi)$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}
Ker(\varphi) &= \{x \in \mathbb{Z} : \varphi(x) = \bar{0}\} \\
&= \{x \in \mathbb{Z} : \overline{7x^3} = \bar{0}\} \\
&= \{x \in \mathbb{Z} : 21 \mid 7x^3\} \\
&= \{x \in \mathbb{Z} : 3 \mid x^3\} \\
&= \{x \in \mathbb{Z} : 3 \mid x\} = 3\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

14.3 **(2 คะแนน)** จงใช้ทฤษฎีบทสมสัณฐานของริงบทที่ 1 (first ring isomorphism theorem)

$$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong \{\bar{0}, \bar{7}, \overline{14}\}$$

แนวคำตอบ จะเห็นว่า

$$Ran(\varphi) = \{\varphi(x) : x \in \mathbb{Z}\} = \{\overline{7x^3} : x \in \mathbb{Z}\} = \{\bar{0}, \bar{7}, \overline{14}\}$$

โดยทฤษฎีบทสมสัณฐานของริงบทที่ 1 จะได้ว่า $\mathbb{Z}/Ker(\varphi) \cong Ran(\varphi)$ นั่นคือ

$$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong \{\bar{0}, \bar{7}, \overline{14}\}$$

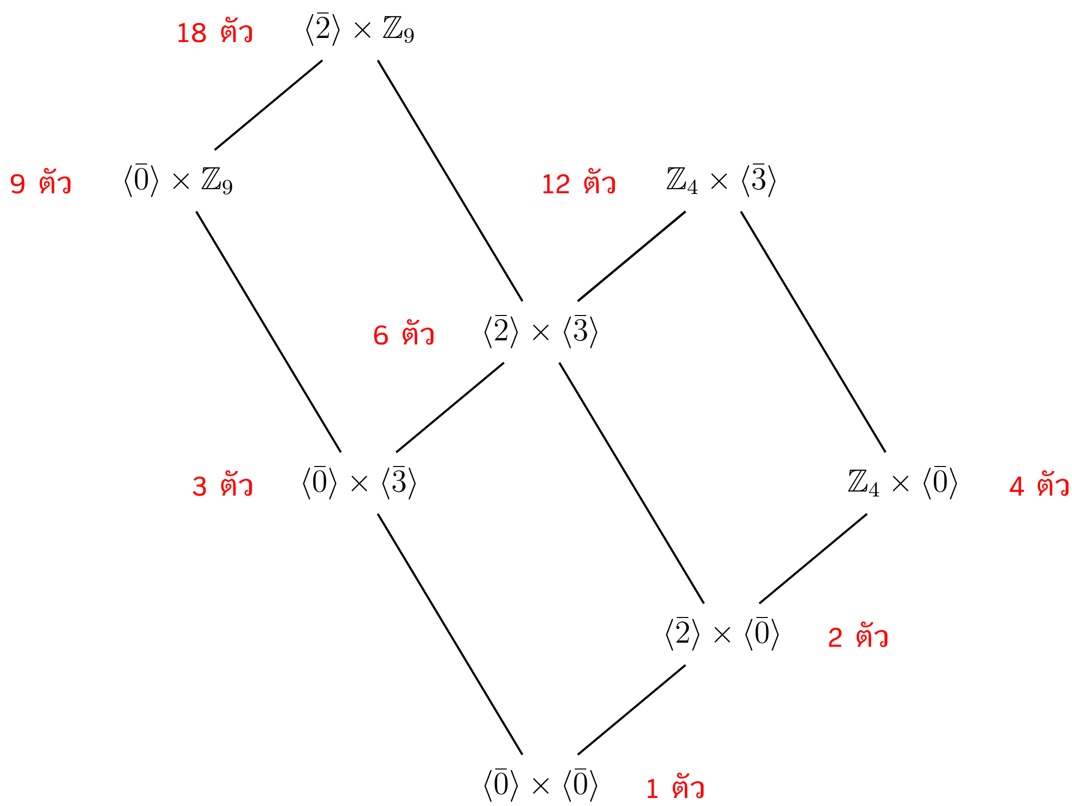
15. **(10 คะแนน)** จงหา **ไอดีลใหญ่สุด (maximal ideal)** ของ $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9$ พร้อมเขียนแลตทิซ

