มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
คณะครุศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ข้อสอบปลายภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2564

ชื่อวิชา	แคลคูลัส ๑ Calculus 1
รหัสวิชา	MAC1302
วันเวลาสอบ	Sec 3 วันพฤหัสบดี ที่ 4 พศจิกายน 2564 เวลา 13:00 - 16:30
	Sec1-2 วันอาทิตย์ ที่ 7 พฤศจิกายน 2564 เวลา 13:00 - 16:30
สถานที่สอบ	ห้องเรียนออนไลน์ (โปรแกรม Zoom)
ผู้สอน	ผู้ช่วยศาสตรจารย์ ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย
คะแนน	105 คะแนน คิดเป็น 30%

ข้อ 1

1. (10 **คะแนน**) จงตอบคำถามต่อไปนี้ โดยแสดงวิธีทำโดยละเอียด

   1.1 (5 **คะแนน**) จงแสดงว่า $F(x) = \ln|e^x - 1| - \ln|e^x + 1|$ เป็น**ปฏิยานุพันธ์**ของ

   $$f(x) = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

   1.2 (5 **คะแนน**) จงหาปริพันธ์ของ $\int \sin x(1 + \csc x \tan^2 x + \cot x)\,dx$

1. (10 **คะแนน**) จงตอบคำถามต่อไปนี้ โดยแสดงวิธีทำโดยละเอียด

   1.1 (5 **คะแนน**) จงแสดงว่า $F(x) = \ln|e^x - 2| - \ln|e^x + 2|$ เป็น**ปฏิยานุพันธ์**ของ

   $$f(x) = \frac{4}{e^x - 4e^{-x}}$$

   1.2 (5 **คะแนน**) จงหาปริพันธ์ของ $\int \cos x(1 + \sec x \tan^2 x + \tan x)\,dx$

1. (10 **คะแนน**) จงตอบคำถามต่อไปนี้ โดยแสดงวิธีทำโดยละเอียด

   1.1 (5 **คะแนน**) จงแสดงว่า $F(x) = \ln|e^x - 3| - \ln|e^x + 3|$ เป็น**ปฏิยานุพันธ์**ของ

   $$f(x) = \frac{6}{e^x - 9e^{-x}}$$

   1.2 (5 **คะแนน**) จงหาปริพันธ์ของ $\int \tan x(1 + \tan x + \cot^2 x)\,dx$

1. (10 **คะแนน**) จงตอบคำถามต่อไปนี้ โดยแสดงวิธีทำโดยละเอียด

   1.1 (5 **คะแนน**) จงแสดงว่า $F(x) = \ln|e^x - 1| + \ln|e^x + 1|$ เป็น**ปฏิยานุพันธ์**ของ

   $$f(x) = \frac{2e^x}{e^x - e^{-x}}$$

   1.2 (5 **คะแนน**) จงหาปริพันธ์ของ $\int \cot x(1 + \tan^3 x + \tan^2 x)\,dx$

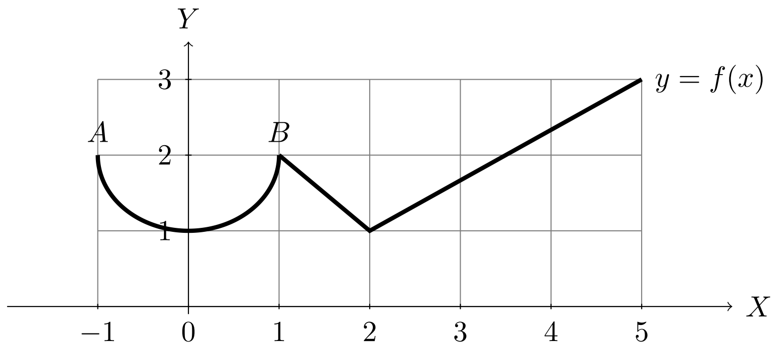
ข้อ 2

2. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้ โดยแสดงวิธีทำโดยละเอียด

   2.1 **(5 คะแนน)** จงหาปริพันธ์ของ

$$\int \frac{(1+x)xe^{2x}}{\sqrt{1+xe^x}}\,dx$$

   2.2 **(5 คะแนน)** ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันบนช่วง $[-1, 5]$ เขียนกราฟได้ดังนี้ เมื่อ AB คือส่วนของวงกลมที่มีศูนย์กลางอยู่ที่ $(0, 2)$



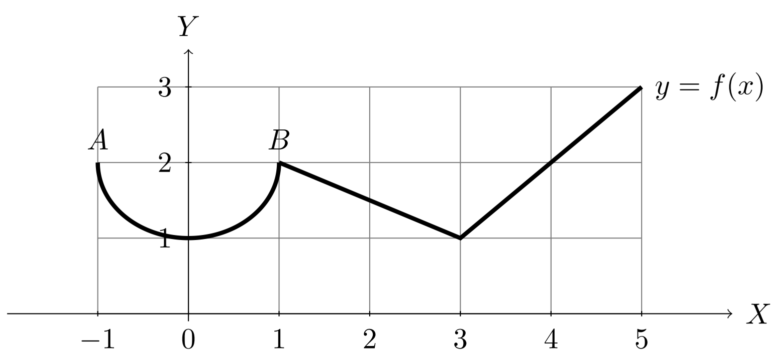
จงหาค่าของ $\displaystyle\int_{-1}^{5} f(x)\,dx$

2. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้ โดยแสดงวิธีทำโดยละเอียด

   2.1 **(5 คะแนน)** จงหาปริพันธ์ของ

$$\int \frac{(1+x)xe^{2x}}{\sqrt{1-xe^x}}\,dx$$

   2.2 **(5 คะแนน)** ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันบนช่วง $[-1, 5]$ เขียนกราฟได้ดังนี้ เมื่อ AB คือส่วนของวงกลมที่มีศูนย์กลางอยู่ที่ $(0, 2)$



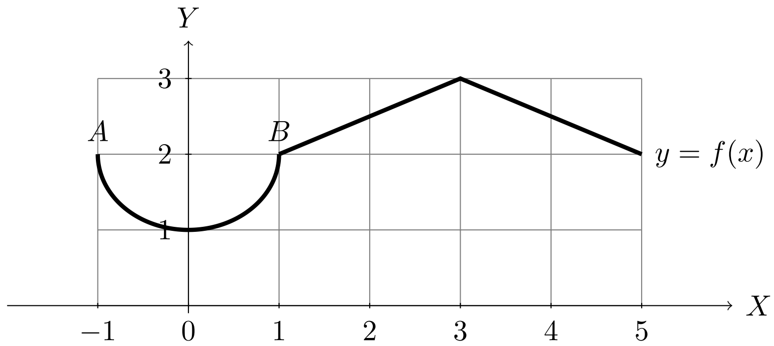
จงหาค่าของ $\displaystyle\int_{-1}^{5} f(x)\,dx$

2. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้ โดยแสดงวิธีทำโดยละเอียด

2.1 **(5 คะแนน)** จงหาปริพันธ์ของ

$$\int \frac{(1+x)xe^{2x}}{\sqrt{2+xe^{x}}}\,dx$$

2.2 **(5 คะแนน)** ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันบนช่วง $[-1, 5]$ เขียนกราฟได้ดังนี้ เมื่อ AB คือส่วนของวงกลมที่มีศูนย์กลางอยู่ที่ $(0, 2)$



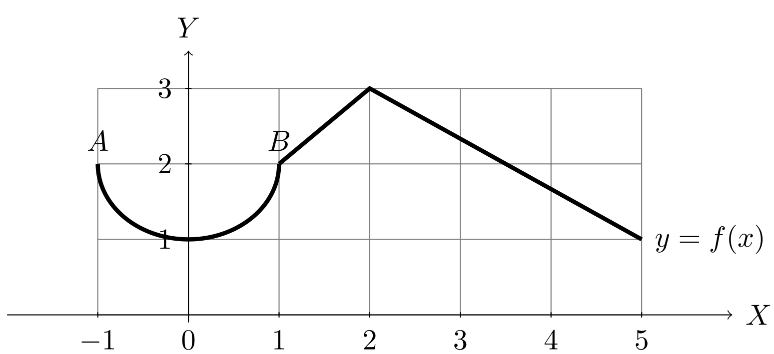
จงหาค่าของ $\int_{-1}^{5} f(x)\,dx$

2. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้ โดยแสดงวิธีทำโดยละเอียด

2.1 **(5 คะแนน)** จงหาปริพันธ์ของ

$$\int \frac{(1+x)xe^{2x}}{\sqrt{2-xe^{x}}}\,dx$$

2.2 **(5 คะแนน)** ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันบนช่วง $[-1, 5]$ เขียนกราฟได้ดังนี้ เมื่อ AB คือส่วนของวงกลมที่มีศูนย์กลางอยู่ที่ $(0, 2)$



จงหาค่าของ $\int_{-1}^{5} f(x)\,dx$

ข้อ 3

3. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้ โดยแสดงวิธีทำโดยละเอียด

3.1 **(5 คะแนน)** กำหนดให้ $\int_0^2 f(x)\,dx = 10$ จงหาค่าของ

$$\int_0^1 \sin \pi x \cdot f(1 + \cos \pi x)\,dx$$

3.2 **(5 คะแนน)** สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ กำหนดให้

$$F(x) = \int_{e^{-x}}^{e^x} \frac{\arctan(t^2)}{t}\,dt$$

จงหาค่าของ $F(0)$, $F'(0)$ และ $F''(0)$

3. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้ โดยแสดงวิธีทำโดยละเอียด

3.1 **(5 คะแนน)** กำหนดให้ $\int_1^3 f(x)\,dx = 10$ จงหาค่าของ

$$\int_0^1 \sin \pi x \cdot f(2 + \cos \pi x)\,dx$$

3.2 **(5 คะแนน)** สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ กำหนดให้

$$F(x) = \int_{e^{-x}}^{e^x} \frac{\text{arccot}(t^2)}{t}\,dt$$

จงหาค่าของ $F(0)$, $F'(0)$ และ $F''(0)$

3. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้ โดยแสดงวิธีทำโดยละเอียด

3.1 **(5 คะแนน)** กำหนดให้ $\int_2^4 f(x)\,dx = 10$ จงหาค่าของ

$$\int_0^1 \sin \pi x \cdot f(3 + \cos \pi x)\,dx$$

3.2 **(5 คะแนน)** สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ กำหนดให้

$$F(x) = \int_{e^{-x}}^{e^x} \frac{\arctan(t^3)}{t}\,dt$$

จงหาค่าของ $F(0)$, $F'(0)$ และ $F''(0)$

3. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้ โดยแสดงวิธีทำโดยละเอียด

3.1 **(5 คะแนน)** กำหนดให้ $\int_3^5 f(x)\,dx = 10$ จงหาค่าของ

$$\int_0^1 \sin \pi x \cdot f(4 + \cos \pi x)\,dx$$

3.2 **(5 คะแนน)** สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ กำหนดให้

$$F(x) = \int_{e^{-x}}^{e^x} \frac{\text{arccot}(t^3)}{t}\,dt$$

จงหาค่าของ $F(0)$, $F'(0)$ และ $F''(0)$

ข้อ 4

4. (10 **คะแนน**) จงหาปริพันธ์

$$\int x^3 \sin(x^2)\,dx$$

4. (10 **คะแนน**) จงหาปริพันธ์

$$\int x^3 \cos(x^2)\,dx$$

4. (10 **คะแนน**) จงหาปริพันธ์

$$\int x^5 \sin(x^3)\,dx$$

4. (10 **คะแนน**) จงหาปริพันธ์

$$\int x^5 \cos(x^3)\,dx$$

ข้อ 5

5. (10 **คะแนน**) จงหาปริพันธ์

$$\int \frac{4}{16x^4 - 1}\,dx$$

5. (10 **คะแนน**) จงหาปริพันธ์

$$\int \frac{4}{81x^4 - 1}\,dx$$

5. (10 **คะแนน**) จงหาปริพันธ์

$$\int \frac{4}{1 - 16x^4}\,dx$$

5. (10 **คะแนน**) จงหาปริพันธ์

$$\int \frac{4}{1 - 81x^4}\,dx$$

ข้อ 6

6. **(15 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้ โดยแสดงวิธีทำโดยละเอียด

6.1 **(8 คะแนน)** จงหาค่าต่อไปนี้

$$\int_0^{49} \frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}\,dx$$

6.2 **(7 คะแนน)** จงหาปริพันธ์

$$\int (\sin x + \cos x)^4\,dx$$

6. **(15 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้ โดยแสดงวิธีทำโดยละเอียด

6.1 **(8 คะแนน)** จงหาค่าต่อไปนี้

$$\int_0^{49} \frac{8-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}\,dx$$

6.2 **(7 คะแนน)** จงหาปริพันธ์

$$\int (\sin x - \cos x)^4\,dx$$

6. **(15 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้ โดยแสดงวิธีทำโดยละเอียด

6.1 **(8 คะแนน)** จงหาค่าต่อไปนี้

$$\int_0^{49} \frac{-2-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}\,dx$$

6.2 **(7 คะแนน)** จงหาปริพันธ์

$$\int (\sin 2x + \cos 2x)^4\,dx$$

6. **(15 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้ โดยแสดงวิธีทำโดยละเอียด

6.1 **(8 คะแนน)** จงหาค่าต่อไปนี้

$$\int_0^{49} \frac{-7-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}\,dx$$

6.2 **(7 คะแนน)** จงหาปริพันธ์

$$\int (\sin 2x - \cos 2x)^4\,dx$$

ข้อ 7

7. (10 **คะแนน**) จงหาปริพันธ์

$$\int \frac{\sqrt{4x^2+1}}{x}\,dx$$

7. (10 **คะแนน**) จงหาปริพันธ์

$$\int \frac{\sqrt{9x^2+1}}{x}\,dx$$

7. (10 **คะแนน**) จงหาปริพันธ์

$$\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x}\,dx$$

7. (10 **คะแนน**) จงหาปริพันธ์

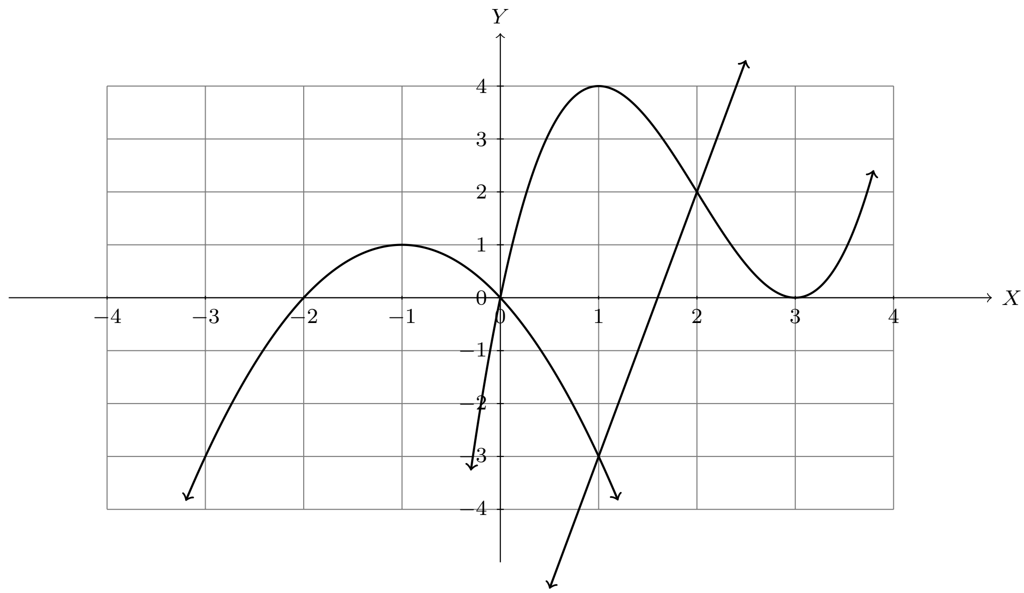
$$\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x}\,dx$$

ข้อ 8

8. **(10 คะแนน)** จงหาปริมาตรของรูปทรงตันซึ่งเกิดจากการหมุนอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วย

$$y = x(x-3)^2 \quad \text{และ} \quad y = -x(x+2) \quad \text{และ } y = 5x - 8 \text{ โดยที่ } x > 0$$

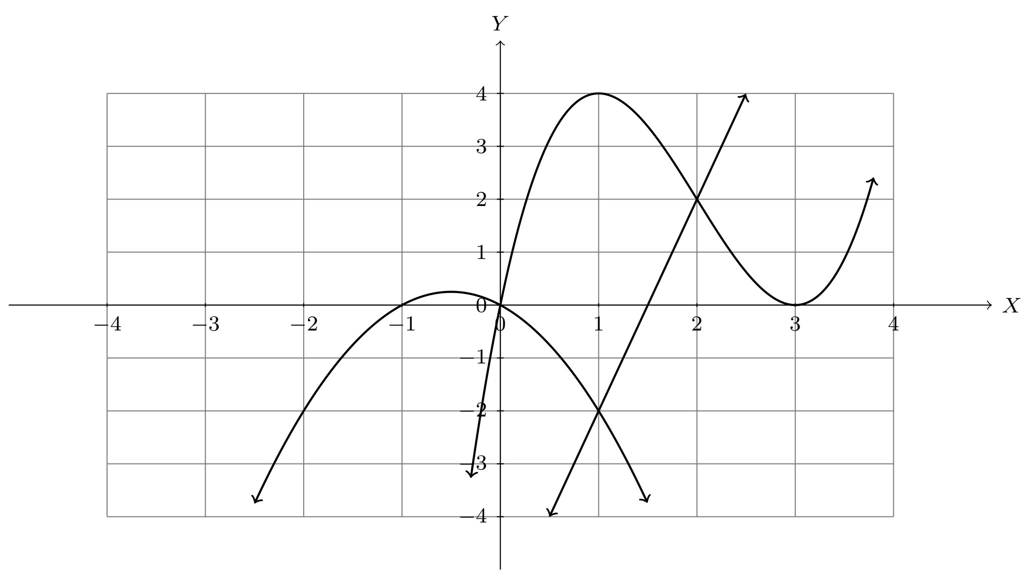
รอบแกน Y ซึ่งแสดงได้ดังกราฟ



8. **(10 คะแนน)** จงหาปริมาตรของรูปทรงตันซึ่งเกิดจากการหมุนอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วย

$$y = x(x-3)^2 \quad \text{และ} \quad y = -x(x+1) \quad \text{และ } y = 4x - 6 \text{ โดยที่ } x > 0$$

