มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
คณะครุศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ข้อสอบปลายภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2567

รหัสวิชา	ชื่อวิชา	วันเวลาสอบ	คะแนนเต็ม
MAI1302	แคลคูลัส ๑	เวลา 15:00 - 18:00 วันพฤหัสบดี ที่ 31 ตุลาคม 2567	100 คะแนน 25%

ชื่อ-สกุล... **รหัสนักศึกษา**................................ **หมู่เรียน**................

คำชี้แจง

1. ข้อสอบมี 18 ข้อ 16 หน้า แบ่งออกเป็น 3 ตอน ประกอบด้วย
    - **ตอนที่** 1 ข้อสอบแบบ 5 ตัวเลือก จำนวน 5 ข้อ (ข้อละ 2 คะแนน รวม 10 คะแนน)
    - **ตอนที่** 2 ข้อสอบแบบเติมคำตอบ จำนวน 5 ข้อ (ข้อละ 2 คะแนน รวม 10 คะแนน)
    - **ตอนที่** 3 ข้อสอบแบบแสดงวิธีทำ จำนวน 8 ข้อ (ข้อละ 10 คะแนน รวม 80 คะแนน)
2. เขียนรหัสนักศึกษา และหมู่เรียนด้วย**ตัวบรรจงลงในข้อสอบทุกหน้า**
3. ไม่อนุญาตให้ใช้เครื่องคำนวณและเครื่องมือสื่อสาร
4. **ห้าม**นำข้อสอบออกจากห้องสอบโดยเด็ดขาด
5. หากมี**การทุจริต**ในการสอบ จะได้รับการลงโทษตามระเบียบของมหาวิทยาลัย

ข้าพเจ้าจะปฏิบัติตามข้อตกลงอย่างเคร่งครัด
ลงชื่อผู้เข้าสอบ

....

อาจารย์ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย

ตอนที่	1	2	3								รวม
ข้อ	1-5	6-10	11	12	13	14	15	16	17	18	
คะแนน											

กฎต่าง ๆ ที่อาจใช้ในข้อสอบ

1. $\int e^x dx = e^x + C$
2. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$
3. $\int \ln x dx = x\ln x - x + C$
4. $\int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x| + C$
5. $\int \dfrac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$
6. $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
8. $\int \cos x dx = \sin x + C$
9. $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$
10. $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$
11. $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$
12. $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$
13. $\int \tan x dx = \ln|\sec x| + C$
14. $\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$
15. $\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$
16. $\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$
17. $\sin x \cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x+y) + \sin(x-y)\right]$
18. $\cos x \sin y = \frac{1}{2}\left[\sin(x+y) - \sin(x-y)\right]$
19. $\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x+y) + \cos(x-y)\right]$
20. $\sin x \sin y = -\frac{1}{2}\left[\cos(x+y) - \cos(x-y)\right]$
21. $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$
22. $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$
23. $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$
24. $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$

ตอนที่ 1 : (10 คะแนน) จงกากบาททับข้อที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว ข้อละ 2 คะแนน

1. ข้อใดเป็น **ปฏิยานุพันธ์ (antiderivative)** ของฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

ก. $F(x) = x \arctan x$

ข. $F(x) = x - \arctan x$

ค. $F(x) = x + \arctan x$

ง. $F(x) = \arctan x - x$

จ. $F(x) = \arctan x$

2. ข้อใดกล่าว**ถูกต้อง** เกี่ยวกับการหาปริพันธ์โดยวิธีแยกส่วน (integration by part)

ก. $\displaystyle\int xe^x \, dx = xe^x - \int e^x \, dx$

ข. $\displaystyle\int x^2e^x \, dx = x^2e^x - \int xe^x \, dx$

ค. $\displaystyle\int x \sin x \, dx = x \cos x + \int \cos x \, dx$

ง. $\displaystyle\int x \cos x \, dx = x \sin x + \int \sin x \, dx$

จ. $\displaystyle\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \, dx$

3. การหาปริพันธ์ของ

$$\int \sqrt{9 - 4x^2}\, dx$$

โดยวิธีการเปลี่ยนตัวแปร u ด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ ข้อใดกำหนดได้**ถูกต้อง**

ก. $u = a\tan\theta$ เมื่อ $u = 2x$ และ $a = 3$

ข. $u = a\sec\theta$ เมื่อ $u = 2x$ และ $a = 3$

ค. $u = a\sec\theta$ เมื่อ $u = 3x$ และ $a = 2$

ง. $u = a\sin\theta$ เมื่อ $u = 2x$ และ $a = 3$

จ. $u = a\sin\theta$ เมื่อ $u = 3x$ และ $a = 2$

4. ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ (improper integral) ในข้อใดต่อไปนี้ **ลู่ออก (divergent)**

ก. $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\, dx$

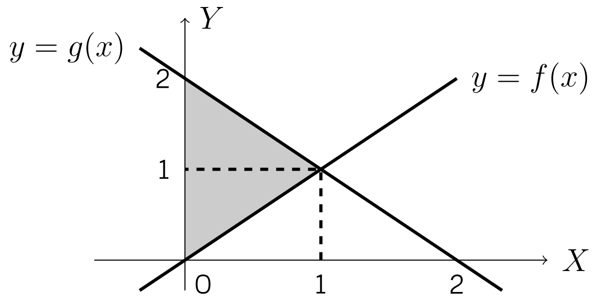
ข. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$

