คณิตศาสตร์

มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
คณะครุศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ข้อสอบปลายภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2566

รหัสวิชา	ชื่อวิชา	วันเวลาสอบ	คะแนนเต็ม
MAI1302	แคลคูลัส ๑	เวลา 13:00 - 16:00 วันจันทร์ ที่ 30 ตุลาคม 2566	100 คะแนน 25%

ชื่อ-สกุล.. **รหัสนักศึกษา**................................. **หมู่เรียน**................

คำชี้แจง

1. ข้อสอบมี 18 ข้อ 15 หน้า แบ่งออกเป็น 3 ตอน ประกอบด้วย
    - **ตอนที่ 1** ข้อสอบแบบ 5 ตัวเลือก จำนวน 5 ข้อ (ข้อละ 2 คะแนน รวม 10 คะแนน)
    - **ตอนที่ 2** ข้อสอบแบบเติมคำตอบ จำนวน 5 ข้อ (ข้อละ 2 คะแนน รวม 10 คะแนน)
    - **ตอนที่ 3** ข้อสอบแบบแสดงวิธีทำ จำนวน 8 ข้อ (ข้อละ 10 คะแนน รวม 80 คะแนน)
2. เขียนรหัสนักศึกษา และหมู่เรียนด้วย**ตัวบรรจงลงในข้อสอบทุกหน้า**
3. ไม่อนุญาตให้ใช้เครื่องคำนวณและเครื่องมือสื่อสาร
4. **อนุญาต**ให้นำกระดาษที่เขียนด้วยตัวเอง 1 แผ่น ขนาด A4
5. **ห้าม**นำข้อสอบออกจากห้องสอบโดยเด็ดขาด
6. หากมี**การทุจริต**ในการสอบ จะได้รับการลงโทษตามระเบียบของมหาวิทยาลัย

ข้าพเจ้าจะปฏิบัติตามข้อตกลงอย่างเคร่งครัด
ลงชื่อผู้เข้าสอบ

....

อาจารย์ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย

ตอนที่	1	2	3								รวม
ข้อ	1-5	6-10	11	12	13	14	15	16	17	18	
คะแนน											

ตอนที่ 1 : (10 คะแนน) จงกากบาททับข้อที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว ข้อละ 2 คะแนน

1. ข้อใดเป็น **ปฏิยานุพันธ์ (antiderivative)** ของฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{3x^2}{\sqrt{x^3-1}}$

   ก. $3\sqrt{x^2-1}$

   ข. $\sqrt{x^2-1}$

   ค. $2\sqrt{x^3-1}$

   ง. $\sqrt{x^3-1}$

   จ. $3\sqrt{x^3-1}$

2. ข้อใดกล่าว**ไม่ถูกต้อง**เกี่ยวกับค่าเชิงอนุพันธ์

   ก. $d(\sqrt{x}) = \sqrt{x}dx$

   ข. $d(e^x) = e^x dx$

   ค. $d(\sin x) = \cos x dx$

   ง. $d(x+3) = dx$

   จ. $2dx = d(2x)$

3. ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนจำนวนจริงโดยที่

$$\int_{-1}^{1} f'(x)\,dx = 5$$

ข้อใดต่อไปนี้กล่าว**ถูกต้อง**

ก. $f(1) = 5$

ข. $f(1) = 5 + f(-1)$

ค. $f(1) = -f(-1)$

ง. $f(-1) = 5 + f(1)$

จ. $f(-1) = f(1)$

4. ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ (improper integral) ในข้อใดต่อไปนี้เป็น**ชนิดผสม**

ก. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx$

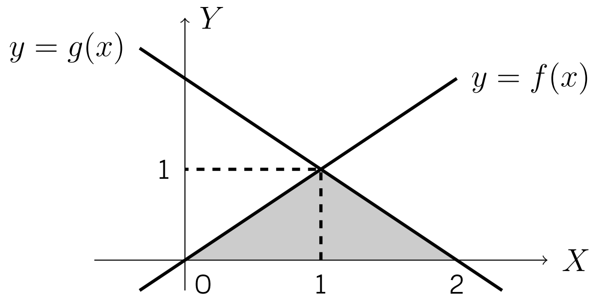
ข. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{2}{3|x|} dx$

ค. $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{\sqrt{1-e^x}} dx$

ง. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^2 - x} dx$

จ. $\displaystyle\int_{\infty}^{\infty} \sin x\,dx$

5. ข้อใดต่อไปนี้คือ**พื้นที่ของส่วนที่แรเงา**ของกราฟที่กำหนดให้



ก. $\displaystyle\int_0^2 f(x) - g(x)\, dx$

ข. $\displaystyle\int_0^1 g(x) - f(x)\, dx$

ค. $\displaystyle\int_0^2 f(x)\, dx$

ง. $\displaystyle\int_0^2 g(x)\, dx$

จ. $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx + \int_1^2 g(x)\, dx$

ตอนที่ 2 : (10 คะแนน) จงเติมคำตอบในช่องว่าง (ด้านซ้ายบน) ให้ถูกต้อง ข้อละ 2 คะแนน

6. ______________________

กำหนดให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บนช่วง $[0, 3]$ โดยที่

$$\int_0^3 f(x)\,dx = 5, \qquad \int_1^2 f(x)\,dx = 4 \qquad \text{และ} \qquad \int_1^0 f(x)\,dx = 1$$

