มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
คณะครุศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ข้อสอบปลายภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2564

ชื่อวิชา	แคลคูลัส ๒ Calculus 2
รหัสวิชา	MAC1303
วันเวลาสอบ	วันจันทร์ ที่ 28 มีนาคม 2565 เวลา 9:00 - 13:00
สถานที่สอบ	ห้องเรียนออนไลน์ (โปรแกรม Zoom)
ผู้สอน	ผู้ช่วยศาสตรจารย์ ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย
คะแนน	105 คะแนน คิดเป็น 30%

- **ข้อ 1-15** แบบเติมคำตอบ/ตัวเลือก ข้อละ 1 คะแนน (รวม 15 คะแนน)
- **ข้อ 16-24** แบบแสดงวิธีทำ ข้อละ 10 คะแนน (รวม 90 คะแนน)

ข้อ 1

1. ข้อใดต่อไปนี้ไม่ใช่จุด $(-5, \pi)$ ในระบบพิกัดเชิงขั้วเดียวกัน

   a. $(5, \pi)$ b. $(5, 2\pi)$ c. $(-5, -\pi)$ d. $(5, -2\pi)$

2. ข้อใดต่อไปนี้ไม่ใช่จุด $(5, \pi)$ ในระบบพิกัดเชิงขั้วเดียวกัน

   a. $(5, -\pi)$ b. $(-5, 2\pi)$ c. $(-5, -\pi)$ d. $(-5, -2\pi)$

3. ข้อใดต่อไปนี้ไม่ใช่จุด $(5, -\pi)$ ในระบบพิกัดเชิงขั้วเดียวกัน

   a. $(5, \pi)$ b. $(-5, 2\pi)$ c. $(-5, \pi)$ d. $(-5, -2\pi)$

4. ข้อใดต่อไปนี้ไม่ใช่จุด $(-5, -\pi)$ ในระบบพิกัดเชิงขั้วเดียวกัน

   a. $(-5, \pi)$ b. $(5, 2\pi)$ c. $(5, -2\pi)$ d. $(5, -\pi)$

ข้อ 2

1. เมื่อแปลงจุด $(2, -\sqrt{12})$ ในระบบพิกัดฉาก จะตรงกับจุดใดในระบบพิกัดเชิงขั้ว

   a. $(4, \frac{2\pi}{3})$ b. $(4, \frac{4\pi}{3})$ c. $(4, \frac{5\pi}{6})$ d. $(4, \frac{7\pi}{6})$

2. เมื่อแปลงจุด $(-2, -\sqrt{12})$ ในระบบพิกัดฉาก จะตรงกับจุดใดในระบบพิกัดเชิงขั้ว

   a. $(4, \frac{2\pi}{3})$ b. $(4, \frac{4\pi}{3})$ c. $(4, \frac{5\pi}{6})$ d. $(4, \frac{7\pi}{6})$

3. เมื่อแปลงจุด $(\sqrt{12}, -2)$ ในระบบพิกัดฉาก จะตรงกับจุดใดในระบบพิกัดเชิงขั้ว

   a. $(4, \frac{2\pi}{3})$ b. $(4, \frac{4\pi}{3})$ c. $(4, \frac{5\pi}{6})$ d. $(4, \frac{7\pi}{6})$

4. เมื่อแปลงจุด $(-\sqrt{12}, -2)$ ในระบบพิกัดฉาก จะตรงกับจุดใดในระบบพิกัดเชิงขั้ว

   a. $(4, \frac{2\pi}{3})$ b. $(4, \frac{4\pi}{3})$ c. $(4, \frac{5\pi}{6})$ d. $(4, \frac{7\pi}{6})$

ข้อ 3

1. ให้ $a > 0$ ถ้า $(a, a+1)$ เป็นระบบพิกัดฉาก $(-5, \theta)$ เมื่อเปลี่ยนไปอยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้วคือจุด จงหาค่าของ a
2. ให้ $a > 0$ ถ้า $(a-1, a)$ เป็นระบบพิกัดฉาก $(-5, \theta)$ เมื่อเปลี่ยนไปอยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้วคือจุด จงหาค่าของ a
3. ให้ $a < 0$ ถ้า $(a+1, a)$ เป็นระบบพิกัดฉาก $(-5, \theta)$ เมื่อเปลี่ยนไปอยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้วคือจุด จงหาค่าของ a
4. ให้ $a < 0$ ถ้า $(a, a-1)$ เป็นระบบพิกัดฉาก $(-5, \theta)$ เมื่อเปลี่ยนไปอยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้วคือจุด จงหาค่าของ a

ข้อ 4

1. สมการ $r = \sin\theta \sin 2\theta$ ในระบบพิกัดเชิงขั้ว ตรงกับสมการใดในระบบพิกัดฉาก

   a. $(x^2+y^2)^2 = 2y^2x$
   b. $x^2+y^2 = 2y^2x$
   c. $(x^2+y^2)^2 = 2x^2y$
   d. $x^2+y^2 = 2x^2y$

2. สมการ $r = \cos\theta \sin 2\theta$ ในระบบพิกัดเชิงขั้ว ตรงกับสมการใดในระบบพิกัดฉาก

   a. $(x^2+y^2)^2 = 2y^2x$
   b. $x^2+y^2 = 2y^2x$
   c. $(x^2+y^2)^2 = 2x^2y$
   d. $x^2+y^2 = 2x^2y$

ข้อ 5

1. สมการ $(x-3)^2+y^2=9$ ในระบบพิกัดฉาก ตรงกับสมการใดในระบบพิกัดเชิงขั้ว

   a. $r=6\cos\theta$ ANS
   b. $r=6\sin\theta$
   c. $r=-6\cos\theta$
   d. $r=-6\sin\theta$

2. สมการ $x^2+(y-3)^2=9$ ในระบบพิกัดฉาก ตรงกับสมการใดในระบบพิกัดเชิงขั้ว

   a. $r=6\cos\theta$
   b. $r=6\sin\theta$ ANS
   c. $r=-6\cos\theta$
   d. $r=-6\sin\theta$

3. สมการ $(x+3)^2+y^2=9$ ในระบบพิกัดฉาก ตรงกับสมการใดในระบบพิกัดเชิงขั้ว

   a. $r=6\cos\theta$
   b. $r=6\sin\theta$
   c. $r=-6\cos\theta$ ANS
   d. $r=-6\sin\theta$

4. สมการ $x^2+(y+3)^2=9$ ในระบบพิกัดฉาก ตรงกับสมการใดในระบบพิกัดเชิงขั้ว

   a. $r=6\cos\theta$
   b. $r=6\sin\theta$
   c. $r=-6\cos\theta$
   d. $r=-6\sin\theta$ ANS

ข้อ 6

1. ในระบบพิกัดเชิงขั้ว ถ้า (r,θ) คือจุดตัดของกราฟ $r=1+2\cos\theta$ และ $r=1-2\sin\theta$ ข้อใดไม่ถูกต้อง

   a. $\theta=\frac{\pi}{4}$ ANS
   b. $\theta=\frac{3\pi}{4}$
   c. $r=1+\sqrt{2}$
   d. $r=1-\sqrt{2}$

2. ในระบบพิกัดเชิงขั้ว ถ้า (r,θ) คือจุดตัดของกราฟ $r=1-2\cos\theta$ และ $r=1+2\sin\theta$ ข้อใดไม่ถูกต้อง

   a. $\theta=\frac{5\pi}{4}$ ANS
   b. $\theta=\frac{7\pi}{4}$
   c. $r=1+\sqrt{2}$
   d. $r=1-\sqrt{2}$

ข้อ 7

1. ข้อใดคือโดเมนของฟังก์ชัน $f(x,y)=\sqrt{x^2-y^2}$

   a. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} : x>y\}$

   b. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} : x\geq y\}$

   c. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} : |x|>|y|\}$

   d. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} : |x|\geq |y|\}$

2. ข้อใดคือโดเมนของฟังก์ชัน $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$

   a. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} : x>y\}$

   b. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} : x\geq y\}$

   c. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} : |x|>|y|\}$

   d. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} : |x|\geq |y|\}$

3. ข้อใดคือโดเมนของฟังก์ชัน $f(x,y)=\sqrt{x^2-4y^2}$

   a. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} : x>2y\}$

   b. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} : x\geq 2y\}$

   c. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} : |x|>2|y|\}$

   d. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} : |x|\geq 2|y|\}$

4. ข้อใดคือโดเมนของฟังก์ชัน $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{4x^2-y^2}}$

   a. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} : 2x>y\}$

   b. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} : 2x\geq y\}$

   c. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} : 2|x|>|y|\}$

   d. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} : 2|x|\geq |y|\}$

ข้อ 8

1. ให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริงสองตัวแปรที่สอดคล้องเงื่อนไข

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x,h+1)-f(x,1)}{h}=\frac{x^2+2\cos x}{e^x} \qquad \text{ทุกค่า } x\in\mathbb{R}$$

แล้ว $f_y(0,1)$ มีค่าเท่าใด

2. ให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริงสองตัวแปรที่สอดคล้องเงื่อนไข

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x,h-1)-f(x,-1)}{h}=\frac{x^2-2\cos x}{e^x} \qquad \text{ทุกค่า } x\in\mathbb{R}$$

แล้ว $f_y(0,-1)$ มีค่าเท่าใด

3. ให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริงสองตัวแปรที่สอดคล้องเงื่อนไข

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h+1,y)-f(1,y)}{h}=\frac{e^y+2\cos y}{y^2+1} \qquad \text{ทุกค่า } y\in\mathbb{R}$$

แล้ว $f_x(1,0)$

4. ให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริงสองตัวแปรที่สอดคล้องเงื่อนไข

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h-1,y)-f(-1,y)}{h}=\frac{e^y-2\cos y}{y^2+1} \qquad \text{ทุกค่า } y\in\mathbb{R}$$

แล้ว $f_x(-1,0)$

ข้อ 9

1. กำหนดให้
$$f(x, y) = x^2 + y^2 + xy + 3x$$
ข้อใดคือ (x, y) ที่สอดคล้องเงื่อนไข $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ และ $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$

   a. $(2, -1)$ b. $(-2, 1)$ c. $(1, -2)$ d. $(-1, 2)$

2. กำหนดให้
$$f(x, y) = x^2 + y^2 + xy + 3y$$
ข้อใดคือ (x, y) ที่สอดคล้องเงื่อนไข $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ และ $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$

   a. $(2, -1)$ b. $(-2, 1)$ c. $(1, -2)$ d. $(-1, 2)$

ข้อ 10

1. กำหนดให้ $f(x, y) = 0$ ค่าของอินทิกรัลสองชั้น $\int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\, dxdy$ มีค่าเท่าใด
2. กำหนดให้ $f(x, y) = 1$ ค่าของอินทิกรัลสองชั้น $\int_0^1 \int_1^1 f(x, y)\, dxdy$ มีค่าเท่าใด
3. กำหนดให้ $f(x, y) = 1$ ค่าของอินทิกรัลสองชั้น $\int_1^1 \int_0^1 f(x, y)\, dxdy$ มีค่าเท่าใด