ค. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x}\, dx$

ง. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\, dx$

จ. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$

5. ข้อใดต่อไปนี้คือ**พื้นที่ของส่วนที่แรเงา**ของกราฟที่กำหนดให้



ก. $\displaystyle\int_0^2 g(x)\,dx$

ข. $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$

ค. $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 g(x)\,dx$

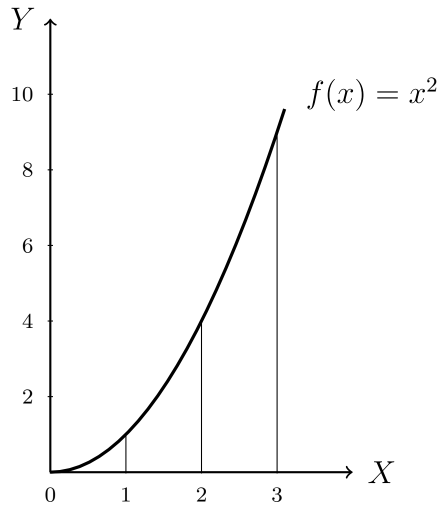
ง. $\displaystyle\int_0^1 f(x) - g(x)\,dx$

จ. $\displaystyle\int_0^1 g(x) - f(x)\,dx$

ตอนที่ 2 : (10 คะแนน) จงเติมคำตอบในช่องว่าง (ด้านซ้ายบน) ให้ถูกต้อง ข้อละ 2 คะแนน

6. ______________________

ให้ $f(x) = x^2$ เมื่อ $x \in [0, 3]$ จงหา $U(P, f) - L(P, f)$ เมื่อ $P = \{0, 1, 2, 3\}$ โดยแสดงดังกราฟ



7. ______________________

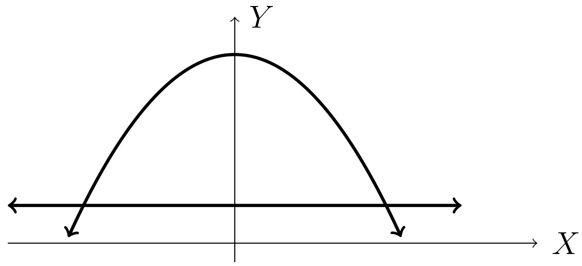
กำหนดให้ A, B และ C เป็นค่าคงตัว ที่สอดคล้องสมการของฟังก์ชันตรรกยะ

$$\frac{2}{x(x^2-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

จงหาค่าของ $A + 6B + 7C$

8. ______________________

จงหา**พื้นที่**ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = 5 - x^2$ และ $y = 1$



9. ______________________

พิจารณาการหาค่า **ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ (improper integral)** ต่อไปนี้

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx &= \int_{-1}^{a} \frac{1}{x}\,dx + \int_{a}^{1} \frac{1}{x}\,dx \\ &= \lim_{t\to a^+} \int_{-1}^{t} \frac{1}{x}\,dx + \lim_{s\to a^-} \int_{s}^{1} \frac{1}{x}\,dx\end{aligned}$$

แล้ว a มีค่าเท่าใด

10. ______________________

จงเลือกจำนวนเต็ม p มาอย่างน้อย 1 จำนวน ที่ทำให้ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ

$$\int_1^\infty x^p\,dx \qquad \textbf{ลู่เข้า (convergent)}$$

ตอนที่ 3 : (80 คะแนน) จงแสดงวิธีโดยละเอียด ข้อละ 10 คะแนน

11. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

11.1 **(5 คะแนน)** จงหาค่าของ $\int \frac{(x+1)^2}{x}\,dx$

11.2 **(5 คะแนน)** จงหาค่าของ $\int \frac{x}{(x+1)^2}\,dx$

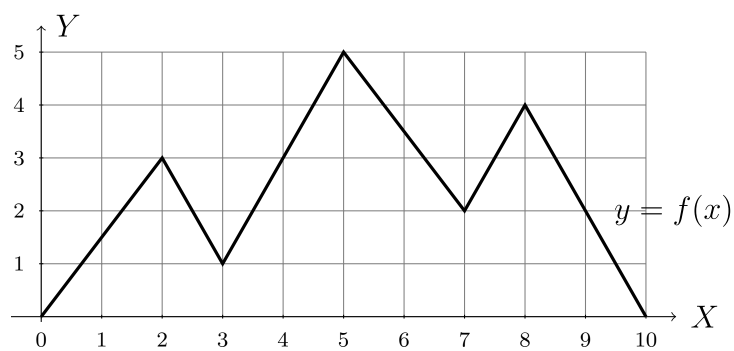
12. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

12.1 **(5 คะแนน)** กำหนดให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บนช่วง $[0, 3]$ โดยที่

$$\int_0^3 f(x)\,dx = 5 \quad \text{และ} \quad \int_3^1 f(x)\,dx = -1$$

จงหาค่าของ $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(2x)\,dx$

12.2 **(5 คะแนน)** ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่นำไปเขียนดังกราฟได้ดังนี้



