มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
คณะครุศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ข้อสอบปลายภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2566

รหัสวิชา	ชื่อวิชา	วันเวลาสอบ	คะแนนเต็ม
MAC1303	แคลคูลัส ๒	เวลา 13:00 - 16:00 วันศุกร์ ที่ 27 ตุลาคม 2566	100 คะแนน 25%

ชื่อ-สกุล.. **รหัสนักศึกษา**................................. **หมู่เรียน**................

คำชี้แจง

1. ข้อสอบมี 18 ข้อ 15 หน้า แบ่งออกเป็น 3 ตอน ประกอบด้วย
   - **ตอนที่** 1 ข้อสอบแบบ 5 ตัวเลือกจำนวน 5 ข้อ (ข้อละ 2 คะแนน รวม 10 คะแนน)
   - **ตอนที่** 2 ข้อสอบแบบเติมคำตอบจำนวน 5 ข้อ (ข้อละ 2 คะแนน รวม 10 คะแนน)
   - **ตอนที่** 3 ข้อสอบแบบแสดงวิธีทำจำนวน 8 ข้อ (ข้อละ 10 คะแนน รวม 80 คะแนน)
2. เขียนรหัสนักศึกษา และหมู่เรียนด้วย**ตัวบรรจงลงในข้อสอบทุกหน้า**
3. ไม่อนุญาตให้ใช้เครื่องคำนวณและเครื่องมือสื่อสาร
4. **อนุญาต**ให้นำกระดาษที่เขียนด้วยตัวเอง 1 แผ่น ขนาด A4
5. **ห้าม**นำข้อสอบออกจากห้องสอบโดยเด็ดขาด
6. หากมี**การทุจริต**ในการสอบ จะได้รับการลงโทษตามระเบียบของมหาวิทยาลัย

ข้าพเจ้าจะปฏิบัติตามข้อตกลงอย่างเคร่งครัด
ลงชื่อผู้เข้าสอบ

....

อาจารย์ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย

ตอนที่	1	2	3								รวม
ข้อ	1-5	6-10	11	12	13	14	15	16	17	18	
คะแนน											

ตอนที่ 1 : (10 คะแนน) จงกากบาททับข้อที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว ข้อละ 2 คะแนน

1. ให้ $A(1, -\sqrt{3})$ เป็นจุดในระบบพิกัดฉาก ข้อใดต่อไป**นี้ไม่ใช่**จุด A ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

   ก. $(2, \frac{\pi}{3})$

   ข. $(2, -\frac{\pi}{3})$

   ค. $(2, \frac{5\pi}{3})$

   ง. $(-2, \frac{2\pi}{3})$

   จ. $(-2, -\frac{4\pi}{3})$

2. เมื่อแปลงสมการ

$$(r - \sin\theta)(r - \cos\theta) = \sin\theta\cos\theta$$

   ให้อยู่ในระบบพิกัดฉาก จะตรงกับข้อใดต่อไปนี้

   ก. $\sqrt{x^2 + y^2} = x + y$

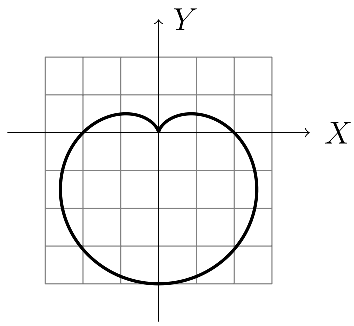
   ข. $\sqrt{x^2 + y^2} = -x - y$

   ค. $x^2 + y^2 = x + y$

   ง. $x^2 + y = x + y^2$

   จ. $x + y^2 = x^2 + y$

3. ข้อใดคือสมการของกราฟต่อไปนี้



ก. $r = 1 - 2\cos\theta$

ข. $r = 1 + \sin\theta$

ค. $r = 2 - 2\cos\theta$

ง. $r = 2 + 2\sin\theta$

จ. $r = 2 - 2\sin\theta$

4. สมการเชิงอนุพันธ์ใดต่อไปนี้มีผลเฉลยเฉพาะคือ $u = xe^y$

ก. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$

ข. $y\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$

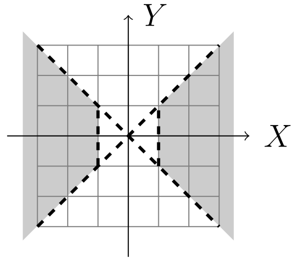
ค. $\dfrac{\partial u}{\partial x} - x\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$

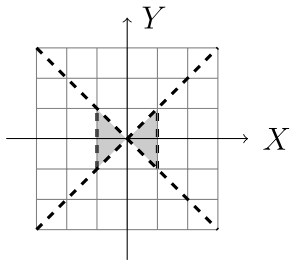
ง. $\dfrac{\partial u}{\partial x} - y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$

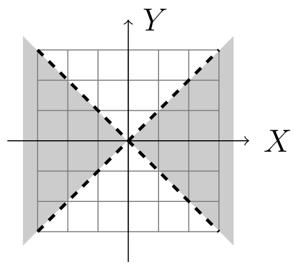
จ. $\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$

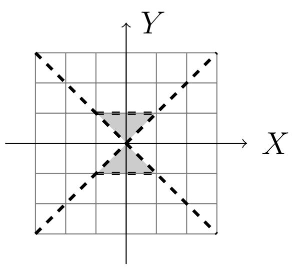
5. กราฟข้อใดแสดงโดเมนของฟังก์ชัน

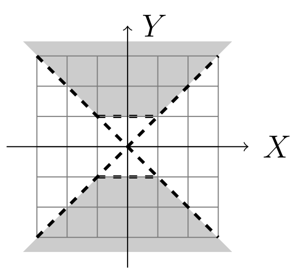
$$f(x,y) = \frac{\ln(x^2 - y^2)}{\sqrt{x^2 - y^2}}$$

ก. 