แนวคำตอบ ไอดีลของ $\mathbb{Z}_4$ คือ $\langle \bar{0} \rangle, \langle \bar{2} \rangle, \mathbb{Z}_4$ และ ไอดีลของ $\mathbb{Z}_9$ คือ $\langle \bar{0} \rangle, \langle \bar{3} \rangle, \mathbb{Z}_9$

ไอดีลทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9$ คือ

$$\begin{array}{ccc}
\langle \bar{0} \rangle \times \langle \bar{0} \rangle & \langle \bar{0} \rangle \times \langle \bar{3} \rangle & \langle \bar{0} \rangle \times \mathbb{Z}_9 \\
\langle \bar{2} \rangle \times \langle \bar{0} \rangle & \langle \bar{2} \rangle \times \langle \bar{3} \rangle & \langle \bar{2} \rangle \times \mathbb{Z}_9 \\
\mathbb{Z}_4 \times \langle \bar{0} \rangle & \mathbb{Z}_4 \times \langle \bar{3} \rangle & \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9
\end{array}$$

เขียนแลตทิซโดยไม่มีไอดีล $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9$ ได้ดังรูป



จากแผนภาพจะได้ว่า $\mathbb{Z}_4 \times \langle \bar{3} \rangle$ และ $\langle \bar{2} \rangle \times \mathbb{Z}_9$ เป็นไอดีลใหญ่สุดของ $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9$

16. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

16.1 **(5 คะแนน)** ให้ p และ q เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่ $p > q$ ถ้า

$\mathbb{Z}_{pq}$ มีสมาชิกที่ **ไม่ใช่ตัวหารศูนย์ (non-zero divisor)** ทั้งหมด $pq - 11$ ตัว

แล้วจำนวนตัวหารศูนย์ใน $\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_{q^2}$ มีกี่ตัว

แนวคำตอบ เนื่องจาก p และ q เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่ $p > q$ จะได้ว่า $\gcd(p, q) = 1$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\text{จำนวนสมาชิกของ } \mathbb{Z}_{pq} \text{ ไม่ใช่ตัวหารศูนย์} &= |\mathbb{Z}_{pq}| - \text{ จำนวนตัวหารศูนย์ของ } \mathbb{Z}_{pq} \\
pq - 11 &= pq - [(pq-1) - \phi(pq)] \\
pq - 11 &= 1 + \phi(p)\phi(q) \\
pq - 11 &= 1 + (p-1)(q-1) \\
pq - 11 &= 1 + pq - p - q + 1 \\
p + q &= 13
\end{aligned}$$

พิจารณา p เป็นจำนวนเฉพาะ ซึ่ง $q < p$

q	p	$p+q$
2	11	13
3	10	13
5	8	13
7	6	13

ดังนั้น $p = 11$ และ $q = 2$ พิจารณา $\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_{q^2} = \mathbb{Z}_{121} \times \mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_{121\times 4}$ (เนื่องจาก $\gcd(121, 4) = 1$) ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\text{จำนวนตัวหารศูนย์ของ } \mathbb{Z}_{121\times 4} &= 121 \times 4 - 1 - \phi(11^2 \times 2^2) \\
&= 484 - 1 - (11^2 - 11)(2^2 - 2) \\
&= 483 - (110)(2) = 483 - 220 = 263 \quad \#
\end{aligned}$$

16.2 **(5 คะแนน)** จงแสดงว่า $3 - \sqrt{-2}$ เป็นสมาชิก **ลดทอนไม่ได้ (irreducible)** ใน $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$

แนวคำตอบ ห้ $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ โดยที่ $3 - \sqrt{-2} = (a + b\sqrt{-2})(c + d\sqrt{-2})$ จะได้ว่า

$$(ac - 2bd) + (ad + bc)\sqrt{-2} = 3 - \sqrt{-2}$$

ดังนั้น $ac - 2bd = 3$ และ $ad + bc = -1$ แล้ว

$$(a - b\sqrt{-2})(c - d\sqrt{-2}) = (ac - 2bd) - (bc + ad)\sqrt{-2} = 3 + \sqrt{-2}$$