จงหาค่าของ $\displaystyle\int_0^{10} f(x)\,dx$

13. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

13.1 **(5 คะแนน)** กำหนดให้

$$F(x) = \int_x^{x^2} e^{t^2}\, dt$$

จงหา $F(0)$ และ $F'(0)$

13.2 **(5 คะแนน)** จงหาปริพันธ์ของ

$$\int x \ln x \, dx$$

14. **(10 คะแนน)** จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

$$\int \frac{5}{(4x^2-1)(x^2+1)}\,dx$$

15. **(10 คะแนน)** จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

15.1 **(5 คะแนน)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2\theta}{\sec^2\theta}\,d\theta$

15.2 **(5 คะแนน)** $\displaystyle\int \cos x\cos 2x\cos 4x\,dx$

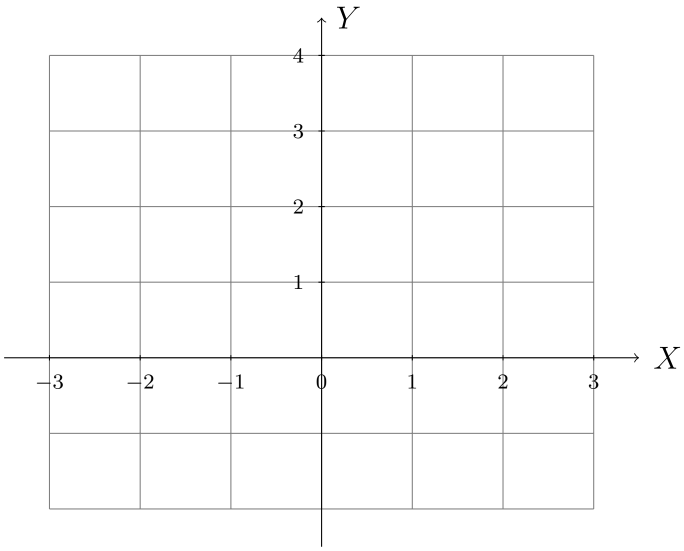
16. **(10 คะแนน)** จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$$

17. **(10 คะแนน)** จงหา**ปริมาตรรูปทรงตัน**ที่เกิดจากการหมุนอาณาบริเวณ

$$y = 4 - x^2 \qquad \text{และ} \qquad y = 4 - 2x$$ **รอบแกน Y**

โดยวาดกราฟประกอบ



18. **(10 คะแนน)** จงพิจารณาว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบต่อไปนี้ลู่เข้าหรือลู่ออก

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}\, dx$$

มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

คณะครุศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์

เฉลยข้อสอบปลายภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2567

รหัสวิชา	ชื่อวิชา	วันเวลาสอบ	คะแนนเต็ม
MAI1302	แคลคูลัส ๑	เวลา 15:00 - 18:00 วันพฤหัสบดี ที่ 31 ตุลาคม 2567	100 คะแนน 25%

โดย ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย

ตอนที่ 1 : (10 คะแนน) จงกากบาททับข้อที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว ข้อละ 2 คะแนน

1. ข้อใดเป็น **ปฏิยานุพันธ์ (antiderivative)** ของฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

   ก. $F(x) = x \arctan x$

   ข. $F(x) = x - \arctan x$ Answer

   ค. $F(x) = x + \arctan x$

   ง. $F(x) = \arctan x - x$

   จ. $F(x) = \arctan x$

   ตอบข้อ ข. จะเห็นว่า

$$F'(x) = 1 - \frac{1}{x^2+1} = \frac{(x^2+1)-1}{x^2+1} = \frac{x^2}{x^2+1} = f(x)$$

   ดังนั้น $F(x) = x - \arctan x$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f

2. ข้อใดกล่าว**ถูกต้อง** เกี่ยวกับการหาปริพันธ์โดยวิธีแยกส่วน (integration by part)

   ก. $\displaystyle\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx$ Answer

   ข. $\displaystyle\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - \int xe^x\,dx$

   ค. $\displaystyle\int x\sin x\,dx = x\cos x + \int \cos x\,dx$

   ง. $\displaystyle\int x\cos x\,dx = x\sin x + \int \sin x\,dx$

   จ. $\displaystyle\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\,dx$

   ตอบข้อ ก. ให้ $u = x$ จะได้ $du = dx$ และ $dv = e^x dx$ จะได้ $v = e^x$ ฉะนั้น

$$\int xe^x\,dx = uv - \int udv = xe^x - \int e^x\,dx$$

3. การหาปริพันธ์ของ

$$\int \sqrt{9-4x^2}\,dx$$

โดยวิธีการเปลี่ยนตัวแปร u ด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ ข้อใดกำหนดได้**ถูกต้อง**

ก. $u = a\tan\theta$ เมื่อ $u = 2x$ และ $a = 3$

ข. $u = a\sec\theta$ เมื่อ $u = 2x$ และ $a = 3$

ค. $u = a\sec\theta$ เมื่อ $u = 3x$ และ $a = 2$

ง. $u = a\sin\theta$ เมื่อ $u = 2x$ และ $a = 3$ Answer

จ. $u = a\sin\theta$ เมื่อ $u = 3x$ และ $a = 2$

ตอบข้อ ง. รูปแบบที่หนึ่ง $\sqrt{a^2-u^2} = \sqrt{3^2-(2x)^2}$ โดยกำหนด $u = a\sin\theta$ เมื่อ $u = 2x$ และ $a = 3$

4. ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ (improper integral) ในข้อใดต่อไปนี้ **ลู่ออก (divergent)**

ก. $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx$

ข. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$

ค. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x}\,dx$ Answer

ง. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx$

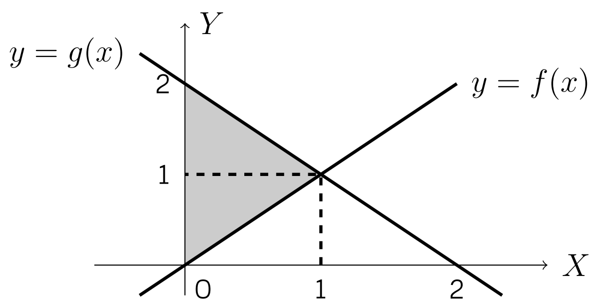
จ. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

ตอบข้อ ค. จะเห็นว่า

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx &= \lim_{t\to 0^+}\int_t^1 \frac{1}{x}\,dx \\
&= \lim_{t\to 0^+}\left[\ln|x|\right]_t^1 \\
&= \lim_{t\to 0^+}\left[\ln|t| - \ln 1\right] \\
&= \lim_{t\to 0^+}\left[\ln|t| - 0\right] \\
&= \lim_{t\to 0^+}\ln|t| = -\infty
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ ลู่ออก

5. ข้อใดต่อไปนี้คือ**พื้นที่ของส่วนที่แรเงา**ของกราฟที่กำหนดให้



ก. $\displaystyle\int_0^2 g(x)\,dx$

ข. $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$

ค. $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 g(x)\,dx$

ง. $\displaystyle\int_0^1 f(x) - g(x)\,dx$

จ. $\displaystyle\int_0^1 g(x) - f(x)\,dx$ Answer

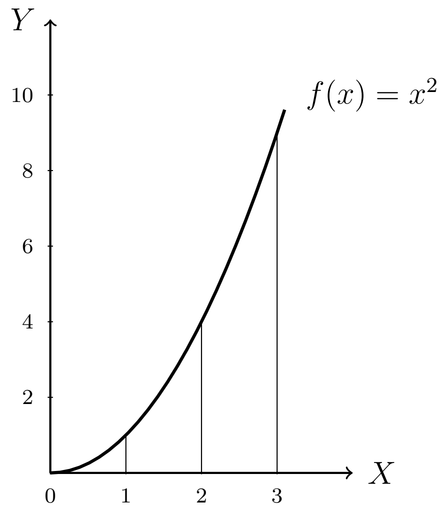
ตอบข้อ จ. หาพื้นที่โดยใช้ dx จึงแบ่งพื้นที่ออกเป็น 2 ส่วนด้านบนคือ $y = g(x)$ บน $[0, 1]$ และส่วนด้านล่าง $y = f(x)$ บน $[0, 1]$
ดังนั้นพื้นที่ที่แรเงาของกราฟเท่ากับ

$$A = \int_0^1 g(x) - f(x)\,dxdx$$

ตอนที่ 2 : (10 คะแนน) จงเติมคำตอบในช่องว่าง (ด้านซ้ายบน) ให้ถูกต้อง ข้อละ 2 คะแนน

6. ตอบ 9

ให้ $f(x) = x^2$ เมื่อ $x \in [0, 3]$ จงหา $U(P, f) - L(P, f)$ เมื่อ $P = \{0, 1, 2, 3\}$ โดยแสดงดังกราฟ



แนวคำตอบ จะเห็นว่า

$$\begin{aligned} U(P, f) &= 1 \cdot f(1) + 1 \cdot f(2) + 1 \cdot f(3) \\ L(P, f) &= 1 \cdot f(0) + 1 \cdot f(1) + 1 \cdot f(2) \\ U(P, f) - L(P, f) &= f(3) - f(0) = 9 - 0 = 9 \quad \# \end{aligned}$$

7. ตอบ 11

กำหนดให้ A, B และ C เป็นค่าคงตัว ที่สอดคล้องสมการของฟังก์ชันตรรกยะ

$$\frac{2}{x(x^2-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

จงหาค่าของ $A + 6B + 7C$

แนวคำตอบ พิจารณา

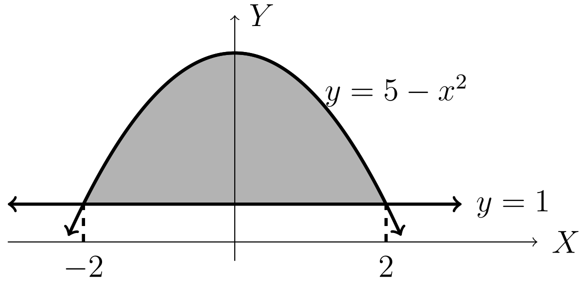
$$\begin{aligned} & 2 = A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1) \\ x = 0; \quad & 2 = -A + 0 + 0 \qquad \therefore A = -2 \\ x = 1; \quad & 2 = 0 + 2B + 0 \qquad \therefore B = 1 \\ x = -1; \quad & 2 = 0 + 0 + 2C \qquad \therefore C = 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$A + 6B + 7C = -2 + 6(1) + 7(1) = 11 \quad \#$$