ข. 

ค. 

ง. 

จ. 

ตอนที่ 2 : (10 คะแนน) จงเติมคำตอบในช่องว่าง (ด้านซ้ายบน) ให้ถูกต้อง ข้อละ 2 คะแนน

6. ______________________

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2 - x + y}{x - y}$$ มีค่าเท่าใด

7. ______________________

กำหนดให้ $f(x,y) = \sin(x\cos y)$ จงหาค่าของ $f_{xx}(-\frac{\pi}{2}, 0)$

8. ____________________

จงใช้**ค่าเชิงอนุพันธ์**ประมาณค่า $\sqrt{4.02}+\sqrt{3.98}$

9. ____________________

ปริพันธ์สองชั้น $\int_0^1 \int_{-3}^3 x(x+y)^2\,dxdy$ มีค่าเท่าใด

10. ______________________

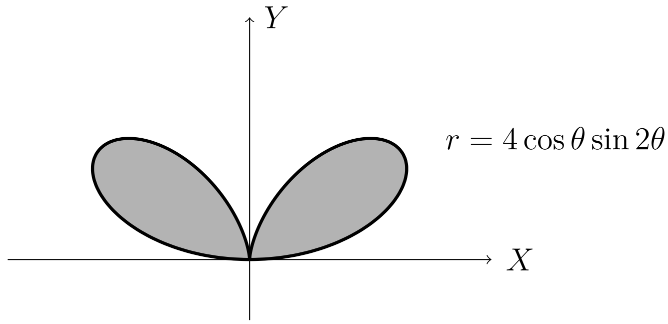
กำหนดให้ $f(x,y) = 2x + 3y$ กำหนดให้อาณาบริเวณ ในระบบพิกัดเชิงขั้วคือ

$$D = \{(r,\theta) : 0 \leq r \leq 3 \text{ และ } 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

จงหาค่าของ $\displaystyle\iint_D f$

ตอนที่ 3 : (80 คะแนน) จงแสดงวิธีโดยละเอียด ข้อละ 10 คะแนน

11. **(10 คะแนน)** จงหาพื้นที่แรเงาต่อไปนี้โดยใช้**ปริพันธ์ในรูปเชิงขั้ว**



12. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

12.1 **(5 คะแนน)** จงตรวจสอบว่าลิมิต $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$ มีค่าหรือไม่

12.2 **(5 คะแนน)** จงแสดงว่าฟังก์ชัน

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3}{x^2+y^2} & \text{เมื่อ } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{เมื่อ } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

มีความต่อเนื่องที่จุด $(0,0)$

13. **(10 คะแนน)** กำหนดให้

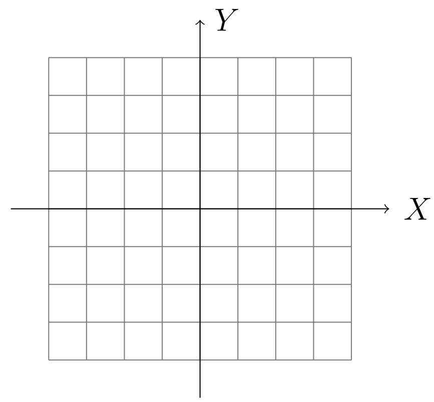
$$u = \frac{1}{x+y} \quad \text{และ} \quad x = r + \cos\theta, \quad y = r + \sin\theta$$

จงหาค่าของ $\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{\partial u}{\partial \theta}$ ที่ $(r,\theta) = (1,0)$

14. **(10 คะแนน)** จง**วาดกราฟแสดงโดเมน**ของปริพันธ์สองชั้นต่อไปนี้

$$\int_0^2 \int_{-y^2}^{y^2} f(x,y)\,dxdy$$

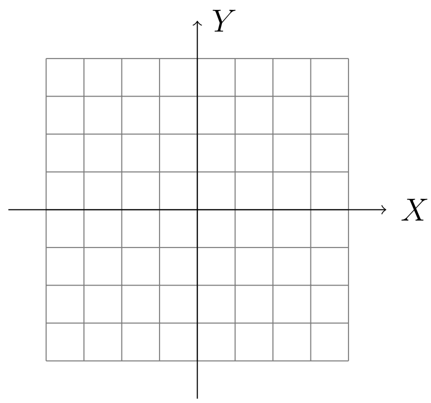
และ**เปลี่ยนลำดับการปริพันธ์**



15. **(10 คะแนน)** จง**วาดกราฟแสดงโดเมน**ของปริพันธ์สองชั้นต่อไปนี้

$$\int_0^1 \int_{-x}^{x} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dydx$$