ฉะนั้น

$$\begin{aligned}
(a^2 + 2b^2)(c^2 + 2d^2) &= (a + b\sqrt{-2})(c + d\sqrt{-2})(a - b\sqrt{-2})(c - d\sqrt{-2}) \\
&= (3 - \sqrt{-2})(3 + \sqrt{-2}) \\
&= 3^2 + 2 = 11 = 1 \cdot 11 \qquad \text{(เป็นจำนวนเฉพาะ)}
\end{aligned}$$

นั่นคือ $a^2 + 2b^2 = 1$ และ $c^2 + 2d^2 11$ หรือ $a^2 + 2b^2 = 11$ และ $c^2 + 2d^2 = 1$
จะได้ว่า $a + b\sqrt{-2}$ หรือ $c + d\sqrt{-2}$ เป็นหน่วย สรุปได้ว่า $3 - \sqrt{-2}$ เป็นสมาชิกลดทอนไม่ได้ใน $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$

17. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

17.1 **(5 คะแนน)** จงแสดงว่า 2 **ไม่เป็น สมาชิกเฉพาะ (prime element)** ใน $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$

แนวคำตอบ จะเห็นว่า

$$2 \cdot 3 = 6 = (1-\sqrt{-5})(1+\sqrt{-5})$$

จะได้ว่า $2 \mid (1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5})$

สมมติว่า $2 \mid (1+\sqrt{-5})$ จะได้ว่ามี $x, y \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง

$$\begin{aligned} 2(x+y\sqrt{-5}) &= 1+\sqrt{-5} \\ 2x+2y\sqrt{-5} &= 1+\sqrt{-5} \end{aligned}$$

ทำให้ได้ว่า $2x = 1$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้เพราะว่า $x \in \mathbb{Z}$ ดังนั้น $2 \nmid (1+\sqrt{-5})$

ในทำนองเดียวกัน $2 \nmid (1-\sqrt{-5})$

สรุปได้ว่า 2 ไม่เป็นสมาชิกเฉพาะของ $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$

17.2 **(5 คะแนน)** ให้ $p(x) = x^2 + x + a$ และ $q(x) = x^4 + \bar{2}x^3 + x^2$ เป็นพหุนาม $\mathbb{Z}_4[x]$ จงหา $a \in \mathbb{Z}_4$ ที่ทำให้

$$[p(x)]^2 = q(x)$$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned} (x^2+x+a)^2 &= x^4+\bar{2}x^3+x^2 \\ x^4+x^2+a^2+\bar{2}x^3+\bar{2}ax^2+\bar{2}ax &= x^4+\bar{2}x^3+x^2 \\ x^4+\bar{2}x^3+(\bar{1}+\bar{2}a)x^2+\bar{2}ax+a^2 &= x^4+\bar{2}x^3+x^2 \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \bar{1}+\bar{2}a = \bar{1} \quad &\longrightarrow \quad a = \bar{0}, \bar{2} \\ \bar{2}a = \bar{0} \quad &\longrightarrow \quad a = \bar{0}, \bar{2} \\ a^2 = \bar{0} \quad &\longrightarrow \quad a = \bar{0}, \bar{2} \end{aligned}$$

ดังนั้น $a = \bar{0}, \bar{2}$ #

18. **(10 คะแนน)** ให้ $p(x) = x^2 + c$ และ $\mathbb{Z}_5[x]/\langle p(x)\rangle$ เป็นฟีลด์

18.1 **(5 คะแนน)** จงเลือก $c \in \mathbb{Z}_5$ ที่ทำให้ $\mathbb{Z}_5[x]/\langle p(x)\rangle$ เป็นฟีลด์อันดับ 25