จงหาค่าของ $\displaystyle\int_2^3 f(x)\,dx$

7. ______________________

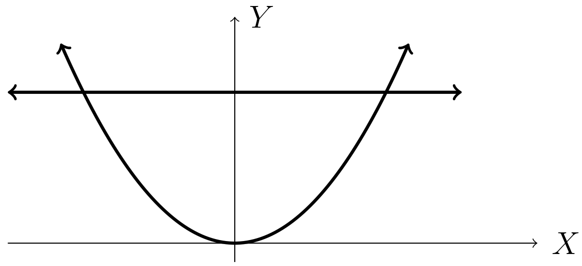
กำหนดให้

$$F(x) = \int_1^{x^2} \frac{e^{t^2}}{t}\,dt$$

จงหาค่าของ $F''(1)$

8. ______________________

จงหา**พื้นที่**ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = x^2$ และ $y = 4$

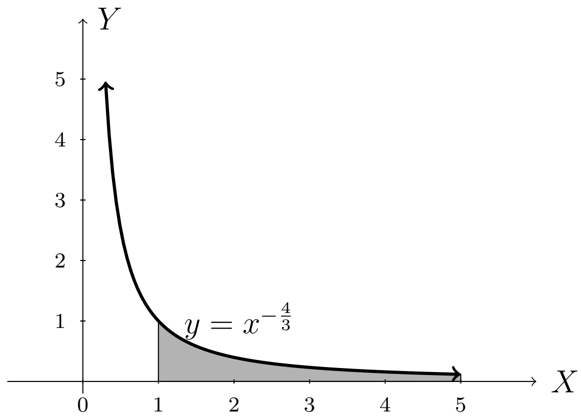


9. ______________________

จงหาค่าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\displaystyle\int_{-4}^{4} \frac{1}{\sqrt[3]{x+4}}\, dx$

10. ____________________

ตรวจสอบค่าของพื้นที่ที่แรเงาของกราฟต่อไปนี้บนโดเมน $(1, \infty)$ กับแกน X ว่ามีค่าหรือไม่



ถ้าหาค่าได้ให้ตอบ**ค่าของพื้นที่นั้น** ถ้าหาค่าไม่ได้ให้ตอบ**ไม่มีค่า**

ตอนที่ 3 : (80 คะแนน) จงแสดงวิธีโดยละเอียด ข้อละ 10 คะแนน

11. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

11.1 **(5 คะแนน)** จงหาค่าของ $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{3x}{\sqrt{x+2}}\,dx$

11.2 **(5 คะแนน)** กำหนดให้ $\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = 9$ จงหาค่าของ

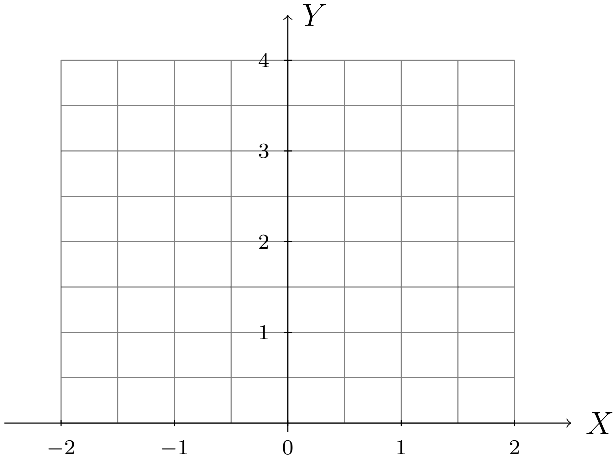
$$\int_{0}^{1} f(2-3x)\,dx$$

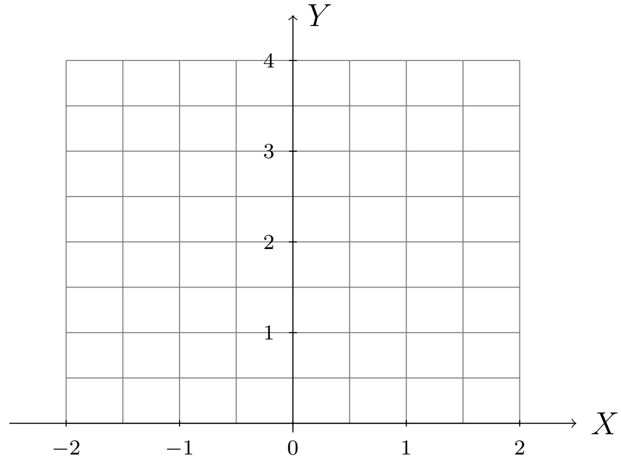
12. **(10 คะแนน)** กำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{เมื่อ } x \leq 0 \\ x^2 & \text{เมื่อ } x > 0 \end{cases}$$

เมื่อ $x \in [-2, 2]$ จงหา $L(P, f)$ และ $U(f, P)$ พร้อมวาดกราฟประกอบ เมื่อ

$$P = \left\{-2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\right\}$$





13. **(10 คะแนน)** พิจารณาปริพันธ์

$$\int \sqrt{t}e^{\sqrt{t}}\,dt \qquad ....(*)$$

13.1 **(4 คะแนน)** จงเขียนปริพันธ์ $(*)$ ในรูปตัวแปร x โดยเปลี่ยนตัวแปร $x = \sqrt{t}$