และหาค่าของปริพันธ์ดังกล่าวโดยใช้**รูปแบบเชิงขั้ว**



16. **(10 คะแนน)** จงหา**ผลเฉลยทั่วไป**ของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

16.1 **(5 คะแนน)** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y - yx}{x - xy}$

16.2 **(5 คะแนน)** $ye^x dx + (e^x + y)dy = 0$

17. **(10 คะแนน)** จงหา**ผลเฉลยเฉพาะ**ของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

$$(x^2 + y^2)dx + 3xydy = 0$$

เมื่อ $y(1) = 0$

18. **(10 คะแนน)** จงหา**ผลเฉลยเฉพาะ**ของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

$$\sin x \frac{dy}{dx} + y \cos x = \cos^2 x$$

เมื่อ $y(\frac{\pi}{2}) = 0$

มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
คณะครุศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์
เฉลยข้อสอบปลายภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2566

รหัสวิชา	ชื่อวิชา	วันเวลาสอบ	คะแนนเต็ม
MAC1303	แคลคูลัส ๒	เวลา 13:00 - 16:00 วันศุกร์ ที่ 27 ตุลาคม 2566	100 คะแนน 25%

โดย ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย

ตอนที่ 1 : (10 คะแนน) จงกากบาททับข้อที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว ข้อละ 2 คะแนน

1. ให้ $A(1,-\sqrt{3})$ เป็นจุดในระบบพิกัดฉาก ข้อใดต่อไปนี้**ไม่ใช่**จุด A ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

   ก. $(2,\frac{\pi}{3})$ Answer
   ข. $(2,-\frac{\pi}{3})$
   ค. $(2,\frac{5\pi}{3})$
   ง. $(-2,\frac{2\pi}{3})$
   จ. $(-2,-\frac{4\pi}{3})$

   ตอบข้อ ก. ไม่ถูกต้องเนื่องจาก $x = 2\cos\frac{\pi}{3} = 1$ และ $y = 2\sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ ซึ่งไม่ใช่จุด A ที่กำหนด

2. เมื่อแปลงสมการ

$$(r-\sin\theta)(r-\cos\theta) = \sin\theta\cos\theta$$

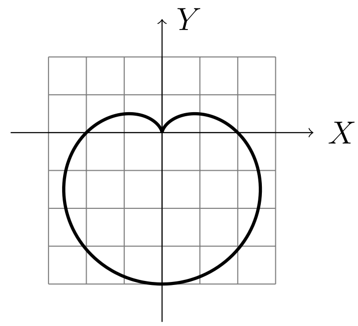
   ให้อยู่ในระบบพิกัดฉาก จะตรงกับข้อใดต่อไปนี้

   ก. $\sqrt{x^2+y^2} = x+y$
   ข. $\sqrt{x^2+y^2} = -x-y$
   ค. $x^2+y^2 = x+y$ Answer
   ง. $x^2+y = x+y^2$
   จ. $x+y^2 = x^2+y$

   ตอบข้อ ค. กำหนดให้ $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ และ $x^2+y^2 = r^2$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} r^2 - r\cos\theta - r\sin\theta + \sin\theta\cos\theta &= \sin\theta\cos\theta \\ r^2 &= r\cos\theta + r\sin\theta \\ x^2+y^2 &= x+y \end{aligned}$$

3. ข้อใดคือสมการของกราฟต่อไปนี้



ก. $r = 1 - 2\cos\theta$

ข. $r = 1 + \sin\theta$

ค. $r = 2 - 2\cos\theta$

ง. $r = 2 + 2\sin\theta$

จ. $r = 2 - 2\sin\theta$ Answer

ตอบข้อ จ. กราฟคาร์ดิออยด์ $r = a + b\sin\theta$ กรณี $|a| = |b|$ และ $b < 0$ จะเป็นรูปหัวหัว

4. สมการเชิงอนุพันธ์ใดต่อไปนี้มีผลเฉลยเฉพาะคือ $u = xe^y$

ก. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$ Answer

ข. $y\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$

ค. $\dfrac{\partial u}{\partial x} - x\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$

ง. $\dfrac{\partial u}{\partial x} - y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$

จ. $\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$

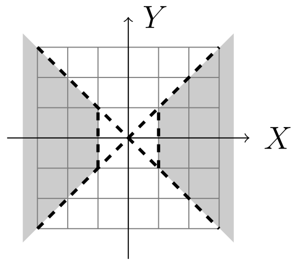
ตอบข้อ ก. เนื่องจาก

$$x\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = x\frac{\partial (xe^y)}{\partial x} - \frac{\partial (xe^y)}{\partial y} = x \cdot e^y - xe^y = 0$$

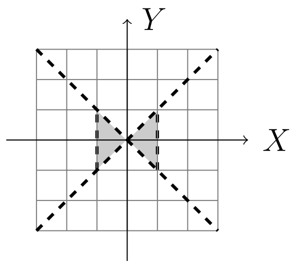
5. กราฟข้อใดแสดงโดเมนของฟังก์ชัน

$$f(x,y)=\frac{\ln(x^2-y^2)}{\sqrt{x^2-y^2}}$$

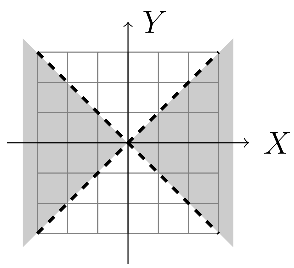
ก.