แนวคำตอบ สมมติว่า $p(x) = x^2 + c$ ลดทอนได้ใน $\mathbb{Z}_5[x]$ จะได้ว่ามี $a, b \in \mathbb{Z}_5$ ซึ่ง

$$x^2 + c = (x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

นั่นคือ $a + b = \bar{0}$ และ $ab = c$ พิจารณาค่าที่เป็นไปได้จากตาราง

a	b	$a+b$	$ab=c$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$

จากตารางจะเห็นได้ว่า $ab \neq \bar{2}, \bar{3}$ จะทำให้เกิดข้อขัดแย้งเมื่อ $ab = \bar{2}, \bar{3}$ ดังนั้นเลือก $c = \bar{2}$ หรือ $\bar{3}$ จะทำให้ได้ว่า $p(x) = x^2 + \bar{2}$ หรือ $p(x) = x^2 + \bar{3}$ ลดทอนไม่ได้ใน $\mathbb{Z}_5[x]$
โดยทฤษฎีบทจะสรุปได้ว่า $\mathbb{Z}_5[x]/\langle p(x)\rangle$ เป็นฟีลด์อันดับ $5^2 = 25$

18.2 **(5 คะแนน)** ใช้ $p(x)$ จาก 18.1 (เพียงตัวเดียว) หา**ตัวผกผันการคูณ**ของ

$$x + \langle p(x)\rangle \quad \text{ใน} \quad \mathbb{Z}_5[x]/\langle p(x)\rangle$$

แนวคำตอบ ให้ $a, b \in \mathbb{Z}_3$
กรณี $p(x) = x^2 + \bar{2}$ พิจารณา

$$\begin{aligned}
(ax + b + \langle x^2+\bar{2}\rangle)(x + \langle x^2+\bar{2}\rangle) &= \bar{1} + \langle x^2+\bar{2}\rangle \\
(ax+b)x + \langle x^2+\bar{2}\rangle &= \bar{1} + \langle x^2+\bar{2}\rangle \\
ax^2 + bx + \langle x^2+\bar{2}\rangle &= \bar{1} + \langle x^2+\bar{2}\rangle \\
a(x^2+\bar{2}) - \bar{2}a + bx + \langle x^2+\bar{2}\rangle &= \bar{1} + \langle x^2+\bar{2}\rangle \\
bx - \bar{2}a + \langle x^2+\bar{2}\rangle &= \bar{1} + \langle x^2+\bar{2}\rangle
\end{aligned}$$

จะได้ว่า $b = \bar{0}$ และ $-\bar{2}a = \bar{1}$ นั่นคือ

$$\bar{2}a = -\bar{1} = \bar{4} \quad \longrightarrow \quad a = \bar{2}$$

ดังนั้น $\bar{2}x + \langle x^2+\bar{2}\rangle$ เป็นตัวผกผันของ $x + \langle x^2+\bar{2}\rangle$ ใน $\mathbb{Z}_5[x]/\langle x^2+\bar{2}\rangle$
กรณี $p(x) = x^2 + \bar{3}$ พิจารณา

$$\begin{aligned}
(ax + b + \langle x^2+\bar{3}\rangle)(x + \langle x^2+\bar{3}\rangle) &= \bar{1} + \langle x^2+\bar{3}\rangle \\
(ax+b)x + \langle x^2+\bar{3}\rangle &= \bar{1} + \langle x^2+\bar{3}\rangle \\
ax^2 + bx + \langle x^2+\bar{3}\rangle &= \bar{1} + \langle x^2+\bar{3}\rangle \\
a(x^2+\bar{3}) - \bar{3}a + bx + \langle x^2+\bar{3}\rangle &= \bar{1} + \langle x^2+\bar{3}\rangle \\
bx - \bar{3}a + \langle x^2+\bar{3}\rangle &= \bar{1} + \langle x^2+\bar{3}\rangle
\end{aligned}$$

จะได้ว่า $b = \bar{0}$ และ $-\bar{3}a = \bar{1}$ นั่นคือ

$$\bar{3}a = -\bar{1} = \bar{4} = \bar{9} \quad \longrightarrow \quad a = \bar{3}$$

ดังนั้น $\bar{3}x + \langle x^2+\bar{3}\rangle$ เป็นตัวผกผันของ $x + \langle x^2+\bar{3}\rangle$ ใน $\mathbb{Z}_5[x]/\langle x^2+\bar{3}\rangle$