13.2 **(6 คะแนน)** จงหาค่าปริพันธ์ของ

$$\int \sqrt{t}e^{\sqrt{t}}\,dt$$

โดยใช้ปริพันธ์ในตัวแปร x จากข้อ 13.1

14. **(10 คะแนน)** จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

$$\int \frac{4}{(x^2+1-2x)(x^2+1)}\,dx$$

15. **(10 คะแนน)** จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

15.1 **(5 คะแนน)** $\int \sec^4\theta \tan^6\theta \, d\theta$

15.2 **(5 คะแนน)** $\int_0^{\pi} (4\sin 2\theta \cos\theta)^2 \, d\theta$

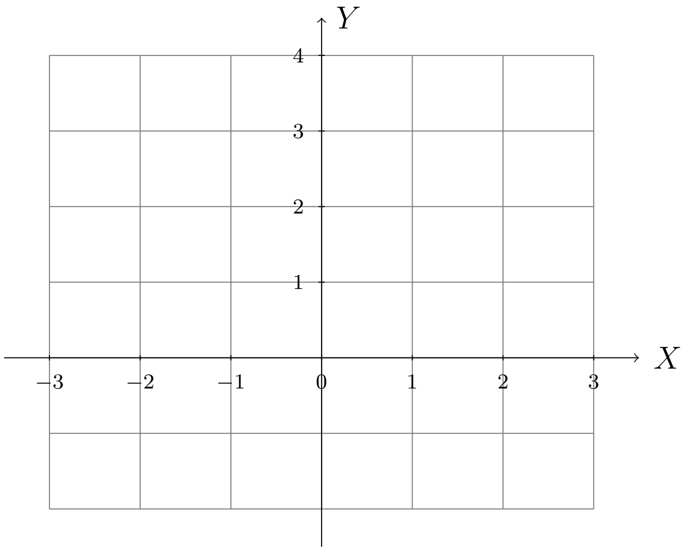
16. **(10 คะแนน)** จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$$

17. **(10 คะแนน)** จงหา**ปริมาตรรูปทรงตัน**ที่เกิดจากการหมุนอาณาบริเวณ

$$y = x^2 \qquad \text{และ} \qquad x + y = 2$$ **รอบแกน X**

โดยวาดกราฟประกอบ



18. **(10 คะแนน)** จงพิจารณาว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบต่อไปนี้ลู่เข้าหรือลู่ออก

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$$

มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
คณะครุศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์
เฉลยข้อสอบปลายภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2566

รหัสวิชา	ชื่อวิชา	วันเวลาสอบ	คะแนนเต็ม
MAI1302	แคลคูลัส ๑	เวลา 13:00 - 16:00 วันจันทร์ ที่ 30 ตุลาคม 2566	100 คะแนน 25%

โดย ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย

ตอนที่ 1 : (10 คะแนน) จงกากบาททับข้อที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว ข้อละ 2 คะแนน

1. ข้อใดเป็น **ปฏิยานุพันธ์ (antiderivative)** ของฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{3x^2}{\sqrt{x^3-1}}$

   ก. $F(x) = 3\sqrt{x^2-1}$

   ข. $F(x) = \sqrt{x^2-1}$

   ค. $F(x) = 2\sqrt{x^3-1}$ Answer

   ง. $F(x) = \sqrt{x^3-1}$

   จ. $F(x) = 3\sqrt{x^3-1}$

   ตอบข้อ ค. จะเห็นว่า
   $$F'(x) = 2\cdot\frac{1}{2}(x^3-1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{\sqrt{x^3-1}} = f(x)$$
   ดังนั้น $F(x) = 2\sqrt{x^3-1}$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f

2. ข้อใดกล่าว**ไม่ถูกต้อง**เกี่ยวกับค่าเชิงอนุพันธ์

   ก. $d(\sqrt{x}) = \sqrt{x}dx$ Answer

   ข. $d(e^x) = e^x dx$

   ค. $d(\sin x) = \cos x dx$

   ง. $d(x+3) = dx$

   จ. $2dx = d(2x)$

   ตอบข้อ ก. ไม่ถูกต้องเนื่องจาก
   $$d(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})'dx = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

3. ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนจำนวนจริงโดยที่

$$\int_{-1}^{1} f'(x)\,dx = 5$$

ข้อใดต่อไปนี้กล่าว**ถูกต้อง**

ก. $f(1) = 5$

ข. $f(1) = 5 + f(-1)$ Answer

ค. $f(1) = -f(-1)$

ง. $f(-1) = 5 + f(1)$

จ. $f(-1) = f(1)$

ตอบข้อ ข. โดยทฤษฎีบทหลักมูลแคลคูลัสข้อที่สอง จะได้ว่า

$$5 = \int_{-1}^{1} f'(x)\,dx = [f(x)]_{-1}^{1} = f(1) - f(-1)$$

ดังนั้น $f(1) = 5 + f(-1)$

4. ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ (improper integral) ในข้อใดต่อไปนี้เป็น**ชนิดผสม**

ก. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$

ข. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{2}{3|x|}dx$

ค. $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{\sqrt{1-e^x}}dx$

ง. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^2-x}dx$ Answer

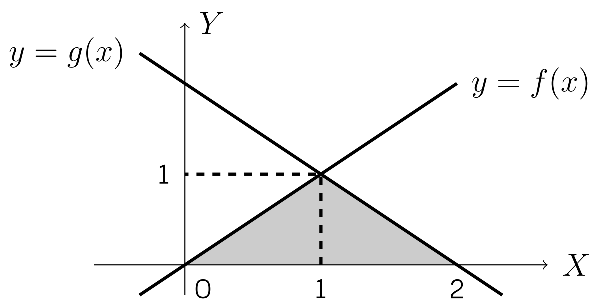
จ. $\displaystyle\int_{\infty}^{\infty} \sin x\,dx$