ข.

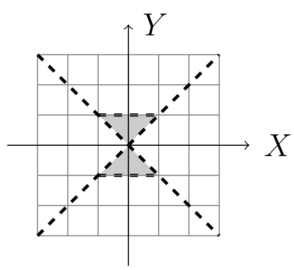


ค.

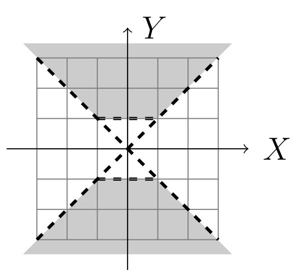


Answer

ง.



จ.



ตอบข้อ ค. จะเห็นว่า f หาค่าได้ก็ต่อเมื่อ $x^2-y^2>0$ หรือ $|x|>|y|$ ดังนั้น

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:|x|>|y|\}$$

ตอนที่ 2 : (10 คะแนน) จงเติมคำตอบในช่องว่าง (ด้านซ้ายบน) ให้ถูกต้อง ข้อละ 2 คะแนน

6. ตอบ -1

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2-x+y}{x-y}$$ มีค่าเท่าใด

แนวคำตอบ จะเห็นว่า

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2-x+y}{x-y} \lim_{(x,y)\to(0,0)} &\frac{(x-y)(x+y)-(x-y)}{x-y} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-y)[(x+y)-1]}{x-y} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} [(x+y)-1] = -1 \quad \#\end{aligned}$$

7. ตอบ 1

กำหนดให้ $f(x,y)=\sin(x\cos y)$ จงหาค่าของ $f_{xx}(-\frac{\pi}{2},0)$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}f_x(x,y) &= \cos(x\cos y)\cdot\frac{\partial}{\partial x}(x\cos y) = \cos(x\cos y)\cdot\cos y \\ f_{xx}(x,y) &= \cos y\cdot\frac{\partial}{\partial x}(\cos(x\cos y)) \\ &= \cos y\cdot(-\sin(x\cos y))\cdot\frac{\partial}{\partial x}(x\cos y) \\ &= -\cos y\cdot\sin(x\cos y)\cdot\cos y = -\cos^2 y\cdot\sin(x\cos y)\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$f_{xx}(-\frac{\pi}{2},0) = -\cos^2 0\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{2}\cos 0\right) = -1^2\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1(-1) = 1 \quad \#$$

8. ตอบ 4

จงใช้**ค่าเชิงอนุพันธ์**ประมาณค่า $\sqrt{4.02}+\sqrt{3.98}$

แนวคำตอบ กำหนดให้ $f(x,y)=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ จะได้ว่า

$$f_x(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \text{และ} \qquad f_y(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

ประมาณค่าที่ $x=2, y=2$ และ $dx=0.02,\ dy=-0.02$ โดย

$$\begin{aligned}\sqrt{4.02}+\sqrt{3.98} &= f(4.02,3.98) = f(4+0.02,4-0.02) \\ &\approx f(4,4)+f_x(4,4)dx+f_y(4,4)dy \\ &= (2+2)+\frac{1}{2\sqrt{4}}\cdot 0.02+\frac{1}{2\sqrt{4}}(-0.02) \\ &= 4 \quad \#\end{aligned}$$

9. ตอบ 18

ปริพันธ์สองชั้น $\int_0^1 \int_{-3}^3 x(x+y)^2\,dxdy$ มีค่าเท่าใด

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_{-3}^3 x(x+y)^2\,dxdy &= \int_0^1 \int_{-3}^3 x(x^2+2xy+y^2)\,dxdy \\
&= \int_0^1 \int_{-3}^3 x^3+2x^2y+xy^2\,dxdy \\
&= \int_0^1 \left[\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3y}{3}+\frac{x^2y^2}{2}\right]_{x=-3}^{x=3} dy \\
&= \int_0^1 \left[\frac{81}{4}+18y+\frac{9y^2}{2}\right]-\left[\frac{81}{4}-18y+\frac{9y^2}{2}\right] dy \\
&= \int_0^1 36y\,dy \\
&= [18y^2]_0^1 = 18
\end{aligned}$$