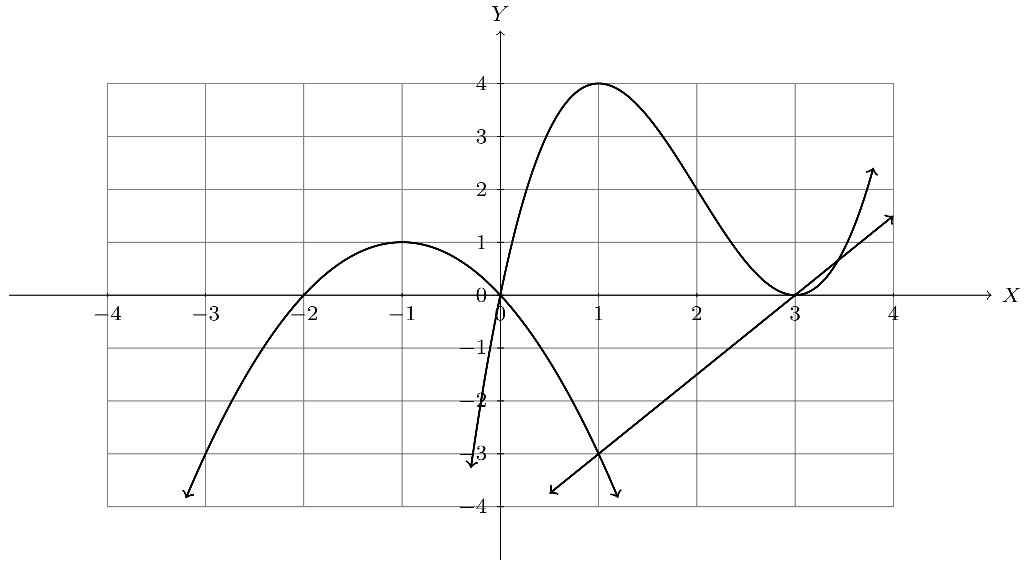
รอบแกน Y ซึ่งแสดงได้ดังกราฟ



8. **(10 คะแนน)** จงหาปริมาตรของรูปทรงตันซึ่งเกิดจากการหมุนอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วย

$$y = x(x-3)^2 \quad \text{และ} \quad y = -x(x+2) \quad \text{และ } 2y = 3x - 9 \text{ โดยที่ } x > 0$$

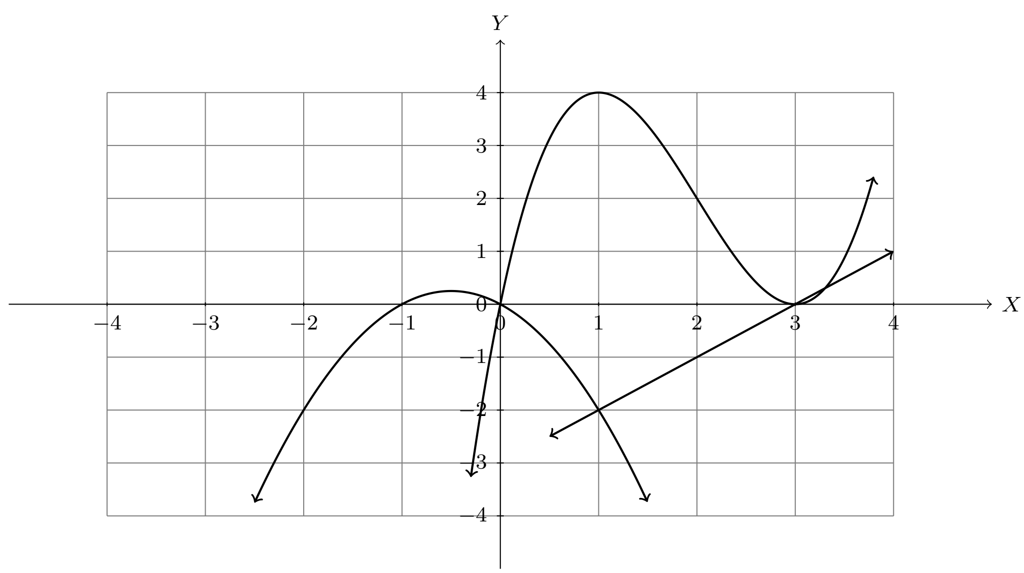
รอบแกน Y ซึ่งแสดงได้ดังกราฟ



8. **(10 คะแนน)** จงหาปริมาตรของรูปทรงตันซึ่งเกิดจากการหมุนอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วย

$$y = x(x-3)^2 \quad \text{และ} \quad y = -x(x+1) \quad \text{และ } y = x - 3 \text{ โดยที่ } x > 0$$

รอบแกน Y ซึ่งแสดงได้ดังกราฟ



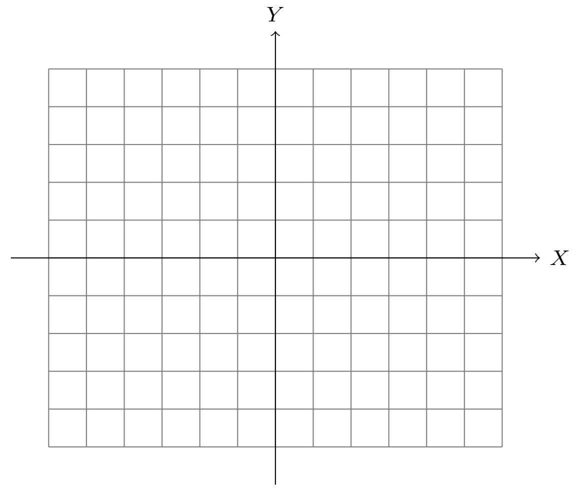
ข้อ 9

9.1 (10 **คะแนน**) จงตอบคำถามต่อไปนี้ โดยแสดงวิธีทำโดยละเอียด

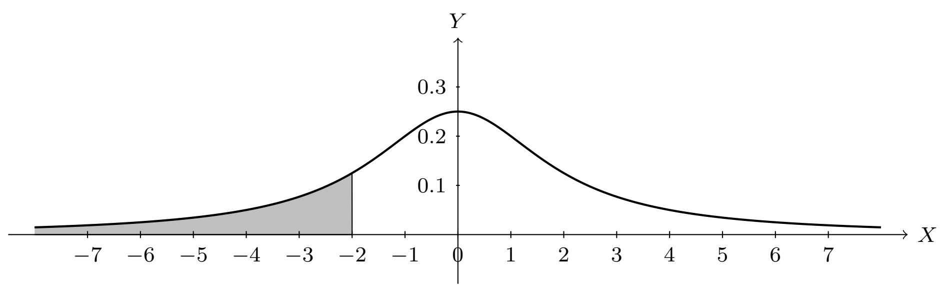
9.1 (5 **คะแนน**) จงหาพื้นที่อาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง

$$y = x^2 \quad \text{และ} \quad y = x + 2$$

พร้อมวาดกราฟประกอบ



9.2 (5 **คะแนน**) พื้นใต้กราฟของ $y = \dfrac{1}{x^2+4}$ กับแกน X เมื่อ $x \leq -2$ ซึ่งแสดงดังกราฟ มีค่าหรือไม่เพราะเหตุใด ถ้าพื้นที่หาค่าได้จงหาค่าของพื้นที่นั้น

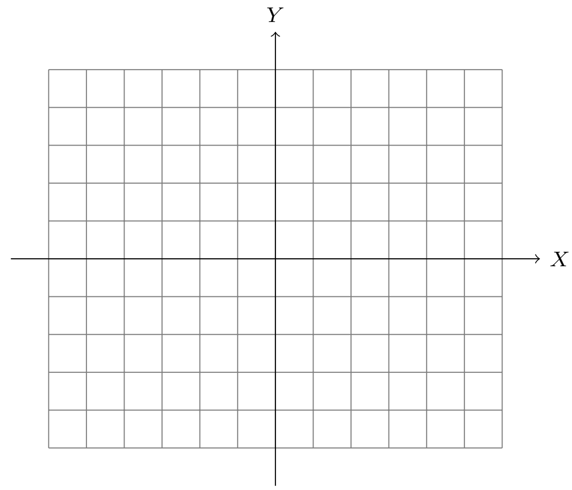


9.1 **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้ โดยแสดงวิธีทำโดยละเอียด

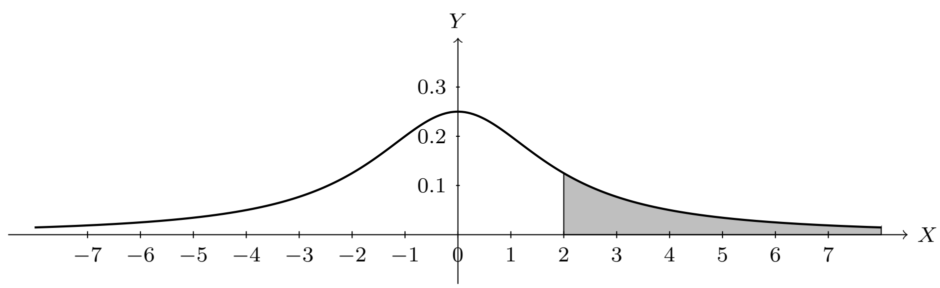
9.1 **(5 คะแนน)** จงหาพื้นที่อาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง

$$y = x^2 \quad \text{และ} \quad y = -x + 2$$

พร้อมวาดกราฟประกอบ



9.2 **(5 คะแนน)** พื้นใต้กราฟของ $y = \dfrac{1}{x^2+4}$ กับแกน X เมื่อ $x \geq 2$ ซึ่งแสดงดังกราฟ มีค่าหรือไม่เพราะเหตุใด ถ้าพื้นที่หาค่าได้จงหาค่าของพื้นที่นั้น

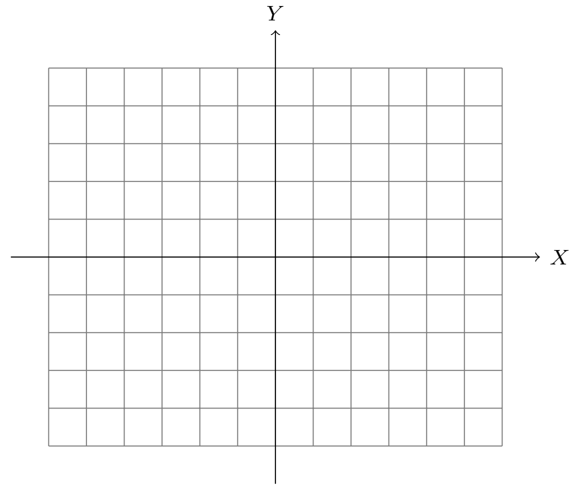


9.1 **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้ โดยแสดงวิธีทำโดยละเอียด

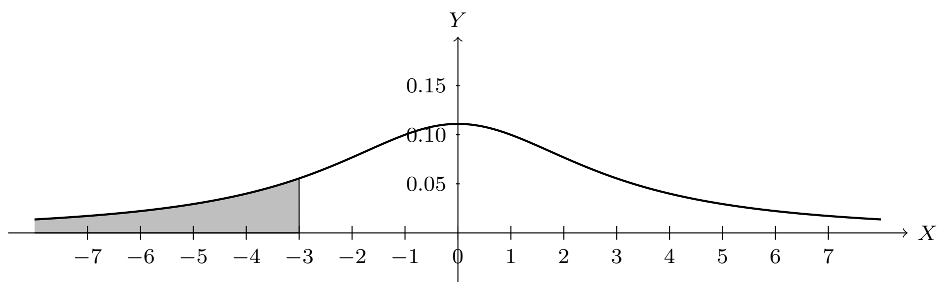
9.1 **(5 คะแนน)** จงหาพื้นที่อาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง

$$y = 2 - x^2 \quad \text{และ} \quad y = x$$

พร้อมวาดกราฟประกอบ



9.2 **(5 คะแนน)** พื้นใต้กราฟของ $y = \dfrac{1}{x^2+9}$ กับแกน X เมื่อ $x \leq -3$ ซึ่งแสดงดังกราฟ มีค่าหรือไม่เพราะเหตุใด ถ้าพื้นที่หาค่าได้จงหาค่าของพื้นที่นั้น

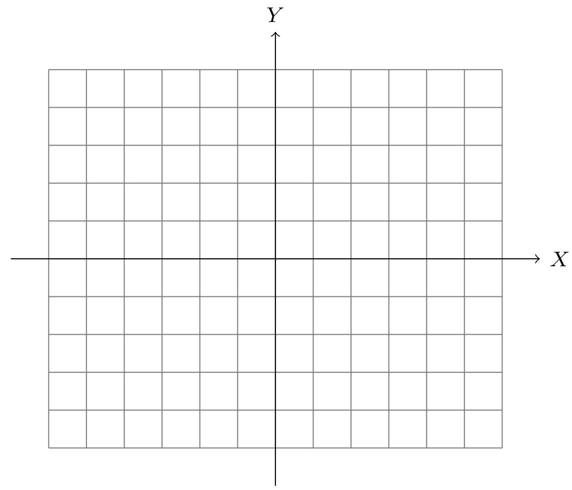


9.1 **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้ โดยแสดงวิธีทำโดยละเอียด

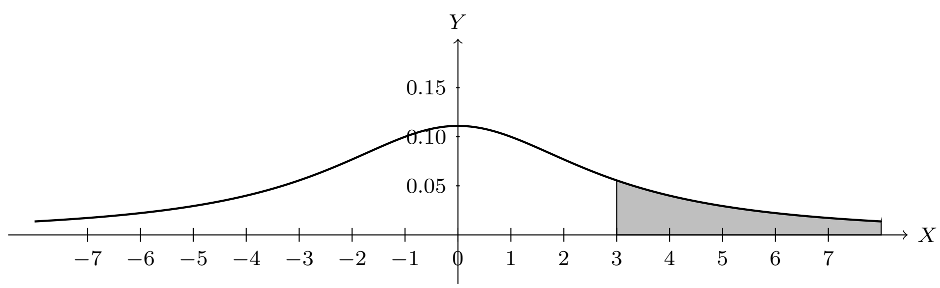
9.1 **(5 คะแนน)** จงหาพื้นที่อาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง

$$y = 2 - x^2 \quad \text{และ} \quad y = -x$$

พร้อมวาดกราฟประกอบ



9.2 **(5 คะแนน)** พื้นใต้กราฟของ $y = \dfrac{1}{x^2+9}$ กับแกน X เมื่อ $x \geq 3$ ซึ่งแสดงดังกราฟ มีค่าหรือไม่เพราะเหตุใด ถ้าพื้นที่หาค่าได้จงหาค่าของพื้นที่นั้น



ข้อ 10

10. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้ โดยแสดงวิธีทำโดยละเอียด

10.1 **(5 คะแนน)** จงตรวจสอบปริพันธ์ไม่ตรงแบบต่อไปนี้ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1-|x|}}\,dx$$

10.2 **(5 คะแนน)** จงหาเงื่อนไขของ**จำนวนนับ** n ที่ทำให้

$$\int_{0}^{2} \frac{1}{\sqrt[n]{x}}\,dx \quad \text{ลู่เข้า}$$

10. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้ โดยแสดงวิธีทำโดยละเอียด

10.1 **(5 คะแนน)** จงตรวจสอบปริพันธ์ไม่ตรงแบบต่อไปนี้ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{2-|x|}}\,dx$$

10.2 **(5 คะแนน)** จงหาเงื่อนไขของ**จำนวนนับ** n ที่ทำให้

$$\int_{0}^{3} \frac{1}{\sqrt[n]{x}}\,dx \quad \text{ลู่เข้า}$$

10. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้ โดยแสดงวิธีทำโดยละเอียด

10.1 **(5 คะแนน)** จงตรวจสอบปริพันธ์ไม่ตรงแบบต่อไปนี้ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{|x|-1}}\,dx$$

10.2 **(5 คะแนน)** จงหาเงื่อนไขของ**จำนวนนับ** n ที่ทำให้

$$\int_{0}^{4} \frac{1}{\sqrt[n]{x}}\,dx \quad \text{ลู่เข้า}$$

10. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้ โดยแสดงวิธีทำโดยละเอียด

10.1 **(5 คะแนน)** จงตรวจสอบปริพันธ์ไม่ตรงแบบต่อไปนี้ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{|x|-2}}\,dx$$

10.2 **(5 คะแนน)** จงหาเงื่อนไขของ**จำนวนนับ** n ที่ทำให้

$$\int_{0}^{5} \frac{1}{\sqrt[n]{x}}\,dx \quad \text{ลู่เข้า}$$

เฉลยข้อสอบวิชาแคลคูลัส ๑ ปลายภาค 2564

ข้อ 1

1. (10 **คะแนน**) จงตอบคำถามต่อไปนี้ โดยแสดงวิธีทำโดยละเอียด

   1.1 (5 **คะแนน**) จงแสดงว่า $F(x) = \ln|e^x - 1| - \ln|e^x + 1|$ เป็น**ปฏิยานุพันธ์**ของ

$$f(x) = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{e^x-1} \cdot e^x - \frac{1}{e^x+1} \cdot e^x = e^x \left[\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{e^x+1}\right] \\ &= e^x \left[\frac{(e^x+1)-(e^x-1)}{(e^x-1)(e^x+1)}\right] = e^x \left[\frac{2}{e^{2x}-1}\right] \\ &= \frac{1}{e^{-x}} \cdot \left[\frac{2}{e^{2x}-1}\right] = \frac{2}{e^{-x}(e^{2x}-1)} = \frac{2}{e^x - e^{-x}} = f(x) \end{aligned}$$