ข้อ 11

1. ข้อใดคือโดเมนของอินทิกรัลสองชั้น $\int_0^1 \int_{x^2}^{2-x^2} f(x, y)\, dydx$ มีค่าเท่าใด
   a. $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1$ และ $x^2 \leq y \leq 2 - x^2\}$
   b. $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : 0 \leq y \leq 1$ และ $x^2 \leq y \leq 2 - x^2\}$
   c. $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1$ และ $2 - x^2 \leq y \leq x^2\}$
   d. $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : 0 \leq y \leq 1$ และ $2 - x^2 \leq y \leq x^2\}$
2. ข้อใดคือโดเมนของอินทิกรัลสองชั้น $\int_{-1}^1 \int_{x^2}^{2-x^2} f(x, y)\, dydx$ มีค่าเท่าใด
   a. $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |x| \leq 1$ และ $x^2 \leq y \leq 2 - x^2\}$
   b. $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |y| \leq 1$ และ $x^2 \leq y \leq 2 - x^2\}$
   c. $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |x| \leq 1$ และ $2 - x^2 \leq y \leq x^2\}$
   d. $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |y| \leq 1$ และ $2 - x^2 \leq y \leq x^2\}$

ข้อ 12

1. ค่าของอินทิกรัลสองชั้น $\int_0^2 \int_1^2 \frac{y}{x^2}\,dxdy$ มีค่าเท่าใด
2. ค่าของอินทิกรัลสองชั้น $\int_0^2 \int_1^2 \frac{2y}{x^2}\,dxdy$ มีค่าเท่าใด
3. ค่าของอินทิกรัลสองชั้น $\int_0^4 \int_1^2 \frac{y}{x^2}\,dxdy$ มีค่าเท่าใด
4. ค่าของอินทิกรัลสองชั้น $\int_0^4 \int_1^2 \frac{2y}{x^2}\,dxdy$ มีค่าเท่าใด

ข้อ 13

1. ค่าของอินทิกรัลสองชั้น $\int_{-1}^0 \int_{-x}^x e^{x^2}\,dydx$ มีค่าเท่ากับข้อใด

   a. $1+e$ b. $1-e$ c. $1+\frac{1}{e}$ d. $1-\frac{1}{e}$

2. ค่าของอินทิกรัลสองชั้น $\int_{-1}^0 \int_{-x}^x e^{-x^2}\,dydx$ มีค่าเท่ากับข้อใด

   a. $-1+e$ b. $-1-e$ c. $-1+\frac{1}{e}$ d. $-1-\frac{1}{e}$

ข้อ 14

1. กำหนดให้ $S = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 4\}$ แล้ว $\iint\limits_S f(x,y)dA$ มีค่าเท่ากับข้อใด

   a. $\int_0^{2\pi}\int_0^2 f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, drd\theta$
   b. $\int_0^{2\pi}\int_0^4 f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, rdrd\theta$
   c. $\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^4 f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, rdrd\theta$
   d. $\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^2 f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, rdrd\theta$

2. กำหนดให้ $S = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ แล้ว $\iint\limits_S f(x,y)dA$ มีค่าเท่ากับข้อใด

   a. $\int_0^{2\pi}\int_1^2 f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, rdrd\theta$
   b. $\int_0^{2\pi}\int_1^4 f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, rdrd\theta$
   c. $\int_{-\pi}^{\pi}\int_1^4 f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, rdrd\theta$
   d. $\int_{-\pi}^{\pi}\int_1^2 f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, drd\theta$

ข้อ 15

1. $y = x + e^x$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ในข้อใด

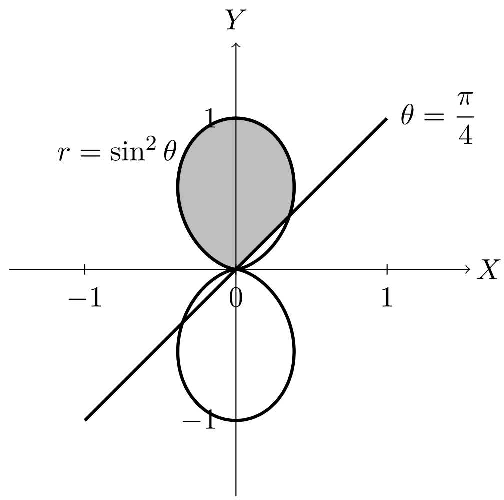
   a. $y'' - y' = y$
   b. $y'' - y' + 1 = 0$
   c. $y'' - y - x = 0$
   d. $xy' + y = xy'' - 1$

2. $y = x + e^x$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ในข้อใด

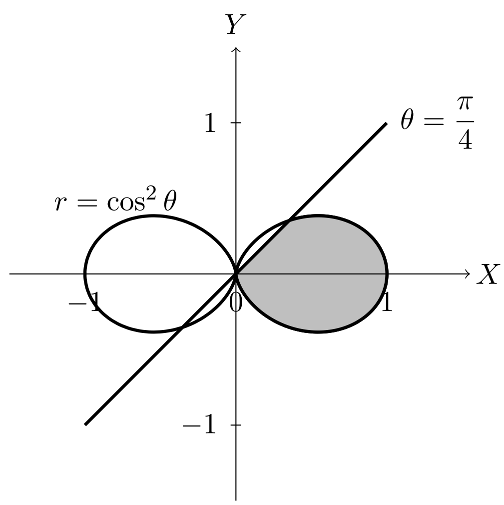
   a. $y'' - y' = y$
   b. $y'' - y' - 1 = 0$
   c. $y'' - y + x = 0$
   d. $xy' + y = xy'' - 1$

ข้อ 16

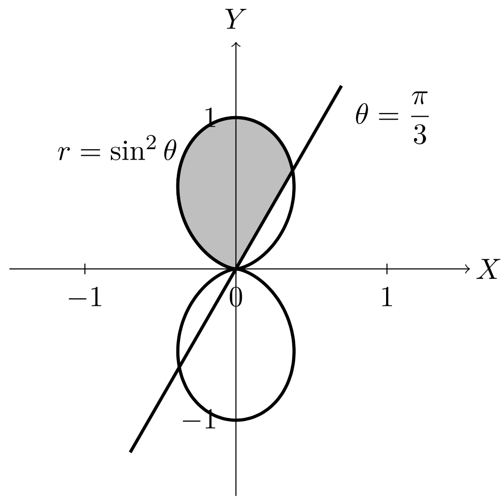
1. (10 **คะแนน**) จงหาพื้นที่ที่แรเงาต่อไปนี้ โดยใช้การ**ปริพันธ์ในรูปเชิงขั้ว**



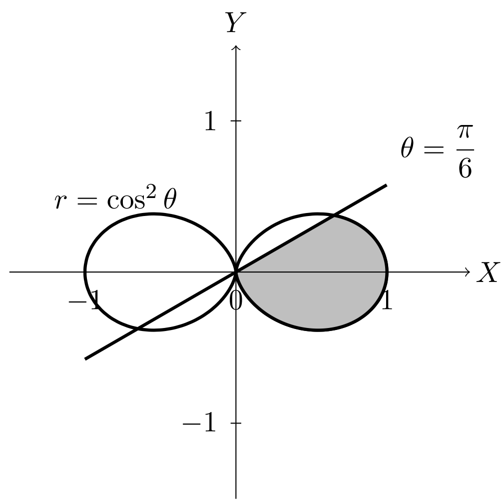
2. (10 **คะแนน**) จงหาพื้นที่ที่แรเงาต่อไปนี้ โดยใช้การ**ปริพันธ์ในรูปเชิงขั้ว**



3. (10 **คะแนน**) จงหาพื้นที่ที่แรเงาต่อไปนี้ โดยใช้การ**ปริพันธ์ในรูปเชิงขั้ว**



4. (10 **คะแนน**) จงหาพื้นที่ที่แรเงาต่อไปนี้ โดยใช้การ**ปริพันธ์ในรูปเชิงขั้ว**



ข้อ 17

1. **(10 คะแนน)** จงตรวจสอบลิมิตต่อไปนี้ว่ามีค่าหรือไม่ พร้อมแสดงวิธีทำเพื่อยืนยันคำตอบ

   1.1 **(5 คะแนน)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xe^x}{\sqrt{y^2+e^x}}$

   1.2 **(5 คะแนน)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$

2. (10 คะแนน) จงตรวจสอบลิมิตต่อไปนี้ว่ามีค่าหรือไม่ พร้อมแสดงวิธีทำเพื่อยืนยันคำตอบ

   2.1 **(5 คะแนน)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{ye^y}{\sqrt{x^2+e^y}}$

   2.2 **(5 คะแนน)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \arcsin\left(\dfrac{y}{x}\right)$

3. (10 คะแนน) จงตรวจสอบลิมิตต่อไปนี้ว่ามีค่าหรือไม่ พร้อมแสดงวิธีทำเพื่อยืนยันคำตอบ

   3.1 **(5 คะแนน)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{ye^y}{\sqrt{x^4+e^y}}$

   3.2 **(5 คะแนน)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \arccos\left(\dfrac{y}{x}\right)$

4. (10 คะแนน) จงตรวจสอบลิมิตต่อไปนี้ว่ามีค่าหรือไม่ พร้อมแสดงวิธีทำเพื่อยืนยันคำตอบ

   4.1 **(5 คะแนน)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xe^x}{\sqrt{y^4+e^x}}$

   4.2 **(5 คะแนน)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \text{arccot}\left(\dfrac{y}{x}\right)$

ข้อ 18

1. **(10 คะแนน)** กำหนดให้ $z = f(u,v)$ โดยที่ $u = x^2 + y$ และ $v = x + y^2$ จงหา $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

2. **(10 คะแนน)** กำหนดให้ $z = f(u,v)$ โดยที่ $u = x^2 + y$ และ $v = x + y^2$ จงหา $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

3. **(10 คะแนน)** กำหนดให้ $z = f(u,v)$ โดยที่ $u = x^2 - y$ และ $v = x - y^2$ จงหา $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

4. **(10 คะแนน)** กำหนดให้ $z = f(u,v)$ โดยที่ $u = x^2 - y$ และ $v = x - y^2$ จงหา $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

ข้อ 19

1. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

   1.1 **(5 คะแนน)** ให้ $f(x,y) = \arctan\left(\dfrac{x}{y}\right)$ จงหา $f_{xxy}(x,y)$

   1.2 **(5 คะแนน)** จงใช้ค่าเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันสองตัวแปรประมาณค่าของ

   $$\ln(0.01 + \sqrt{0.99})$$

   ตอบในรูปทศนิยม

2. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

   2.1 **(5 คะแนน)** ให้ $f(x,y) = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$ จงหา $f_{xxy}(x,y)$

   2.2 **(5 คะแนน)** จงใช้ค่าเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันสองตัวแปรประมาณค่าของ

   $$\ln(0.02 + \sqrt{0.98})$$

   ตอบในรูปทศนิยม

3. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

   3.1 **(5 คะแนน)** ให้ $f(x,y) = \arctan\left(\dfrac{x}{y}\right)$ จงหา $f_{yyx}(x,y)$