10. ตอบ 54

กำหนดให้ $f(x,y)=2x+3y$ กำหนดให้อาณาบริเวณ ในระบบพิกัดเชิงขั้วคือ

$$D=\{(r,\theta):0\le r\le 3 \text{ และ } 0\le\theta\le\pi\}$$

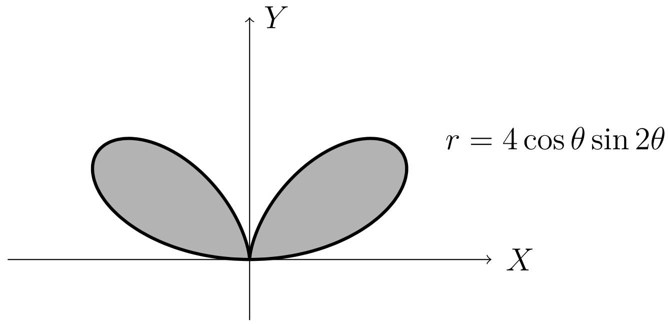
จงหาค่าของ $\iint\limits_D f$

แนวคำตอบ พิจารณา $x=r\cos\theta$ และ $y=r\sin\theta$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D f &= \iint\limits_D 2x+3y\,dxdy \\
&= \int_0^3 \int_0^\pi (2r\cos\theta+3r\sin\theta)rd\theta dr \\
&= \int_0^3 \int_0^\pi r^2(2\cos\theta+3\sin\theta)d\theta dr \\
&= \left(\int_0^3 r^2dr\right)\left(\int_0^\pi 2\cos\theta+3\sin\theta d\theta\right) \\
&= \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^3 \cdot [2\sin\theta-3\cos\theta]_0^\pi \\
&= (9-0)[(0+3)-(0-3)] = 54 \quad \#
\end{aligned}$$

ตอนที่ 3 : (80 คะแนน) จงแสดงวิธีโดยละเอียด ข้อละ 10 คะแนน

11. **(10 คะแนน)** จงหาพื้นที่แรเงาต่อไปนี้โดยใช้**ปริพันธ์ในรูปเชิงขั้ว**



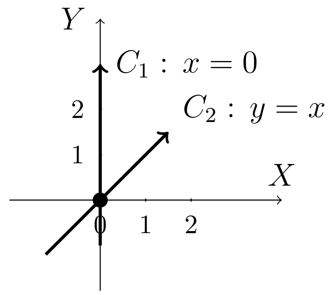
แนวคำตอบ จากกราฟพื้นที่ที่แรเงาคือพื้นที่ปิดล้อมด้วย $r = 4\cos\theta\sin 2\theta$ จาก 0 ถึง π ดังนั้นพื้นที่ที่แรเงาเท่ากับ

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^\pi \frac{1}{2} r^2 d\theta \\
&= \int_0^\pi \frac{1}{2}(4\cos\theta\sin 2\theta)^2 d\theta \\
&= \int_0^\pi \frac{1}{2}\left[4\cdot\frac{1}{2}(\sin(2\theta+\theta)+\sin(2\theta-\theta))\right]^2 d\theta \\
&= \int_0^\pi \frac{1}{2}\left[2(\sin 3\theta+\sin\theta)\right]^2 d\theta \\
&= \int_0^\pi \frac{1}{2}\cdot 4(\sin^2 3\theta + 2\sin 3\theta\sin\theta + \sin^2\theta) d\theta \\
&= \int_0^\pi 2\sin^2 3\theta + 4\sin 3\theta\sin\theta + 2\sin^2\theta d\theta \\
&= \int_0^\pi (1-\cos 6\theta) - 2[\cos(3\theta+\theta)-\cos(3\theta-\theta)] + (1-\cos 2\theta) d\theta \\
&= \int_0^\pi 2 - \cos 6\theta - 2\cos 4\theta + \cos 2\theta d\theta \\
&= \left[2\theta - \frac{1}{6}\sin 6\theta - \frac{1}{2}\sin 4\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^\pi \\
&= 2\pi - 0 = 2\pi \quad \#
\end{aligned}$$

12. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

12.1 **(5 คะแนน)** จงตรวจสอบว่าลิมิต $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$ มีค่าหรือไม่

แนวคำตอบ พิจารณาเส้นโค้งที่ผ่านจุด $(0,0)$ คือ $C_1 : x = 0$ และ $C_2 : y = x$



บน $C_1 : x = 0$ จะได้

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{บน}C_1}} c = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{บน}C_1}} \frac{(0+y)^2}{0^2+y^2} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{บน}C_1}} \frac{y^2}{y^2} = 1$$

บน $C_2 : y = x$ จะได้

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{บน}C_2}} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{บน}C_2}} \frac{(x+x)^2}{x^2+x^2} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{บน}C_2}} \frac{4x^2}{2x^2} = 2$$

เนื่องจากลิมิตบน C_1 และ C_2 มีค่าไม่เท่ากัน ดังนั้น $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$ ไม่มีค่า

12.2 **(5 คะแนน)** จงแสดงว่าฟังก์ชัน

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3}{x^2+y^2} & \text{เมื่อ } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{เมื่อ } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

มีความต่อเนื่องที่จุด $(0,0)$

แนวคำตอบ

$$\text{ให้} \quad f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2} \qquad \text{และ} \qquad g(x,y) = 2x$$

เนื่องจาก $y^2 \geq 0$ นั่นคือ $x^2 + y^2 \geq x^2$ ดังนั้น $\dfrac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$ สำหรับ $(x,y) \neq (0,0)$ แล้ว

$$|f(x,y)| = \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1 \quad \text{สำหรับ } (x,y) \neq (0,0)$$