ดังนั้น $F(x) = \ln|e^x - 1| - \ln|e^x + 1|$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$

   1.2 (5 **คะแนน**) จงหาปริพันธ์ของ $\displaystyle\int \sin x(1 + \csc x \tan^2 x + \cot x)\, dx$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \int \sin x(1 + \csc x \tan^2 x + \cot x)\, dx &= \int \sin x + \sin x \csc x \tan^2 x + \sin x \cot x \, dx \\ &= \int \sin x + \sin x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \tan^2 x + \sin x \cdot \frac{\cos x}{\sin x}\, dx \\ &= \int \sin x + \tan^2 x + \cos x \, dx \\ &= \int \sin x + (\sec^2 x - 1) + \cos x \, dx \\ &= -\cos x + \tan x - x + \sin x + C \quad \# \end{aligned}$$

1. (10 **คะแนน**) จงตอบคำถามต่อไปนี้ โดยแสดงวิธีทำโดยละเอียด

1.1 (5 **คะแนน**) จงแสดงว่า $F(x) = \ln|e^x - 2| - \ln|e^x + 2|$ เป็น**ปฏิยานุพันธ์**ของ

$$f(x) = \frac{4}{e^x - 4e^{-x}}$$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \frac{1}{e^x - 2} \cdot e^x - \frac{1}{e^x + 2} \cdot e^x = e^x \left[\frac{1}{e^x - 2} - \frac{1}{e^x + 2}\right] \\
&= e^x \left[\frac{(e^x + 2) - (e^x - 2)}{(e^x - 2)(e^x + 2)}\right] = e^x \left[\frac{4}{e^{2x} - 4}\right] \\
&= \frac{1}{e^{-x}} \cdot \left[\frac{4}{e^{2x} - 4}\right] = \frac{4}{e^{-x}(e^{2x} - 4)} = \frac{4}{e^x - 4e^{-x}} = f(x)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $F(x) = \ln|e^x - 2| - \ln|e^x + 2|$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = \dfrac{4}{e^x - 4e^{-x}}$

1.2 (5 **คะแนน**) จงหาปริพันธ์ของ $\displaystyle\int \cos x(1 + \sec x \tan^2 x + \tan x)\, dx$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int \cos x(1 + \sec x \tan^2 x + \tan x)\, dx &= \int \cos x + \cos x \sec x \tan^2 x + \cos x \tan x \, dx \\
&= \int \cos x + \cos x \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot \tan^2 x + \cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos x}\, dx \\
&= \int \cos x + \tan^2 x + \sin x \, dx \\
&= \int \cos x + (\sec^2 x - 1) + \sin x \, dx \\
&= \sin x + \tan x - x - \cos x + C \quad \#
\end{aligned}$$

1. (10 **คะแนน**) จงตอบคำถามต่อไปนี้ โดยแสดงวิธีทำโดยละเอียด

1.1 (5 **คะแนน**) จงแสดงว่า $F(x) = \ln|e^x - 3| - \ln|e^x + 3|$ เป็น**ปฏิยานุพันธ์**ของ

$$f(x) = \frac{6}{e^x - 9e^{-x}}$$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \frac{1}{e^x - 3} \cdot e^x - \frac{1}{e^x + 3} \cdot e^x = e^x \left[\frac{1}{e^x - 3} - \frac{1}{e^x + 3}\right] \\
&= e^x \left[\frac{(e^x + 3) - (e^x - 3)}{(e^x - 3)(e^x + 3)}\right] = e^x \left[\frac{6}{e^{2x} - 9}\right] \\
&= \frac{1}{e^{-x}} \cdot \left[\frac{6}{e^{2x} - 9}\right] = \frac{6}{e^{-x}(e^{2x} - 9)} = \frac{6}{e^x - 9e^{-x}} = f(x)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $F(x) = \ln|e^x - 3| - \ln|e^x + 3|$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = \dfrac{6}{e^x - 9e^{-x}}$

1.2 (5 **คะแนน**) จงหาปริพันธ์ของ $\displaystyle\int \tan x(1 + \tan x + \cot^2 x)\, dx$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int \tan x(1 + \tan x + \cot^2 x)\, dx &= \int \tan x + \tan^2 x + \tan x \cot^2 x \, dx \\
&= \int \tan x + \tan^2 x + \tan x \cdot \frac{1}{\tan x} \cdot \cot x \, dx \\
&= \int \tan x + \tan^2 x + \cot x \, dx \\
&= \int \tan x + (\sec^2 x - 1) + \cot x \, dx \\
&= \ln|\sec x| + \tan x - x + \ln|\sin x| + C \quad \#
\end{aligned}$$

1. (10 **คะแนน**) จงตอบคำถามต่อไปนี้ โดยแสดงวิธีทำโดยละเอียด

1.1 (5 **คะแนน**) จงแสดงว่า $F(x) = \ln|e^x - 1| + \ln|e^x + 1|$ เป็น**ปฏิยานุพันธ์**ของ

$$f(x) = \frac{2e^x}{e^x - e^{-x}}$$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{e^x - 1} \cdot e^x + \frac{1}{e^x + 1} \cdot e^x = e^x \left[\frac{1}{e^x - 1} + \frac{1}{e^x + 1}\right] \\ &= e^x \left[\frac{(e^x + 1) + (e^x - 1)}{(e^x - 1)(e^x + 1)}\right] = e^x \left[\frac{2e^x}{e^{2x} - 1}\right] \\ &= \frac{1}{e^{-x}} \cdot \left[\frac{2e^x}{e^{2x} - 1}\right] = \frac{2e^x}{e^{-x}(e^{2x} - 1)} = \frac{2e^x}{e^x - e^{-x}} = f(x) \end{aligned}$$

ดังนั้น $F(x) = \ln|e^x - 1| + \ln|e^x + 1|$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = \dfrac{2e^x}{e^x - e^{-x}}$

1.2 (5 **คะแนน**) จงหาปริพันธ์ของ $\displaystyle\int \cot x(1 + \tan^3 x + \tan^2 x)\, dx$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \int \cot x(1 + \tan^3 x + \tan^2 x)\, dx &= \int \cot x + \cot x \tan^3 x + \cot x \tan^2 x\, dx \\ &= \int \cot x + \frac{1}{\tan x} \cdot \tan^2 x + \frac{1}{\tan x} \cdot \tan^2 x\, dx \\ &= \int \cot x + \tan^2 x + \tan x\, dx \\ &= \int \cot x + (\sec^2 x - 1) + \tan x\, dx \\ &= \ln|\sin x| + \tan x - x + \ln|\sec x| + C \qquad \# \end{aligned}$$

ข้อ 2

2. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้ โดยแสดงวิธีทำโดยละเอียด

2.1 **(5 คะแนน)** จงหาปริพันธ์ของ

$$\int \frac{(1+x)xe^{2x}}{\sqrt{1+xe^x}}\,dx$$

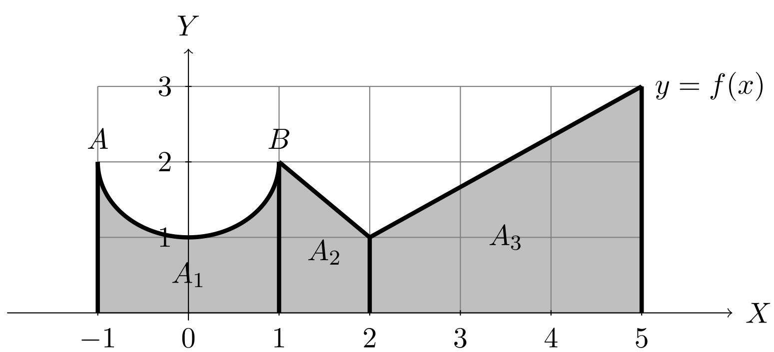
วิธีทำ ให้ $u = 1 + xe^x$ จะได้ว่า $xe^x = u - 1$ และ

$$du = (xe^x + e^x)dx = e^x(x+1)dx$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int \frac{(1+x)xe^{2x}}{\sqrt{1+xe^x}}\,dx &= \int \frac{xe^x}{\sqrt{1+xe^x}}\,(x+1)e^x dx \\ &= \int \frac{u-1}{\sqrt{u}}\,du = \int \frac{u}{\sqrt{u}} - \frac{1}{\sqrt{u}}\,du \\ &= \int u^{\frac{1}{2}} - u^{-\frac{1}{2}}\,du \\ &= \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}} + C \\ &= \frac{2}{3}(1+xe^x)^{\frac{3}{2}} - 2(1+xe^x)^{\frac{1}{2}} + C \quad \#\end{aligned}$$

2.2 **(5 คะแนน)** ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันบนช่วง $[-1, 5]$ เขียนกราฟได้ดังนี้ เมื่อ AB คือส่วนของวงกลมที่มีศูนย์กลางอยู่ที่ $(0, 2)$



จงหาค่าของ $\int_{-1}^{5} f(x)\,dx$

วิธีทำ เนื่องจาก $\int_{-1}^{5} f(x)\,dx$ หมายถึงพื้นที่ใต้กราฟของส่วนที่เหนือแกน X ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{5} f(x)\,dx &= A_1 + A_2 + A_3 \\ &= \left[2\cdot 2 - \frac{1}{2}\pi 1^2\right] + \frac{1}{2}(2+1)\cdot 1 + \frac{1}{2}(1+3)\cdot 3 \\ &= 4 - \frac{\pi}{2} + \frac{3}{2} + 6 \\ &= \frac{23}{2} - \frac{\pi}{2} \quad \#\end{aligned}$$

2. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้ โดยแสดงวิธีทำโดยละเอียด

2.1 **(5 คะแนน)** จงหาปริพันธ์ของ

$$\int \frac{(1+x)xe^{2x}}{\sqrt{1-xe^x}}\,dx$$

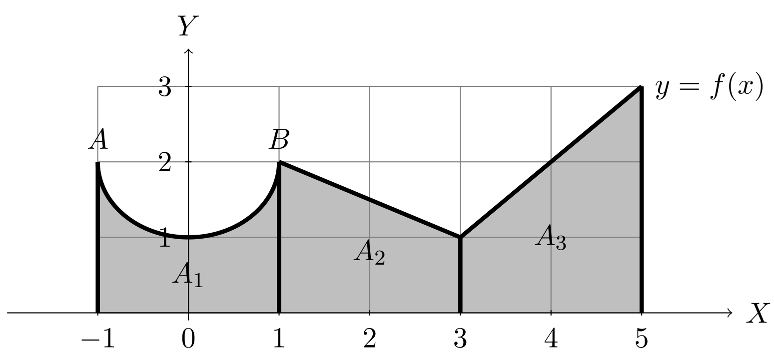
วิธีทำ ให้ $u = 1 - xe^x$ จะได้ว่า $xe^x = 1 - u$ และ

$$du = -(xe^x + e^x)dx = -e^x(x+1)dx$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int \frac{(1+x)xe^{2x}}{\sqrt{1-xe^x}}\,dx &= -\int \frac{xe^x}{\sqrt{1+xe^x}}\left[-(x+1)e^x dx\right] \\ &= -\int \frac{1-u}{\sqrt{u}}\,du = \int \frac{u}{\sqrt{u}} - \frac{1}{\sqrt{u}}\,du \\ &= \int u^{\frac{1}{2}} - u^{-\frac{1}{2}}\,du \\ &= \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}} + C \\ &= \frac{2}{3}(1-xe^x)^{\frac{3}{2}} - 2(1-xe^x)^{\frac{1}{2}} + C \quad \#\end{aligned}$$

2.2 **(5 คะแนน)** ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันบนช่วง $[-1, 5]$ เขียนกราฟได้ดังนี้
เมื่อ AB คือส่วนของวงกลมที่มีศูนย์กลางอยู่ที่ $(0, 2)$



จงหาค่าของ $\int_{-1}^{5} f(x)\,dx$

วิธีทำ เนื่องจาก $\int_{-1}^{5} f(x)\,dx$ หมายถึงพื้นที่ใต้กราฟของส่วนที่เหนือแกน X ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{5} f(x)\,dx &= A_1 + A_2 + A_3 \\ &= \left[2\cdot 2 - \frac{1}{2}\pi 1^2\right] + \frac{1}{2}(2+1)\cdot 2 + \frac{1}{2}(1+3)\cdot 2 \\ &= 4 - \frac{\pi}{2} + 3 + 4 \\ &= 11 - \frac{\pi}{2} \quad \#\end{aligned}$$

2. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้ โดยแสดงวิธีทำโดยละเอียด

2.1 **(5 คะแนน)** จงหาปริพันธ์ของ

$$\int \frac{(1+x)xe^{2x}}{\sqrt{2+xe^x}}\,dx$$

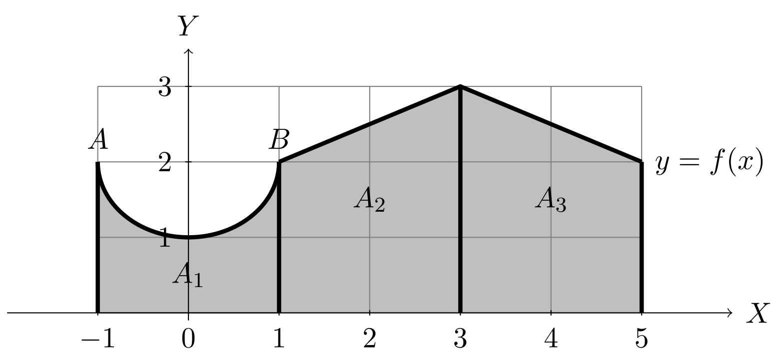
วิธีทำ ให้ $u = 2 + xe^x$ จะได้ว่า $xe^x = u - 2$ และ

$$du = (xe^x + e^x)dx = e^x(x+1)dx$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int \frac{(1+x)xe^{2x}}{\sqrt{2+xe^x}}\,dx &= \int \frac{xe^x}{\sqrt{2+xe^x}}\,(x+1)e^x dx \\
&= \int \frac{u-2}{\sqrt{u}}\,du = \int \frac{u}{\sqrt{u}} - \frac{2}{\sqrt{u}}\,du \\
&= \int u^{\frac{1}{2}} - 2u^{-\frac{1}{2}}\,du \\
&= \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - 4u^{\frac{1}{2}} + C \\
&= \frac{2}{3}(2+xe^x)^{\frac{3}{2}} - 4(2+xe^x)^{\frac{1}{2}} + C \quad \#
\end{aligned}$$

2.2 **(5 คะแนน)** ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันบนช่วง $[-1, 5]$ เขียนกราฟได้ดังนี้
เมื่อ AB คือส่วนของวงกลมที่มีศูนย์กลางอยู่ที่ $(0, 2)$



จงหาค่าของ $\int_{-1}^{5} f(x)\,dx$

วิธีทำ เนื่องจาก $\int_{-1}^{5} f(x)\,dx$ หมายถึงพื้นที่ใต้กราฟของส่วนที่เหนือแกน X ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{5} f(x)\,dx &= A_1 + A_2 + A_3 \\
&= \left[2\cdot 2 - \frac{1}{2}\pi 1^2\right] + \frac{1}{2}(2+3)\cdot 2 + \frac{1}{2}(3+2)\cdot 2 \\
&= 4 - \frac{\pi}{2} + 5 + 5 \\
&= 14 - \frac{\pi}{2} \quad \#
\end{aligned}$$

2. (10 **คะแนน**) จงตอบคำถามต่อไปนี้ โดยแสดงวิธีทำโดยละเอียด

2.1 (5 **คะแนน**) จงหาปริพันธ์ของ

$$\int \frac{(1+x)xe^{2x}}{\sqrt{2-xe^x}}\,dx$$

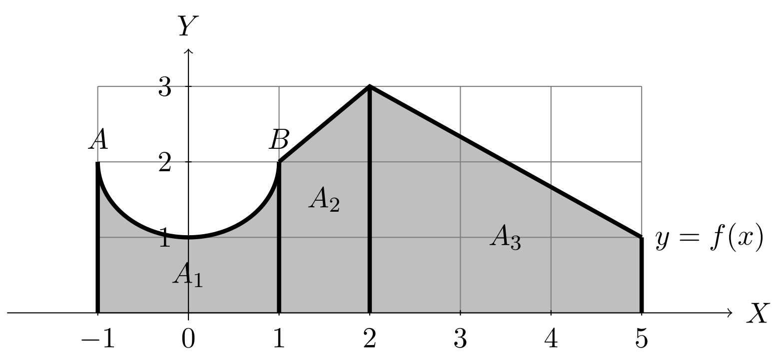
วิธีทำ ให้ $u = 2 - xe^x$ จะได้ว่า $xe^x = 2 - u$ และ

$$du = -(xe^x + e^x)dx = -e^x(x+1)dx$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int \frac{(1+x)xe^{2x}}{\sqrt{2-xe^x}}\,dx &= -\int \frac{xe^x}{\sqrt{2-xe^x}}\,[-(x+1)e^x dx] \\
&= -\int \frac{2-u}{\sqrt{u}}\,du = \int \frac{u}{\sqrt{u}} - \frac{2}{\sqrt{u}}\,du \\
&= \int u^{\frac{1}{2}} - 2u^{-\frac{1}{2}}\,du \\
&= \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - 4u^{\frac{1}{2}} + C \\
&= \frac{2}{3}(2-xe^x)^{\frac{3}{2}} - 4(2-xe^x)^{\frac{1}{2}} + C \quad \#
\end{aligned}$$