8\. ตอบ $\dfrac{32}{3}$

จงหา**พื้นที่**ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = 5 - x^2$ และ $y = 1$



แนวคำตอบ จุดตัดกราฟ $y = 5 - x^2$ และ $y = 1$ หาได้จาก

$$5 - x^2 = 1 \text{ นั่นคือ } 0 = x^2 - 4 = (x-2)(x+2) \text{ ดังนั้นตัดกันที่ } x = -2, 2$$

หาพื้นที่โดยใช้ dx ของอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วย $y = 5 - x^2$ และ $y = 1$ บน $[-2, 2]$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{2} (5 - x^2) - 1\,dx = \int_{-2}^{2} 4 - x^2\,dx \\ &= \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \left[8 - \frac{8}{3}\right] - \left[-8 + \frac{8}{3}\right] = \frac{32}{3} \qquad \# \end{aligned}$$

9\. ตอบ 0

พิจารณาการหาค่า **ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ (improper integral)** ต่อไปนี้

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx &= \int_{-1}^{a} \frac{1}{x}\,dx + \int_{a}^{1} \frac{1}{x}\,dx \\ &= \lim_{t \to a^+} \int_{-1}^{t} \frac{1}{x}\,dx + \lim_{s \to a^-} \int_{s}^{1} \frac{1}{x}\,dx \end{aligned}$$

แล้ว a มีค่าเท่าใด

แนวคำตอบ เห็นได้ชัดว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สอง ซึ่งนิยามของฟังก์ชัน

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{บนช่วง } (-1, 0) \cup (0, 1)$$

ดังนั้น $a = 0$

10. ตอบ $p = -2, -3, -4, \ldots$

จงเลือกจำนวนเต็ม p มาอย่างน้อย 1 จำนวน ที่ทำให้ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ

$$\int_1^\infty x^p\,dx \qquad \text{ลู่เข้า (convergent)}$$

แนวคำตอบ ให้ p เป็นจำนวนเต็ม

กรณีที่ $p = -1$ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty x^p\,dx &= \lim_{t\to\infty}\int_1^t x^{-1}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x}\,dx \\
&= \lim_{t\to\infty}\left[\ln|x|\right]_1^t \\
&= \lim_{t\to\infty}\left[\ln|t| - \ln 1\right] = \lim_{t\to\infty}\left[\ln|t| - 0\right] \\
&= \lim_{t\to\infty}\ln|t| = +\infty
\end{aligned}$$

กรณีที่ $p \neq -1$ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty x^p\,dx &= \lim_{t\to\infty}\int_1^t x^p\,dx \\
&= \lim_{t\to\infty}\left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_1^t \\
&= \lim_{t\to\infty}\left[\frac{t^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{p+1}\right] \\
&= \frac{1}{p+1}\lim_{t\to\infty}\left[t^{p+1} - 1\right] \\
&= \frac{1}{p+1}\lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{t^{-p-1}} - 1\right] \\
&= \frac{1}{p+1}\left[0 - 1\right] \ \text{ เมื่อ } \ -p-1 > 0 \text{ หรือ } p < -1
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\int_1^\infty x^p\,dx$ ลู่เข้า เมื่อ $p = -2, -3, -4, \ldots$

ตอนที่ 3 : (80 คะแนน) จงแสดงวิธีโดยละเอียด ข้อละ 10 คะแนน

11. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

11.1 **(5 คะแนน)** จงหาค่าของ $\displaystyle\int \frac{(x+1)^2}{x}\,dx$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$
\begin{aligned}
\int \frac{(x+1)^2}{x}\,dx &= \int \frac{x^2+2x+1}{x}\,dx \\
&= \int \frac{x^2}{x}+\frac{2x}{x}+\frac{1}{x}\,dx \\
&= \int x+2+\frac{1}{x}\,dx \\
&= \frac{x^2}{2}+2x+\ln|x|+C \quad \#
\end{aligned}
$$

11.2 **(5 คะแนน)** จงหาค่าของ $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)^2}\,dx$

แนวคำตอบ กำหนดให้ $u = x+1$ จะได้ว่า $x = u-1$ และ $du = dx$ ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x}{(x+1)^2}\,dx &= \int \frac{u-1}{u^2}\,du \\
&= \int \frac{u}{u^2}-\frac{1}{u^2}\,du \\
&= \int \frac{1}{u}-u^{-2}\,du \\
&= \ln|u|-\frac{u^{-1}}{-1}+C \\
&= \ln|u|+\frac{1}{u}+C \\
&= \ln|x+1|+\frac{1}{x+1}+C \quad \#
\end{aligned}
$$

12. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

12.1 **(5 คะแนน)** กำหนดให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บนช่วง $[0, 3]$ โดยที่

$$\int_0^3 f(x)\,dx = 5 \qquad \text{และ} \qquad \int_3^1 f(x)\,dx = -1$$

จงหาค่าของ $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(2x)\,dx$

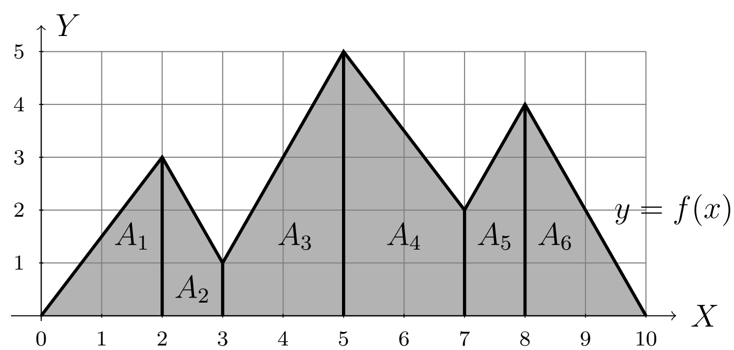
แนวคำตอบ ให้ $u = 2x$ นั่นคือ $du = 2dx$ และ

$$u(0) = 0 \qquad \text{และ} \qquad u(\tfrac{1}{2}) = 1$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}} f(2x)\,dx &= \int_{u(0)}^{u(\frac{1}{2})} f(u)\,\frac{du}{2} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 f(u)\,du \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^3 f(u)\,du + \int_3^1 f(u)\,du\right) \\
&= \frac{1}{2}(5 + (-1)) = 2 \quad \#
\end{aligned}$$

12.2 **(5 คะแนน)** ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่นำไปเขียนดังกราฟได้ดังนี้



จงหาค่าของ $\displaystyle\int_0^{10} f(x)\,dx$

แนวคำตอบ $\displaystyle\int_0^{10} f(x)\,dx$ หมายถึงพื้นที่ใต้กราฟของ $y = f(x)$ กับแกน X บนช่วง $[0, 10]$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int_0^{10} f(x)\,dx &= A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 \\
&= \frac{1}{2}(2)(3) + \frac{1}{2}[3+1](1) + \frac{1}{2}[1+5](2) + \frac{1}{2}[5+2](2) + \frac{1}{2}[2+4](1) + \frac{1}{2}(2)(4) \\
&= 3 + 2 + 6 + 7 + 3 + 4 \\
&= 25 \quad \#
\end{aligned}$$

13. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

13.1 **(5 คะแนน)** กำหนดให้

$$F(x) = \int_x^{x^2} e^{t^2}\,dt$$

จงหา $F(0)$ และ $F'(0)$

แนวคำตอบ เมื่อแทน $x = 0$ จะได้ว่า

$$F(0) = \int_0^0 e^{t^2}\,dt = 0 \quad \#$$

พิจารณา

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_x^0 e^{t^2}\,dt + \int_0^{x^2} e^{t^2}\,dt = -\int_0^x e^{t^2}\,dt + \int_0^{x^2} e^{t^2}\,dt \\ F'(x) &= \frac{d}{dx}\left(-\int_0^x e^{t^2}\,dt\right) + \frac{d}{dx}\int_0^{x^2} e^{t^2}\,dt \\ &= -e^{x^2} + e^{(x^2)^2}\cdot(x^2)' \\ &= -e^{x^2} + e^{x^4}\cdot 2x \\ &= -e^{x^2} + 2xe^{x^4} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$F'(0) = -e^0 + 2(0)e^0 = -1 \quad \#$$

13.2 **(5 คะแนน)** จงหาปริพันธ์ของ

$$\int x\ln x\,dx$$

แนวคำตอบ กำหนดให้

u	$=$	$\ln x$	dv	$=$	x
du	$=$	$\frac{1}{x}dx$	v	$=$	$\frac{x^2}{2}$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \int x\ln x\,dx &= \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx \\ &= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx \\ &= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C \quad \# \end{aligned}$$

14. **(10 คะแนน)** จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

$$\int \frac{5}{(4x^2-1)(x^2+1)}\,dx$$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\frac{5}{(4x^2-1)(x^2+1)} &= \frac{5}{(2x-1)(2x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{2x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \\
5 &= A(2x+1)(x^2+1) + B(2x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(2x-1)(2x+1) \\
x = \frac{1}{2}; \quad 5 &= \frac{5}{2}A + 0 + 0 \qquad \therefore A = 2 \\
x = -\frac{1}{2}; \quad 5 &= 0 - \frac{5}{2}B + 0 \qquad \therefore B = -2 \\
x = 0; \quad 5 &= A - B - D = 2 - (-2) - D = 4 - D \qquad \therefore D = -1 \\
x = 1; \quad 5 &= 6A + 2B + (C+D)(3) \\
&= 6(2) + 2(-2) + 3C + 3(-1) \\
&= 5 + 3C \qquad \therefore C = 0
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int \frac{5}{(4x^2-1)(x^2+1)}\,dx &= \int \frac{2}{2x-1} - \frac{2}{2x+1} - \frac{1}{x^2+1}\,dx \\
&= \ln|2x-1| - \ln|2x+1| - \arctan x + C \qquad \#
\end{aligned}$$