ตอบข้อ ง. เห็นได้ชัดว่า

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^2-x}dx = \int_{0}^{\infty} \frac{1}{x(x-1)}dx$$

เป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่ 1 เพราะมีโดเมน $(0, \infty)$ เนื่องจากมีจุดที่ไม่อยู่ในโดเมนคือ 0 และ 1 ทำให้ได้ว่าเป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่ 2 ด้วย ดังนั้น ข้อ ง. เป็นเป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดผสม

5. ข้อใดต่อไปนี้คือ**พื้นที่ของส่วนที่แรเงา**ของกราฟที่กำหนดให้



ก. $\int_0^2 f(x) - g(x)\, dx$

ข. $\int_0^1 g(x) - f(x)\, dx$

ค. $\int_0^2 f(x)\, dx$

ง. $\int_0^2 g(x)\, dx$

จ. $\int_0^1 f(x)\, dx + \int_1^2 g(x)\, dx$ Answer

ตอบข้อ จ. หาพื้นที่โดยใช้ dx จึงแบ่งพื้นที่ออกเป็น 2 ส่วนคือ $y = f(x)$ บน $[0, 1]$ และ $y = g(x)$ บน $[1, 2]$ ดังนั้นพื้นที่ที่แรเงาของกราฟเท่ากับ

$$A = \int_0^1 f(x)\, dx + \int_1^2 g(x)\, dx$$

ตอนที่ 2 : (10 คะแนน) จงเติมคำตอบในช่องว่าง (ด้านซ้ายบน) ให้ถูกต้อง ข้อละ 2 คะแนน

6. ตอบ 2

กำหนดให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บนช่วง $[0, 3]$ โดยที่

$$\int_0^3 f(x)\,dx = 5, \qquad \int_1^2 f(x)\,dx = 4 \qquad \text{และ} \qquad \int_1^0 f(x)\,dx = 1$$

จงหาค่าของ $\int_2^3 f(x)\,dx$

แนวคำตอบ จะเห็นว่า

$$\begin{aligned} \int_0^3 f(x)\,dx &= \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx \\ 5 &= -\int_1^0 f(x)\,dx + 4 + \int_2^3 f(x)\,dx \\ 5 &= -1 + 4 + \int_2^3 f(x)\,dx \end{aligned}$$

ดังนั้น $\int_2^3 f(x)\,dx = 5 - 4 + 1 = 2 \quad \#$

7. ตอบ $6e$

กำหนดให้

$$F(x) = \int_1^{x^2} \frac{e^{t^2}}{t}\,dt$$

จงหาค่าของ $F''(1)$

แนวคำตอบ โดยทฤษฎีบทหลักมูลแคลคูลัสข้อที่หนึ่ง จะได้ว่า

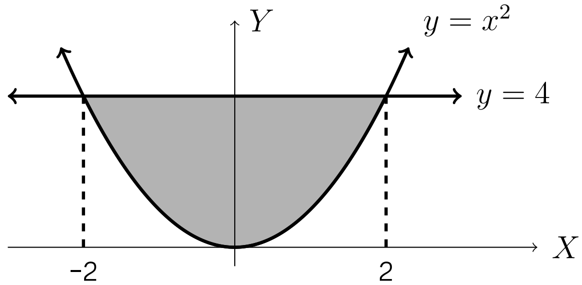
$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{d}{dx}\int_1^{x^2} \frac{e^{t^2}}{t}\,dt = \frac{e^{(x^2)^2}}{x^2}\cdot (x^2)' = \frac{e^{x^4}}{x^2}\cdot 2x = \frac{2e^{x^4}}{x} \\ F''(x) &= \frac{x(2e^{x^4})' - 2e^{x^4}(x)'}{x^2} \\ &= \frac{x(2e^{x^4}\cdot 4x^3) - 2e^{x^4}(1)}{x^2} \\ &= \frac{8x^4e^{x^4} - 2e^{x^4}}{x^2} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$F''(1) = \frac{8e - 2e}{1} = 6e \quad \#$$

8. ตอบ $\dfrac{32}{3}$

จงหา**พื้นที่**ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = x^2$ และ $y = 4$



แนวคำตอบ หาพื้นที่โดยใช้ dx ของอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วย $y = x^2$ และ $y = 4$ บน $[-2, 2]$ ดังนั้น

$$A = \int_{-2}^{2} 4 - x^2\,dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \left[8 - \frac{8}{3}\right] - \left[-8 + \frac{8}{3}\right] = \frac{32}{3} \quad \#$$