   3.2 **(5 คะแนน)** จงใช้ค่าเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันสองตัวแปรประมาณค่าของ

   $$\ln(0.03 + \sqrt{0.97})$$

   ตอบในรูปทศนิยม

4. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

   4.1 **(5 คะแนน)** ให้ $f(x,y) = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$ จงหา $f_{yyx}(x,y)$

   4.2 **(5 คะแนน)** จงใช้ค่าเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันสองตัวแปรประมาณค่าของ

   $$\ln(0.04 + \sqrt{0.96})$$

   ตอบในรูปทศนิยม

ข้อ 20

1. (10 **คะแนน**) พิจารณาอินทิกรัลสองชั้น $\int_0^1 \int_{-y}^{y^2} f(x,y)\,dxdy$

   1.1 (5 **คะแนน**) จงวาดกราฟแสดงโดเมนของอินทิกรัลสองชั้นดังกล่าว

   1.2 (5 **คะแนน**) จงเปลี่ยนลำดับการอินทิเกรตของอินทิกรัลสองชั้นดังกล่าว

2. (10 **คะแนน**) พิจารณาอินทิกรัลสองชั้น $\int_0^1 \int_{-y^2}^{y} f(x,y)\,dxdy$

   2.1 (5 **คะแนน**) จงวาดกราฟแสดงโดเมนของอินทิกรัลสองชั้นดังกล่าว

   2.2 (5 **คะแนน**) จงเปลี่ยนลำดับการอินทิเกรตของอินทิกรัลสองชั้นดังกล่าว

3. (10 **คะแนน**) พิจารณาอินทิกรัลสองชั้น $\int_0^1 \int_{-x}^{x^2} f(x,y)\,dydx$

   3.1 (5 **คะแนน**) จงวาดกราฟแสดงโดเมนของอินทิกรัลสองชั้นดังกล่าว

   3.2 (5 **คะแนน**) จงเปลี่ยนลำดับการอินทิเกรตของอินทิกรัลสองชั้นดังกล่าว

4. (10 **คะแนน**) พิจารณาอินทิกรัลสองชั้น $\int_0^1 \int_{-x^2}^{x} f(x,y)\,dydx$

   4.1 (5 **คะแนน**) จงวาดกราฟแสดงโดเมนของอินทิกรัลสองชั้นดังกล่าว

   4.2 (5 **คะแนน**) จงเปลี่ยนลำดับการอินทิเกรตของอินทิกรัลสองชั้นดังกล่าว

ข้อ 21

1. (10 **คะแนน**) จงหาหาค่าของอินทิกรัลสองชั้น $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \sqrt{x^2+y^2}\, dydx$
2. (10 **คะแนน**) จงหาหาค่าของอินทิกรัลสองชั้น $\int_0^2 \int_{-\sqrt{1-(x-1)^2}}^0 \sqrt{x^2+y^2}\, dydx$

ข้อ 22

1. (10 **คะแนน**) จงตอบคำถามต่อไปนี้

   1.1 (5 **คะแนน**) จงแสดงว่า $u(x,t) = \sin t \cos x$ **เป็นผลเฉลยเฉพาะ**ของของสมการ

   $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

   1.2 (5 **คะแนน**) จงหา**ผลเฉลยทั่วไป** ของสมการ

   $$\frac{dy}{dx} = \frac{ye^x + e^x}{ye^x + y}$$

2. (10 **คะแนน**) จงตอบคำถามต่อไปนี้

   2.1 (5 **คะแนน**) จงแสดงว่า $u(x,t) = \sin 2t \cos x$ **เป็นผลเฉลยเฉพาะ**ของของสมการ

   $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

   2.2 (5 **คะแนน**) จงหา**ผลเฉลยทั่วไป** ของสมการ

   $$\frac{dy}{dx} = \frac{ye^x - e^x}{ye^x + y}$$

3. (10 **คะแนน**) จงตอบคำถามต่อไปนี้

   3.1 (5 **คะแนน**) จงแสดงว่า $u(x,t) = \sin 3t \cos x$ **เป็นผลเฉลยเฉพาะ**ของของสมการ

   $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

   3.2 (5 **คะแนน**) จงหา**ผลเฉลยทั่วไป** ของสมการ

   $$\frac{dy}{dx} = \frac{ye^x + e^x}{ye^x - y}$$

4. (10 **คะแนน**) จงตอบคำถามต่อไปนี้

4.1 **(5 คะแนน)** จงแสดงว่า $u(x,t) = \sin 4t \cos x$ **เป็นผลเฉลยเฉพาะ**ของของสมการ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

4.2 **(5 คะแนน)** จงหา**ผลเฉลยทั่วไป** ของสมการ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ye^x - e^x}{ye^x - y}$$

ข้อ 23

1. **(10 คะแนน)** จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y}{x + 2y}$$

2. **(10 คะแนน)** จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y^2}{y + 2xy}$$

ข้อ 24

1. **(10 คะแนน)** จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$(x^2 - 1)\frac{dy}{dx} + 2y = (x+1)^2(x-1) \qquad \text{เมื่อ} \quad y(0) = 1$$

2. **(10 คะแนน)** จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$(x^2 - x)\frac{dy}{dx} + y = (xy)^2(x-1) \qquad \text{เมื่อ} \quad y(2) = 1$$

เฉลยข้อสอบปลายภาค

ข้อ 1

1. ข้อใดต่อไปนี้ไม่ใช่จุด $(-5, \pi)$ ในระบบพิกัดเชิงขั้วเดียวกัน

   a. $(5, \pi)$ ANS   b. $(5, 2\pi)$ c. $(-5, -\pi)$ d. $(5, -2\pi)$

   วิธีทำ จุด $(-5, \pi)$ แปลงได้เป็น $(-5\cos\pi, -5\sin\pi) = (5, 0)$ ในระบบพิกัดฉาก แต่จุดในข้อ a. $(5, \pi)$ แปลงได้เป็น

   $$(5\cos\pi, 5\sin\pi) = (-5, 0)$$

   ดังนั้น $(5, \pi)$ เป็นคนละจุดกับ $(-5, \pi)$

2. ข้อใดต่อไปนี้ไม่ใช่จุด $(5, \pi)$ ในระบบพิกัดเชิงขั้วเดียวกัน

   a. $(5, -\pi)$ b. $(-5, 2\pi)$ c. $(-5, -\pi)$ ANS   d. $(-5, -2\pi)$

   วิธีทำ จุด $(5, \pi)$ แปลงได้เป็น $(5\cos\pi, 5\sin\pi) = (-5, 0)$ ในระบบพิกัดฉาก แต่จุดในข้อ c. $(-5, -\pi)$ แปลงได้เป็น

   $$(-5\cos(-\pi), -5\sin(-\pi)) = (5, 0)$$

   ดังนั้น $(-5, -\pi)$ เป็นคนละจุดกับ $(5, \pi)$

3. ข้อใดต่อไปนี้ไม่ใช่จุด $(5, -\pi)$ ในระบบพิกัดเชิงขั้วเดียวกัน

   a. $(5, \pi)$ b. $(-5, 2\pi)$ c. $(-5, \pi)$ ANS   d. $(-5, -2\pi)$

   วิธีทำ จุด $(5, -\pi)$ แปลงได้เป็น $(5\cos(-\pi), 5\sin(-\pi)) = (-5, 0)$ ในระบบพิกัดฉาก แต่จุดในข้อ c. $(-5, \pi)$ แปลงได้เป็น

   $$(-5\cos\pi, -5\sin\pi) = (5, 0)$$

   ดังนั้น $(-5, \pi)$ เป็นคนละจุดกับ $(5, -\pi)$

4. ข้อใดต่อไปนี้ไม่ใช่จุด $(-5, -\pi)$ ในระบบพิกัดเชิงขั้วเดียวกัน

   a. $(-5, \pi)$ b. $(5, 2\pi)$ c. $(5, -2\pi)$ d. $(5, -\pi)$ ANS

   วิธีทำ จุด $(-5, -\pi)$ แปลงได้เป็น $(-5\cos(-\pi), -5\sin(-\pi)) = (5, 0)$ ในระบบพิกัดฉาก แต่จุดในข้อ d. $(5, -\pi)$ แปลงได้เป็น

   $$(5\cos(-\pi), 5\sin(-\pi)) = (-5, 0)$$

   ดังนั้น $(5, -\pi)$ เป็นคนละจุดกับ $(-5, -\pi)$

ข้อ 2

1. เมื่อแปลงจุด $(2, -\sqrt{12})$ ในระบบพิกัดฉาก จะตรงกับจุดใดในระบบพิกัดเชิงขั้ว

   a. $(4, \frac{2\pi}{3})$ ANS   b. $(4, \frac{4\pi}{3})$ c. $(4, \frac{5\pi}{6})$ d. $(4, \frac{7\pi}{6})$

   วิธีทำ จะได้ว่า $r\sqrt{2^2 + (-\sqrt{12})^2} = 4$ และ $\tan\theta = \frac{-\sqrt{12}}{2} = -\sqrt{3}$ นั่นคือ θ คือมุม 60 องศาเทียบกับแกน X ในจตุภาคที่ 2 จะได้ว่า $\theta = \frac{2\pi}{3}$ ซึ่งตรงกับจุด

   $$(4, \frac{2\pi}{3})$$

2. เมื่อแปลงจุด $(-2, -\sqrt{12})$ ในระบบพิกัดฉาก จะตรงกับจุดใดในระบบพิกัดเชิงขั้ว

   a. $(4, \frac{2\pi}{3})$ b. $(4, \frac{4\pi}{3})$ ANS   c. $(4, \frac{5\pi}{6})$ d. $(4, \frac{7\pi}{6})$

   วิธีทำ จะได้ว่า $r\sqrt{(-2)^2 + (-\sqrt{12})^2} = 4$ และ $\tan\theta = \frac{-\sqrt{12}}{-2} = \sqrt{3}$ นั่นคือ θ คือมุม 60 องศาเทียบกับแกน X ในจตุภาคที่ 3 จะได้ว่า $\theta = \frac{4\pi}{3}$ ซึ่งตรงกับจุด

   $$(4, \frac{4\pi}{3})$$

3. เมื่อแปลงจุด $(\sqrt{12}, -2)$ ในระบบพิกัดฉาก จะตรงกับจุดใดในระบบพิกัดเชิงขั้ว

   a. $(4, \frac{2\pi}{3})$ b. $(4, \frac{4\pi}{3})$ c. $(4, \frac{5\pi}{6})$ ANS   d. $(4, \frac{7\pi}{6})$

   วิธีทำ จะได้ว่า $r\sqrt{(\sqrt{12})^2 + (-2)^2} = 4$ และ $\tan\theta = \frac{-2}{\sqrt{12}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ นั่นคือ θ คือมุม 30 องศาเทียบกับแกน X ในจตุภาคที่ 2 จะได้ว่า $\theta = \frac{5\pi}{6}$ ซึ่งตรงกับจุด

   $$(4, \frac{5\pi}{6})$$

4. เมื่อแปลงจุด $(-\sqrt{12}, -2)$ ในระบบพิกัดฉาก จะตรงกับจุดใดในระบบพิกัดเชิงขั้ว

   a. $(4, \frac{2\pi}{3})$ b. $(4, \frac{4\pi}{3})$ c. $(4, \frac{5\pi}{6})$ d. $(4, \frac{7\pi}{6})$ ANS