และ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 2x = 0$ ดังนั้น

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^3}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0)$$

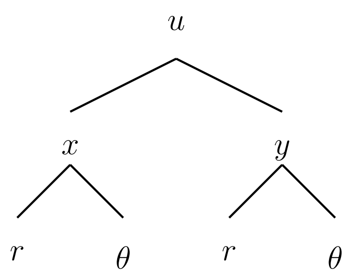
ดังนั้น f ต่อเนื่องที่จุด $(0,0)$

13. **(10 คะแนน)** กำหนดให้

$$u = \frac{1}{x+y} \quad \text{และ} \quad x = r + \cos\theta, \quad y = r + \sin\theta$$

จงหาค่าของ $\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{\partial u}{\partial \theta}$ ที่ $(r,\theta) = (1,0)$

แนวคำตอบ พิจารณาแผนภาพ



$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x+y}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial r}(r+\cos\theta) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x+y}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial r}(r+\sin\theta)\\
&= \left(-\frac{1}{(x+y)^2}\right)\cdot 1 + \left(-\frac{1}{(x+y)^2}\right)\cdot 1\\
&= -\frac{2}{(x+y)^2}
\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x+y}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial \theta}(r+\cos\theta) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x+y}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial \theta}(r+\sin\theta)\\
&= \left(-\frac{1}{(x+y)^2}\right)\cdot(-\sin\theta) + \left(-\frac{1}{(x+y)^2}\right)\cdot \cos\theta\\
&= \frac{\sin\theta - \cos\theta}{(x+y)^2}
\end{aligned}$$

เนื่องจาก $r = 1$ และ $\theta = 0$ จะได้ว่า $x = 1 + 1 = 2$ และ $y = 1 + 0 = 1$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial r}(1,0) + \frac{\partial u}{\partial \theta}(1,0) &= -\frac{2}{(2+1)^2} + \frac{\sin 0 - \cos 0}{(2+1)^2}\\
&= -\frac{2}{9} - \frac{1}{9}\\
&= -\frac{1}{3} \quad \#
\end{aligned}$$

14. **(10 คะแนน)** จงวาด**กราฟแสดงโดเมน**ของปริพันธ์สองชั้นต่อไปนี้

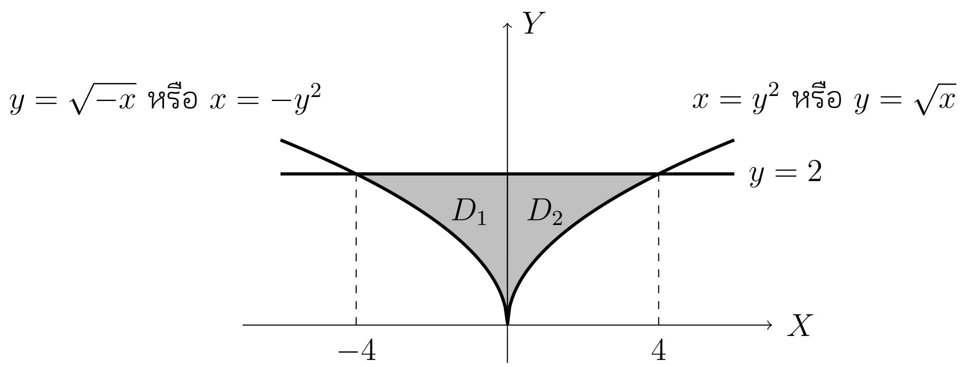
$$\int_0^2 \int_{-y^2}^{y^2} f(x,y)\,dxdy$$

และ**เปลี่ยนลำดับการปริพันธ์**

แนวคำตอบ จากปริพันธ์สองชั้นโดเมนคือ

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 2 \text{ และ } -y^2 \le x \le y^2\}$$

แสดงกราฟได้ดังนี้



จะเห็นว่า $D = D_1 \cup D_2$ โดยที่

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -4 \le x \le 0 \text{ และ } \sqrt{-x} \le y \le 2\}$$
$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 4 \text{ และ } \sqrt{x} \le y \le 2\}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int_0^2 \int_{-y^2}^{y^2} f(x,y)\,dxdy &= \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy \\ &= \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dydx + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dydx \\ &= \int_{-4}^0 \int_{\sqrt{-x}}^2 f(x,y)\,dydx + \int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 f(x,y)\,dydx \quad \#\end{aligned}$$

15. **(10 คะแนน)** จง**วาดกราฟแสดงโดเมน**ของปริพันธ์สองชั้นต่อไปนี้

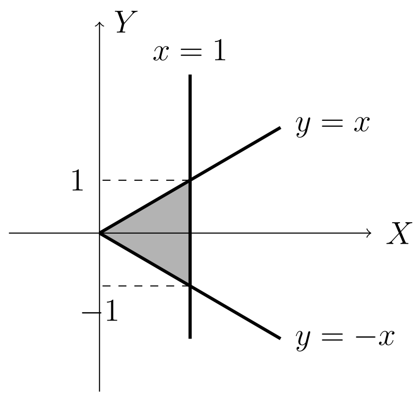
$$\int_0^1 \int_{-x}^{x} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dydx$$