9. ตอบ 6

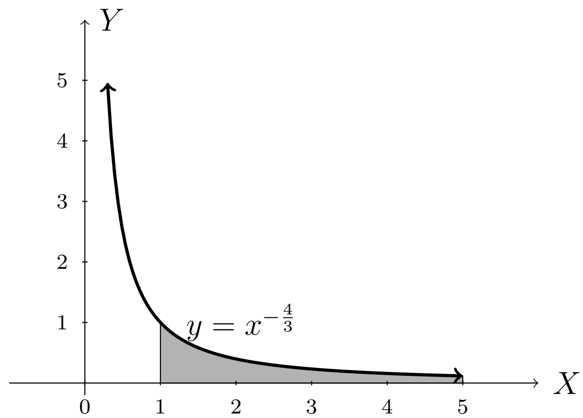
จงหาค่าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\displaystyle\int_{-4}^{4} \frac{1}{\sqrt[3]{x+4}}\,dx$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\int_{-4}^{4} \frac{1}{\sqrt[3]{x+4}}\,dx &= \lim_{t\to -4^+} \int_{t}^{4} \frac{1}{\sqrt[3]{x+4}}\,dx \\
&= \lim_{t\to -4^+} \int_{t}^{4} (x+4)^{-\frac{1}{3}}\,dx \\
&= \lim_{t\to -4^+} \left[\frac{3}{2}(x+4)^{\frac{2}{3}}\right]_{t}^{4} \\
&= \lim_{t\to -4^+} \left[\frac{3}{2}(x+4)^{\frac{2}{3}}\right]_{t}^{4} \\
&= \lim_{t\to -4^+} \left[\frac{3}{2}8^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2}(t+4)^{\frac{2}{3}}\right] \\
&= \left[\frac{3}{2}\cdot 4 - \frac{3}{2}(-4+4)^{\frac{2}{3}}\right] \\
&= 6 \quad \#
\end{aligned}$$

10. ตอบ 3

ตรวจสอบค่าของพื้นที่ที่แรเงาของกราฟต่อไปนี้บนโดเมน $(1, \infty)$ กับแกน X ว่ามีค่าหรือไม่



ถ้าหาค่าได้ให้ตอบ**ค่าของพื้นที่นั้น** ถ้าหาค่าไม่ได้ให้ตอบ**ไม่มีค่า**

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} x^{-\frac{4}{3}}\,dx &= \lim_{t\to\infty}\int_1^{t} x^{-\frac{4}{3}}\,dx \\
&= \lim_{t\to\infty}\left[-3x^{-\frac{1}{3}}\right]_1^t \\
&= \lim_{t\to\infty}\left[-3t^{-\frac{1}{3}}+3\right] \\
&= \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{3}{t^{\frac{1}{3}}}+3\right] \\
&= 0+3=3
\end{aligned}$$

ดังนั้นพื้นที่ที่แรเงาของกราฟนี้บนโดเมน $(1, \infty)$ กับแกน X มีค่าเท่ากับ 3 $\#$

ตอนที่ 3 : (80 คะแนน) จงแสดงวิธีโดยละเอียด ข้อละ 10 คะแนน

11. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

11.1 **(5 คะแนน)** จงหาค่าของ $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{3x}{\sqrt{x+2}}\,dx$

แนวคำตอบ ให้ $u = x+2$ นั่นคือ $x = u-2$ จะได้ว่า $du = dx$ และ

$$u(-1) = 1 \qquad \text{และ} \qquad u(2) = 4$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{2} \frac{3x}{\sqrt{x+2}}\,dx &= \int_{u(-1)}^{u(2)} \frac{3(u-2)}{\sqrt{u}}\,du = \int_{1}^{4} \frac{3u-6}{u^{\frac{1}{2}}}\,du \\
&= \int_{1}^{4} (3u-6)u^{-\frac{1}{2}}\,du = 3\int_{1}^{2} 3uu^{-\frac{1}{2}} - 6u^{-\frac{1}{2}}\,du \\
&= \int_{1}^{4} 3u^{\frac{1}{2}} - 6u^{-\frac{1}{2}}\,du \\
&= \left[2u^{\frac{3}{2}} - 12u^{\frac{1}{2}}\right]_{1}^{4} = \left[2\cdot 4^{\frac{3}{2}} - 12\cdot 4^{\frac{1}{2}}\right] - [2-12] \\
&= 2(8) - 12(2) - 2 + 12 = 2 \qquad \#
\end{aligned}$$

11.2 **(5 คะแนน)** กำหนดให้ $\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = 9$ จงหาค่าของ

$$\int_{0}^{1} f(2-3x)\,dx$$

แนวคำตอบ ให้ $u = 2-3x$ จะได้ว่า $du = -3dx$ และ

$$u(0) = 2 \qquad \text{และ} \qquad u(1) = -1$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{1} f(2-3x)\,dx &= \int_{u(0)}^{u(1)} f(u)\,\frac{du}{-3} \\
&= -\frac{1}{3}\int_{2}^{-1} f(u)\,du \\
&= \frac{1}{3}\int_{-1}^{2} f(u)\,du \\
&= \frac{1}{3}\cdot 9 = 3 \qquad \#
\end{aligned}$$