   วิธีทำ จะได้ว่า $r\sqrt{(-\sqrt{12})^2 + (-2)^2} = 4$ และ $\tan\theta = \frac{-2}{-\sqrt{12}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ นั่นคือ θ คือมุม 30 องศาเทียบกับแกน X ในจตุภาคที่ 3 จะได้ว่า $\theta = \frac{7\pi}{6}$ ซึ่งตรงกับจุด

   $$(4, \frac{7\pi}{6})$$

ข้อ 3

1. ให้ $a > 0$ ถ้า $(a, a+1)$ เป็นระบบพิกัดฉาก $(-5, \theta)$ เมื่อเปลี่ยนไปอยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้วคือจุด จงหาค่าของ a
   วิธีทำ จะเห็นว่า

$$\begin{aligned} a^2 + (a+1)^2 &= (-5)^2 \\ a^2 + a^2 + 2a + 1 &= 25 \\ 2a^2 + 2a - 24 &= 0 \\ 2(a-3)(a+4) &= 0 \\ a &= 3, -4 \end{aligned}$$

   ดังนั้น $a = 3 \quad \#$

2. ให้ $a > 0$ ถ้า $(a-1, a)$ เป็นระบบพิกัดฉาก $(-5, \theta)$ เมื่อเปลี่ยนไปอยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้วคือจุด จงหาค่าของ a
   วิธีทำ จะเห็นว่า

$$\begin{aligned} (a-1)^2 + a^2 &= (-5)^2 \\ a^2 - 2a + 1 + a^2 &= 25 \\ 2a^2 - 2a - 24 &= 0 \\ 2(a+3)(a-4) &= 0 \\ a &= -3, 4 \end{aligned}$$

   ดังนั้น $a = 4 \quad \#$

3. ให้ $a < 0$ ถ้า $(a+1, a)$ เป็นระบบพิกัดฉาก $(-5, \theta)$ เมื่อเปลี่ยนไปอยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้วคือจุด จงหาค่าของ a
   วิธีทำ จะเห็นว่า

$$\begin{aligned} (a+1)^2 + a^2 &= (-5)^2 \\ a^2 + 2a + 1 + a^2 &= 25 \\ 2a^2 + 2a - 24 &= 0 \\ 2(a-3)(a+4) &= 0 \\ a &= 3, -4 \end{aligned}$$

   ดังนั้น $a = -4 \quad \#$

4. ให้ $a < 0$ ถ้า $(a, a-1)$ เป็นระบบพิกัดฉาก $(-5, \theta)$ เมื่อเปลี่ยนไปอยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้วคือจุด จงหาค่าของ a
   วิธีทำ จะเห็นว่า

$$\begin{aligned} a^2 + (a-1)^2 &= (-5)^2 \\ a^2 + a^2 - 2a + 1 &= 25 \\ 2a^2 - 2a - 24 &= 0 \\ 2(a+3)(a-4) &= 0 \\ a &= -3, 4 \end{aligned}$$

   ดังนั้น $a = -3 \quad \#$

ข้อ 4

1. สมการ $r = \sin\theta \sin 2\theta$ ในระบบพิกัดเชิงขั้ว ตรงกับสมการใดในระบบพิกัดฉาก

   a. $(x^2 + y^2)^2 = 2y^2x$ ANS

   b. $x^2 + y^2 = 2y^2x$

   c. $(x^2 + y^2)^2 = 2x^2y$

   d. $x^2 + y^2 = 2x^2y$

   วิธีทำ ให้ $x = r\cos\theta$ และ $x = r\sin\theta$ นั่นคือ $x^2 + y^2 = r^2$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
r &= \sin\theta \sin 2\theta = \sin\theta \cdot 2\sin\theta\cos\theta = 2\sin^2\theta\cos\theta \\
r \cdot r^3 &= 2r^2 \sin^2\theta \cdot r\cos\theta \\
(r^2)^2 &= 2(r\sin\theta)^2(r\cos\theta) \\
(x^2 + y^2)^2 &= 2y^2x \quad \#
\end{aligned}
$$

2. สมการ $r = \cos\theta \sin 2\theta$ ในระบบพิกัดเชิงขั้ว ตรงกับสมการใดในระบบพิกัดฉาก

   a. $(x^2 + y^2)^2 = 2y^2x$

   b. $x^2 + y^2 = 2y^2x$

   c. $(x^2 + y^2)^2 = 2x^2y$ ANS

   d. $x^2 + y^2 = 2x^2y$

   วิธีทำ ให้ $x = r\cos\theta$ และ $x = r\sin\theta$ นั่นคือ $x^2 + y^2 = r^2$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
r &= \cos\theta \sin 2\theta = \cos\theta \cdot 2\sin\theta\cos\theta = 2\cos^2\theta\sin\theta \\
r \cdot r^3 &= 2r^2 \cos^2\theta \cdot r\sin\theta \\
(r^2)^2 &= 2(r\cos\theta)^2(r\sin\theta) \\
(x^2 + y^2)^2 &= 2x^2y \quad \#
\end{aligned}
$$

ข้อ 5

1. สมการ $(x-3)^2 + y^2 = 9$ ในระบบพิกัดฉาก ตรงกับสมการใดในระบบพิกัดเชิงขั้ว

   a. $r = 6\cos\theta$ ANS

   b. $r = 6\sin\theta$

   c. $r = -6\cos\theta$

   d. $r = -6\sin\theta$

   วิธีทำ ให้ $x = r\cos\theta$ และ $x = r\sin\theta$ นั่นคือ $x^2 + y^2 = r^2$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
x^2 - 6x + 9 + y^2 &= 9 \\
x^2 + y^2 &= 6x \\
r^2 &= 6r\cos\theta \\
r &= 6\cos\theta \quad \#
\end{aligned}
$$

2. สมการ $x^2 + (y-3)^2 = 9$ ในระบบพิกัดฉาก ตรงกับสมการใดในระบบพิกัดเชิงขั้ว

   a. $r = 6\cos\theta$

   b. $r = 6\sin\theta$ ANS

   c. $r = -6\cos\theta$

   d. $r = -6\sin\theta$

   วิธีทำ ให้ $x = r\cos\theta$ และ $x = r\sin\theta$ นั่นคือ $x^2 + y^2 = r^2$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 - 6y + 9 &= 9 \\
x^2 + y^2 &= 6y \\
r^2 &= 6r\sin\theta \\
r &= 6\sin\theta \quad \#
\end{aligned}
$$

3. สมการ $(x+3)^2 + y^2 = 9$ ในระบบพิกัดฉาก ตรงกับสมการใดในระบบพิกัดเชิงขั้ว

   a. $r = 6\cos\theta$

   b. $r = 6\sin\theta$

   c. $r = -6\cos\theta$ ANS

   d. $r = -6\sin\theta$

   วิธีทำ ให้ $x = r\cos\theta$ และ $x = r\sin\theta$ นั่นคือ $x^2 + y^2 = r^2$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
x^2 + 6x + 9 + y^2 &= 9 \\
x^2 + y^2 &= -6x \\
r^2 &= -6r\cos\theta \\
r &= -6\cos\theta \quad \#
\end{aligned}
$$

4. สมการ $x^2 + (y+3)^2 = 9$ ในระบบพิกัดฉาก ตรงกับสมการใดในระบบพิกัดเชิงขั้ว

   a. $r = 6\cos\theta$

   b. $r = 6\sin\theta$

   c. $r = -6\cos\theta$

   d. $r = -6\sin\theta$ ANS

   วิธีทำ ให้ $x = r\cos\theta$ และ $x = r\sin\theta$ นั่นคือ $x^2 + y^2 = r^2$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 + 6y + 9 &= 9 \\
x^2 + y^2 &= -6y \\
r^2 &= -6r\sin\theta \\
r &= -6\sin\theta \quad \#
\end{aligned}
$$

ข้อ 6

1. ในระบบพิกัดเชิงขั้ว ถ้า (r, θ) คือจุดตัดของกราฟ $r = 1 + 2\cos\theta$ และ $r = 1 - 2\sin\theta$ ข้อใดไม่ถูกต้อง

   a. $\theta = \frac{\pi}{4}$ ANS
   b. $\theta = \frac{3\pi}{4}$
   c. $r = 1 + \sqrt{2}$
   d. $r = 1 - \sqrt{2}$

   วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned} 1 + 2\cos\theta &= 1 - 2\sin\theta \\ \cos\theta &= -\sin\theta \\ \tan\theta &= -1 \end{aligned}$$

   จะได้ว่า θ คือมุม 45 องศากับแกน X อยู่ในจตุภาคที่ 2 และ 4 นั่นคือ $\theta = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ แล้ว

$$r = 1 + 2\cos\frac{3\pi}{4} = 1 - \sqrt{2}$$

   หรือ

$$r = 1 + 2\cos\frac{7\pi}{4} = 1 + \sqrt{2}$$

2. ในระบบพิกัดเชิงขั้ว ถ้า (r, θ) คือจุดตัดของกราฟ $r = 1 - 2\cos\theta$ และ $r = 1 + 2\sin\theta$ ข้อใดไม่ถูกต้อง

   a. $\theta = \frac{5\pi}{4}$ ANS
   b. $\theta = \frac{7\pi}{4}$
   c. $r = 1 + \sqrt{2}$
   d. $r = 1 - \sqrt{2}$

   วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned} 1 - 2\cos\theta &= 1 + 2\sin\theta \\ -\cos\theta &= \sin\theta \\ \tan\theta &= -1 \end{aligned}$$

   จะได้ว่า θ คือมุม 45 องศากับแกน X อยู่ในจตุภาคที่ 2 และ 4 นั่นคือ $\theta = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ แล้ว

$$r = 1 - 2\cos\frac{3\pi}{4} = 1 + \sqrt{2}$$

   หรือ

$$r = 1 - 2\cos\frac{7\pi}{4} = 1 - \sqrt{2}$$

ข้อ 7

1. ข้อใดคือโดเมนของฟังก์ชัน $f(x,y)=\sqrt{x^2-y^2}$

   a. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}:x>y\}$

   b. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}:x\geq y\}$

   c. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}:|x|>|y|\}$

   d. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}:|x|\geq|y|\}$ ANS

   วิธีทำ จะได้ว่า $x^2-y^2\geq 0$ นั่นคือ $x^2\geq y^2$ ฉะนั้น $|x|\geq|y|$ ดังนั้น

   $$\text{Dom}(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}:|x|\geq|y|\}$$

2. ข้อใดคือโดเมนของฟังก์ชัน $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$

   a. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}:x>y\}$

   b. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}:x\geq y\}$

   c. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}:|x|>|y|\}$ ANS

   d. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}:|x|\geq|y|\}$

   วิธีทำ เนื่องจาก $\sqrt{x^2-y^2}>0$ จะได้ว่า $x^2-y^2>0$ นั่นคือ $x^2>y^2$ ฉะนั้น $|x|>|y|$ ดังนั้น

   $$\text{Dom}(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}:|x|>|y|\}$$

3. ข้อใดคือโดเมนของฟังก์ชัน $f(x,y)=\sqrt{x^2-4y^2}$

   a. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}:x>2y\}$

   b. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}:x\geq 2y\}$

   c. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}:|x|>2|y|\}$

   d. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}:|x|\geq 2|y|\}$ ANS

   วิธีทำ จะได้ว่า $x^2-4y^2\geq 0$ นั่นคือ $x^2\geq 4y^2$ ฉะนั้น $|x|\geq 2|y|$ ดังนั้น

   $$\text{Dom}(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}:|x|\geq 2|y|\}$$