และหาค่าของปริพันธ์ดังกล่าวโดยใช้**รูปแบบเชิงขั้ว**

แนวคำตอบ จากปริพันธ์สองชั้นโดเมนคือ

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1 \text{ และ } -x \le y \le x\}$$

แสดงกราฟได้ดังนี้



ขอบเขตของ r หาได้จาก 0 ถึง $x = 1$ นั่นคือ $r\cos\theta = 1$ ฉะนั้น $r = \sec\theta$
ขอบเขตของ θ จาก $y = -x$ ถึง $y = x$ นั้นคือ $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ ดังนั้นโดเมนในระบบพิกัดเชิงขั้วคือ

$$D = \left\{(r,\theta) : -\frac{\pi}{4} \le \theta \le -\frac{\pi}{4} \text{ และ } 0 \le r \le \sec\theta\right\}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_{-x}^{x} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dydx &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sec\theta} \frac{1}{r} \cdot r dr d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sec\theta} 1 \; dr d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} [r]_0^{\sec\theta}\, d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sec\theta\, d\theta \\
&= \ln|\sec\theta + \tan\theta|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \ln|\sqrt{2}+1| - \ln|\sqrt{2}-1| \\
&= \ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) \\
&= \ln\left(\sqrt{2}+1\right)^2 = 2\ln(\sqrt{2}+1) \quad \#
\end{aligned}$$

16. **(10 คะแนน)** จงหา**ผลเฉลยทั่วไป**ของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

16.1 **(5 คะแนน)** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y - yx}{x - xy}$

แนวคำตอบ เป็นสมการแบบแยกตัวแปรได้ ดังนั้น

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{y(1-x)}{x(1-y)} \\ \frac{1-y}{y}dy &= \frac{1-x}{x}dx \\ \int \frac{1}{y} - 1dy &= \int \frac{1}{x} - 1dx \\ \ln|y| - y &= \ln|x| - x + C \end{aligned}$$

ดังนั้น $\ln|y| - y = \ln|x| - x + C$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการนี้

16.2 **(5 คะแนน)** $ye^x dx + (e^x + y)dy = 0$

แนวคำตอบ ให้ $M(x,y) = ye^x$ และ $N(x,y) = e^x + y$ จะได้ว่า

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^x = \frac{\partial N}{\partial x}$$

จะได้ว่า $ye^x dx + (e^x + y)dy = 0$ เป็นสมการแม่นตรงที่มี $F(x,y) = C$ เป็นผลเฉลยทั่วไป

วิธีที่ 1 ใช้ $Mdx + Ndy = F_x dx + F_y dy = dF = 0$

จาก $F_x = M$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int M(x,y)\,dx + C(y) \\ &= \int ye^x\,dx + C(y) = ye^x + C(y) \end{aligned}$$

จาก $F_y = N$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} e^x + C'(y) &= e^x + y \\ C'(y) &= y \\ C(y) &= \frac{y^2}{2} + c_1 \end{aligned}$$

ดังนั้นผลเฉลยของสมการนี้คือ

$$ye^x + \frac{y^2}{2} = C \quad \#$$

วิธีที่ 2 ใช้สมบัติค่าเชิงอนุพันธ์ $df = f_x dx + f_y dy$

$$\begin{aligned} (ye^x dx + e^x dy) + ydy &= 0 \\ d(ye^x) + ydy &= 0 \\ \int d(ye^x) + \int ydy &= C \\ ye^x + \frac{y^2}{2} &= C \end{aligned}$$

ดังนั้นผลเฉลยของสมการนี้คือ

$$ye^x + \frac{y^2}{2} = C \quad \#$$

17. **(10 คะแนน)** จงหา**ผลเฉลยเฉพาะ**ของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

$$(x^2+y^2)dx+3xydy=0$$

เมื่อ $y(1)=0$

แนวคำตอบ ให้ $M(x,y)=x^2+y^2$ และ $N(x,y)=3xy$

วิธีที่ 1 ใช้วิธีเอกพันธ์ุ พิจารณา

$$\begin{aligned} M(\lambda x,\lambda y) &= (\lambda x)^2+(\lambda y)^2=\lambda^2(x^2+y^2)=\lambda^2 M(x,y)\\ N(\lambda x,\lambda y) &= 3(\lambda x)(\lambda y)=\lambda^2(3xy)=\lambda^2 N(x,y)\end{aligned}$$

ดังนั้น $(x^2+y^2)dx+3xydy=0$ เป็นสมการเอกพันธ์ุดีกรีสอง

ให้ $y=vx$ จะได้ว่า $dy=vdx+xdv$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} (x^2+v^2x^2)dx+3x(vx)(vdx+xdv) &= 0\\ (x^2+v^2x^2)dx+3x^2v^2dx+3x^3vdv &= 0\\ (x^2+4v^2x^2)dx &= -3x^3vdv\\ x^2(1+4v^2)dx &= -3x^3vdv\\ \frac{x^2}{x^3}dx &= -\frac{3v}{1+4v^2}dv\\ \int\frac{1}{x}dx &= -\frac{3}{8}\int\frac{8v}{1+4v^2}dv\\ \ln|x| &= -\frac{3}{8}\int\frac{1}{1+4v^2}d(4v^2)\\ \ln|x| &= -\frac{3}{8}\ln\left|1+4v^2\right|+C\\ \ln|x| &= -\frac{3}{8}\ln\left|1+4\left(\frac{y}{x}\right)^2\right|+C\end{aligned}$$

