คณิตศาสตร์

มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
คณะครุศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ข้อสอบปลายภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2565

รหัสวิชา	**ชื่อวิชา**	**วันเวลาสอบ**	**คะแนนเต็ม**
MAC1302	แคลคูลัส ๑	เวลา 13:00 - 16:00 วันศุกร์ ที่ 31 มีนาคม 2566	105 คะแนน 25%

ชื่อ-สกุล.. **รหัสนักศึกษา**........................... **หมู่เรียน**.........

คำชี้แจง

1. ข้อสอบมีทั้งหมด **11 หน้า จำนวน** 10 **ข้อ**
2. เขียนชื่อ-สกุล รหัสนักศึกษา และตอนเรียนด้วย**ตัวบรรจงลงในข้อสอบทุกหน้า**
3. **ห้ามใช้** เครื่องคำนวณ และอุปกรณ์สื่อสารทุกชนิดในขณะสอบ
4. **ไม่อนุญาต**ให้นำเอกาสารการเรียน ตำราเรียนทุกชนิดเข้าห้องสอบ
5. **ห้าม** นำข้อสอบออกจากห้องสอบโดยเด็ดขาด
6. หากมี**การทุจริต**ในการสอบ จะได้รับการลงโทษตามระเบียบของมหาวิทยาลัย

ข้าพเจ้าจะปฏิบัติตามข้อตกลงอย่างเคร่งครัด
ลงชื่อผู้เข้าสอบ

....

อาจารย์ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย

ข้อที่	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	**รวม**
คะแนน											

1. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้โดยไม่ต้องแสดงวิธีทำ (ข้อละ 1 คะแนน)

1.1 ให้ $F(x) = x(x+1)^2$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ จงหา $f(1)$ ______________

1.2 จงหาค่าคงตัว k ที่ทำให้ $\int_0^1 x^k \, dx = \frac{1}{23}$ ______________

1.3 ให้ $y = f(x)$ เป็นเส้นโค้งที่ผ่านจุด $(1, -3)$ และ $(2, 1)$ ______________

จงหา $\int_1^2 f'(x) \, dx$

1.4 ถ้า $\int f(x) \, dx = xe^x + C$ แล้ว $f'(0)$ มีค่าเท่าใด ______________

1.5 ให้ $f(x) = x^2$ เมื่อ $x \in [0, 1]$ ถ้า $P = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ จงหาผลบวกบน $U(P, f)$ ______________

1.6 ให้ $F(x) = \frac{d}{dx} \int_1^{x^2} \frac{1}{\arctan t} \, dt$ จงหา $F(1)$ ______________

1.7 สำหรับค่าคงตัว A, B ที่ทำให้ $\frac{4}{x^2 - 4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$ ______________

จงหาค่าของ $B - A$

1.8 จงหาค่าของ $\int_0^4 \sqrt{16 - x^2} \, dx$ ______________

1.9 จงหา $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \sec^2(2t) \, dt$ ______________

1.10 จงหาค่าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} \, dx$ ______________

ข้อ 2 ถึง 10 จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

2. **(11 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

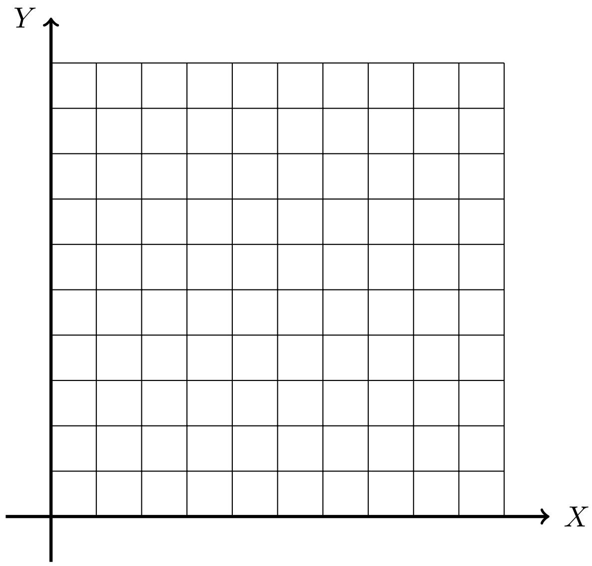
2.1 **(5 คะแนน)** จงหาค่าของ $\displaystyle\int_0^1 (x+1)^2(2x^2+1)\,dx$