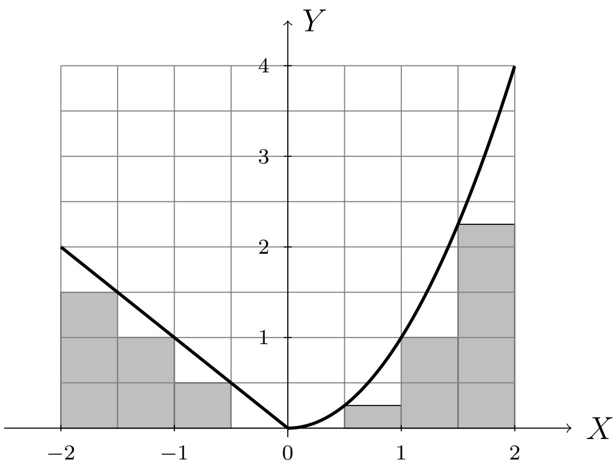
12. **(10 คะแนน)** กำหนดให้

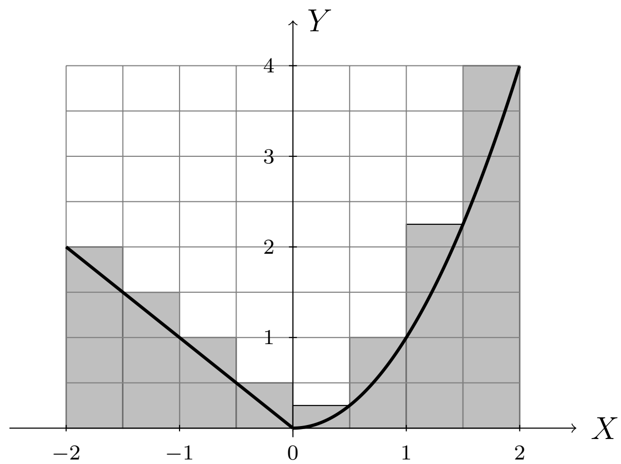
$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{เมื่อ } x \leq 0 \\ x^2 & \text{เมื่อ } x > 0 \end{cases}$$

เมื่อ $x \in [-2, 2]$ จงหา $L(P, f)$ และ $U(f, P)$ พร้อมวาดกราฟประกอบ เมื่อ

$$P = \left\{-2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\right\}$$

แนวคำตอบ แสดงกราฟได้ดังนี้





จะเห็นว่า $\Delta x = \frac{1}{2}$ ทุก ๆ ช่อง ดังนั้น ผลบวกล่าง (lower sum) คือ

$$\begin{aligned} L(f, P) &= \frac{1}{2}\left[f\left(-\frac{3}{2}\right) + f(-1) + f\left(-\frac{1}{2}\right) + f(0) + f(0) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) + f\left(\frac{3}{2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2} + 1 + \frac{1}{2} + 0 + 0 + \frac{1}{4} + 1 + \frac{9}{4}\right] \\ &= \frac{13}{4} \quad \# \end{aligned}$$

ผลบวกบน (upper sum) คือ

$$\begin{aligned} U(f, P) &= \frac{1}{2}\left[f(-2) + f\left(-\frac{3}{2}\right) + f(-1) + f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) + f\left(\frac{3}{2}\right) + f(2)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[2 + \frac{3}{2} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 1 + \frac{9}{4} + 4\right] \\ &= \frac{25}{4} \quad \# \end{aligned}$$

13. **(10 คะแนน)** พิจารณาปริพันธ์

$$\int \sqrt{t}e^{\sqrt{t}}\,dt \qquad ....(*)$$

13.1 **(4 คะแนน)** จงเขียนปริพันธ์ $(*)$ ในรูปตัวแปร x โดยเปลี่ยนตัวแปร $x = \sqrt{t}$

แนวคำตอบ ให้ $x = \sqrt{t}$ จะได้ว่า

$$dx = \tfrac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2\sqrt{t}}dt \qquad \text{ฉะนั้น} \qquad dt = 2\sqrt{t}dx = 2xdx$$

ดังนั้น

$$\int \sqrt{t}e^{\sqrt{t}}\,dt = \int xe^{x}\,2xdx = \int 2x^2e^x\,dx \quad \#$$

13.2 **(6 คะแนน)** จงหาค่าปริพันธ์ของ

$$\int \sqrt{t}e^{\sqrt{t}}\,dt$$

โดยใช้ปริพันธ์ในตัวแปร x จากข้อ 13.1

แนวคำตอบ กำหนดให้

$$\begin{array}{|lcl|lcl|}\hline u & = & 2x^2 & dv & = & e^x \\ du & = & 4xdx & v & = & e^x \\ \hline\end{array}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int 2x^2e^x\,dx &= (2x^2)e^x - \int e^x \cdot 4x\,dx \\ &= 2x^2e^x - \int 4xe^x\,dx\end{aligned}$$

กำหนดให้

$$\begin{array}{|lcl|lcl|}\hline u & = & 4x & dv & = & e^x \\ du & = & 4dx & v & = & e^x \\ \hline\end{array}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int 4xe^x\,dx &= (4x)e^x - \int e^x \cdot 4\,dx \\ &= 4xe^x - 4e^x + C\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int \sqrt{t}e^{\sqrt{t}}\,dt = \int 2x^2e^x\,dx &= 2x^2e^x - 4xe^x + 4e^x + C \\ &= 2te^{\sqrt{t}} - 4\sqrt{t}e^{\sqrt{t}} + 4e^{\sqrt{t}} + C \quad \#\end{aligned}$$

14. **(10 คะแนน)** จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

$$\int \frac{4}{(x^2+1-2x)(x^2+1)}\,dx$$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\frac{4}{(x^2+1-2x)(x^2+1)} = \frac{4}{(x-1)^2(x^2+1)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \\
4 &= A(x-1)(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)^2 \\
x=1; \quad 4 &= 2B \qquad \therefore B = 2 \\
x=0; \quad 4 &= -A+B+D = -A+2+D \qquad \therefore D-A=2 \text{ หรือ } D=2+A \\
x=-1; \quad 4 &= -4A+2B+(-C+D)(4) \\
4 &= -4A+2(2)-4C+4D \\
0 &= -A-C+D = (D-A)-C = 2-C \qquad \therefore C=2 \\
x=2; \quad 4 &= 5A+5B+(2C+D)(1) \\
4 &= 5A+5(2)+2(2)+D \\
4 &= 5A+10+4+(2+A) \\
-12 &= 6A \qquad \therefore A=-2 \text{ และ } D=2+A=2-2=0
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int \frac{4}{(x^2+1-2x)^2(x^2+1)}\,dx &= \int -\frac{2}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{2x}{x^2+1}\,dx \\
&= -2\ln|x-1| - \frac{2}{x-1} + \int \frac{1}{x^2+1}\,2x\,dx \\
&= -2\ln|x-1| - \frac{2}{x-1} + \int \frac{1}{x^2+1}\,d(x^2) \\
&= -2\ln|x-1| - \frac{2}{x-1} + \int \frac{1}{x^2+1}\,d(x^2+1) \\
&= -2\ln|x-1| - \frac{2}{x-1} + \ln|x^2+1| + C \qquad \#
\end{aligned}$$