4. ข้อใดคือโดเมนของฟังก์ชัน $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{4x^2-y^2}}$

   a. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}:2x>y\}$

   b. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}:2x\geq y\}$

   c. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}:2|x|>|y|\}$ ANS

   d. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}:2|x|\geq|y|\}$

   วิธีทำ เนื่องจาก $\sqrt{4x^2-y^2}>0$ จะได้ว่า $4x^2-y^2>0$ นั่นคือ $4x^2>y^2$ ฉะนั้น $2|x|>|y|$ ดังนั้น

   $$\text{Dom}(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}:2|x|>|y|\}$$

ข้อ 8

1. ให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริงสองตัวแปรที่สอดคล้องเงื่อนไข

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x,h+1)-f(x,1)}{h}=\frac{x^2+2\cos x}{e^x} \qquad \text{ทุกค่า } x\in\mathbb{R}$$

แล้ว $f_y(0,1)$ มีค่าเท่าใด

วิธีทำ โดยบทนิยามอนุพันธ์จะได้ว่า

$$f_y(x,1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,h+1)-f(x,1)}{h}=\frac{x^2+2\cos x}{e^x}$$

ดังนั้น $f_y(0,1)=\dfrac{0+2}{1}=2 \quad \#$

2. ให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริงสองตัวแปรที่สอดคล้องเงื่อนไข

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x,h-1)-f(x,-1)}{h}=\frac{x^2-2\cos x}{e^x} \qquad \text{ทุกค่า } x\in\mathbb{R}$$

แล้ว $f_y(0,-1)$ มีค่าเท่าใด

วิธีทำ โดยบทนิยามอนุพันธ์จะได้ว่า

$$f_y(x,-1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,h-1)-f(x,-1)}{h}=\frac{x^2-2\cos x}{e^x}$$

ดังนั้น $f_y(0,-1)=\dfrac{0-2}{1}=-2 \quad \#$

3. ให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริงสองตัวแปรที่สอดคล้องเงื่อนไข

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h+1,y)-f(1,y)}{h}=\frac{e^y+2\cos y}{y^2+1} \qquad \text{ทุกค่า } y\in\mathbb{R}$$

แล้ว $f_x(1,0)$

วิธีทำ โดยบทนิยามอนุพันธ์จะได้ว่า

$$f_x(1,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h+1,y)-f(1,y)}{h}=\frac{e^y+2\cos y}{y^2+1}$$

ดังนั้น $f_x(1,0)=\dfrac{1+2}{0+1}=3 \quad \#$

4. ให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริงสองตัวแปรที่สอดคล้องเงื่อนไข

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h-1,y)-f(-1,y)}{h}=\frac{e^y-2\cos y}{y^2+1} \qquad \text{ทุกค่า } y\in\mathbb{R}$$

แล้ว $f_x(-1,0)$

วิธีทำ โดยบทนิยามอนุพันธ์จะได้ว่า

$$f_x(-1,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h-1,y)-f(-1,y)}{h}=\frac{e^y-2\cos y}{y^2+1}$$

ดังนั้น $f_x(-1,0)=\dfrac{1-2}{0+1}=-1 \quad \#$

ข้อ 9

1. กำหนดให้
$$f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + 3x$$
ข้อใดคือ (x,y) ที่สอดคล้องเงื่อนไข $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ และ $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$

   a. $(2,-1)$ b. $(-2,1)$ ANS c. $(1,-2)$ d. $(-1,2)$

   วิธีทำ จะได้ว่า
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y + 3 = 0 \qquad \text{และ} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + x = 0$$
จากการแก้ระบบสมการจะได้ว่า $x = -2, y = 1$

2. กำหนดให้
$$f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + 3y$$
ข้อใดคือ (x,y) ที่สอดคล้องเงื่อนไข $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ และ $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$

   a. $(2,-1)$ b. $(-2,1)$ c. $(1,-2)$ ANS d. $(-1,2)$

   วิธีทำ จะได้ว่า
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y = 0 \qquad \text{และ} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + x + 3 = 0$$
จากการแก้ระบบสมการจะได้ว่า $x = 1, y = -2$

ข้อ 10

1. กำหนดให้ $f(x,y) = 0$ ค่าของอินทิกรัลสองชั้น $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dxdy$ มีค่าเท่าใด

   วิธีทำ
$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 \int_0^1 0\,dxdy = \int_0^1 [c]_{x=0}^{x=1}\,dy = \int_0^1 0\,dy = [c]_0^1 = 0 \quad \#$$

2. กำหนดให้ $f(x,y) = 1$ ค่าของอินทิกรัลสองชั้น $\int_0^1 \int_1^1 f(x,y)\,dxdy$ มีค่าเท่าใด

   วิธีทำ
$$\int_0^1 \int_1^1 f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 \int_1^1 1\,dxdy = \int_0^1 [x]_{x=1}^{x=1}\,dy = \int_0^1 0\,dy = [c]_0^1 = 0 \quad \#$$

3. กำหนดให้ $f(x,y) = 1$ ค่าของอินทิกรัลสองชั้น $\int_1^1 \int_0^1 f(x,y)\,dxdy$ มีค่าเท่าใด

   วิธีทำ
$$\int_1^1 \int_0^1 f(x,y)\,dxdy = \int_1^1 \int_0^1 1\,dxdy = \int_1^1 [x]_{x=0}^{x=1}\,dy = \int_1^1 1\,dy = [x]_1^1 = 0 \quad \#$$

ข้อ 11

1. ข้อใดคือโดเมนของอินทิกรัลสองชั้น $\int_0^1 \int_{x^2}^{2-x^2} f(x,y)\,dydx$ มีค่าเท่าใด

   a. $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : 0 \le x \le 1$ และ $x^2 \le y \le 2 - x^2\}$ ANS
   b. $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : 0 \le y \le 1$ และ $x^2 \le y \le 2 - x^2\}$
   c. $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : 0 \le x \le 1$ และ $2 - x^2 \le y \le x^2\}$
   d. $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : 0 \le y \le 1$ และ $2 - x^2 \le y \le x^2\}$

2. ข้อใดคือโดเมนของอินทิกรัลสองชั้น $\int_{-1}^1 \int_{x^2}^{2-x^2} f(x,y)\,dydx$ มีค่าเท่าใด

   a. $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |x| \le 1$ และ $x^2 \le y \le 2 - x^2\}$ ANS
   b. $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |y| \le 1$ และ $x^2 \le y \le 2 - x^2\}$
   c. $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |x| \le 1$ และ $2 - x^2 \le y \le x^2\}$
   d. $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |y| \le 1$ และ $2 - x^2 \le y \le x^2\}$

ข้อ 12

1. ค่าของอินทิกรัลสองชั้น $\int_0^2 \int_1^2 \frac{y}{x^2}\,dxdy$ มีค่าเท่าใด

   วิธีทำ

$$\int_0^2 \int_1^2 \frac{y}{x^2}\,dxdy = \int_0^2 y\left[-\frac{1}{x}\right]_{x=1}^{x=2} dy = \int_0^2 y \cdot \frac{1}{2}\,dy = \left[\frac{y^2}{4}\right]_0^2 = 1 \quad \#$$

2. ค่าของอินทิกรัลสองชั้น $\int_0^2 \int_1^2 \frac{2y}{x^2}\,dxdy$ มีค่าเท่าใด

   วิธีทำ

$$\int_0^2 \int_1^2 \frac{2y}{x^2}\,dxdy = \int_0^2 2y\left[-\frac{1}{x}\right]_{x=1}^{x=2} dy = \int_0^2 2y \cdot \frac{1}{2}\,dy = \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^2 = 2 \quad \#$$

3. ค่าของอินทิกรัลสองชั้น $\int_0^4 \int_1^2 \frac{y}{x^2}\,dxdy$ มีค่าเท่าใด

   วิธีทำ

$$\int_0^4 \int_1^2 \frac{y}{x^2}\,dxdy = \int_0^4 y\left[-\frac{1}{x}\right]_{x=1}^{x=2} dy = \int_0^4 y \cdot \frac{1}{2}\,dy = \left[\frac{y^2}{4}\right]_0^4 = 4 \quad \#$$

4. ค่าของอินทิกรัลสองชั้น $\int_0^4 \int_1^2 \frac{2y}{x^2}\,dxdy$ มีค่าเท่าใด

   วิธีทำ

$$\int_0^4 \int_1^2 \frac{2y}{x^2}\,dxdy = \int_0^4 2y\left[-\frac{1}{x}\right]_{x=1}^{x=2} dy = \int_0^4 2y \cdot \frac{1}{2}\,dy = \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^4 = 8 \quad \#$$

ข้อ 13

1. ค่าของอินทิกรัลสองชั้น $\int_{-1}^{0}\int_{-x}^{x} e^{x^2}\,dydx$ มีค่าเท่ากับข้อใด

   a. $1+e$ b. $1-e$ ANS c. $1+\frac{1}{e}$ d. $1-\frac{1}{e}$

   วิธีทำ

$$\int_{-1}^{0}\int_{-x}^{x} e^{x^2}\,dydx = \int_{-1}^{0} e^{x^2}\,[y]_{y=-x}^{y=x}\,dx = \int_{-1}^{0} 2xe^{x^2}\,dx = \left[e^{x^2}\right]_{-1}^{0} = 1-e \quad \#$$

2. ค่าของอินทิกรัลสองชั้น $\int_{-1}^{0}\int_{-x}^{x} e^{-x^2}\,dydx$ มีค่าเท่ากับข้อใด

   a. $-1+e$ b. $-1-e$ c. $-1+\frac{1}{e}$ ANS d. $-1-\frac{1}{e}$

   วิธีทำ

$$\int_{-1}^{0}\int_{-x}^{x} e^{-x^2}\,dydx = \int_{-1}^{0} e^{-x^2}\,[y]_{y=-x}^{y=x}\,dx = \int_{-1}^{0} 2xe^{-x^2}\,dx = \left[-e^{-x^2}\right]_{-1}^{0} = -1+e^{-1} \quad \#$$

ข้อ 14

1. กำหนดให้ $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} : x^2+y^2\le 4\}$ แล้ว $\iint_S f(x,y)dA$ มีค่าเท่ากับข้อใด

   a. $\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{2} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,drd\theta$

   b. $\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{4} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,rdrd\theta$

   c. $\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{4} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,rdrd\theta$

   d. $\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{2} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,rdrd\theta$ ANS