2.2 **(6 คะแนน)** จงหาปริพันธ์ $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$

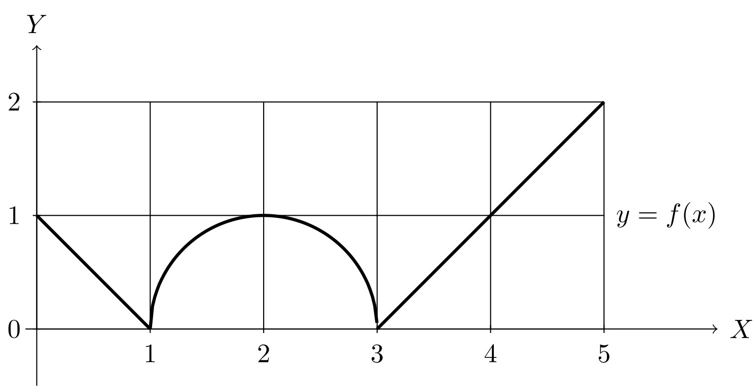
รหัสนักศึกษา.. หมู่เรียน.................

3. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

   3.1 **(5 คะแนน)**ให้ $f(x) = 2x^2 + 1$ เมื่อ $x \in [0, 3]$
   และ $P = \{0, 1, 2, 3\}$ จงวาดกราฟประกอบ พร้อมทั้งหาผลบวกล่าง $L(P, f)$



   3.2 **(5 คะแนน)** ให้ $y = f(x)$ เป็นเส้นโค้งแสดงได้ดังกราฟต่อไปนี้ จงหาค่า $\int_0^5 f(x)\,dx$



4. **(12 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

4.1 **(6 คะแนน)** กำหนดให้ $\int_1^{15} f(x)\,dx = 24$ จงหาค่าของ $\int_1^2 x^2 f(2x^3-1)\,dx$

4.2 **(6 คะแนน)** สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ กำหนดให้

$$F(x) = \int_{-x}^{x} \frac{te^t}{\sqrt{t+1}}\,dt$$

จงหาค่าของ $F(0)$ และ $F'(0)$

5. **(10 คะแนน)** จงหาปริพันธ์ $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x\sqrt{x}}\,dx$ (ปริพันธ์โดยการแยกส่วน)

6. **(10 คะแนน)** จงหาปริพันธ์ $\displaystyle\int \frac{20}{(x^2-4)(x^2+1)}\,dx$

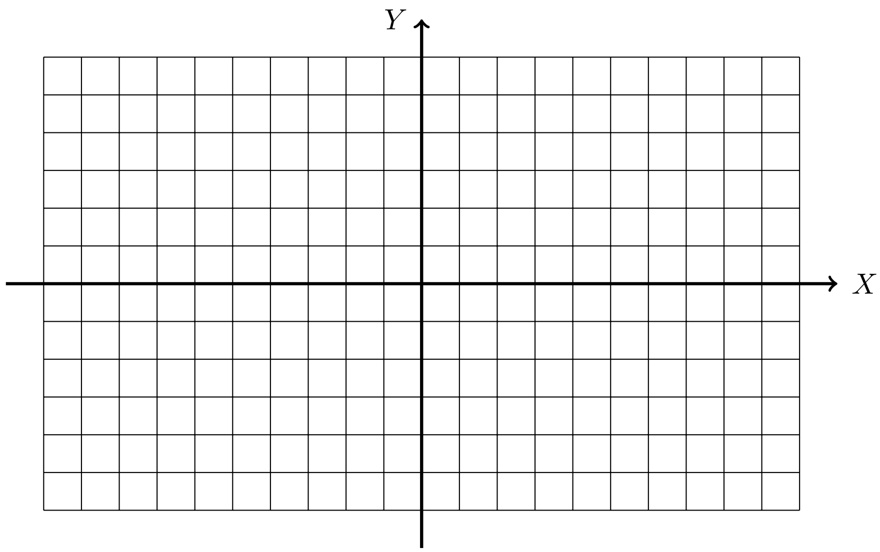
7. **(7 คะแนน)** จงหาค่าของ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^{2565} \sec^4 x \, dx$