2.2 (5 **คะแนน**) ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันบนช่วง $[-1, 5]$ เขียนกราฟได้ดังนี้
เมื่อ AB คือส่วนของวงกลมที่มีศูนย์กลางอยู่ที่ $(0, 2)$



จงหาค่าของ $\int_{-1}^{5} f(x)\,dx$

วิธีทำ เนื่องจาก $\int_{-1}^{5} f(x)\,dx$ หมายถึงพื้นที่ใต้กราฟของส่วนที่เหนือแกน X ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{5} f(x)\,dx &= A_1 + A_2 + A_3 \\
&= \left[2\cdot 2 - \frac{1}{2}\pi 1^2\right] + \frac{1}{2}(2+3)\cdot 1 + \frac{1}{2}(3+1)\cdot 3 \\
&= 4 - \frac{\pi}{2} + \frac{5}{2} + 6 \\
&= \frac{25}{2} - \frac{\pi}{2} \quad \#
\end{aligned}$$

ข้อ 3

3. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้ โดยแสดงวิธีทำโดยละเอียด

   3.1 **(5 คะแนน)** กำหนดให้ $\int_0^2 f(x)\,dx = 10$ จงหาค่าของ

$$\int_0^1 \sin \pi x \cdot f(1+\cos \pi x)\,dx$$

วิธีทำ ให้ $u = 1+\cos \pi x$ จะได้ว่า $du = -\pi \sin \pi x\,dx$ และ

$$u(0) = 1+\cos 0 = 2 \quad \text{และ} \quad u(1) = 1+\cos \pi = 0$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sin \pi x \cdot f(1+\cos \pi x)\,dx &= -\frac{1}{\pi}\int_0^1 f(1+\cos \pi x)\,(-\pi \sin \pi x\,dx) \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_{u(0)}^{u(1)} f(u)\,du \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_2^0 f(u)\,du \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^2 f(u)\,du = \frac{1}{\pi}\cdot 10 = \frac{10}{\pi} \qquad \#
\end{aligned}$$

   3.2 **(5 คะแนน)** สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ กำหนดให้

$$F(x) = \int_{e^{-x}}^{e^x} \frac{\arctan(t^2)}{t}\,dt$$

จงหาค่าของ $F(0)$, $F'(0)$ และ $F''(0)$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$F(0) = \int_{e^{-0}}^{e^0} \frac{\arctan(t^2)}{t}\,dt = F(x) = \int_1^1 \frac{\arctan(t^2)}{t}\,dt = 0 \qquad \#$$

พิจารณา

$$\begin{aligned}
F(x) = \int_{e^{-x}}^{e^x} \frac{\arctan(t^2)}{t}\,dt &= \int_{e^{-x}}^{0} \frac{\arctan(t^2)}{t}\,dt + \int_0^{e^x} \frac{\arctan(t^2)}{t}\,dt \\
&= -\int_0^{e^{-x}} \frac{\arctan(t^2)}{t}\,dt + \int_0^{e^x} \frac{\arctan(t^2)}{t}\,dt
\end{aligned}$$

โดยทฤษฎีบทหลักมูลแคลคูลัสบทที่ 1

$$\begin{aligned}
F'(x) &= -\frac{\arctan(e^{-2x})}{e^{-x}}\cdot e^{-x}(-1) + \frac{\arctan(e^{2x})}{e^x}\cdot e^x \\
&= \arctan(e^{-2x}) + \arctan(e^{2x}) \\
F'(0) &= \arctan 1 + \arctan 1 = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \qquad \#
\end{aligned}$$

และจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
F''(x) &= \frac{1}{1+(e^{-2x})^2}\cdot e^{-2x}(-2) + \frac{1}{1+(e^{2x})^2}\cdot e^{2x}\cdot 2 \\
&= -\frac{2e^{-2x}}{1+e^{-4x}} + \frac{2e^{2x}}{1+e^{4x}} \\
F''(0) &= -1+1 = 0 \qquad \#
\end{aligned}$$

3. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้ โดยแสดงวิธีทำโดยละเอียด

3.1 **(5 คะแนน)** กำหนดให้ $\int_1^3 f(x)\,dx = 10$ จงหาค่าของ

$$\int_0^1 \sin \pi x \cdot f(2+\cos \pi x)\,dx$$

วิธีทำ ให้ $u = 2+\cos \pi x$ จะได้ว่า $du = -\pi \sin \pi x\,dx$ และ

$$u(0) = 2+\cos 0 = 3 \quad \text{และ} \quad u(1) = 2+\cos \pi = 1$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sin \pi x \cdot f(2+\cos \pi x)\,dx &= -\frac{1}{\pi}\int_0^1 f(2+\cos \pi x)\,(-\pi \sin \pi x\,dx) \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_{u(0)}^{u(1)} f(u)\,du \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_3^1 f(u)\,du \\
&= \frac{1}{\pi}\int_1^3 f(u)\,du = \frac{1}{\pi}\cdot 10 = \frac{10}{\pi} \qquad \#
\end{aligned}$$

3.2 **(5 คะแนน)** สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ กำหนดให้

$$F(x) = \int_{e^{-x}}^{e^x} \frac{\operatorname{arccot}(t^2)}{t}\,dt$$

จงหาค่าของ $F(0)$, $F'(0)$ และ $F''(0)$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$F(0) = \int_{e^{-0}}^{e^0} \frac{\operatorname{arccot}(t^2)}{t}\,dt = F(x) = \int_1^1 \frac{\operatorname{arccot}(t^2)}{t}\,dt = 0 \qquad \#$$

พิจารณา

$$\begin{aligned}
F(x) = \int_{e^{-x}}^{e^x} \frac{\operatorname{arccot}(t^2)}{t}\,dt &= \int_{e^{-x}}^{0} \frac{\operatorname{arccot}(t^2)}{t}\,dt + \int_0^{e^x} \frac{\operatorname{arccot}(t^2)}{t}\,dt \\
&= -\int_0^{e^{-x}} \frac{\operatorname{arccot}(t^2)}{t}\,dt + \int_0^{e^x} \frac{\operatorname{arccot}(t^2)}{t}\,dt
\end{aligned}$$

โดยทฤษฎีบทหลักมูลแคลคูลัสบทที่ 1

$$\begin{aligned}
F'(x) &= -\frac{\operatorname{arccot}(e^{-2x})}{e^{-x}}\cdot e^{-x}(-1) + \frac{\operatorname{arccot}(e^{2x})}{e^x}\cdot e^x \\
&= \operatorname{arccot}(e^{-2x}) + \operatorname{arccot}(e^{2x}) \\
F'(0) &= \operatorname{arccot} 1 + \operatorname{arccot} 1 = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \qquad \#
\end{aligned}$$

และจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
F''(x) &= -\frac{1}{1+(e^{-2x})^2}\cdot e^{-2x}(-2) - \frac{1}{1+(e^{2x})^2}\cdot e^{2x}\cdot 2 \\
&= \frac{2e^{-2x}}{1+e^{-4x}} - \frac{2e^{2x}}{1+e^{4x}} \\
F''(0) &= 1-1 = 0 \qquad \#
\end{aligned}$$

3. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้ โดยแสดงวิธีทำโดยละเอียด

3.1 **(5 คะแนน)** กำหนดให้ $\int_2^4 f(x)\,dx = 10$ จงหาค่าของ

$$\int_0^1 \sin\pi x \cdot f(3+\cos\pi x)\,dx$$

วิธีทำ ให้ $u = 3+\cos\pi x$ จะได้ว่า $du = -\pi\sin\pi x\,dx$ และ

$$u(0) = 3+\cos 0 = 4 \quad \text{และ} \quad u(1) = 3+\cos\pi = 2$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sin\pi x \cdot f(3+\cos\pi x)\,dx &= -\frac{1}{\pi}\int_0^1 f(3+\cos\pi x)\,(-\pi\sin\pi x\,dx) \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_{u(0)}^{u(1)} f(u)\,du \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_4^2 f(u)\,du \\
&= \frac{1}{\pi}\int_2^4 f(u)\,du = \frac{1}{\pi}\cdot 10 = \frac{10}{\pi} \qquad \#
\end{aligned}$$

3.2 **(5 คะแนน)** สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ กำหนดให้

$$F(x) = \int_{e^{-x}}^{e^x} \frac{\arctan(t^3)}{t}\,dt$$

จงหาค่าของ $F(0)$, $F'(0)$ และ $F''(0)$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$F(0) = \int_{e^{-0}}^{e^0} \frac{\arctan(t^3)}{t}\,dt = F(x) = \int_1^1 \frac{\arctan(t^3)}{t}\,dt = 0 \qquad \#$$

พิจารณา

$$\begin{aligned}
F(x) = \int_{e^{-x}}^{e^x} \frac{\arctan(t^3)}{t}\,dt &= \int_{e^{-x}}^{0} \frac{\arctan(t^3)}{t}\,dt + \int_0^{e^x} \frac{\arctan(t^3)}{t}\,dt \\
&= -\int_0^{e^{-x}} \frac{\arctan(t^3)}{t}\,dt + \int_0^{e^x} \frac{\arctan(t^3)}{t}\,dt
\end{aligned}$$

โดยทฤษฎีบทหลักมูลแคลคูลัสบทที่ 1

$$\begin{aligned}
F'(x) &= -\frac{\arctan(e^{-3x})}{e^{-x}}\cdot e^{-x}(-1) + \frac{\arctan(e^{3x})}{e^x}\cdot e^x \\
&= \arctan(e^{-3x}) + \arctan(e^{3x}) \\
F'(0) &= \arctan 1 + \arctan 1 = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \qquad \#
\end{aligned}$$

และจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
F''(x) &= \frac{1}{1+(e^{-3x})^2}\cdot e^{-3x}(-3) + \frac{1}{1+(e^{3x})^2}\cdot e^{3x}\cdot 3 \\
&= -\frac{3e^{-3x}}{1+e^{-6x}} + \frac{3e^{3x}}{1+e^{6x}} \\
F''(0) &= -\frac{3}{2}+\frac{3}{2} = 0 \qquad \#
\end{aligned}$$

3. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้ โดยแสดงวิธีทำโดยละเอียด

3.1 **(5 คะแนน)** กำหนดให้ $\int_3^5 f(x)\,dx = 10$ จงหาค่าของ

$$\int_0^1 \sin\pi x \cdot f(4+\cos\pi x)\,dx$$

วิธีทำ ให้ $u = 4+\cos\pi x$ จะได้ว่า $du = -\pi\sin\pi x\,dx$ และ

$$u(0) = 4+\cos 0 = 5 \quad \text{และ} \quad u(1) = 4+\cos\pi = 3$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sin\pi x \cdot f(4+\cos\pi x)\,dx &= -\frac{1}{\pi}\int_0^1 f(4+\cos\pi x)\,(-\pi\sin\pi x\,dx)\\ &= -\frac{1}{\pi}\int_{u(0)}^{u(1)} f(u)\,du\\ &= -\frac{1}{\pi}\int_5^3 f(u)\,du\\ &= \frac{1}{\pi}\int_3^5 f(u)\,du = \frac{1}{\pi}\cdot 10 = \frac{10}{\pi} \qquad \#\end{aligned}$$

3.2 **(5 คะแนน)** สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ กำหนดให้

$$F(x) = \int_{e^{-x}}^{e^x} \frac{\operatorname{arccot}(t^3)}{t}\,dt$$

จงหาค่าของ $F(0)$, $F'(0)$ และ $F''(0)$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$F(0) = \int_{e^{-0}}^{e^0} \frac{\operatorname{arccot}(t^3)}{t}\,dt = F(x) = \int_1^1 \frac{\operatorname{arccot}(t^3)}{t}\,dt = 0 \qquad \#$$

พิจารณา

$$\begin{aligned}F(x) = \int_{e^{-x}}^{e^x} \frac{\operatorname{arccot}(t^3)}{t}\,dt &= \int_{e^{-x}}^{0} \frac{\operatorname{arccot}(t^3)}{t}\,dt + \int_0^{e^x} \frac{\operatorname{arccot}(t^3)}{t}\,dt\\ &= -\int_0^{e^{-x}} \frac{\operatorname{arccot}(t^3)}{t}\,dt + \int_0^{e^x} \frac{\operatorname{arccot}(t^3)}{t}\,dt\end{aligned}$$

โดยทฤษฎีบทหลักมูลแคลคูลัสบทที่ 1

$$\begin{aligned}F'(x) &= -\frac{\operatorname{arccot}(e^{-3x})}{e^{-x}}\cdot e^{-x}(-1) + \frac{\operatorname{arccot}(e^{3x})}{e^x}\cdot e^x\\ &= \operatorname{arccot}(e^{-3x}) + \operatorname{arccot}(e^{3x})\\ F'(0) &= \operatorname{arccot}1 + \operatorname{arccot}1 = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \qquad \#\end{aligned}$$

และจะได้ว่า

$$\begin{aligned}F''(x) &= -\frac{1}{1+(e^{-3x})^2}\cdot e^{-3x}(-3) - \frac{1}{1+(e^{3x})^2}\cdot e^{3x}\cdot 3\\ &= \frac{3e^{-3x}}{1+e^{-6x}} - \frac{3e^{3x}}{1+e^{6x}}\\ F''(0) &= \frac{3}{2}-\frac{3}{2} = 0 \qquad \#\end{aligned}$$

ข้อ 4

4. (10 **คะแนน**) จงหาปริพันธ์
$$\int x^3 \sin(x^2)\, dx$$

วิธีทำ ให้ $t = x^2$ จะได้ว่า $dt = 2xdx$ ฉะนั้น
$$\int x^3 \sin(x^2)\, dx = \frac{1}{2}\int x^2 \sin(x^2)\,(2xdx) = \frac{1}{2}\int t \sin t\, dt$$
ให้ $u = t$ และ $dv = \sin t\, dt$ จะได้ว่า
$$du = dt \qquad \text{และ} \qquad v = -\cos t$$
ทำให้ได้ว่า
$$\begin{aligned}\int t\sin t\, dt &= -t\cos t - \int (-\cos t)\, dt \\ &= -t\cos t + \sin t + C\end{aligned}$$
ดังนั้น
$$\begin{aligned}\int x^3 \sin(x^2)\, dx &= \frac{1}{2}(-t\cos t + \sin t) + C \\ &= \frac{1}{2}(-x^2\cos x^2 + \sin x^2) + C \qquad \#\end{aligned}$$

4. (10 **คะแนน**) จงหาปริพันธ์
$$\int x^3 \cos(x^2)\, dx$$

วิธีทำ ให้ $t = x^2$ จะได้ว่า $dt = 2xdx$ ฉะนั้น
$$\int x^3 \cos(x^2)\, dx = \frac{1}{2}\int x^2 \cos(x^2)\,(2xdx) = \frac{1}{2}\int t \cos t\, dt$$
ให้ $u = t$ และ $dv = \cos t\, dt$ จะได้ว่า
$$du = dt \qquad \text{และ} \qquad v = \sin t$$
ทำให้ได้ว่า
$$\begin{aligned}\int t\cos t\, dt &= t\sin t - \int \sin t\, dt \\ &= t\sin t + \cos t + C\end{aligned}$$
ดังนั้น
$$\begin{aligned}\int x^3 \cos(x^2)\, dx &= \frac{1}{2}(t\sin t + \cos t) + C \\ &= \frac{1}{2}(x^2\sin x^2 + \cos x^2) + C \qquad \#\end{aligned}$$

4. (10 **คะแนน**) จงหาปริพันธ์

$$\int x^5 \sin(x^3)\, dx$$

วิธีทำ ให้ $t = x^3$ จะได้ว่า $dt = 3x^2 dx$ ฉะนั้น

$$\int x^5 \sin(x^3)\, dx = \frac{1}{3} \int x^3 \sin(x^3)\,(3x^2 dx) = \frac{1}{3} \int t \sin t\, dt$$

ให้ $u = t$ และ $dv = \sin t\, dt$ จะได้ว่า

$$du = dt \qquad \text{และ} \qquad v = -\cos t$$

ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}\int t \sin t\, dt &= -t \cos t - \int (-\cos t)\, dt \\ &= -t \cos t + \sin t + C\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int x^5 \sin(x^3)\, dx &= \frac{1}{3}(-t \cos t + \sin t) + C \\ &= \frac{1}{3}(-x^3 \cos x^3 + \sin x^3) + C \qquad \#\end{aligned}$$

4. (10 **คะแนน**) จงหาปริพันธ์

$$\int x^5 \cos(x^3)\, dx$$

วิธีทำ ให้ $t = x^3$ จะได้ว่า $dt = 3x^2 dx$ ฉะนั้น

$$\int x^5 \cos(x^3)\, dx = \frac{1}{3} \int x^3 \cos(x^3)\,(3x^2 dx) = \frac{1}{3} \int t \cos t\, dt$$

ให้ $u = t$ และ $dv = \cos t\, dt$ จะได้ว่า

$$du = dt \qquad \text{และ} \qquad v = \sin t$$

ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}\int t \cos t\, dt &= t \sin t - \int \sin t\, dt \\ &= t \sin t + \cos t + C\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int x^5 \cos(x^3)\, dx &= \frac{1}{3}(t \sin t + \cos t) + C \\ &= \frac{1}{3}(x^3 \sin x^3 + \cos x^3) + C \qquad \#\end{aligned}$$