15. **(10 คะแนน)** จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

15.1 **(5 คะแนน)** $\int \sec^4\theta \tan^6\theta \, d\theta$

แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int \sec^4\theta\tan^6\theta\,d\theta &= \int \sec^2\theta\tan^6\theta\,(\sec^2\theta d\theta)\\ &= \int \sec^2\theta\tan^6\theta\,d\tan\theta\\ &= \int (1+\tan^2\theta)\tan^6\theta\,d\tan\theta\\ &= \int \tan^6\theta+\tan^8\theta\,d\tan\theta\\ &= \frac{1}{7}\tan^7\theta+\frac{1}{9}\tan^9\theta+C \quad \#\end{aligned}$$

15.2 **(5 คะแนน)** $\int_0^\pi (4\sin 2\theta\cos\theta)^2\,d\theta$

แนวคำตอบ ใช้กฎเปลี่ยนผลคูณเป็นผลบวกและการลดกำลัง ของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

วิธีที่ 1.

$$\begin{aligned}\int_0^\pi (4\sin 2\theta\cos\theta)^2\,d\theta &= \int_0^\pi (4\sin 2\theta\cos\theta)^2 d\theta\\ &= \int_0^\pi [2(\sin(2\theta+\theta)+\sin(2\theta-\theta))]^2\,d\theta\\ &= \int_0^\pi [2(\sin 3\theta+\sin\theta)]^2\,d\theta\\ &= \int_0^\pi 4(\sin^2 3\theta+2\sin 3\theta\sin\theta+\sin^2\theta)d\theta\\ &= \int_0^\pi 4\sin^2 3\theta+8\sin 3\theta\sin\theta+4\sin^2\theta d\theta\\ &= \int_0^\pi 2(1-\cos 6\theta)-4[\cos(3\theta+\theta)-\cos(3\theta-\theta)]+2(1-\cos 2\theta)d\theta\\ &= \int_0^\pi 4-2\cos 6\theta-4\cos 4\theta+2\cos 2\theta d\theta\\ &= \left[4\theta-\frac{1}{3}\sin 6\theta-\sin 4\theta+\sin 2\theta\right]_0^\pi\\ &= 4\pi-0=4\pi \quad \#\end{aligned}$$

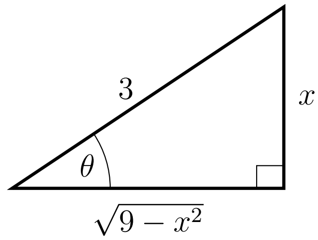
วิธีที่ 2.

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi} (4\sin 2\theta\cos\theta)^2\,d\theta &= \int_0^{\pi} 16\sin^2 2\theta\cos^2\theta d\theta \\
&= \int_0^{\pi} 16\left(\frac{1-\cos 4\theta}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta \\
&= 4\int_0^{\pi} (1-\cos 4\theta)(1+\cos 2\theta)d\theta \\
&= 4\int_0^{\pi} 1+\cos 2\theta-\cos 4\theta-\cos 4\theta\cos 2\theta d\theta \\
&= \int_0^{\pi} 4+4\cos 2\theta-4\cos 4\theta-4\cos 4\theta\cos 2\theta d\theta \\
&= \int_0^{\pi} 4+4\cos 2\theta-4\cos 4\theta-4\cdot\frac{1}{2}[\cos(4\theta+2\theta)+\cos(4\theta-2\theta)]d\theta \\
&= \int_0^{\pi} 4+4\cos 2\theta-4\cos 4\theta-2[\cos 6\theta+\cos 2\theta]d\theta \\
&= \int_0^{\pi} 4+4\cos 2\theta-4\cos 4\theta-2\cos 6\theta-2\cos 2\theta d\theta \\
&= \int_0^{\pi} 4+2\cos 2\theta-4\cos 4\theta-2\cos 6\theta d\theta \\
&= \left[4\theta+\sin 2\theta-\sin 4\theta-\frac{1}{3}\sin 6\theta\right]_0^{\pi} \\
&= 4\pi-0=4\pi \quad \#
\end{aligned}
$$

16. **(10 คะแนน)** จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$$

แนวคำตอบ ให้ $x = 3\sin\theta$ เมื่อ $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ นั่นคือ $\cos\theta \geq 0$ แล้ว $dx = 3\cos\theta\,d\theta$



จะได้ว่า $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{9-x^2}}{3}$ และ $\theta = \arcsin\left(\dfrac{x}{3}\right)$ ฉะนั้น