8. **(10 คะแนน)** จงหาปริพันธ์ $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

9. **(10 คะแนน)** จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วย

$$y = -x^2 + 6 \quad \text{และ} \quad y = x$$

พร้อมวาดกราฟประกอบ



10. **(15 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

10.1 **(7 คะแนน)** จงตรวจสอบว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2-1}{x^2+1}\,dx$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

10.2 **(8 คะแนน)** จงตรวจสอบว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{e^{x^2}}\,dx$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

คณิตศาสตร์

มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
คณะครุศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์
เฉลยข้อสอบปลายภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2565

รหัสวิชา	ชื่อวิชา	วันเวลาสอบ	คะแนนเต็ม
MAC1302	แคลคูลัส ๑	เวลา 13:00 - 16:00 วันศุกร์ ที่ 31 มีนาคม 2566	105 คะแนน 25%

โดย ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย

---

1. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้โดยไม่ต้องแสดงวิธีทำ (ข้อละ 1 คะแนน)

1.1 ให้ $F(x) = x(x+1)^2$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ จงหา $f(1)$ 8

แนวคำตอบ จะได้ว่า $f(x) = F'(x) = x \cdot 2(x+1) + (x+1)^2$ ดังนั้น $f(1) = 4 + 4 = 8$ #

1.2 จงหาค่าคงตัว k ที่ทำให้ $\int_0^1 x^k \, dx = \frac{1}{23}$ 22

แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\frac{1}{23} = \int_0^1 x^k \, dx = \left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = \frac{1}{k+1} - 0$$

ดังนั้น $k + 1 = 23$ สรุปได้ว่า $k = 22$ #

1.3 ให้ $y = f(x)$ เป็นเส้นโค้งที่ผ่านจุด $(1, -3)$ และ $(2, 1)$ 4

จงหา $\int_1^2 f'(x) \, dx$

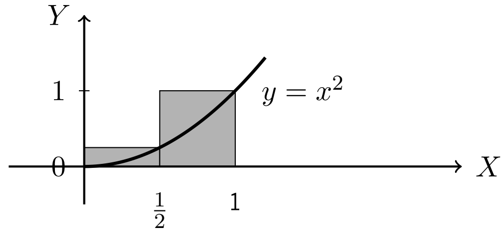
แนวคำตอบ จะได้ว่า $f(1) = -3$ และ $f(2) = 1$ จากทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัสบทที่สองจะได้ว่า $\int_1^2 f'(x) \, dx = f(2) - f(1) = 1 - (-3) = 4$ #

1.4 ถ้า $\int f(x) \, dx = xe^x + C$ แล้ว $f'(0)$ มีค่าเท่าใด 2

แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\int f(x) \, dx &= \frac{d}{dx}[xe^x + C] \\
f(x) &= xe^x + e^x \\
f'(x) &= xe^x + e^x + e^x = xe^x + 2e^x \\
f'(0) &= 2 \quad \#
\end{aligned}$$

1.5 ให้ $f(x) = x^2$ เมื่อ $x \in [0,1]$ ถ้า $P = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ จงหาผลบวกบน $U(P, f)$ $\frac{5}{8}$



แนวคำตอบ

ดังนั้น $U(P,f) = \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}f(1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{5}{8}$ #

1.6 ให้ $F(x) = \frac{d}{dx}\int_1^{x^2} \frac{1}{\arctan t}\,dt$ จงหา $F(1)$ $\frac{8}{\pi}$