15. **(10 คะแนน)** จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

15.1 **(5 คะแนน)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2\theta}{\sec^2\theta}\,d\theta$

แนวคำตอบ วิธีที่ 1

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2\theta}{\sec^2\theta}\,d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\cdot\frac{\cos^2\theta}{1}\,d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2\theta\,d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)\,d\theta \\
&= \left[\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \left[\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right] - 0 \\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \qquad \#
\end{aligned}$$

วิธีที่ 2

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2\theta}{\sec^2\theta}\,d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2\theta - 1}{\sec^2\theta}\,d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta} - \frac{1}{\sec^2\theta}\,d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1-\cos^2\theta\,d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2\theta\,d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)\,d\theta \\
&= \left[\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \left[\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right] - 0 \\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \qquad \#
\end{aligned}$$

15.2 **(5 คะแนน)** $\displaystyle\int \cos x \cos 2x \cos 4x \, dx$

แนวคำตอบ วิธีที่ 1

$$\begin{aligned}
\int \cos x \cos 2x \cos 4x \, dx &= \int \cos x[\cos 2x \cos 4x] \, dx \\
&= \int \cos x \cdot \frac{1}{2}\left[\cos(2x+4x) + \cos(2x-4x)\right] \, dx \\
&= \frac{1}{2}\int \cos x \cdot \left[\cos 6x + \cos(-2x)\right] \, dx \\
&= \frac{1}{2}\int \cos x \cdot \left[\cos 6x + \cos 2x\right] \, dx \\
&= \frac{1}{2}\int \cos x \cos 6x + \cos x \cos 2x \, dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1}{2}[\cos(x+6x) + \cos(x-6x)] + \frac{1}{2}[\cos(x+2x) + \cos(x-2x)] \, dx \\
&= \frac{1}{4}\int \cos 7x + \cos(-5x) + \cos 3x + \cos(-x) \, dx \\
&= \frac{1}{4}\int \cos 7x + \cos 5x + \cos 3x + \cos x \, dx \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{7}\sin 7x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{3}\sin 3x + \sin x\right] + C \\
&= \frac{1}{28}\sin 7x + \frac{1}{20}\sin 5x + \frac{1}{12}\sin 3x + \frac{1}{4}\sin x + C \qquad \#
\end{aligned}$$

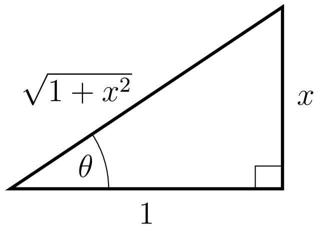
วิธีที่ 2 ให้ $u = \sin x$ จะได้ว่า $du = \cos x dx$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int \cos x \cos 2x \cos 4x \, dx &= \int \cos 2x \cdot \cos 4x \, (\cos x \, dx) \\
&= \int (1 - 2\sin^2 x)(1 - 2\sin^2 2x) \, d\sin x \\
&= \int (1 - 2\sin^2 x)(1 - 2(2\sin x \cos x)^2) \, d\sin x \\
&= \int (1 - 2\sin^2 x)(1 - 2(4\sin^2 x \cos^2 x)) \, d\sin x \\
&= \int (1 - 2\sin^2 x)(1 - 8\sin^2 x(1 - \sin^2 x)) \, d\sin x \\
&= \int (1 - 2u^2)(1 - 8u^2(1 - u^2)) \, du \\
&= \int (1 - 2u^2)(1 - 8u^2 + 8u^4) \, du \\
&= \int 1 - 10u^2 + 24u^4 - 16u^6 \, du \\
&= u - \frac{10}{3}u^3 + \frac{24}{5}u^5 - \frac{16}{7}u^7 + C \\
&= \sin x - \frac{10}{3}\sin^3 x + \frac{24}{5}\sin^5 x - \frac{16}{7}\sin^7 x + C \qquad \#
\end{aligned}$$

16. **(10 คะแนน)** จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$$

แนวคำตอบ ให้ $x = \tan\theta$ เมื่อ $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ นั่นคือ $\sec\theta > 0$ แล้ว $dx = \sec^2\theta\,d\theta$



จะได้ว่า $\sin\theta = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ และ $\sec\theta = \sqrt{1+x^2}$ ฉะนั้น

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx &= \int \frac{(\tan\theta)^2}{(1+\tan^2\theta)^{\frac{3}{2}}} \cdot \sec^2\theta\,d\theta \\
&= \int \frac{\tan^2\theta}{(\sec^2\theta)^{\frac{3}{2}}} \cdot \sec^2\theta\,d\theta \\
&= \int \frac{\tan^2\theta}{\sec^3\theta} \cdot \sec^2\theta\,d\theta \\
&= \int \frac{\tan^2\theta}{\sec\theta}\,d\theta \\
&= \int \frac{\sec^2\theta - 1}{\sec\theta}\,d\theta \\
&= \int \frac{\sec^2\theta}{\sec\theta} - \frac{1}{\sec\theta}\,d\theta \\
&= \int \sec\theta - \cos\theta\,d\theta \\
&= \ln|\sec\theta + \tan\theta| - \sin\theta + C \\
&= \ln|\sqrt{1+x^2} + x| - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C \qquad \#
\end{aligned}$$