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx &= \int \frac{(3\sin\theta)^2}{\sqrt{9-9\sin^2\theta}} \cdot 3\cos\theta\,d\theta \\
&= \int \frac{9\sin^2\theta}{\sqrt{9(1-\sin^2\theta)}} \cdot 3\cos\theta\,d\theta \\
&= \int \frac{27\sin^2\theta\cos\theta}{\sqrt{9\cos^2\theta}}\,d\theta \\
&= \int \frac{27\sin^2\theta\cos\theta}{3\cos\theta}\,d\theta \\
&= 9\int \sin^2\theta\,d\theta \\
&= 9\int \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)\,d\theta \\
&= \frac{9}{2}\left[\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right] + C \\
&= \frac{9}{2}\theta - \frac{9}{4}\sin 2\theta + C \\
&= \frac{9}{2}\theta - \frac{9}{4}\cdot 2\sin\theta\cos\theta + C \\
&= \frac{9}{2}\arcsin\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{9}{2}\cdot\frac{x}{3}\cdot\frac{\sqrt{9-x^2}}{3} + C \\
&= \frac{9}{2}\arcsin\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{1}{2}x\sqrt{9-x^2} + C \qquad \#
\end{aligned}$$

17. **(10 คะแนน)** จงหา**ปริมาตรรูปทรงตัน**ที่เกิดจากการหมุนอาณาบริเวณ

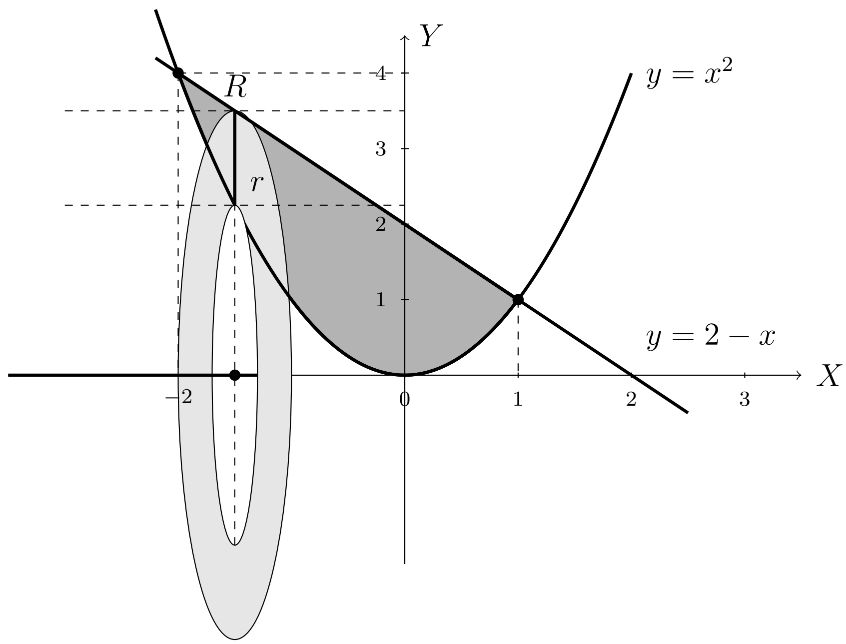
$$y = x^2 \qquad \text{และ} \qquad x + y = 2 \qquad \textbf{รอบแกน X}$$

โดยวาดกราฟประกอบ

แนวคำตอบ หาจุดตัดของ $y = x^2$ และ $y = 2 - x$ จาก $x^2 = 2 - x$ นั่นคือ

$$0 = x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$$

กราฟทั้งสองตัดกันที่ $x = -2, 1$ แสดงได้ดังกราฟ



หาปริมาตรปรงตันที่เกิดจากการหมุนโดยใช้วิธีแบบจาน โดยใช้ dx จะได้ว่า $R = 2 - x$ และ $r = x^2$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
V &= \int_{-2}^{1} \pi R^2 - \pi r^2 \, dx \\
&= \pi \int_{-2}^{1} (2-x)^2 - (x^2)^2 \, dx \\
&= \pi \int_{-2}^{1} 4 - 4x + x^2 - x^4 \, dx \\
&= \pi \left[4x - 2x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 \right]_{-2}^{1} \\
&= \pi \left[4 - 2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right] - \pi \left[-8 - 8 - \frac{8}{3} + \frac{32}{5} \right] \\
&= \pi \left[18 + \frac{9}{3} - \frac{33}{5} \right] \\
&= \frac{72\pi}{5} \qquad \#
\end{aligned}$$

18. **(10 คะแนน)** จงพิจารณาว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบต่อไปนี้ลู่เข้าหรือลู่ออก

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$$

แนวคำตอบ ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดผสม โดยพิจารณา

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx + \int_{-1}^{0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx + \int_{0}^{1} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx + \int_{1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$$

กำหนดให้ $u = \frac{1}{x}$ จะได้ว่า $du = -\frac{1}{x^2}dx$ หรือ $-x^2du = dx$ นั่นคือ

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx &= \int \frac{e^{u}}{x^2}\,(-x^2du)\\ &= -\int e^u\,du = -e^u + C\\ &= -e^{\frac{1}{x}} + C\end{aligned}$$

จะเห็นว่า

$$\begin{aligned}\int_{0}^{1} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx &= \lim_{t\to 0^+}\int_{t}^{1} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx\\ &= \lim_{t\to 0^+}[-e^{\frac{1}{x}}]_t^1\\ &= \lim_{t\to 0^+}[-e^{\frac{1}{t}} + e]\\ &= -\infty\end{aligned}$$

สรุปได้ว่า $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$ ลู่ออก