แนวคำตอบ จากทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัสบทที่หนึ่งจะได้ว่า

$$F(x) = \frac{d}{dx}\int_1^{x^2} \frac{1}{\arctan t}\,dt = \frac{1}{\arctan x}\cdot 2x$$
$$F(1) = \frac{2}{\arctan 1} = \frac{8}{\pi} \quad \#$$

1.7 สำหรับค่าคงตัว A, B ที่ทำให้ $\frac{4}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$ -2

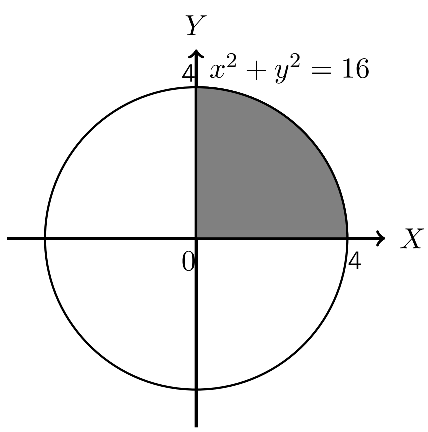
จงหาค่าของ $B - A$

แนวคำตอบ จะได้ว่า $4 = A(x+2) + B(x-2)$ นั่นคือ

$$x = 2; \quad 4 = 4A \quad \therefore A = 1$$
$$x = -2; \quad 4 = -4B \quad \therefore B = -1$$
$$\therefore \quad B - A = -1 - 1 = -2 \quad \#$$

1.8 จงหาค่าของ $\int_0^4 \sqrt{16 - x^2}\,dx$ 4π

แนวคำตอบ พิจารณากราฟ $y = \sqrt{16 - x^2}$ บนโดเมน $[0, 4]$



จากกราฟจะได้ว่า $\int_0^4 \sqrt{16 - x^2}\,dx = \frac{1}{4}$ พื้นที่วงกลมรัศมี 4 หน่วย $= \frac{1}{4}\pi 4^2 = 4\pi$

1.9 จงหา $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \sec^2(2t)\,dt$ $\frac{1}{2}$

แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{8}} \sec^2(2t)\,dt &= \left[\frac{1}{2}\tan(2t)\right]_0^{\frac{\pi}{8}} \\ &= \frac{1}{2}\tan(\frac{\pi}{4}) - 0 = \frac{1}{2} \quad \#\end{aligned}$$

1.10 จงหาค่าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ 1

แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx &= \lim_{t\to\infty} \int_1^t x^{-2}\,dx \\ &= \lim_{t\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^t \\ &= \lim_{t\to\infty} [-\frac{1}{t} + 1] = 0 + 1 = 1\end{aligned}$$

ข้อ 2 ถึง 10 จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

2. **(11 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

2.1 **(5 คะแนน)** จงหาค่าของ $\displaystyle\int_0^1 (x+1)^2(2x^2+1)\,dx$

แนวคำตอบ

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (x+1)^2(2x^2+1)\,dx &= \int_0^1 (x^2+2x+1)(2x^2+1)\,dx \\
&= \int_0^1 2x^4+x^2+4x^3+2x+2x^2+1\,dx \\
&= \int_0^1 2x^4+4x^3+3x^2+2x+1\,dx \\
&= \left[\frac{2}{5}x^5+x^4+x^3+x^2+x\right]_0^1 \\
&= \frac{2}{5}+1+1+1+1-0 \\
&= \frac{22}{5} \quad \#
\end{aligned}$$