17. **(10 คะแนน)** จงหา**ปริมาตรรูปทรงตัน**ที่เกิดจากการหมุนอาณาบริเวณ

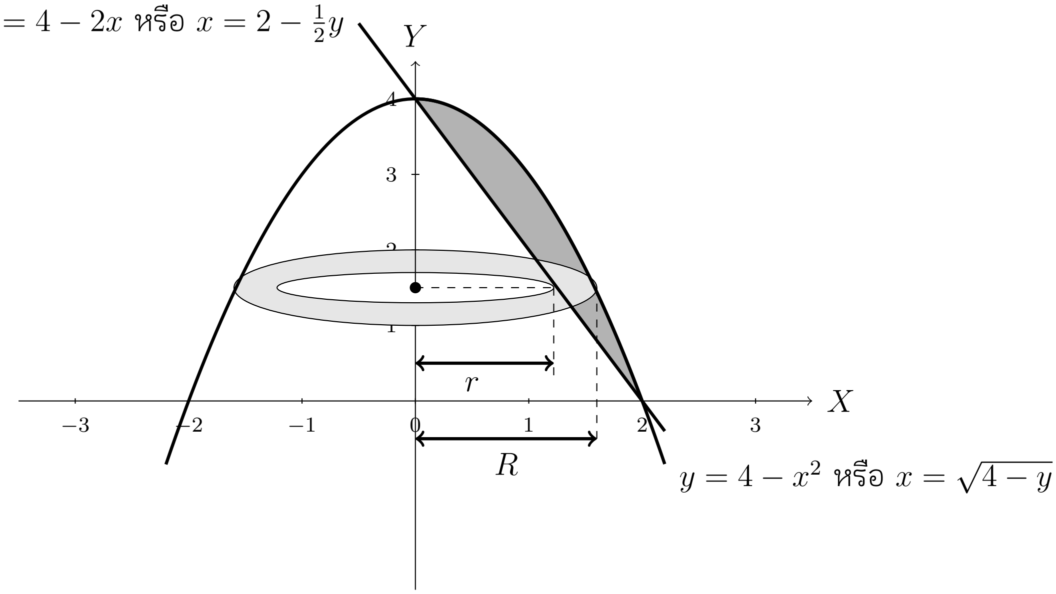
$$y = 4 - x^2 \qquad \text{และ} \qquad y = 4 - 2x \qquad \textbf{รอบแกน Y}$$

โดยวาดกราฟประกอบ

แนวคำตอบ หาจุดตัดของ $y = 4 - x^2$ และ $y = 4 - 2x$ จาก $4 - x^2 = 4 - 2x$ นั่นคือ

$$0 = x^2 - 2x = x(x-2)$$

กราฟทั้งสองตัดกันที่ $x = 0, 2$ แสดงได้ดังกราฟ



หาปริมาตรปรงตันที่เกิดจากการหมุนโดยใช้วิธีแบบจาน โดยใช้ dy จะได้ว่า $R = \sqrt{4-y}$ และ $r = 2 - \frac{1}{2}y$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^4 \pi R^2 - \pi r^2 \, dy \\
&= \pi \int_0^4 (\sqrt{4-y})^2 - \left(2 - \frac{1}{2}y\right)^2 \, dx \\
&= \pi \int_0^4 (4-y) - \left(4 - 2y + \frac{1}{4}y^2\right) \, dx \\
&= \pi \int_0^4 y - \frac{1}{4}y^2 \, dx \\
&= \pi \left[\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{12}y^3\right]_0^4 \\
&= \pi \left[\frac{16}{2} - \frac{64}{12}\right] - 0 \\
&= \pi \left[8 - \frac{16}{3}\right] \\
&= \frac{8\pi}{3} \qquad \#
\end{aligned}$$

18. **(10 คะแนน)** จงพิจารณาว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบต่อไปนี้ลู่เข้าหรือลู่ออก

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$$

แนวคำตอบ ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง โดยพิจารณา

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$$

กำหนดให้ $u = \arctan x$ จะได้ว่า $du = \frac{1}{1+x^2}dx$ หรือ $(1+x^2)du = dx$ นั่นคือ

$$\begin{aligned}
\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx &= \int \frac{u}{1+x^2}(1+x^2)du \\
&= \int u\,du \\
&= \frac{1}{2}u^2 + C \\
&= \frac{1}{2}[\arctan x]^2 + C
\end{aligned}$$

จะเห็นว่า

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx &= \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{0} \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx + \lim_{s\to\infty}\int_{0}^{s} \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx \\
&= \lim_{t\to-\infty}\left[\frac{1}{2}[\arctan x]^2\right]_t^0 + \lim_{s\to\infty}\left[\frac{1}{2}[\arctan x]^2\right]_0^s \\
&= \lim_{t\to-\infty}\left[0-\frac{1}{2}[\arctan t]^2\right] + \lim_{s\to\infty}\left[\frac{1}{2}[\arctan s]^2-0\right] \\
&= -\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \\
&= -\frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{8} \\
&= 0
\end{aligned}$$

สรุปได้ว่า $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$ ลู่เข้า