   แนวคิด โดเมนคือพื้นที่รูปวงกลมศูนย์กลางที่จุดกำเนิด รัศมี 2 หน่วย

2. กำหนดให้ $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} : 1\le x^2+y^2\le 4\}$ แล้ว $\iint_S f(x,y)dA$ มีค่าเท่ากับข้อใด

   a. $\int_{0}^{2\pi}\int_{1}^{2} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,rdrd\theta$ ANS

   b. $\int_{0}^{2\pi}\int_{1}^{4} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,rdrd\theta$

   c. $\int_{-\pi}^{\pi}\int_{1}^{4} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,rdrd\theta$

   d. $\int_{-\pi}^{\pi}\int_{1}^{2} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,drd\theta$

   แนวคิด โดเมนคือพื้นที่ระหว่างรูปวงกลมศูนย์กลางที่จุดกำเนิดที่มีรัศมี 1 หน่วย และ 2 หน่วย

ข้อ 15

1. $y = x + e^x$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ในข้อใด

    a. $y'' - y' = y$

    b. $y'' - y' + 1 = 0$ ANS

    c. $y'' - y - x = 0$

    d. $xy' + y = xy'' - 1$

    วิธีทำ พิจารณา $y' = 1 + e^x$ และ $y'' = e^x$ จะได้ว่า

    $$y'' - y' + 1 = e^x - (1 + e^x) + 1 = 0$$

2. $y = x + e^x$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ในข้อใด

    a. $y'' - y' = y$

    b. $y'' - y' - 1 = 0$

    c. $y'' - y + x = 0$ ANS

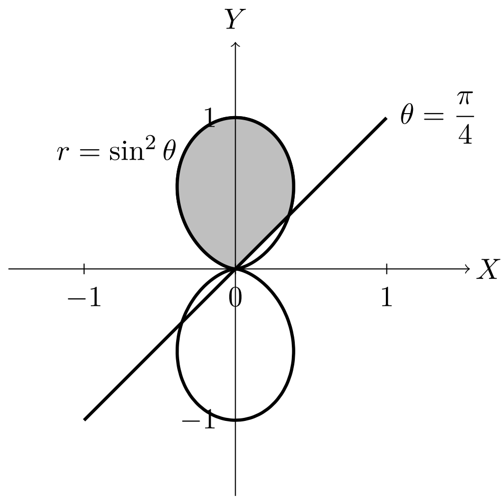
    d. $xy' + y = xy'' - 1$

    วิธีทำ พิจารณา $y' = 1 + e^x$ และ $y'' = e^x$ จะได้ว่า

    $$y'' - y + x = e^x - (x + e^x) + x = 0$$

ข้อ 16

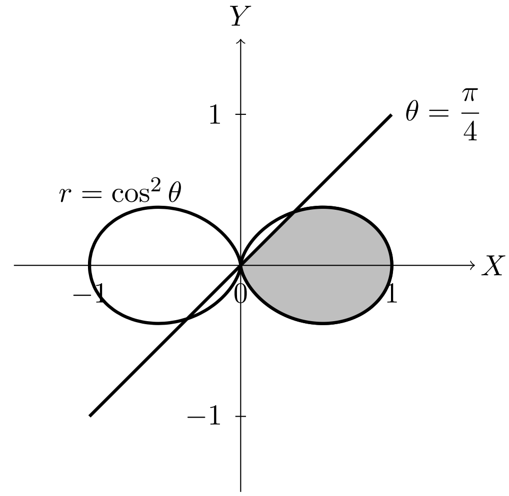
1. (10 **คะแนน**) จงหาพื้นที่ที่แรเงาต่อไปนี้ โดยใช้การ**ปริพันธ์ในรูปเชิงขั้ว**



วิธีทำ จากกราฟพื้นที่แรเงาคือพื้นที่ส่วนที่ปิดล้อมเส้นโค้ง $r = \sin^2\theta$ บนช่วง $[\frac{\pi}{4}, \pi]$ ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \frac{1}{2} r^2 \, d\theta = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (\sin^2\theta)^2 \, d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)^2 \, d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \frac{1-2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta}{4} \, d\theta \\
&= \frac{1}{8}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} 1-2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta \, d\theta \\
&= \frac{1}{8}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} 1-2\cos 2\theta+\frac{1+\cos 4\theta}{2} \, d\theta \\
&= \frac{1}{8}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \frac{2-4\cos 2\theta+1+\cos 4\theta}{2} \, d\theta \\
&= \frac{1}{16}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} 3-4\cos 2\theta+\cos 4\theta \, d\theta \\
&= \frac{1}{16}\left[3\theta - 2\sin 2\theta + \frac{1}{4}\sin 4\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \\
&= \frac{1}{16}\left[3\pi - 0 + 0\right] - \frac{1}{16}\left[\frac{3\pi}{4} - 2 + 0\right] \\
&= \frac{3\pi}{16} - \frac{3\pi}{64} + \frac{1}{8} \\
&= \frac{9\pi}{64} + \frac{1}{8} \quad \#
\end{aligned}
$$

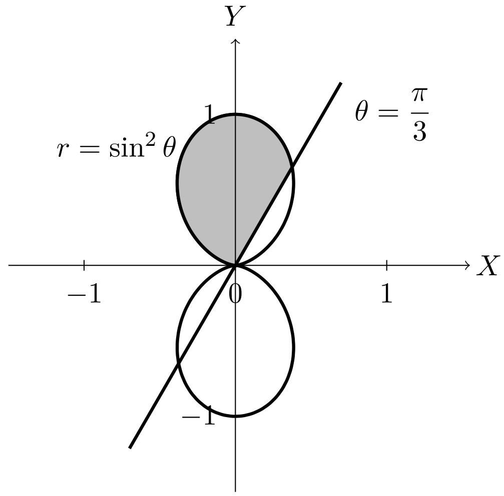
2. (10 **คะแนน**) จงหาพื้นที่ที่แรเงาต่อไปนี้ โดยใช้การ**ปริพันธ์ในรูปเชิงขั้ว**



วิธีทำ จากกราฟพื้นที่แรเงาคือพื้นที่ส่วนที่ปิดล้อมเส้นโค้ง $r = \cos^2\theta$ บนช่วง $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}]$ ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} r^2 \, d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2\theta)^2 \, d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta}{4} \, d\theta \\
&= \frac{1}{8}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} 1+2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta \, d\theta \\
&= \frac{1}{8}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} 1+2\cos 2\theta+\frac{1+\cos 4\theta}{2} \, d\theta \\
&= \frac{1}{8}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2+4\cos 2\theta+1+\cos 4\theta}{2} \, d\theta \\
&= \frac{1}{16}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} 3+4\cos 2\theta+\cos 4\theta \, d\theta \\
&= \frac{1}{16}\left[3\theta+2\sin 2\theta+\frac{1}{4}\sin 4\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{1}{16}\left[\frac{3\pi}{4}+2+0\right] - \frac{1}{16}\left[-\frac{3\pi}{2}+0+0\right] \\
&= \frac{3\pi}{64}+\frac{1}{8}+\frac{3\pi}{32} \\
&= \frac{9\pi}{64}+\frac{1}{8} \quad \#
\end{aligned}
$$

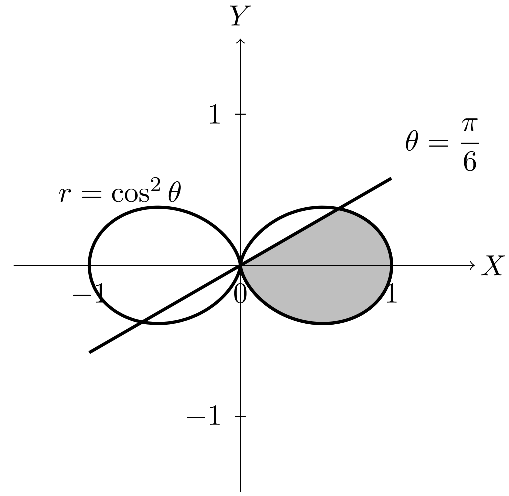
3. (10 **คะแนน**) จงหาพื้นที่ที่แรเงาต่อไปนี้ โดยใช้การ**ปริพันธ์ในรูปเชิงขั้ว**



วิธีทำ จากกราฟพื้นที่แรเงาคือพื้นที่ส่วนที่ปิดล้อมเส้นโค้ง $r = \sin^2\theta$ บนช่วง $[\frac{\pi}{3}, \pi]$ ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \frac{1}{2}r^2\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (\sin^2\theta)^2\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)^2\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \frac{1-2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta}{4}\,d\theta \\
&= \frac{1}{8}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} 1-2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta\,d\theta \\
&= \frac{1}{8}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} 1-2\cos 2\theta+\frac{1+\cos 4\theta}{2}\,d\theta \\
&= \frac{1}{8}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \frac{2-4\cos 2\theta+1+\cos 4\theta}{2}\,d\theta \\
&= \frac{1}{16}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} 3-4\cos 2\theta+\cos 4\theta\,d\theta \\
&= \frac{1}{16}\left[3\theta-2\sin 2\theta+\frac{1}{4}\sin 4\theta\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \\
&= \frac{1}{16}[3\pi-0+0]-\frac{1}{16}\left[\pi-\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right] \\
&= \frac{3\pi}{16}-\frac{\pi}{16}+\frac{\sqrt{3}}{16}+\frac{\sqrt{3}}{128} \\
&= \frac{\pi}{8}+\frac{9\sqrt{3}}{128} \qquad \#
\end{aligned}
$$

4. (10 **คะแนน**) จงหาพื้นที่ที่แรเงาต่อไปนี้ โดยใช้การ**ปริพันธ์ในรูปเชิงขั้ว**



วิธีทำ จากกราฟพื้นที่แรเงาคือพื้นที่ส่วนที่ปิดล้อมเส้นโค้ง $r = \cos^2\theta$ บนช่วง $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}]$ ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2}r^2\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} (\cos^2\theta)^2\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1+2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta}{4}\,d\theta \\
&= \frac{1}{8}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} 1+2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta\,d\theta \\
&= \frac{1}{8}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} 1+2\cos 2\theta+\frac{1+\cos 4\theta}{2}\,d\theta \\
&= \frac{1}{8}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{2+4\cos 2\theta+1+\cos 4\theta}{2}\,d\theta \\
&= \frac{1}{16}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} 3+4\cos 2\theta+\cos 4\theta\,d\theta \\
&= \frac{1}{16}\left[3\theta+2\sin 2\theta+\frac{1}{4}\sin 4\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \\
&= \frac{1}{16}\left[\frac{\pi}{2}+\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right]-\frac{1}{16}\left[-\frac{3\pi}{2}+0+0\right] \\
&= \frac{\pi}{32}+\frac{\sqrt{3}}{16}+\frac{\sqrt{3}}{128}+\frac{3\pi}{32} \\
&= \frac{\pi}{8}+\frac{9\sqrt{3}}{128} \qquad \#
\end{aligned}
$$

ข้อ 17

1. (10 คะแนน) จงตรวจสอบลิมิตต่อไปนี้ว่ามีค่าหรือไม่ พร้อมแสดงวิธีทำเพื่อยืนยันคำตอบ

1.1 (5 คะแนน) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xe^x}{\sqrt{y^2+e^x}}$