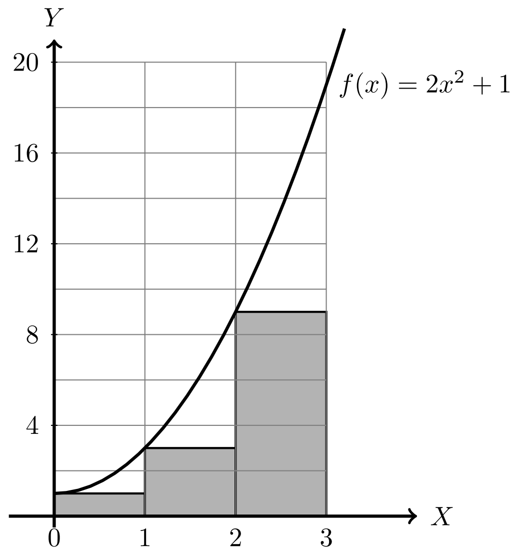
2.2 **(6 คะแนน)** จงหาปริพันธ์ $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$

แนวคำตอบ ให้ $u = x+1$ จะได้ว่า $du = dx$ และ $x = u-1$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx &= \int \frac{u-1}{\sqrt{u}}du \\
&= \int \frac{u}{\sqrt{u}} - \frac{1}{\sqrt{u}}du \\
&= \int \frac{u}{u^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{u^{\frac{1}{2}}}du \\
&= \int u^{\frac{1}{2}} - u^{-\frac{1}{2}}du \\
&= \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}} + C \\
&= \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - 2(x+1)^{\frac{1}{2}} + C \quad \#
\end{aligned}$$

3. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

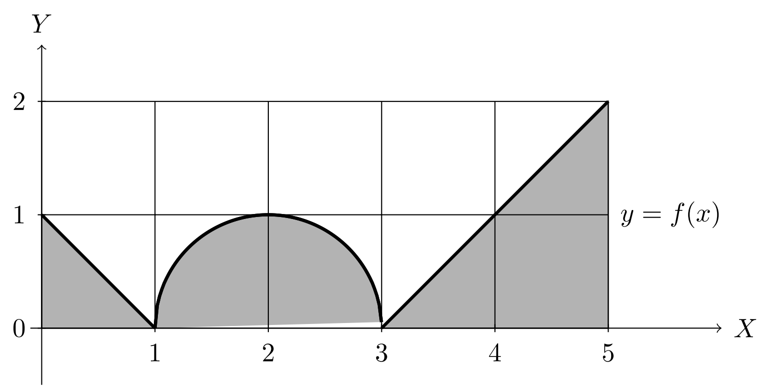
3.1 **(5 คะแนน)**ให้ $f(x) = 2x^2 + 1$ เมื่อ $x \in [0, 3]$
และ $P = \{0, 1, 2, 3\}$ จงวาดกราฟประกอบ พร้อมทั้งหาผลบวกล่าง $L(P, f)$
แนวคำตอบ



ดังนั้น

$$L(P, f) = 1 \cdot f(0) + 1 \cdot f(1) + 1 \cdot f(2) = 1 + 3 + 9 = 13 \quad \#$$

3.2 **(5 คะแนน)** ให้ $y = f(x)$ เป็นเส้นโค้งแสดงได้ดังกราฟต่อไปนี้ จงหาค่า $\int_0^5 f(x)\,dx$



แนวคำตอบ จากความหมายของการหาปริพันธ์จะได้ว่า $\int_0^5 f(x)\,dx$ เท่ากับพื้นที่เหนือแกน X จาก 0 ถึง 5

$$\int_0^5 f(x)\,dx = \left[\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1\right] + \left[\frac{1}{2}\pi \cdot 1^2\right] + \left[\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\right] = \frac{5 + \pi}{2} \quad \#$$

4. **(12 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

4.1 **(6 คะแนน)** กำหนดให้ $\displaystyle\int_1^{15} f(x)\,dx = 24$ จงหาค่าของ $\displaystyle\int_1^2 x^2 f(2x^3-1)\,dx$

แนวคำตอบ ให้ $u = 2x^3 - 1$ จะได้ว่า $du = 6x^2 dx$ โดยที่ $u(1) = 1$ และ $u(2) = 15$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int_1^2 x^2 f(2x^3-1)\,dx &= \int_{u(1)}^{u(2)} x^2 f(u)\,\frac{du}{6x^2} \\ &= \frac{1}{6}\int_1^{15} f(u)\,du \\ &= \frac{1}{6}\cdot 24 = 4 \quad \#\end{aligned}$$