แทนค่า $x=1$ และ $y=0$ จะได้ว่า

$$0=0+C$$

ดังนั้นผลเฉลยเฉพาะของสมการนี้คือ

$$\ln|x|=-\frac{3}{8}\ln\left|1+4\left(\frac{y}{x}\right)^2\right| \qquad \#$$

หรืออาจจัดสมการใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned} \frac{8}{3}\ln|x| &= -\ln\left|\frac{x^2+4y^2}{x^2}\right|=\ln\left|\frac{x^2}{x^2+4y^2}\right|\\ x^{\frac{8}{3}} &= \frac{x^2}{x^2+4y^2}\\ x^{\frac{8}{3}}(x^2+4y^2) &= x^2\\ x^{\frac{8}{3}}x^2+4x^{\frac{8}{3}}y^2 &= x^2\\ \frac{x^{\frac{8}{3}}x^2}{x^2}+\frac{4x^{\frac{8}{3}}y^2}{x^2} &= 1\\ x^{\frac{8}{3}}+4x^{\frac{2}{3}}y^2 &= 1 \qquad \#\end{aligned}$$

วิธีที่ 2 ตัวประกอบปริพันธ์ พิจารณา

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \\ &= \frac{1}{3xy}(2y-3y) = -\frac{1}{3x} \end{aligned}$$

จะได้ตัวประกอบปริพันธ์คือ

$$\mu = e^{\int f(x)dx} = e^{\int -\frac{1}{3x}dx} = e^{-\frac{1}{3}\ln x} = x^{-\frac{1}{3}}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} x^{-\frac{1}{3}}(x^2+y^2)dx + x^{-\frac{1}{3}}\cdot 3xydy &= 0 \\ (x^{\frac{5}{3}} + x^{-\frac{1}{3}}y^2)dx + 3x^{\frac{2}{3}}ydy &= 0 \\ x^{\frac{5}{3}}dx + (x^{-\frac{1}{3}}y^2dx + 3x^{\frac{2}{3}}ydy) &= 0 \\ x^{\frac{5}{3}}dx + d\left(\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}y^2dy\right) &= 0 \\ \int x^{\frac{5}{3}}dx + \int d\left(\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}y^2dy\right) &= C \\ \frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}} + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}y^2 &= C \\ 3x^{\frac{8}{3}} + 12x^{\frac{2}{3}}y^2 &= 8C \end{aligned}$$

แทนค่า $x = 1$ และ $y = 0$ จะได้ว่า

$$3 + 0 = 8C$$

ดังนั้นผลเฉลยเฉพาะของสมการนี้คือ

$$x^{\frac{8}{3}} + 4x^{\frac{2}{3}}y^2 = 1 \quad \#$$

18. **(10 คะแนน)** จงหา**ผลเฉลยเฉพาะ**ของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

$$\sin x\frac{dy}{dx} + y\cos x = \cos^2 x$$

เมื่อ $y(\frac{\pi}{2}) = 0$

แนวคำตอบ จัดรูปสมการใหม่

$$\frac{dy}{dx} + y\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\cos^2 x}{\sin x}$$
$$\frac{dy}{dx} + (\cot x)y = \frac{\cos^2 x}{\sin x}$$

ฉะนั้นเป็นสมการเชิงเส้นที่มี $P(x) = \cot x$ และ $Q(x) = \dfrac{\cos^2 x}{\sin x}$ จะได้ว่า

$$\mu = e^{\int \cot x dx} = e^{\int \ln \sin x} = \sin x$$

ดังนั้นผลเฉลยของสมการนี้คือ

$$\begin{aligned}
y &= \frac{1}{\mu}\left(\int \mu Q(x)dx + C\right) \\
y &= \frac{1}{\sin x}\left(\int \sin x \cdot \frac{\cos^2 x}{\sin x}dx + C\right) \\
&= \frac{1}{\sin x}\left(\int \cos^2 x dx + C\right) \\
&= \frac{1}{\sin x}\left(\frac{1}{2}\int 1 + \cos 2x dx + C\right) \\
&= \frac{1}{\sin x}\left[\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C\right] \\
&= \frac{1}{\sin x}\left[\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C\right]
\end{aligned}$$

แทนค่า $x = \frac{\pi}{2}$ และ $y = 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
y &= \frac{1}{\sin x}\left[\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C\right] \\
0 &= \frac{1}{1}\left[\frac{\pi}{4} + 0 + C\right] \\
C &= -\frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

ผลเฉลยของเฉพาะของสมการนี้คือ $y = \dfrac{1}{\sin x}\left[\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4}\sin 2x - \dfrac{\pi}{4}\right]$ #