ข้อ 5

5. **(10 คะแนน)** จงหาปริพันธ์

$$\int \frac{4}{16x^4-1}\,dx$$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\frac{4}{16x^4-1} &= \frac{4}{(4x^2-1)(4x^2+1)} = \frac{4}{(2x-1)(2x+1)(4x^2+1)} \\
&= \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{2x+1} + \frac{Cx+D}{4x^2+1} \\
4 &= A(2x+1)(4x^2+1) + B(2x-1)(4x^2+1) + (Cx+D)(2x-1)(2x+1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x = \frac{1}{2} \quad & 4 = 4A \qquad \therefore A = 1 \\
x = -\frac{1}{2}; \quad & 4 = -4B \qquad \therefore B = -1 \\
x = 0; \quad & 4 = A - B - D = 1 - (-1) - D \qquad \therefore D = -2 \\
x = 1; \quad & 4 = 15A + 5B + 3(C+D) = 15(1) + 5(-1) + 3C + 3(-2) \qquad \therefore C = 0
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int \frac{4}{16x^4-1}\,dx &= \int \frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+1} - \frac{2}{4x^2+1}\,dx \\
&= \int \frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+1} - \frac{2}{(2x)^2+1}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\ln|2x-1| - \frac{1}{2}\ln|2x+1| - \arctan(2x) + C \quad \#
\end{aligned}$$

5. **(10 คะแนน)** จงหาปริพันธ์

$$\int \frac{4}{81x^4-1}\,dx$$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\frac{4}{81x^4-1} &= \frac{4}{(9x^2-1)(9x^2+1)} = \frac{4}{(3x-1)(3x+1)(4x^2+1)} \\
&= \frac{A}{3x-1} + \frac{B}{3x+1} + \frac{Cx+D}{9x^2+1} \\
4 &= A(3x+1)(9x^2+1) + B(3x-1)(9x^2+1) + (Cx+D)(3x-1)(3x+1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x = \frac{1}{3} \quad & 4 = 4A \qquad \therefore A = 1 \\
x = -\frac{1}{3}; \quad & 4 = -4B \qquad \therefore B = -1 \\
x = 0; \quad & 4 = A - B - D = 1 - (-1) - D \qquad \therefore D = -2 \\
x = 1; \quad & 4 = 40A + 20B + 8(C+D) = 40(1) + 20(-1) + 8C + 8(-2) \qquad \therefore C = 0
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int \frac{4}{81x^4-1}\,dx &= \int \frac{1}{3x-1} - \frac{1}{3x+1} - \frac{2}{9x^2+1}\,dx \\
&= \int \frac{1}{3x-1} - \frac{1}{3x+1} - \frac{2}{(3x)^2+1}\,dx \\
&= \frac{1}{3}\ln|3x-1| - \frac{1}{3}\ln|3x+1| - \frac{2}{3}\arctan(3x) + C \quad \#
\end{aligned}$$

5. (10 **คะแนน**) จงหาปริพันธ์

$$\int \frac{4}{1-16x^4}\,dx$$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\frac{4}{1-16x^4} &= \frac{4}{(1-4x^2)(4x^2+1)} = \frac{4}{(1-2x)(1+2x)(1+4x^2)} \\
&= \frac{A}{1-2x} + \frac{B}{1+2x} + \frac{Cx+D}{1+4x^2} \\
4 &= A(1+2x)(1+4x^2) + B(1-2x)(1+4x^2) + (Cx+D)(1-2x)(1+2x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x = \frac{1}{2} \quad & 4 = 4A \qquad \therefore A = 1 \\
x = -\frac{1}{2}; \quad & 4 = 4B \qquad \therefore B = 1 \\
x = 0; \quad & 4 = A + B + D = 1 + 1 + D \qquad \therefore D = 2 \\
x = 1; \quad & 4 = 15A - 5B - 3(C+D) = 15(1) - 5(1) - 3C - 3(2) \qquad \therefore C = 0
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int \frac{4}{1-16x^4}\,dx &= \int \frac{1}{1-2x} + \frac{1}{1+2x} + \frac{2}{1+4x^2}\,dx \\
&= \int \frac{1}{1-2x} + \frac{1}{1+2x} + \frac{2}{1+(2x)^2}\,dx \\
&= -\frac{1}{2}\ln|1-2x| + \frac{1}{2}\ln|1+2x| + \arctan(2x) + C \quad \#
\end{aligned}$$

5. (10 **คะแนน**) จงหาปริพันธ์

$$\int \frac{4}{1-81x^4}\,dx$$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\frac{4}{1-81x^4} &= \frac{4}{(1-9x^2)(1+9x^2)} = \frac{4}{(1-3x)(1+3x)(1+9x^2)} \\
&= \frac{A}{1-3x} + \frac{B}{1+3x} + \frac{Cx+D}{1+9x^2} \\
4 &= A(1+3x)(1+9x^2) + B(1-3x)(1+9x^2) + (Cx+D)(1-3x)(1+3x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x = \frac{1}{3} \quad & 4 = 4A \qquad \therefore A = 1 \\
x = -\frac{1}{3}; \quad & 4 = 4B \qquad \therefore B = 1 \\
x = 0; \quad & 4 = A + B + D = 1 + 1 + D \qquad \therefore D = 2 \\
x = 1; \quad & 4 = 40A - 20B - 8(C+D) = 40(1) - 20(1) - 8C - 8(2) \qquad \therefore C = 0
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int \frac{4}{1-81x^4}\,dx &= \int \frac{1}{1-3x} + \frac{1}{1+3x} + \frac{2}{1+9x^2}\,dx \\
&= \int \frac{1}{1-3x} + \frac{1}{1+3x} + \frac{2}{1+(3x)^2}\,dx \\
&= -\frac{1}{3}\ln|1-3x| + \frac{1}{3}\ln|1+3x| + \frac{2}{3}\arctan(3x) + C \quad \#
\end{aligned}$$

ข้อ 6

6. **(15 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้ โดยแสดงวิธีทำโดยละเอียด

6.1 **(8 คะแนน)** จงหาค่าต่อไปนี้

$$\int_0^{49} \frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}\,dx$$

วิธีทำ ให้ $u = (1+\sqrt{x})^{\frac{1}{3}}$ จะได้ว่า $u^3 = 1+\sqrt{x}$ หรือ $\sqrt{x} = u^3-1$

$$du = \frac{1}{3}(1+\sqrt{x})^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{6(1+\sqrt{x})^{\frac{2}{3}}\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{6u^2(u^3-1)}\,dx$$

ฉะนั้น $dx = 6u^2(u^3-1)du$ โดยที่ $u(0) = (1+0)^{\frac{1}{3}} = 1$ และ $u(49) = (1+7)^{\frac{1}{3}} = 2$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int_0^{49} \frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}\,dx &= \int_{u(0)}^{u(49)} \frac{3-(u^3-1)}{u}\,6u^2(u^3-1)\,du \\
&= \int_1^2 (4-u^3)6u(u^3-1)\,du \\
&= \int_1^2 6u(-4+5u^3-u^6)\,du \\
&= \int_1^2 -24u+30u^4-6u^7\,du \\
&= \left[-12u^2+6u^5-\frac{3}{4}u^8\right]_1^2 \\
&= \left[-12(4)+6(32)-\frac{3}{4}(256)\right] - \left[-12+6-\frac{3}{4}\right] \\
&= -\frac{165}{4} \quad \#
\end{aligned}$$

6.2 **(7 คะแนน)** จงหาปริพันธ์

$$\int (\sin x + \cos x)^4\,dx$$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int (\sin x+\cos x)^4\,dx &= \int [(\sin x+\cos x)^2]^2\,dx \\
&= \int [\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x]^2\,dx \\
&= \int [1+\sin 2x]^2\,dx \\
&= \int 1+2\sin 2x+\sin^2 2x\,dx \\
&= \int 1+2\sin 2x+\frac{1-\cos 4x}{2}\,dx \\
&= \int 1+2\sin 2x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 4x\,dx \\
&= \int \frac{3}{2}+2\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 4x\,dx \\
&= \frac{3}{2}x-\cos 2x-\frac{1}{8}\sin 4x + C \quad \#
\end{aligned}$$

6. **(15 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้ โดยแสดงวิธีทำโดยละเอียด

6.1 **(8 คะแนน)** จงหาค่าต่อไปนี้

$$\int_0^{49} \frac{8-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}\,dx$$

วิธีทำ ให้ $u=(1+\sqrt{x})^{\frac{1}{3}}$ จะได้ว่า $u^3=1+\sqrt{x}$ หรือ $\sqrt{x}=u^3-1$

$$du=\frac{1}{3}(1+\sqrt{x})^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx=\frac{1}{6(1+\sqrt{x})^{\frac{2}{3}}\sqrt{x}}\,dx=\frac{1}{6u^2(u^3-1)}\,dx$$

ฉะนั้น $dx=6u^2(u^3-1)du$ โดยที่ $u(0)=(1+0)^{\frac{1}{3}}=1$ และ $u(49)=(1+7)^{\frac{1}{3}}=2$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int_0^{49} \frac{8-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}\,dx &= \int_{u(0)}^{u(49)} \frac{8-(u^3-1)}{u}\,6u^2(u^3-1)\,du\\
&= \int_1^2 (9-u^3)6u(u^3-1)\,du\\
&= \int_1^2 6u(-9+10u^3-u^6)\,du\\
&= \int_1^2 -54u+60u^4-6u^7\,du\\
&= \left[-27u^2+12u^5-\frac{3}{4}u^8\right]_1^2\\
&= \left[-27(4)+12(32)-\frac{3}{4}(256)\right]-\left[-27+12-\frac{3}{4}\right]\\
&= \frac{399}{4} \quad \#
\end{aligned}$$

6.2 **(7 คะแนน)** จงหาปริพันธ์

$$\int(\sin x-\cos x)^4\,dx$$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int(\sin x-\cos x)^4\,dx &= \int[(\sin x-\cos x)^2]^2\,dx\\
&= \int[\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x]^2\,dx\\
&= \int[1-\sin 2x]^2\,dx\\
&= \int 1-2\sin 2x+\sin^2 2x\,dx\\
&= \int 1-2\sin 2x+\frac{1-\cos 4x}{2}\,dx\\
&= \int 1-2\sin 2x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 4x\,dx\\
&= \int \frac{3}{2}-2\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 4x\,dx\\
&= \frac{3}{2}x+\cos 2x-\frac{1}{8}\sin 4x+C \quad \#
\end{aligned}$$

6. **(15 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้ โดยแสดงวิธีทำโดยละเอียด

6.1 **(8 คะแนน)** จงหาค่าต่อไปนี้

$$\int_0^{49} \frac{-2-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}\,dx$$

วิธีทำ ให้ $u = (1+\sqrt{x})^{\frac{1}{3}}$ จะได้ว่า $u^3 = 1+\sqrt{x}$ หรือ $\sqrt{x} = u^3 - 1$

$$du = \frac{1}{3}(1+\sqrt{x})^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{6(1+\sqrt{x})^{\frac{2}{3}}\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{6u^2(u^3-1)}\,dx$$

ฉะนั้น $dx = 6u^2(u^3-1)du$ โดยที่ $u(0) = (1+0)^{\frac{1}{3}} = 1$ และ $u(49) = (1+7)^{\frac{1}{3}} = 2$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int_0^{49} \frac{-2-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}\,dx &= \int_{u(0)}^{u(49)} \frac{-2-(u^3-1)}{u}\,6u^2(u^3-1)\,du \\
&= \int_1^2 (-1-u^3)6u(u^3-1)\,du \\
&= \int_1^2 6u(1-u^6)\,du \\
&= \int_1^2 6u - 6u^7\,du \\
&= \left[3u^2 - \frac{3}{4}u^8\right]_1^2 \\
&= \left[3(4) - \frac{3}{4}(256)\right] - \left[3 - \frac{3}{4}\right] \\
&= -\frac{729}{4} \qquad \#
\end{aligned}$$

6.2 **(7 คะแนน)** จงหาปริพันธ์

$$\int (\sin 2x + \cos 2x)^4\,dx$$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int (\sin 2x + \cos 2x)^4\,dx &= \int [(\sin 2x + \cos 2x)^2]^2\,dx \\
&= \int [\sin^2 2x + 2\sin 2x\cos 2x + \cos^2 2x]^2\,dx \\
&= \int [1+\sin 4x]^2\,dx \\
&= \int 1 + 2\sin 4x + \sin^2 4x\,dx \\
&= \int 1 + 2\sin 4x + \frac{1-\cos 8x}{2}\,dx \\
&= \int 1 + 2\sin 4x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x\,dx \\
&= \int \frac{3}{2} + 2\sin 4x - \frac{1}{2}\cos 8x\,dx \\
&= \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1}{16}\sin 8x + C \qquad \#
\end{aligned}$$

6. **(15 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้ โดยแสดงวิธีทำโดยละเอียด

6.1 **(8 คะแนน)** จงหาค่าต่อไปนี้

$$\int_0^{49} \frac{-7-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}\,dx$$

วิธีทำ ให้ $u = (1+\sqrt{x})^{\frac{1}{3}}$ จะได้ว่า $u^3 = 1+\sqrt{x}$ หรือ $\sqrt{x} = u^3 - 1$

$$du = \frac{1}{3}(1+\sqrt{x})^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{6(1+\sqrt{x})^{\frac{2}{3}}\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{6u^2(u^3-1)}\,dx$$

ฉะนั้น $dx = 6u^2(u^3-1)du$ โดยที่ $u(0) = (1+0)^{\frac{1}{3}} = 1$ และ $u(49) = (1+7)^{\frac{1}{3}} = 2$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int_0^{49} \frac{-7-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}\,dx &= \int_{u(0)}^{u(49)} \frac{-7-(u^3-1)}{u}\,6u^2(u^3-1)\,du \\
&= \int_1^2 (-6-u^3)6u(u^3-1)\,du \\
&= \int_1^2 6u(6-5u^3-u^6)\,du \\
&= \int_1^2 36u - 30u^4 - 6u^7\,du \\
&= \left[18u^2 - 6u^5 - \frac{3}{4}u^8\right]_1^2 \\
&= \left[18(4) - 6(32) - \frac{3}{4}(256)\right] - \left[18 - 6 - \frac{3}{4}\right] \\
&= -\frac{1293}{4} \qquad \#
\end{aligned}$$

6.2 **(7 คะแนน)** จงหาปริพันธ์

$$\int (\sin 2x - \cos 2x)^4\,dx$$

วิธีทำ จะได้ว่า

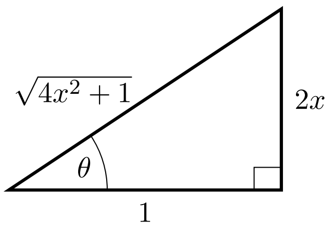
$$\begin{aligned}
\int (\sin 2x - \cos 2x)^4\,dx &= \int [(\sin 2x - \cos 2x)^2]^2\,dx \\
&= \int [\sin^2 2x - 2\sin 2x\cos 2x + \cos^2 2x]^2\,dx \\
&= \int [1 - \sin 4x]^2\,dx \\
&= \int 1 - 2\sin 4x + \sin^2 4x\,dx \\
&= \int 1 - 2\sin 4x + \frac{1-\cos 8x}{2}\,dx \\
&= \int 1 - 2\sin 4x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x\,dx \\
&= \int \frac{3}{2} - 2\sin 4x - \frac{1}{2}\cos 8x\,dx \\
&= \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1}{16}\sin 8x + C \qquad \#
\end{aligned}$$

ข้อ 7

7. (10 **คะแนน**) จงหาปริพันธ์

$$\int \frac{\sqrt{4x^2+1}}{x}\,dx$$

วิธีทำ ให้ $2x = \tan\theta$ เมื่อ $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ นั่นคือ $\sec\theta > 0$



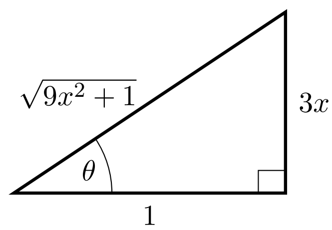
จะได้ว่า $dx = \dfrac{1}{2}\sec^2\theta\,d\theta$ และ $\sec\theta = \sqrt{4x^2+1}$ ฉะนั้น

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{4x^2+1}}{x}\,dx &= \int \frac{\sqrt{\tan^2\theta+1}}{\frac{1}{2}\tan\theta} \cdot \frac{1}{2}\sec^2\theta\,d\theta \\
&= \int \frac{\sqrt{\sec^2\theta}}{\tan\theta} \cdot \sec^2\theta\,d\theta \\
&= \int \frac{\sec\theta}{\tan\theta} \cdot \sec^2\theta\,d\theta \\
&= \int \frac{\sec^3\theta}{\tan\theta}\,d\theta \\
&= \int \frac{\sec^3\theta}{\tan\theta} \cdot \frac{\tan\theta}{\tan\theta}\,d\theta \\
&= \int \frac{\sec^2\theta}{\tan^2\theta} \cdot \sec\theta\tan\theta\,d\theta \\
&= \int \frac{\sec^2\theta}{\tan^2\theta}\,d\sec\theta \\
&= \int \frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta-1}\,d\sec\theta \\
&= \int \frac{(\sec^2\theta-1)+1}{\sec^2\theta-1}\,d\sec\theta \\
&= \int 1 + \frac{1}{\sec^2\theta-1}\,d\sec\theta \\
&= \int 1 + \frac{1}{(\sec\theta-1)(\sec\theta+1)}\,d\sec\theta \\
&= \int 1 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sec\theta-1} - \frac{1}{\sec\theta+1}\right]\,d\sec\theta \\
&= \sec\theta + \frac{1}{2}\ln|\sec\theta-1| - \frac{1}{2}\ln|\sec\theta+1| + C \\
&= \sqrt{4x^2+1} + \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{4x^2+1}-1\right| - \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{4x^2+1}+1\right| + C \quad \#
\end{aligned}$$

7. (10 **คะแนน**) จงหาปริพันธ์

$$\int \frac{\sqrt{9x^2+1}}{x}\,dx$$

วิธีทำ ให้ $3x = \tan\theta$ เมื่อ $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ นั่นคือ $\sec\theta > 0$