4.2 **(6 คะแนน)** สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ กำหนดให้

$$F(x) = \int_{-x}^{x} \frac{te^t}{\sqrt{t+1}}\,dt$$

จงหาค่าของ $F(0)$ และ $F'(0)$

แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$F(0) = \int_0^0 \frac{te^t}{\sqrt{t+1}}\,dt = 0 \quad \#$$

พิจารณา

$$\begin{aligned}F(x) = \int_{-x}^{x} \frac{te^t}{\sqrt{t+1}}\,dt &= \int_{-x}^{0} \frac{te^t}{\sqrt{t+1}}\,dt + \int_0^x \frac{te^t}{\sqrt{t+1}}\,dt \\ &= -\int_0^{-x} \frac{te^t}{\sqrt{t+1}}\,dt + \int_0^x \frac{te^t}{\sqrt{t+1}}\,dt\end{aligned}$$

โดยทฤษฎีบทหลักมูลแคลคูลัสบทที่ 1

$$\begin{aligned}F'(x) &= -\frac{d}{dx}\int_0^{-x} \frac{te^t}{\sqrt{t+1}}\,dt + \frac{d}{dx}\int_0^x \frac{te^t}{\sqrt{t+1}}\,dt \\ &= -\frac{(-x)e^{-x}}{\sqrt{-x+1}}\cdot(-1) + \frac{xe^x}{\sqrt{x+1}} \\ &= -\frac{xe^{-x}}{\sqrt{-x+1}} + \frac{xe^x}{\sqrt{x+1}} \\ F'(0) &= 0 + 0 = 0 \quad \#\end{aligned}$$

5. **(10 คะแนน)** จงหาปริพันธ์ $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x\sqrt{x}}\,dx$ (ปริพันธ์โดยการแยกส่วน)

แนวคำตอบ ให้ $u = \ln x$ จะได้ว่า $du = \dfrac{1}{x}dx$ และ $dv = \dfrac{1}{x\sqrt{x}}dx = x^{-\frac{3}{2}}dx$ นั่นคือ

$$v = -2x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{x}}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int \frac{\ln x}{x\sqrt{x}}\,dx &= -\frac{2}{\sqrt{x}} \cdot \ln x - \int -2x^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x}dx \\
&= -\frac{2\ln x}{\sqrt{x}} + 2\int x^{-\frac{3}{2}}dx \\
&= -\frac{2\ln x}{\sqrt{x}} - 4x^{-\frac{1}{2}} + C \\
&= -\frac{2\ln x}{\sqrt{x}} - \frac{4}{\sqrt{x}} + C \quad \#
\end{aligned}$$

6. **(10 คะแนน)** จงหาปริพันธ์ $\displaystyle\int \frac{20}{(x^2-4)(x^2+1)}\,dx$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\frac{20}{(x^2-4)(x^2+1)} &= \frac{20}{(x-2)(x+2)(x^2+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \\
20 &= A(x+2)(x^2+1) + B(x-2)(x^2+1) + (Cx+D)(x-2)(x+2) \\
x = 2; \quad 20 &= 20A + 0 + 0 \qquad \therefore A = 1 \\
x = -2; \quad 20 &= 0 - 20B + 0 \qquad \therefore B = -1 \\
x = 0; \quad 20 &= 2A - 2B - 4D = 2(1) - 2(-1) - 4D = 4 - 4D \qquad \therefore D = -4 \\
x = 1; \quad 20 &= 6A - 2B + (C+D)(-3) = 6(1) - 2(-1) - 3C - 3(-4) \\
20 &= 20 - 3C \qquad \therefore C = 0
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int \frac{20}{(x^2-4)(x^2+1)}\,dx &= \int \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} - \frac{4}{x^2+1}\,dx \\
&= \ln|x-2| - \ln|x+2| - 4\arctan x + C \quad \#
\end{aligned}$$