วิธีทำ วิธีที่ 1.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xe^x}{\sqrt{y^2+e^x}} = \frac{0}{\sqrt{0+1}} = 0$$

วิธีที่ 2.

$$\text{ให้} \quad f(x,y) = \frac{e^{\frac{1}{2}x}}{\sqrt{y^2+e^x}} \qquad \text{และ} \qquad g(x,y) = xe^{\frac{1}{2}x}$$

เนื่องจาก $y^2 > 0$ นั่นคือ $y^2 + e^x > e^x$ ดังนั้น $\dfrac{e^x}{y^2+e^x} < 1$ สำหรับ $(x,y) \neq (0,0)$ แล้ว

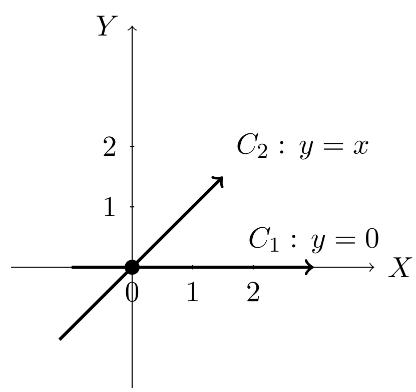
$$|f(x,y)| = \frac{e^{\frac{1}{2}x}}{\sqrt{y^2+e^x}} = \frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{y^2+e^x}} = \sqrt{\frac{e^x}{y^2+e^x}} \leq 1 \quad \text{สำหรับ } (x,y) \neq (0,0)$$

ดังนั้น f มีขอบเขต และ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xe^{\frac{1}{2}x} = 0$ ดังนั้น

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xe^x}{\sqrt{y^2+e^x}} = 0 \qquad \#$$

1.2 (5 คะแนน) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$

วิธีทำ พิจารณาเส้นโค้งที่ผ่านจุด $(0,0)$ คือ $C_1 : y = 0$ และ $C_2 : y = x$



บน $C_1 :\ y = 0$ จะได้

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \arctan 0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = 0$$

บน $C_2 :\ y = x$ จะได้

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \arctan 1 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

เนื่องจากลิมิตบน C_1 และ C_2 มีค่าไม่เท่ากัน ดังนั้น $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$ ไม่มีค่า

2. (10 คะแนน) จงตรวจสอบลิมิตต่อไปนี้ว่ามีค่าหรือไม่ พร้อมแสดงวิธีทำเพื่อยืนยันคำตอบ

2.1 (5 คะแนน) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{ye^y}{\sqrt{x^2+e^y}}$

วิธีทำ วิธีที่ 1.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{ye^y}{\sqrt{x^2+e^y}} = \frac{0}{\sqrt{0+1}} = 0$$

วิธีที่ 2.

$$\text{ให้}\quad f(x,y) = \frac{e^{\frac{1}{2}y}}{\sqrt{x^2+e^y}} \qquad \text{และ} \qquad g(x,y) = ye^{\frac{1}{2}y}$$

เนื่องจาก $x^2 > 0$ นั่นคือ $x^2 + e^y > e^y$ ดังนั้น $\dfrac{e^y}{y^2+e^y} < 1$ สำหรับ $(x,y) \neq (0,0)$ แล้ว

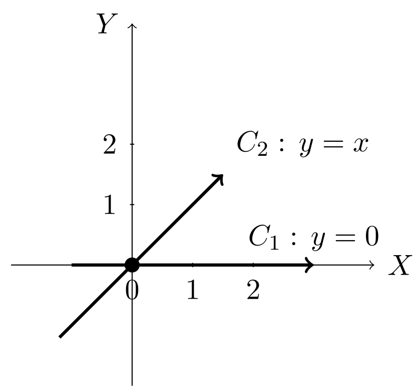
$$|f(x,y)| = \frac{e^{\frac{1}{2}y}}{\sqrt{x^2+e^y}} = \frac{\sqrt{e^y}}{\sqrt{x^2+e^y}} = \sqrt{\frac{e^y}{x^2+e^y}} \leq 1 \quad \text{สำหรับ } (x,y) \neq (0,0)$$

ดังนั้น f มีขอบเขต และ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} ye^{\frac{1}{2}y} = 0$ ดังนั้น

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{ye^y}{\sqrt{x^2+e^y}} = 0 \qquad \#$$

2.2 (5 คะแนน) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \arcsin\left(\frac{y}{x}\right)$

วิธีทำ พิจารณาเส้นโค้งที่ผ่านจุด $(0,0)$ คือ $C_1 : y = 0$ และ $C_2 : y = x$



บน $C_1 :\ y = 0$ จะได้

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \arcsin\left(\frac{y}{x}\right) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \arcsin 0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = 0$$

บน $C_2 :\ y = x$ จะได้

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \arcsin\left(\frac{y}{x}\right) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \arcsin 1 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

เนื่องจากลิมิตบน C_1 และ C_2 มีค่าไม่เท่ากัน ดังนั้น $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \arcsin\left(\frac{y}{x}\right)$ ไม่มีค่า

3. (10 คะแนน) จงตวจสอบลิมิตต่อไปนี้ว่ามีค่าหรือไม่ พร้อมแสดงวิธีทำเพื่อยืนยันคำตอบ

3.1 (5 คะแนน) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{ye^y}{\sqrt{x^4+e^y}}$

วิธีทำ วิธีที่ 1.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{ye^y}{\sqrt{x^4+e^y}} = \frac{0}{\sqrt{0+1}} = 0$$

วิธีที่ 2.

$$\text{ให้} \quad f(x,y) = \frac{e^{\frac{1}{2}y}}{\sqrt{x^4+e^y}} \qquad \text{และ} \qquad g(x,y) = ye^{\frac{1}{2}y}$$

เนื่องจาก $x^4 > 0$ นั่นคือ $x^4 + e^y > e^y$ ดังนั้น $\frac{e^y}{x^4+e^y} < 1$ สำหรับ $(x,y) \neq (0,0)$ แล้ว

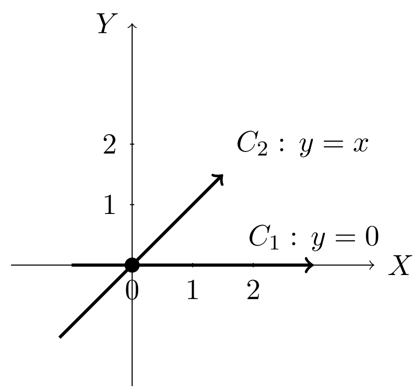
$$|f(x,y)| = \frac{e^{\frac{1}{2}y}}{\sqrt{x^4+e^y}} = \frac{\sqrt{e^y}}{\sqrt{x^4+e^y}} = \sqrt{\frac{e^y}{x^4+e^y}} \leq 1 \quad \text{สำหรับ } (x,y) \neq (0,0)$$

ดังนั้น f มีขอบเขต และ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} ye^{\frac{1}{2}y} = 0$ ดังนั้น

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{ye^y}{\sqrt{x^4+e^y}} = 0 \qquad \#$$

3.2 (5 คะแนน) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \arccos\left(\frac{y}{x}\right)$

วิธีทำ พิจารณาเส้นโค้งที่ผ่านจุด $(0,0)$ คือ $C_1 : y = 0$ และ $C_2 : y = x$



บน $C_1 :\ y = 0$ จะได้

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \arccos\left(\frac{y}{x}\right) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \arccos 0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 1 = 1$$

บน $C_2 :\ y = x$ จะได้

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \arccos\left(\frac{y}{x}\right) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \arccos 1 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \pi = \pi$$

เนื่องจากลิมิตบน C_1 และ C_2 มีค่าไม่เท่ากัน ดังนั้น $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \arccos\left(\frac{y}{x}\right)$ ไม่มีค่า

4. (10 คะแนน) จงตรวจสอบลิมิตต่อไปนี้ว่ามีค่าหรือไม่ พร้อมแสดงวิธีทำเพื่อยืนยันคำตอบ

4.1 (5 คะแนน) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xe^x}{\sqrt{y^4+e^x}}$

วิธีทำ วิธีที่ 1.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xe^x}{\sqrt{y^4+e^x}} = \frac{0}{\sqrt{0+1}} = 0$$

วิธีที่ 2.

$$\text{ให้} \quad f(x,y) = \frac{e^{\frac{1}{2}x}}{\sqrt{y^4+e^x}} \qquad \text{และ} \qquad g(x,y) = xe^{\frac{1}{2}x}$$

เนื่องจาก $y^4 > 0$ นั่นคือ $y^4 + e^x > e^x$ ดังนั้น $\dfrac{e^x}{y^4+e^x} < 1$ สำหรับ $(x,y) \neq (0,0)$ แล้ว

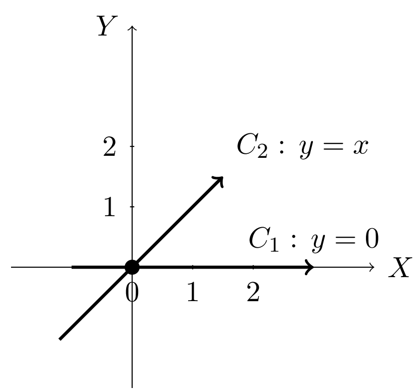
$$|f(x,y)| = \frac{e^{\frac{1}{2}x}}{\sqrt{y^4+e^x}} = \frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{y^4+e^x}} = \sqrt{\frac{e^x}{y^4+e^x}} \leq 1 \quad \text{สำหรับ } (x,y) \neq (0,0)$$

ดังนั้น f มีขอบเขต และ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} xe^{\frac{1}{2}x} = 0$ ดังนั้น

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xe^x}{\sqrt{y^4+e^x}} = 0 \qquad \#$$

4.2 (5 คะแนน) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \text{arccot}\left(\frac{y}{x}\right)$

วิธีทำ พิจารณาเส้นโค้งที่ผ่านจุด $(0,0)$ คือ $C_1 : y = 0$ และ $C_2 : y = x$



บน $C_1 : y = 0$ จะได้

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \text{arccot}\left(\frac{y}{x}\right) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \text{arccot}0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

บน $C_2 : y = x$ จะได้

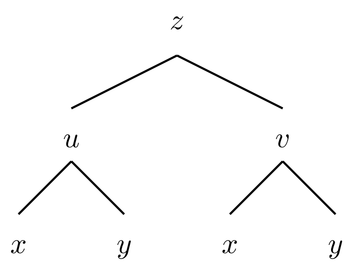
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \text{arccot}\left(\frac{y}{x}\right) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \text{arccot}1 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

เนื่องจากลิมิตบน C_1 และ C_2 มีค่าไม่เท่ากัน ดังนั้น $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \text{arccot}\left(\frac{y}{x}\right)$ ไม่มีค่า

ข้อ 18

1. (10 **คะแนน**) กำหนดให้ $z = f(u, v)$ โดยที่ $u = x^2 + y$ และ $v = x + y^2$ จงหา $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

วิธีทำ พิจารณาแผนภาพ



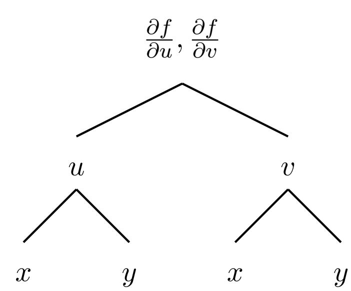
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