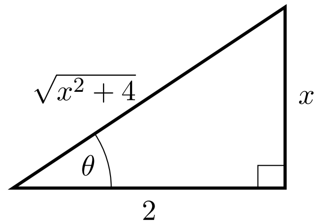
จะได้ว่า $dx = \dfrac{1}{3}\sec^2\theta\,d\theta$ และ $\sec\theta = \sqrt{9x^2+1}$ ฉะนั้น

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{9x^2+1}}{x}\,dx &= \int \frac{\sqrt{\tan^2\theta+1}}{\frac{1}{3}\tan\theta}\cdot\frac{1}{3}\sec^2\theta\,d\theta \\
&= \int \frac{\sqrt{\sec^2\theta}}{\tan\theta}\cdot\sec^2\theta\,d\theta \\
&= \int \frac{\sec\theta}{\tan\theta}\cdot\sec^2\theta\,d\theta \\
&= \int \frac{\sec^3\theta}{\tan\theta}\,d\theta \\
&= \int \frac{\sec^3\theta}{\tan\theta}\cdot\frac{\tan\theta}{\tan\theta}\,d\theta \\
&= \int \frac{\sec^2\theta}{\tan^2\theta}\cdot\sec\theta\tan\theta\,d\theta \\
&= \int \frac{\sec^2\theta}{\tan^2\theta}\,d\sec\theta \\
&= \int \frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta-1}\,d\sec\theta \\
&= \int \frac{(\sec^2\theta-1)+1}{\sec^2\theta-1}\,d\sec\theta \\
&= \int 1+\frac{1}{\sec^2\theta-1}\,d\sec\theta \\
&= \int 1+\frac{1}{(\sec\theta-1)(\sec\theta+1)}\,d\sec\theta \\
&= \int 1+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sec\theta-1}-\frac{1}{\sec\theta+1}\right]d\sec\theta \\
&= \sec\theta+\frac{1}{2}\ln|\sec\theta-1|-\frac{1}{2}\ln|\sec\theta+1|+C \\
&= \sqrt{9x^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{9x^2+1}-1\right|-\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{9x^2+1}+1\right|+C \quad \#
\end{aligned}$$

7. (10 **คะแนน**) จงหาปริพันธ์

$$\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x}\,dx$$

วิธีทำ ให้ $x = 2\tan\theta$ เมื่อ $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ นั่นคือ $\sec\theta > 0$



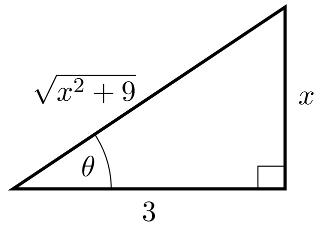
จะได้ว่า $dx = 2\sec^2\theta\,d\theta$ และ $\sec\theta = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+4}$ ฉะนั้น

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x}\,dx &= \int \frac{\sqrt{4\tan^2\theta+4}}{2\tan\theta}\cdot 2\sec^2\theta\,d\theta \\
&= \int \frac{\sqrt{4(\tan^2\theta+1)}}{\tan\theta}\cdot \sec^2\theta\,d\theta \\
&= \int \frac{\sqrt{4\sec^2\theta}}{\tan\theta}\cdot \sec^2\theta\,d\theta \\
&= \int \frac{2\sec\theta}{\tan\theta}\cdot \sec^2\theta\,d\theta \\
&= 2\int \frac{\sec^3\theta}{\tan\theta}\,d\theta \\
&= 2\int \frac{\sec^3\theta}{\tan\theta}\cdot\frac{\tan\theta}{\tan\theta}\,d\theta \\
&= 2\int \frac{\sec^2\theta}{\tan^2\theta}\cdot \sec\theta\tan\theta\,d\theta \\
&= 2\int \frac{\sec^2\theta}{\tan^2\theta}\,d\sec\theta \\
&= 2\int \frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta-1}\,d\sec\theta \\
&= 2\int \frac{(\sec^2\theta-1)+1}{\sec^2\theta-1}\,d\sec\theta \\
&= 2\int 1+\frac{1}{\sec^2\theta-1}\,d\sec\theta \\
&= 2\int 1+\frac{1}{(\sec\theta-1)(\sec\theta+1)}\,d\sec\theta \\
&= 2\int 1+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sec\theta-1}-\frac{1}{\sec\theta+1}\right]d\sec\theta \\
&= \int 2+\frac{1}{\sec\theta-1}-\frac{1}{\sec\theta+1}\,d\sec\theta \\
&= 2\sec\theta+\ln|\sec\theta-1|-\ln|\sec\theta+1|+C \\
&= \sqrt{x^2+4}+\ln\left|\frac{1}{2}\sqrt{x^2+4}-1\right|-\ln\left|\frac{1}{2}\sqrt{x^2+4}+1\right|+C \quad \#
\end{aligned}$$

7. (10 **คะแนน**) จงหาปริพันธ์

$$\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x}\,dx$$

วิธีทำ ให้ $x = 3\tan\theta$ เมื่อ $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ นั่นคือ $\sec\theta > 0$



จะได้ว่า $dx = 3\sec^2\theta\,d\theta$ และ $\sec\theta = \frac{1}{3}\sqrt{x^2+9}$ ฉะนั้น

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x}\,dx &= \int \frac{\sqrt{9\tan^2\theta+9}}{3\tan\theta}\cdot 3\sec^2\theta\,d\theta \\
&= \int \frac{\sqrt{9(\tan^2\theta+1)}}{\tan\theta}\cdot \sec^2\theta\,d\theta \\
&= \int \frac{\sqrt{9\sec^2\theta}}{\tan\theta}\cdot \sec^2\theta\,d\theta \\
&= \int \frac{3\sec\theta}{\tan\theta}\cdot \sec^2\theta\,d\theta \\
&= 3\int \frac{\sec^3\theta}{\tan\theta}\,d\theta \\
&= 3\int \frac{\sec^3\theta}{\tan\theta}\cdot\frac{\tan\theta}{\tan\theta}\,d\theta \\
&= 3\int \frac{\sec^2\theta}{\tan^2\theta}\cdot \sec\theta\tan\theta\,d\theta \\
&= 3\int \frac{\sec^2\theta}{\tan^2\theta}\,d\sec\theta \\
&= 3\int \frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta-1}\,d\sec\theta \\
&= 3\int \frac{(\sec^2\theta-1)+1}{\sec^2\theta-1}\,d\sec\theta \\
&= 3\int 1+\frac{1}{\sec^2\theta-1}\,d\sec\theta \\
&= 3\int 1+\frac{1}{(\sec\theta-1)(\sec\theta+1)}\,d\sec\theta \\
&= 3\int 1+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sec\theta-1}-\frac{1}{\sec\theta+1}\right]d\sec\theta \\
&= \int 3+\frac{3}{2}\left[\frac{1}{\sec\theta-1}-\frac{1}{\sec\theta+1}\right]d\sec\theta \\
&= 3\sec\theta+\frac{3}{2}\ln|\sec\theta-1|-\frac{3}{2}\ln|\sec\theta+1|+C \\
&= \sqrt{x^2+9}+\frac{3}{2}\ln\left|\frac{1}{3}\sqrt{x^2+9}-1\right|-\frac{3}{2}\ln\left|\frac{1}{3}\sqrt{x^2+9}+1\right|+C \quad \#
\end{aligned}$$

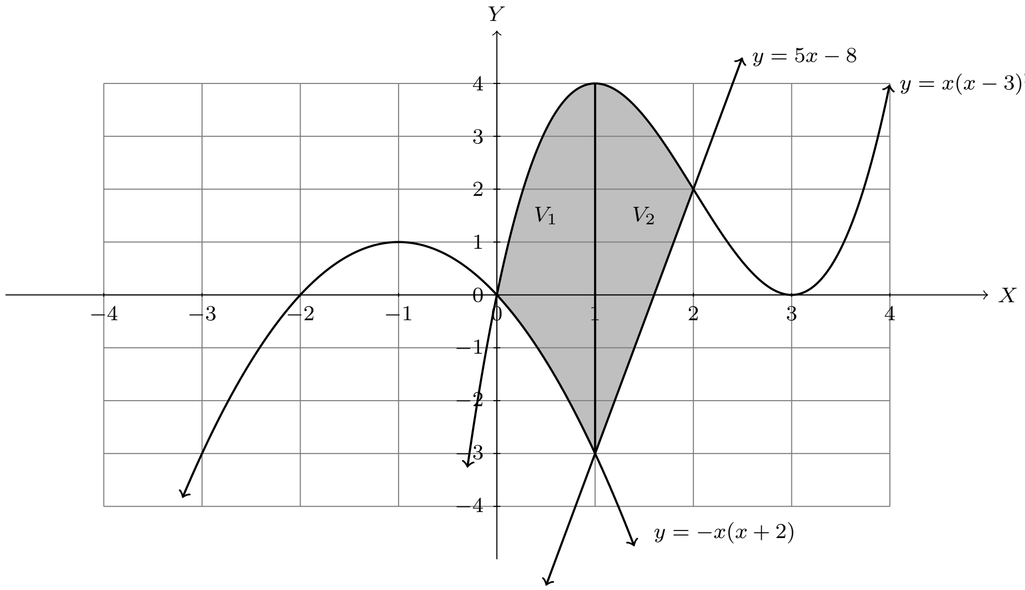
ข้อ 8

8. (10 **คะแนน**) จงหาปริมาตรของรูปทรงตันซึ่งเกิดจากการหมุนอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วย

$$y = x(x-3)^2 \quad \text{และ} \quad y = -x(x+2) \quad \text{และ } y = 5x-8 \text{ โดยที่ } x > 0$$

รอบแกน Y ซึ่งแสดงได้ดังกราฟ

วิธีทำ ปริมาตรของรูปทรงตันโดยใช้**วิธีเปลือกทรงกระบอก** โดยแบ่งออกเป็น 2 ส่วนดังกราฟ



หา V_1 จากกราฟจะได้

$$h_1 = x(x-3)^2 - [-x(x+2)] = x(x^2-6x+9) + x^2 + 2x = x^3 - 5x^2 + 11x$$

และ $r_1 = x$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_0^1 2\pi r_1 h_1 \, dx = \int_0^1 2\pi x(x^3 - 5x^2 + 11x) \, dx \\ &= 2\pi \int_0^1 x^4 - 5x^3 + 11x^2 \, dx \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{4}x^4 + \frac{11}{3}x^3 \right]_0^1 = 2\pi \left[\frac{1}{5} - \frac{5}{4} + \frac{11}{3} \right] - 0 = \frac{157\pi}{30} \end{aligned}$$

หา V_2 จากกราฟจะได้

$$h_2 = x(x-3)^2 - (5x-8) = x(x^2-6x+9) - 5x + 8 = x^3 - 6x^2 + 4x + 8$$

และ $r_2 = x$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} V_2 &= \int_1^2 2\pi r_2 h_2 \, dx = \int_1^2 2\pi x(x^3 - 6x^2 + 4x + 8) \, dx = 2\pi \int_1^2 x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 8x \, dx \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + 4x^2 \right]_1^2 \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{5}(32) - \frac{3}{2}(16) + \frac{4}{3}(8) + 4(4) \right] - 2\pi \left[\frac{1}{5} - \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + 4 \right] \\ &= 2\pi \left(\frac{136}{15} - \frac{121}{30} \right) = \frac{151\pi}{15} \end{aligned}$$

ดังนั้น

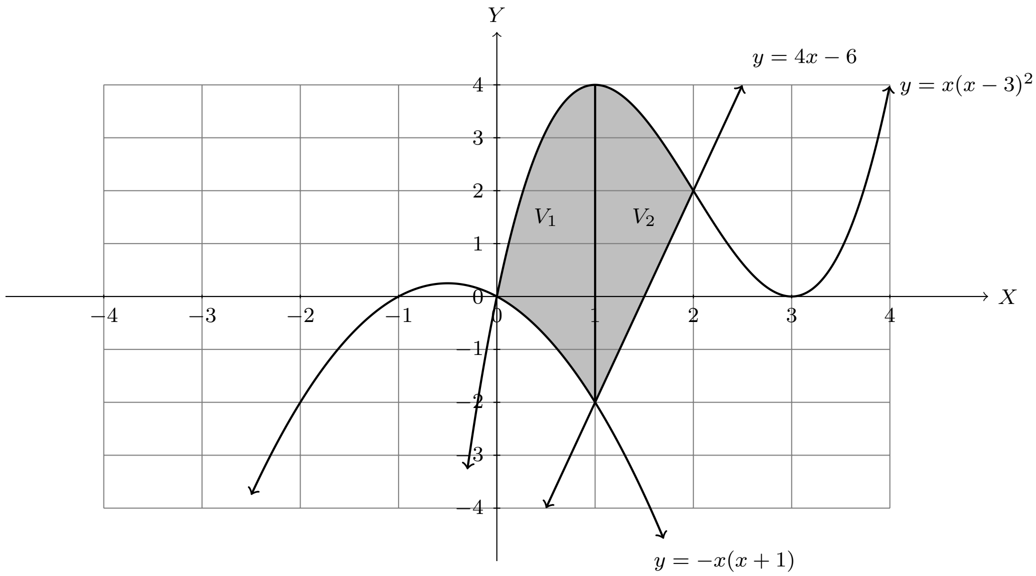
$$V = V_1 + V_2 = \frac{157\pi}{30} + \frac{151\pi}{15} = \frac{153\pi}{10} \qquad \#$$

8. (10 **คะแนน**) จงหาปริมาตรของรูปทรงตันซึ่งเกิดจากการหมุนอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วย

$$y = x(x-3)^2 \quad \text{และ} \quad y = -x(x+1) \quad \text{และ } y = 4x - 6 \text{ โดยที่ } x > 0$$

รอบแกน Y ซึ่งแสดงได้ดังกราฟ

วิธีทำ ปริมาตรของรูปทรงตันโดยใช้**วิธีเปลือกทรงกระบอก** โดยแบ่งออกเป็น 2 ส่วนดังกราฟ



หา V_1 จากกราฟจะได้

$$h_1 = x(x-3)^2 - [-x(x+1)] = x(x^2 - 6x + 9) + x^2 + x = x^3 - 5x^2 + 10x$$

และ $r_1 = x$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_0^1 2\pi r_1 h_1 \, dx = \int_0^1 2\pi x(x^3 - 5x^2 + 10x) \, dx \\ &= 2\pi \int_0^1 x^4 - 5x^3 + 10x^2 \, dx \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{4}x^4 + \frac{10}{3}x^3 \right]_0^1 = 2\pi \left[\frac{1}{5} - \frac{5}{4} + \frac{10}{3} \right] - 0 = \frac{137\pi}{30} \end{aligned}$$

หา V_2 จากกราฟจะได้

$$h_2 = x(x-3)^2 - (4x - 6) = x(x^2 - 6x + 9) - 4x + 6 = x^3 - 6x^2 + 5x + 6$$

และ $r_2 = x$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} V_2 &= \int_1^2 2\pi r_2 h_2 \, dx = \int_1^2 2\pi x(x^3 - 6x^2 + 5x + 6) \, dx = 2\pi \int_1^2 x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 6x \, dx \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 + 3x^2 \right]_1^2 \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{5}(32) - \frac{3}{2}(16) + \frac{5}{3}(8) + 3(4) \right] - 2\pi \left[\frac{1}{5} - \frac{3}{2} + \frac{5}{3} + 3 \right] \\ &= 2\pi \left(\frac{116}{15} - \frac{101}{30} \right) = \frac{131\pi}{15} \end{aligned}$$

ดังนั้น

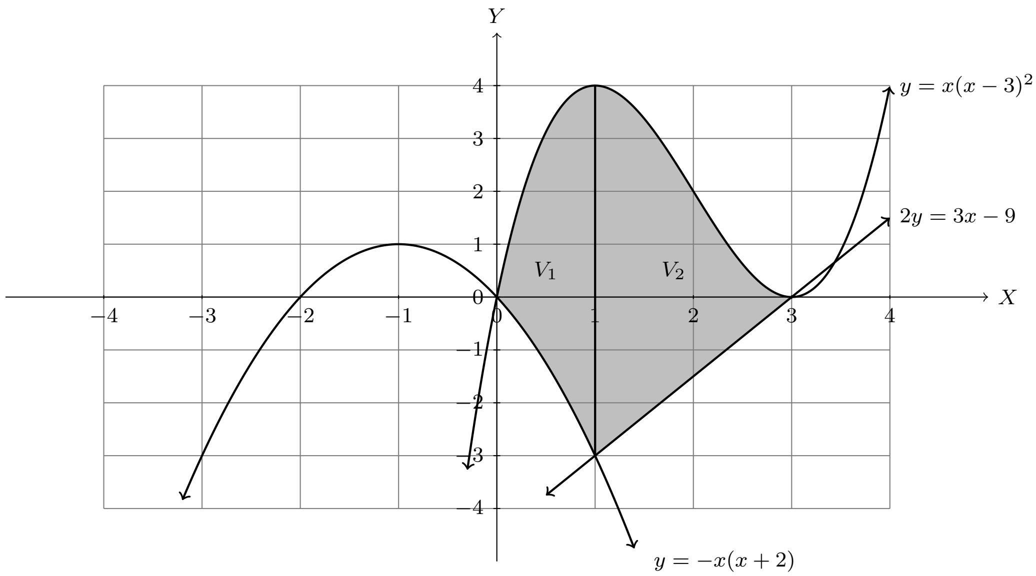
$$V = V_1 + V_2 = \frac{137\pi}{30} + \frac{131\pi}{15} = \frac{133\pi}{10} \qquad \#$$

8. **(10 คะแนน)** จงหาปริมาตรของรูปทรงตันซึ่งเกิดจากการหมุนอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วย

$$y = x(x-3)^2 \quad \text{และ} \quad y = -x(x+2) \quad \text{และ } 2y = 3x - 9 \text{ โดยที่ } x > 0$$