7. **(7 คะแนน)** จงหาค่าของ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^{2565} \sec^4 x \, dx$

แนวคำตอบ พิจารณา

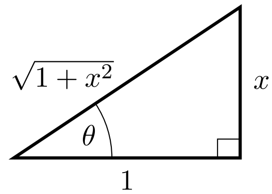
$$\begin{aligned}
\int (\tan x)^{2565} \sec^4 x \, dx &= \int (\tan x)^{2565} \sec^2 x \, (\sec^2 x dx) \\
&= \int (\tan x)^{2565} \sec^2 x \, d(\tan x) \\
&= \int (\tan x)^{2565} (1 + \tan^2 x) \, d(\tan x) \\
&= \int (\tan x)^{2565} + (\tan x)^{2567} \, d(\tan x) \\
&= \frac{1}{2566} (\tan x)^{2566} + \frac{1}{2568} (\tan x)^{2568} + C
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^{2565} \sec^4 x \, dx &= \left[\frac{1}{2566} (\tan x)^{2566} + \frac{1}{2568} (\tan x)^{2568} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \left[\frac{1}{2566} + \frac{1}{2568} \right] - 0 \\
&= \frac{1}{2566} + \frac{1}{2568} \qquad \#
\end{aligned}$$

8. (10 คะแนน) จงหาปริพันธ์ $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

แนวคำตอบ **วิธีที่ 1 การแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ** ให้ $x = \tan\theta$



จะได้ว่า $dx = \sec^2\theta\, d\theta$ และ $\sec\theta = \sqrt{1+x^2}$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx &= \int \frac{\tan^3\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}\cdot \sec^2\theta\, d\theta \\
&= \int \frac{\tan^3\theta}{\sqrt{\sec^2\theta}}\cdot \sec^2\theta\, d\theta \\
&= \int \frac{\tan^3\theta}{\sec\theta}\cdot \sec^2\theta\, d\theta \\
&= \int \tan^3\theta \sec\theta\, d\theta \\
&= \int \tan^2\theta(\sec\theta\tan\theta\, d\theta) \\
&= \int \tan^2\theta d(\sec\theta) \\
&= \int \sec^2\theta - 1 d(\sec\theta) \\
&= \frac{1}{3}\sec^3\theta - \sec\theta + C \\
&= \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} - \sqrt{1+x^2} + C \quad \#
\end{aligned}$$

วิธีที่ 2 การแทนค่าด้วยตัวแปร
ให้ $u = 1+x^2$ จะได้ว่า $x^2 = u-1$ และ $du = 2xdx$ นั่นคือ $dx = \frac{1}{2x}du$

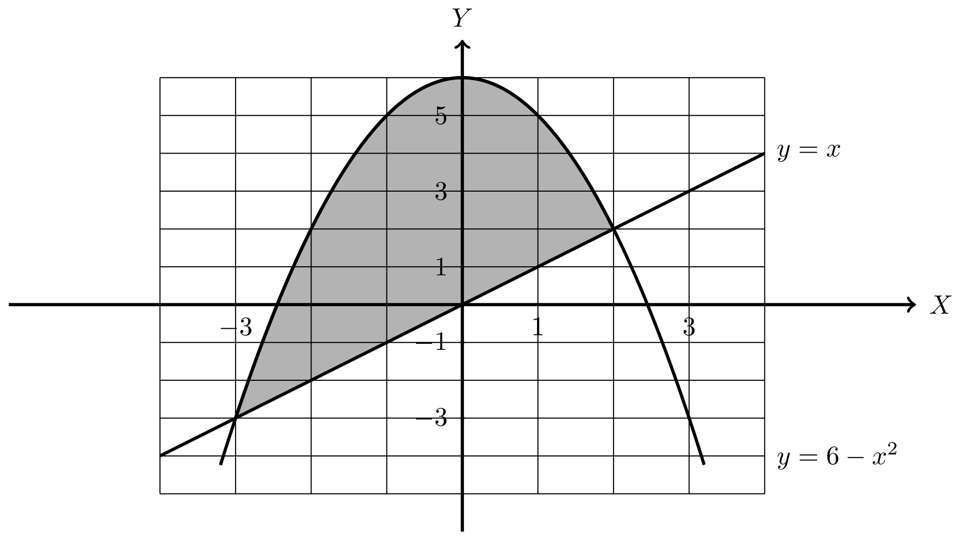
$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx &= \int \frac{x^3}{u^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{2x}du = \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{u^{\frac{1}{2}}}\,du \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{u-1}{u^{\frac{1}{2}}}\,du \\
&= \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}} - u^{-\frac{1}{2}}\,du \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}}\right] + C = \frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}} + C \\
&= \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} - \sqrt{1+x^2} + C \quad \#
\end{aligned}$$