รอบแกน Y ซึ่งแสดงได้ดังกราฟ

วิธีทำ ปริมาตรของรูปทรงตันโดยใช้**วิธีเปลือกทรงกระบอก** โดยแบ่งออกเป็น 2 ส่วนดังกราฟ



หา V_1 จากกราฟจะได้

$$h_1 = x(x-3)^2 - [-x(x+2)] = x(x^2 - 6x + 9) + x^2 + 2x = x^3 - 5x^2 + 11x$$

และ $r_1 = x$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_0^1 2\pi r_1 h_1 \, dx = \int_0^1 2\pi x(x^3 - 5x^2 + 11x) \, dx \\ &= 2\pi \int_0^1 x^4 - 5x^3 + 11x^2 \, dx \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{4}x^4 + \frac{11}{3}x^3 \right]_0^1 = 2\pi \left[\frac{1}{5} - \frac{5}{4} + \frac{11}{3} \right] - 0 = \frac{157\pi}{30} \end{aligned}$$

หา V_2 จากกราฟจะได้

$$h_2 = x(x-3)^2 - \left(\frac{3}{2}x - \frac{9}{2} \right) = x(x^2 - 6x + 9) - \frac{3}{2}x + \frac{9}{2} = x^3 - 6x^2 + \frac{15}{2}x + \frac{9}{2}$$

และ $r_2 = x$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} V_2 &= \int_1^3 2\pi r_2 h_2 \, dx = \int_1^3 2\pi x \left(x^3 - 6x^2 + \frac{15}{2}x + \frac{9}{2} \right) \, dx = 2\pi \int_1^3 x^4 - 6x^3 + \frac{15}{2}x^2 + \frac{9}{2}x \, dx \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{5}{2}x^3 + \frac{9}{4}x^2 \right]_1^3 \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{5}(243) - \frac{3}{2}(81) + \frac{5}{2}(27) + \frac{9}{4}(9) \right] - 2\pi \left[\frac{1}{5} - \frac{3}{2} + \frac{5}{2} + \frac{9}{4} \right] \\ &= 2\pi \left(\frac{297}{20} - \frac{69}{20} \right) = \frac{114\pi}{5} \end{aligned}$$

ดังนั้น

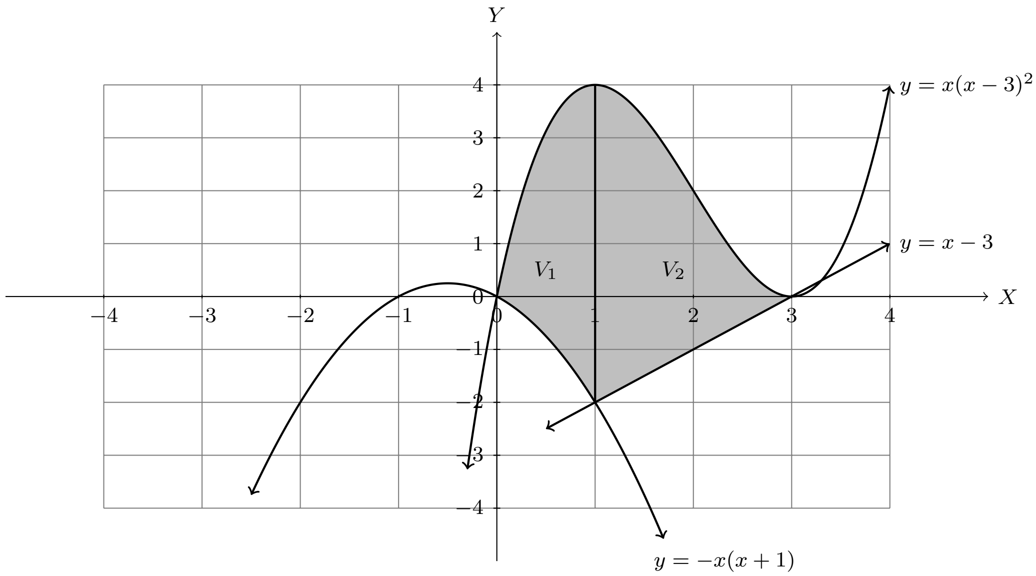
$$V = V_1 + V_2 = \frac{157\pi}{30} + \frac{114\pi}{5} = \frac{841\pi}{30} \qquad \#$$

8. **(10 คะแนน)** จงหาปริมาตรของรูปทรงตันซึ่งเกิดจากการหมุนอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วย

$$y = x(x-3)^2 \quad \text{และ} \quad y = -x(x+1) \quad \text{และ } y = x-3 \text{ โดยที่ } x > 0$$

รอบแกน Y ซึ่งแสดงได้ดังกราฟ

วิธีทำ ปริมาตรของรูปทรงตันโดยใช้**วิธีเปลือกทรงกระบอก** โดยแบ่งออกเป็น 2 ส่วนดังกราฟ



หา V_1 จากกราฟจะได้

$$h_1 = x(x-3)^2 - [-x(x+1)] = x(x^2-6x+9) + x^2 + x = x^3 - 5x^2 + 10x$$

และ $r_1 = x$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_0^1 2\pi r_1 h_1 \, dx = \int_0^1 2\pi x(x^3 - 5x^2 + 10x) \, dx \\ &= 2\pi \int_0^1 x^4 - 5x^3 + 10x^2 \, dx \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{4}x^4 + \frac{10}{3}x^3\right]_0^1 = 2\pi \left[\frac{1}{5} - \frac{5}{4} + \frac{10}{3}\right] - 0 = \frac{137\pi}{30} \end{aligned}$$

หา V_2 จากกราฟจะได้

$$h_2 = x(x-3)^2 - (x-3) = x(x^2-6x+9) - x + 3 = x^3 - 6x^2 + 8x + 3$$

และ $r_2 = x$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} V_2 &= \int_1^3 2\pi r_2 h_2 \, dx = \int_1^3 2\pi x(x^3 - 6x^2 + 8x + 3) \, dx = 2\pi \int_1^3 x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 3x \, dx \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{8}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_1^3 \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{5}(243) - \frac{3}{2}(81) + \frac{8}{3}(27) + \frac{3}{2}(9)\right] - 2\pi \left[\frac{1}{5} - \frac{3}{2} + \frac{8}{3} + \frac{3}{2}\right] \\ &= 2\pi \left(\frac{63}{5} - \frac{43}{15}\right) = \frac{292\pi}{15} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$V = V_1 + V_2 = \frac{137\pi}{30} + \frac{292\pi}{15} = \frac{721\pi}{30} \qquad \#$$

ข้อ 9

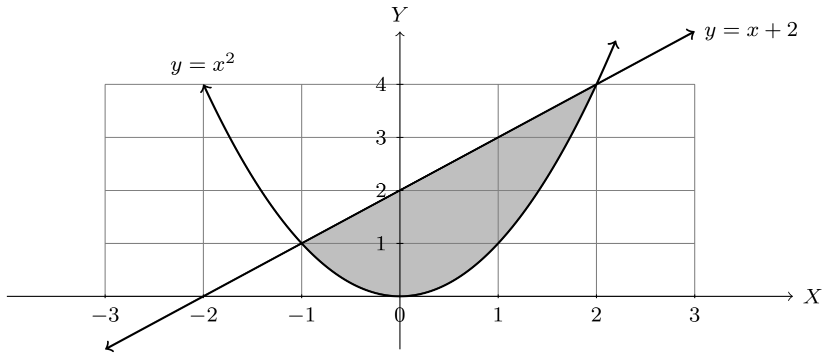
9.1 **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้ โดยแสดงวิธีทำโดยละเอียด

9.1 **(5 คะแนน)** จงหาพื้นที่อาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง

$$y = x^2 \quad \text{และ} \quad y = x + 2$$

พร้อมวาดกราฟประกอบ

วิธีทำ แสดงกราฟได้ดังนี้



หาจุดตัดระหว่ากราฟ $y = x^2$ และ $y = x + 2$ นั่นคือ

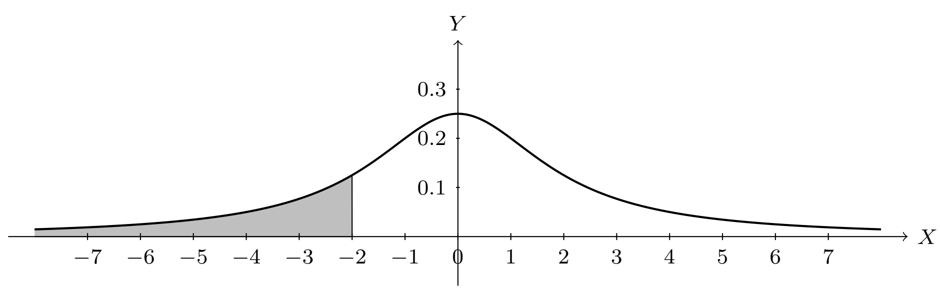
$$x^2 = x + 2$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$(x-2)(x+1) = 0 \quad \text{และ} \quad x = -1, 2$$

จุดตัดคือ $(-1, 1)$ และ $(2, 4)$

ดังนั้น

$$A = \int_{-1}^{2} (x+2) - x^2\, dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{2}$$
$$= \left[\frac{1}{2}(4) + 2(2) - \frac{1}{3}(8)\right] - \left[\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3}\right] = \frac{9}{2} \qquad \#$$

9.2 **(5 คะแนน)** พื้นใต้กราฟของ $y = \dfrac{1}{x^2+4}$ กับแกน X เมื่อ $x \leq -2$ ซึ่งแสดงดังกราฟ มีค่าหรือไม่เพราะเหตุใด ถ้าพื้นที่หาค่าได้จงหาค่าของพื้นที่นั้น



วิธีทำ พิจารณา

$$\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{x^2+4}\, dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{-2} \frac{1}{x^2+4}\, dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{-2} \frac{1}{4(\frac{x^2}{4}+1)}\, dx$$
$$= \lim_{t\to-\infty} \frac{1}{4} \int_{t}^{-2} \frac{1}{(\frac{x}{2})^2+1}\, dx = \lim_{t\to-\infty} \frac{1}{4}\left[2\arctan(\frac{x}{2})\right]_{t}^{-2}$$
$$= \lim_{t\to-\infty} \frac{1}{2}\arctan(-1) - \frac{1}{2}\arctan(\frac{t}{2}) = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$$

ดังนั้นพื้นที่อาณาบริเวณดังกล่าวมีค่าเท่ากับ $\dfrac{\pi}{8}$ ตารางหน่วย $\qquad \#$

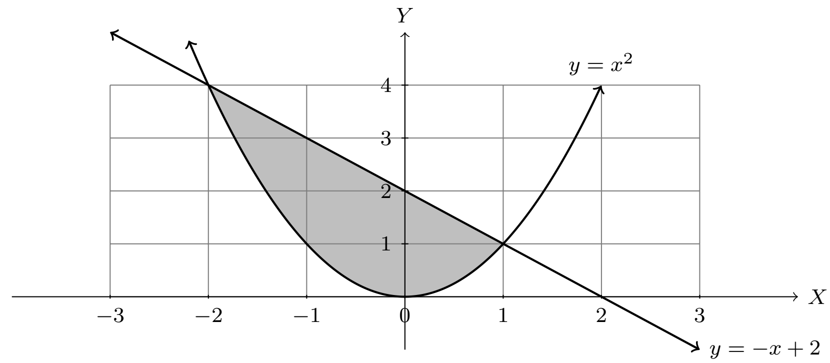
9.1 **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้ โดยแสดงวิธีทำโดยละเอียด

9.1 **(5 คะแนน)** จงหาพื้นที่อาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง

$$y = x^2 \quad \text{และ} \quad y = -x + 2$$

พร้อมวาดกราฟประกอบ

วิธีทำ แสดงกราฟได้ดังนี้



หาจุดตัดระหว่ากราฟ $y = x^2$ และ $y = x + 2$ นั่นคือ

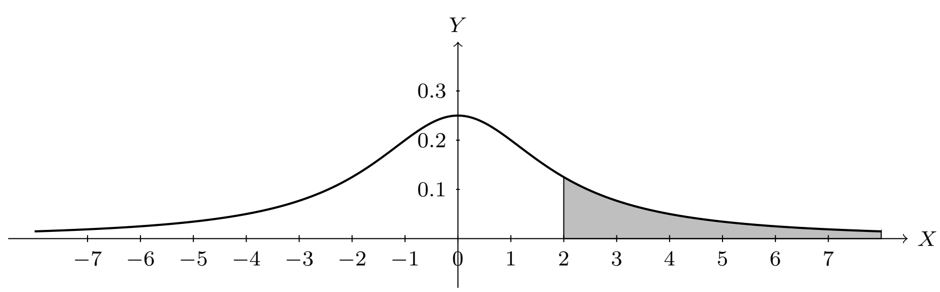
$$\begin{aligned} x^2 &= -x + 2 \\ x^2 + x - 2 &= 0 \\ (x+2)(x-1) &= 0 \qquad \text{และ} \qquad x = -2, 1 \end{aligned}$$

จุดตัดคือ $(-2, 4)$ และ $(1, 1)$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{1} (-x+2) - x^2 \, dx = \left[-\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-2}^{1} \\ &= \left[-\frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{3} \right] - \left[-\frac{1}{2}(4) + 2(-2) - \frac{1}{3}(-8) \right] = \frac{9}{2} \qquad \# \end{aligned}$$

9.2 **(5 คะแนน)** พื้นใต้กราฟของ $y = \dfrac{1}{x^2+4}$ กับแกน X เมื่อ $x \geq 2$ ซึ่งแสดงดังกราฟ มีค่าหรือไม่เพราะเหตุใด ถ้าพื้นที่หาค่าได้จงหาค่าของพื้นที่นั้น



วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned} \int_2^{\infty} \frac{1}{x^2+4} \, dx &= \lim_{t \to \infty} \int_2^t \frac{1}{x^2+4} \, dx = \lim_{t \to \infty} \int_2^t \frac{1}{4(\frac{x^2}{4}+1)} \, dx \\ &= \lim_{t \to \infty} \frac{1}{4} \int_2^t \frac{1}{(\frac{x}{2})^2 + 1} \, dx = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{4} \left[2 \arctan(\frac{x}{2}) \right]_2^t \\ &= \lim_{t \to \infty} \frac{1}{2} \arctan(\frac{t}{2}) - \frac{1}{2} \arctan(1) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

ดังนั้นพื้นที่อาณาบริเวณดังกล่าวมีค่าเท่ากับ $\dfrac{\pi}{8}$ ตารางหน่วย #

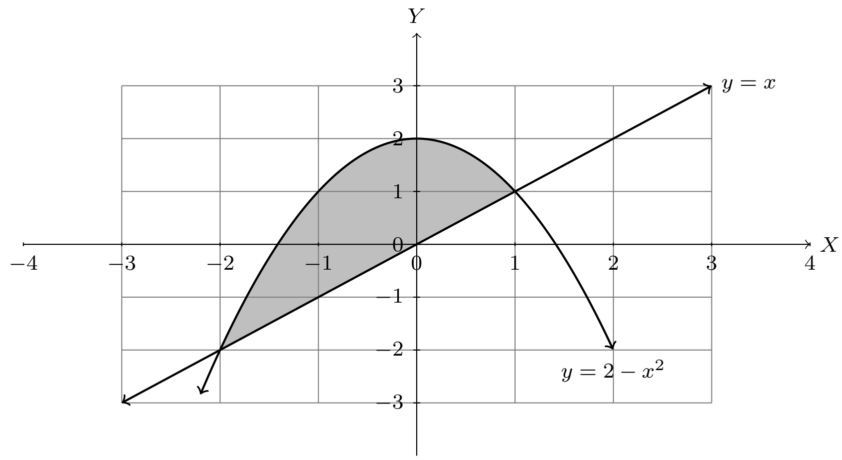
9.1 **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้ โดยแสดงวิธีทำโดยละเอียด

9.1 **(5 คะแนน)** จงหาพื้นที่อาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง

$$y = 2 - x^2 \quad \text{และ} \quad y = x$$

พร้อมวาดกราฟประกอบ

วิธีทำ แสดงกราฟได้ดังนี้



หาจุดตัดระหว่างกราฟ $y = 2 - x^2$ และ $y = x$ นั่นคือ

$$x = 2 - x^2$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x+2)(x-1) = 0 \qquad \text{และ} \qquad x = -2, 1$$

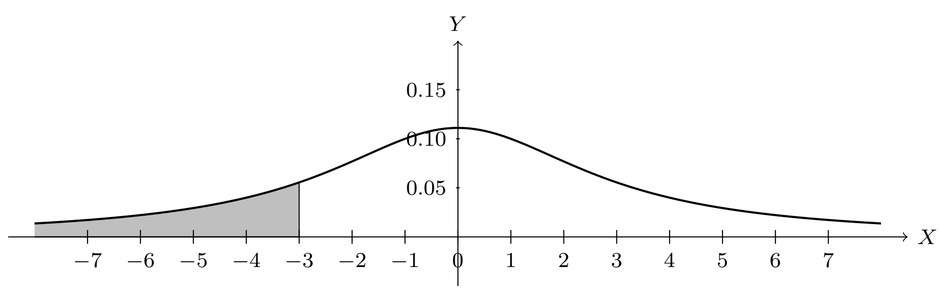
จุดตัดคือ $\quad (-2, -2)$ และ $(1, 1)$

ดังนั้น

$$A = \int_{-2}^{1} (2 - x^2) - x\,dx = \left[2x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^{1}$$

$$= \left[2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right] - \left[-4 - \frac{1}{3}(-8) - \frac{1}{2}(4)\right] = \frac{9}{2} \qquad \#$$

9.2 **(5 คะแนน)** พื้นใต้กราฟของ $y = \dfrac{1}{x^2+9}$ กับแกน X เมื่อ $x \leq -3$ ซึ่งแสดงดังกราฟ มีค่าหรือไม่เพราะเหตุใด ถ้าพื้นที่หาค่าได้จงหาค่าของพื้นที่นั้น



วิธีทำ พิจารณา

$$\int_{-\infty}^{-3} \frac{1}{x^2+9}\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{-3} \frac{1}{x^2+9}\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{-3} \frac{1}{9(\frac{x^2}{9}+1)}\,dx$$

$$= \lim_{t\to-\infty} \frac{1}{9} \int_{t}^{-3} \frac{1}{(\frac{x}{3})^2+1}\,dx = \lim_{t\to-\infty} \frac{1}{9}\left[3\arctan(\frac{x}{2})\right]_{t}^{-3}$$

$$= \lim_{t\to-\infty} \frac{1}{3}\arctan(-1) - \frac{1}{3}\arctan(\frac{t}{3}) = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$$

ดังนั้นพื้นที่อาณาบริเวณดังกล่าวมีค่าเท่ากับ $\dfrac{\pi}{12}$ ตารางหน่วย $\qquad \#$

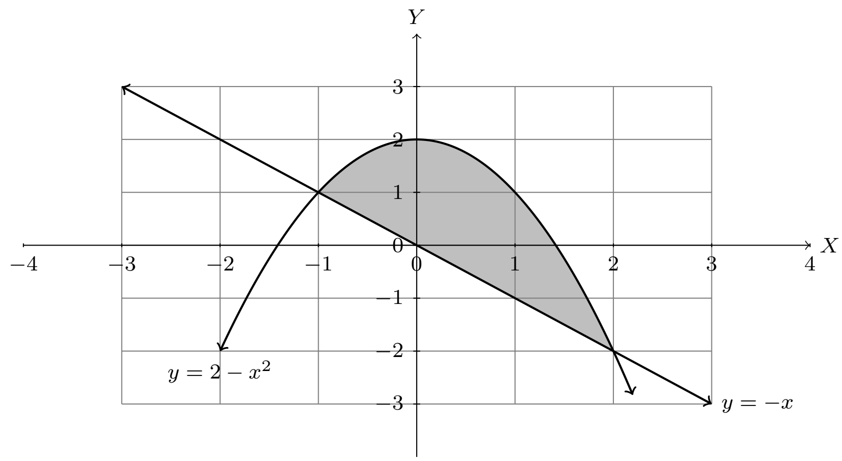
9.1 **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้ โดยแสดงวิธีทำโดยละเอียด

9.1 **(5 คะแนน)** จงหาพื้นที่อาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง

$$y = 2 - x^2 \quad \text{และ} \quad y = -x$$

พร้อมวาดกราฟประกอบ

วิธีทำ แสดงกราฟได้ดังนี้



หาจุดตัดระหว่ากราฟ $y = 2 - x^2$ และ $y = -x$ นั่นคือ

$$-x = 2 - x^2$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$(x-2)(x+1) = 0 \quad \text{และ} \quad x = -1, 2$$

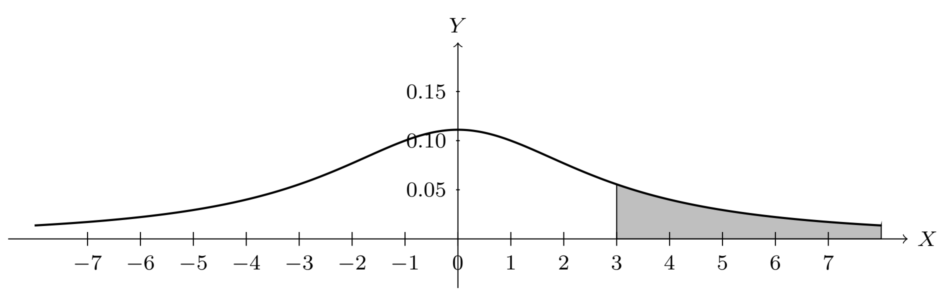
จุดตัดคือ $(-1, 1)$ และ $(2, -2)$

ดังนั้น

$$A = \int_{-1}^{2} (2 - x^2) - (-x)\, dx = \left[2x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{2}$$
$$= \left[2(2) - \frac{1}{3}(8) + \frac{1}{2}(4)\right] - \left[-2 - \frac{1}{3}(-1) + \frac{1}{2}(1)\right] = \frac{9}{2} \quad \#$$

9.2 **(5 คะแนน)** พื้นใต้กราฟของ $y = \dfrac{1}{x^2+9}$ กับแกน X เมื่อ $x \geq 3$ ซึ่งแสดงดังกราฟ

มีค่าหรือไม่เพราะเหตุใด ถ้าพื้นที่หาค่าได้จงหาค่าของพื้นที่นั้น



วิธีทำ พิจารณา

$$\int_3^{\infty} \frac{1}{x^2+9}\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_3^t \frac{1}{x^2+9}\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_3^t \frac{1}{9(\frac{x^2}{9}+1)}\, dx$$
$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{9} \int_3^t \frac{1}{(\frac{x}{3})^2+1}\, dx = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{9}\left[3\arctan(\frac{x}{3})\right]_3^t$$
$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{3}\arctan(\frac{t}{3}) - \frac{1}{3}\arctan(1) = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$$

ดังนั้นพื้นที่อาณาบริเวณดังกล่าวมีค่าเท่ากับ $\dfrac{\pi}{12}$ ตารางหน่วย #

ข้อ 10

10. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้ โดยแสดงวิธีทำโดยละเอียด

10.1 **(5 คะแนน)** จงตรวจสอบปริพันธ์ไม่ตรงแบบต่อไปนี้ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1-|x|}}\,dx$$

วิธีทำ พิจารณา

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1-|x|}}\,dx = \int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{\sqrt[3]{1-|x|}}\,dx + \int_{-2}^{-1} \frac{1}{\sqrt[3]{1-|x|}}\,dx + \int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt[3]{1-|x|}}\,dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{1-|x|}}\,dx + \int_{1}^{2} \frac{1}{\sqrt[3]{1-|x|}}\,dx + \int_{2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1-|x|}}\,dx$$

ให้ $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1-|x|}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1-x}} = (1-x)^{-\frac{1}{3}}$ เมื่อ $x \in [2,\infty)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int_{2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1-|x|}}\,dx &= \lim_{t\to\infty}\int_{2}^{t} \frac{1}{\sqrt[3]{1-|x|}}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_{2}^{t} (1-x)^{-\frac{1}{3}}\,dx \\ &= \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{3}{2}(1-x)^{\frac{2}{3}}\right]_2^t = \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{3}{2}(1-t)^{\frac{2}{3}} + \frac{3}{2}\right] = -\infty\end{aligned}$$

ดังนั้น $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1-|x|}}\,dx$ ลู่ออก #

10.2 **(5 คะแนน)** จงหาเงื่อนไขของ**จำนวนนับ** n ที่ทำให้

$$\int_{0}^{2} \frac{1}{\sqrt[n]{x}}\,dx \qquad \text{ลู่เข้า}$$

วิธีทำ ให้ n เป็นจำนวนนับ

กรณี $n=1$ จะได้ว่า

$$\int_{0}^{2} \frac{1}{\sqrt[n]{x}}\,dx = \int_{0}^{2} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to0^+}\int_{t}^{2} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to0^+}[\ln|x|]_t^2 = \lim_{t\to0^+} \ln 2 - \ln|t| = \infty$$

กรณี $n>1$ จะได้ว่า $n-1>0$ และ

$$\begin{aligned}\int_{0}^{2} \frac{1}{\sqrt[n]{x}}\,dx &= \int_{0}^{2} x^{-\frac{1}{n}}\,dx = \lim_{t\to0^+}\int_{t}^{2} x^{-\frac{1}{n}}\,dx = \lim_{t\to0^+}\left[\frac{n}{n-1}x^{\frac{n-1}{n}}\right]_t^2 \\ &= \lim_{t\to0^+}\frac{n}{n-1}\left[2^{\frac{n-1}{n}} - t^{\frac{n-1}{n}}\right] = \frac{n2^{\frac{n-1}{n}}}{n-1}\end{aligned}$$

ดังนั้น $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{1}{\sqrt[n]{x}}\,dx$ ลู่เข้าเมื่อ $n>1$ หรือกล่าวได้ว่า

$$\int_{0}^{2} \frac{1}{\sqrt[n]{x}}\,dx = \frac{n2^{\frac{n-1}{n}}}{n-1} \quad \text{เมื่อ} \quad n>1$$

10. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้ โดยแสดงวิธีทำโดยละเอียด

10.1 **(5 คะแนน)** จงตรวจสอบปริพันธ์ไม่ตรงแบบต่อไปนี้ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{2-|x|}}\,dx$$

วิธีทำ พิจารณา

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{2-|x|}}\,dx = \int_{-\infty}^{-3} \frac{1}{\sqrt[3]{2-|x|}}\,dx + \int_{-3}^{-2} \frac{1}{\sqrt[3]{2-|x|}}\,dx + \int_{-2}^{0} \frac{1}{\sqrt[3]{2-|x|}}\,dx +$$
$$\int_{0}^{2} \frac{1}{\sqrt[3]{2-|x|}}\,dx + \int_{2}^{3} \frac{1}{\sqrt[3]{2-|x|}}\,dx + \int_{3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{2-|x|}}\,dx$$

ให้ $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2-|x|}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2-x}} = (2-x)^{-\frac{1}{3}}$ เมื่อ $x \in [3,\infty)$ จะได้ว่า

$$\int_{3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{2-|x|}}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_{3}^{t} \frac{1}{\sqrt[3]{2-|x|}}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_{3}^{t} (2-x)^{-\frac{1}{3}}\,dx$$
$$= \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{3}{2}(2-x)^{\frac{2}{3}}\right]_3^t = \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{3}{2}(2-t)^{\frac{2}{3}} + \frac{3}{2}\right] = -\infty$$

ดังนั้น $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{2-|x|}}\,dx$ ลู่ออก #

10.2 **(5 คะแนน)** จงหาเงื่อนไขของ**จำนวนนับ** n ที่ทำให้

$$\int_{0}^{3} \frac{1}{\sqrt[n]{x}}\,dx \quad \text{ลู่เข้า}$$

วิธีทำ ให้ n เป็นจำนวนนับ
กรณี $n = 1$ จะได้ว่า

$$\int_{0}^{3} \frac{1}{\sqrt[n]{x}}\,dx = \int_{0}^{3} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to 0^+}\int_{t}^{3} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to 0^+}[\ln|x|]_t^3 = \lim_{t\to 0^+} \ln 3 - \ln|t| = \infty$$

กรณี $n > 1$ จะได้ว่า $n-1 > 0$ และ

$$\int_{0}^{3} \frac{1}{\sqrt[n]{x}}\,dx = \int_{0}^{3} x^{-\frac{1}{n}}\,dx = \lim_{t\to 0^+}\int_{t}^{3} x^{-\frac{1}{n}}\,dx = \lim_{t\to 0^+}\left[\frac{n}{n-1}x^{\frac{n-1}{n}}\right]_t^3$$
$$= \lim_{t\to 0^+}\frac{n}{n-1}\left[3^{\frac{n-1}{n}} - t^{\frac{n-1}{n}}\right] = \frac{n3^{\frac{n-1}{n}}}{n-1}$$

ดังนั้น $\displaystyle\int_{0}^{3} \frac{1}{\sqrt[n]{x}}\,dx$ ลู่เข้าเมื่อ $n > 1$ หรือกล่าวได้ว่า

$$\int_{0}^{3} \frac{1}{\sqrt[n]{x}}\,dx = \frac{n3^{\frac{n-1}{n}}}{n-1} \quad \text{เมื่อ} \quad n > 1$$

10. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้ โดยแสดงวิธีทำโดยละเอียด

10.1 **(5 คะแนน)** จงตรวจสอบปริพันธ์ไม่ตรงแบบต่อไปนี้ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{|x|-1}}\,dx$$

วิธีทำ พิจารณา

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{|x|-1}}\,dx = \int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{\sqrt[3]{|x|-1}}\,dx + \int_{-2}^{-1} \frac{1}{\sqrt[3]{|x|-1}}\,dx + \int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt[3]{|x|-1}}\,dx +$$
$$\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{|x|-1}}\,dx + \int_{1}^{2} \frac{1}{\sqrt[3]{|x|-1}}\,dx + \int_{2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{|x|-1}}\,dx$$

ให้ $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{|x|-1}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}} = (x-1)^{-\frac{1}{3}}$ เมื่อ $x \in [2,\infty)$ จะได้ว่า

$$\int_{2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{|x|-1}}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_{2}^{t} \frac{1}{\sqrt[3]{|x|-1}}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_{2}^{t} (x-1)^{-\frac{1}{3}}\,dx$$
$$= \lim_{t\to\infty}\left[\frac{3}{2}(x-1)^{\frac{2}{3}}\right]_2^t = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{3}{2}(t-1)^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2}\right] = \infty$$

ดังนั้น $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{|x|-1}}\,dx$ ลู่ออก #

10.2 **(5 คะแนน)** จงหาเงื่อนไขของ**จำนวนนับ** n ที่ทำให้

$$\int_{0}^{4} \frac{1}{\sqrt[n]{x}}\,dx \quad \text{ลู่เข้า}$$

วิธีทำ ให้ n เป็นจำนวนนับ
กรณี $n=1$ จะได้ว่า

$$\int_{0}^{4} \frac{1}{\sqrt[n]{x}}\,dx = \int_{0}^{4} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to 0^+}\int_{t}^{4} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to 0^+}[\ln|x|]_t^4 = \lim_{t\to 0^+} \ln 4 - \ln|t| = \infty$$

กรณี $n>1$ จะได้ว่า $n-1>0$ และ

$$\int_{0}^{4} \frac{1}{\sqrt[n]{x}}\,dx = \int_{0}^{4} x^{-\frac{1}{n}}\,dx = \lim_{t\to 0^+}\int_{t}^{4} x^{-\frac{1}{n}}\,dx = \lim_{t\to 0^+}\left[\frac{n}{n-1}x^{\frac{n-1}{n}}\right]_t^4$$
$$= \lim_{t\to 0^+}\frac{n}{n-1}\left[4^{\frac{n-1}{n}} - t^{\frac{n-1}{n}}\right] = \frac{n4^{\frac{n-1}{n}}}{n-1}$$

ดังนั้น $\displaystyle\int_{0}^{4} \frac{1}{\sqrt[n]{x}}\,dx$ ลู่เข้าเมื่อ $n>1$ หรือกล่าวได้ว่า

$$\int_{0}^{4} \frac{1}{\sqrt[n]{x}}\,dx = \frac{n4^{\frac{n-1}{n}}}{n-1} \quad \text{เมื่อ} \quad n>1$$

10. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้ โดยแสดงวิธีทำโดยละเอียด

10.1 **(5 คะแนน)** จงตรวจสอบปริพันธ์ไม่ตรงแบบต่อไปนี้ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{|x|-2}}\, dx$$

วิธีทำ พิจารณา

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{|x|-2}}\, dx = \int_{-\infty}^{-3} \frac{1}{\sqrt[3]{|x|-2}}\, dx + \int_{-3}^{-2} \frac{1}{\sqrt[3]{|x|-2}}\, dx + \int_{-2}^{0} \frac{1}{\sqrt[3]{|x|-2}}\, dx + \int_{0}^{2} \frac{1}{\sqrt[3]{|x|-2}}\, dx + \int_{2}^{3} \frac{1}{\sqrt[3]{|x|-2}}\, dx + \int_{3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{|x|-2}}\, dx$$

ให้ $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{|x|-2}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x-2}} = (x-2)^{-\frac{1}{3}}$ เมื่อ $x \in [3, \infty)$ จะได้ว่า

$$\int_{3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{|x|-2}}\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_{3}^{t} \frac{1}{\sqrt[3]{|x|-2}}\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_{3}^{t} (x-2)^{-\frac{1}{3}}\, dx$$
$$= \lim_{t\to\infty} \left[\frac{3}{2}(x-2)^{\frac{2}{3}}\right]_{3}^{t} = \lim_{t\to\infty} \left[\frac{3}{2}(2-t)^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2}\right] = \infty$$

ดังนั้น $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{|x|-2}}\, dx$ ลู่ออก #

10.2 **(5 คะแนน)** จงหาเงื่อนไขของ**จำนวนนับ** n ที่ทำให้

$$\int_{0}^{5} \frac{1}{\sqrt[n]{x}}\, dx \quad \text{ลู่เข้า}$$

วิธีทำ ให้ n เป็นจำนวนนับ
กรณี $n = 1$ จะได้ว่า

$$\int_{0}^{5} \frac{1}{\sqrt[n]{x}}\, dx = \int_{0}^{5} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{t\to 0^+} \int_{t}^{5} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{t\to 0^+} [\ln|x|]_t^5 = \lim_{t\to 0^+} \ln 5 - \ln|t| = \infty$$

กรณี $n > 1$ จะได้ว่า $n - 1 > 0$ และ

$$\int_{0}^{5} \frac{1}{\sqrt[n]{x}}\, dx = \int_{0}^{5} x^{-\frac{1}{n}}\, dx = \lim_{t\to 0^+} \int_{t}^{5} x^{-\frac{1}{n}}\, dx = \lim_{t\to 0^+} \left[\frac{n}{n-1} x^{\frac{n-1}{n}}\right]_t^5$$
$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{n}{n-1}\left[5^{\frac{n-1}{n}} - t^{\frac{n-1}{n}}\right] = \frac{n5^{\frac{n-1}{n}}}{n-1}$$

ดังนั้น $\displaystyle\int_{0}^{5} \frac{1}{\sqrt[n]{x}}\, dx$ ลู่เข้าเมื่อ $n > 1$ หรือกล่าวได้ว่า

$$\int_{0}^{5} \frac{1}{\sqrt[n]{x}}\, dx = \frac{n5^{\frac{n-1}{n}}}{n-1} \quad \text{เมื่อ} \quad n > 1$$