9. **(10 คะแนน)** จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วย

$$y = -x^2 + 6 \quad \text{และ} \quad y = x$$

พร้อมวาดกราฟประกอบ

แนวคำตอบ



หาจุดตัดของกราฟจาก $-x^2 + 6 = x$ นั่นคือ

$$\begin{aligned} x^2 + x - 6 &= 0 \\ (x+3)(x-2) &= 0 \\ x &= -3, 2 \end{aligned}$$

กราฟทั้งสองตัดกันที่ $(-3, -3)$ และ $(2, 2)$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} A &= \int_{-3}^{2} \left[(-x^2 + 6) - x\right] dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 6x - \frac{1}{2}x^2\right]_{-3}^{2} \\ &= \left[-\frac{8}{3} + 12 - 2\right] - \left[9 - 18 - \frac{9}{2}\right] \\ &= \frac{125}{6} \qquad \# \end{aligned}$$

10. **(15 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

10.1 **(7 คะแนน)** จงตรวจสอบว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1}\,dx$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

แนวคำตอบ เนื่องจาก

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\,dx &= \int \frac{(x^2+1)-2}{x^2+1}\,dx \\ &= \int \frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{2}{x^2+1}\,dx \\ &= \int 1 - \frac{2}{x^2+1}\,dx \\ &= x - 2\arctan x + C\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1}\,dx &= \lim_{t\to\infty} \int_0^{t} \frac{x^2-1}{x^2+1}\,dx \\ &= \lim_{t\to\infty} [x - 2\arctan x]_0^t \\ &= \lim_{t\to\infty} [t - 2\arctan t] = +\infty\end{aligned}$$

ดังนั้น $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1}\,dx$ ลู่ออก #

10.2 **(8 คะแนน)** จงตรวจสอบว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{e^{x^2}}\,dx$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

แนวคำตอบ เนื่องจาก

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{e^{x^2}}\,dx &= \int e^{-x^2}\,x\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\int e^{-x^2}\,d(-x^2) \qquad\qquad u = -x^2 \\ &= -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C \\ &= -\frac{1}{2e^{x^2}} + C\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{e^{x^2}}\,dx &= \int_{-\infty}^{0} \frac{x}{e^{x^2}}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{x}{e^{x^2}}\,dx \\ &= \lim_{t\to-\infty} \int_t^0 \frac{x}{e^{x^2}}\,dx + \lim_{s\to\infty} \int_0^s \frac{x}{e^{x^2}}\,dx \\ &= \lim_{t\to-\infty} \left[-\frac{1}{2e^{x^2}}\right]_t^0 + \lim_{s\to\infty} \left[-\frac{1}{2e^{x^2}}\right]_0^s \\ &= \lim_{t\to-\infty} \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2e^{t^2}}\right] + \lim_{s\to\infty} \left[-\frac{1}{2e^{s^2}} + \frac{1}{2}\right] \\ &= \left[-\frac{1}{2} + 0\right] + \left[0 + \frac{1}{2}\right] = 0\end{aligned}$$

จะเห็นว่า $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{e^{x^2}}\,dx = 0$ สรุปได้ว่า ดังนั้น $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{e^{x^2}}\,dx$ ลู่เข้า #