จะได้ว่า

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot 2y = \frac{\partial f}{\partial u} + 2y \cdot \frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + 2y \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

พิจารณาแผนภาพ

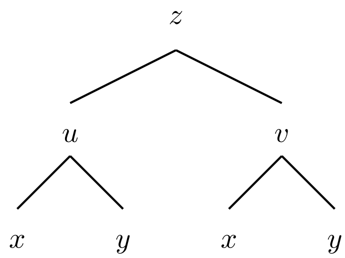


ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \left[\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}\right] + 2y\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}\right] \\
&= \left[\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot 2x + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \cdot 1\right] + 2y\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot 2x + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot 1\right] \\
&= 2x\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} + 4xy\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + 2y\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \quad \#
\end{aligned}$$

2. **(10 คะแนน)** กำหนดให้ $z = f(u,v)$ โดยที่ $u = x^2 + y$ และ $v = x + y^2$ จงหา $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

วิธีทำ พิจารณาแผนภาพ

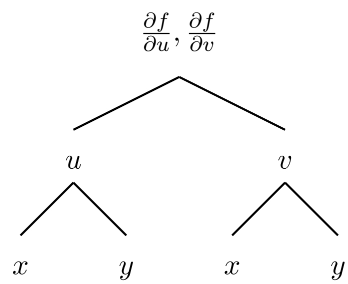


$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot 2x + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot 1 = 2x \cdot \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \\
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) &= 2x \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)
\end{aligned}$$

พิจารณาแผนภาพ

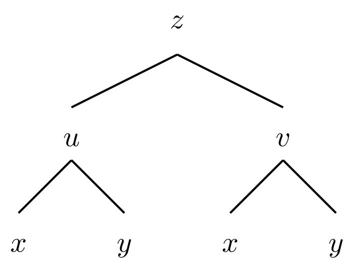


ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= 2x\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}\right] + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}\right] \\
&= 2x\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot 1 + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \cdot 2y\right] + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot 1 + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot 2y\right] \\
&= 2x\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 4xy\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + 2y\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \qquad \#
\end{aligned}$$

3. **(10 คะแนน)** กำหนดให้ $z = f(u,v)$ โดยที่ $u = x^2 - y$ และ $v = x - y^2$ จงหา $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

วิธีทำ พิจารณาแผนภาพ

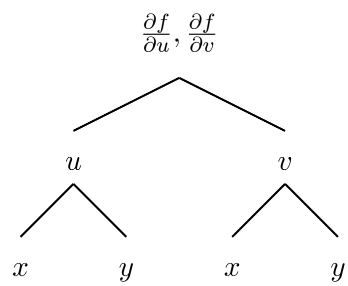


$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

จะได้ว่า

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot (-1) + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot (-2y) = -\frac{\partial f}{\partial u} - 2y \cdot \frac{\partial f}{\partial v}$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) - 2y \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

พิจารณาแผนภาพ

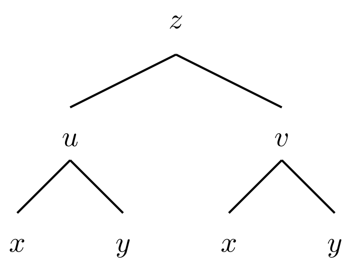


ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= -\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}\right] - 2y\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}\right] \\
&= -\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot 2x + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \cdot 1\right] - 2y\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot 2x + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot 1\right] \\
&= -2x\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} - 4xy\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} - 2y\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \quad \#
\end{aligned}$$

4. **(10 คะแนน)** กำหนดให้ $z = f(u,v)$ โดยที่ $u = x^2 - y$ และ $v = x - y^2$ จงหา $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

วิธีทำ พิจารณาแผนภาพ

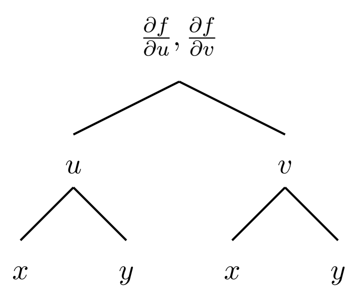


$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot 2x + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot 1 = 2x \cdot \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) &= 2x \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right) \end{aligned}$$

พิจารณาแผนภาพ



ดังนั้น

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= 2x\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}\right] + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}\right] \\ &= 2x\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot (-1) + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \cdot (-2y)\right] + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot (-1) + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot (-2y)\right] \\ &= -2x\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 4xy\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} - \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} - 2y\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \quad \# \end{aligned}$$

ข้อ 19

1. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

   1.1 **(5 คะแนน)** ให้ $f(x,y) = \arctan\left(\dfrac{x}{y}\right)$ จงหา $f_{xxy}(x,y)$

   วิธีทำ จะได้ว่า

$$f_x(x,y) = \frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{y} = \frac{y^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{y^2+x^2} = y(y^2+x^2)^{-1}$$

$$f_{xx}(x,y) - y(x^2+y^2)^{-2} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2) = -y(x^2+y^2)^{-2}(2x) = -2xy(x^2+y^2)^{-2}$$

$$\begin{aligned}
f_{xxy}(x,y) &= -2xy \cdot \frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)^{-2} - (x^2+y^2)^{-2} \cdot \frac{\partial}{\partial y}2xy \\
&= -2xy(-2(x^2+y^2)^{-3})\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2) - (x^2+y^2)^{-2} \cdot 2x \\
&= 4xy(x^2+y^2)^{-3}(2y) - 2x(x^2+y^2)^{-2} \\
&= \frac{8xy^2}{(x^2+y^2)^3} - \frac{2x}{(x^2+y^2)^2} \qquad \#
\end{aligned}$$

   1.2 **(5 คะแนน)** จงใช้ค่าเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันสองตัวแปรประมาณค่าของ

$$\ln(0.01 + \sqrt{0.99})$$

   ตอบในรูปทศนิยม

   วิธีทำ ให้ $f(x,y) = \ln(x+\sqrt{y})$ ให้ $x = 0, y = 1$ และ $dx = 0.01, dy = -0.01$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
f(0,1) &= \ln(0+\sqrt{1}) = 0 \\
f_x(x,y) &= \frac{1}{x+\sqrt{y}} \cdot 1 \qquad \Rightarrow \qquad f_x(0,1) = 1 \\
f_y(x,y) &= \frac{1}{x+\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} \qquad \Rightarrow \qquad f_x(0,1) = \frac{1}{2} = 0.5
\end{aligned}$$

   จากการประมาณค่าเชิงเส้น

$$f(x+dx, y+dy) \approx f(x,y) + f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy$$

   จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\ln(0.01+\sqrt{0.99}) &= f(0.01, 0.99) \\
&= f(0+0.01, 1-0.01) \\
&\approx f(0,1) + f_x(0,1)\cdot(0.01) + f_y(0,1)\cdot(-0.01) \\
&= 0 + 1\cdot(0.01) + 0.5\cdot(-0.01) \\
&= 0.01 - 0.005 = 0.005 \qquad \#
\end{aligned}$$

2. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

2.1 **(5 คะแนน)** ให้ $f(x,y) = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$ จงหา $f_{xxy}(x,y)$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
f_x(x,y) &= \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\frac{y}{x} = \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{y^2+x^2} = -y(y^2+x^2)^{-1} \\
f_{xx}(x,y) y(x^2+y^2)^{-2} &\cdot \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2) = y(x^2+y^2)^{-2}(2x) = -2xy(x^2+y^2)^{-2} \\
f_{xxy}(x,y) &= 2xy \cdot \frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)^{-2} + (x^2+y^2)^{-2} \cdot \frac{\partial}{\partial y} 2xy \\
&= 2xy(-2(x^2+y^2)^{-3})\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2) + (x^2+y^2)^{-2} \cdot 2x \\
&= 4xy(x^2+y^2)^{-3}(2y) + 2x(x^2+y^2)^{-2} \\
&= \frac{8xy^2}{(x^2+y^2)^3} + \frac{2x}{(x^2+y^2)^2} \qquad \#
\end{aligned}
$$

2.2 **(5 คะแนน)** จงใช้ค่าเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันสองตัวแปรประมาณค่าของ

$$\ln(0.02 + \sqrt{0.98})$$

ตอบในรูปทศนิยม

วิธีทำ ให้ $f(x,y) = \ln(x + \sqrt{y})$ ให้ $x = 0, y = 1$ และ $dx = 0.02, dy = -0.02$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
f(0,1) &= \ln(0+\sqrt{1}) = 0 \\
f_x(x,y) &= \frac{1}{x+\sqrt{y}} \cdot 1 \qquad \Rightarrow \qquad f_x(0,1) = 1 \\
f_y(x,y) &= \frac{1}{x+\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} \qquad \Rightarrow \qquad f_x(0,1) = \frac{1}{2} = 0.5
\end{aligned}
$$

จากการประมาณค่าเชิงเส้น

$$f(x+dx, y+dy) \approx f(x,y) + f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy$$

จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\ln(0.02+\sqrt{0.98}) &= f(0.02, 0.98) \\
&= f(0+0.02, 1-0.02) \\
&\approx f(0,1) + f_x(0,1)\cdot(0.02) + f_y(0,1)\cdot(-0.02) \\
&= 0 + 1\cdot(0.02) + 0.5\cdot(-0.02) \\
&= 0.02 - 0.01 = 0.01 \qquad \#
\end{aligned}
$$

3. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

3.1 **(5 คะแนน)** ให้ $f(x,y) = \arctan\left(\dfrac{x}{y}\right)$ จงหา $f_{yyx}(x,y)$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
f_y(x,y) &= \frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\frac{x}{y} = \frac{y^2}{x^2+y^2}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{y^2+x^2} = -x(y^2+x^2)^{-1} \\
f_{yy}(x,y) &= x(x^2+y^2)^{-2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2) = x(x^2+y^2)^{-2}(2y) = 2xy(x^2+y^2)^{-2} \\
f_{yyx}(x,y) &= 2xy\cdot\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)^{-2} + (x^2+y^2)^{-2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}2xy \\
&= 2xy(-2(x^2+y^2)^{-3})\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2) + (x^2+y^2)^{-2}\cdot 2y \\
&= 4xy(x^2+y^2)^{-3}(2x) + 2x(x^2+y^2)^{-2} \\
&= \frac{8yx^2}{(x^2+y^2)^3} + \frac{2y}{(x^2+y^2)^2} \qquad \#
\end{aligned}$$

3.2 **(5 คะแนน)** จงใช้ค่าเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันสองตัวแปรประมาณค่าของ

$$\ln(0.03+\sqrt{0.97})$$

ตอบในรูปทศนิยม

วิธีทำ ให้ $f(x,y) = \ln(x+\sqrt{y})$ ให้ $x=0, y=1$ และ $dx = 0.03, dy = -0.03$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
f(0,1) &= \ln(0+\sqrt{1}) = 0 \\
f_x(x,y) &= \frac{1}{x+\sqrt{y}}\cdot 1 \quad\Rightarrow\quad f_x(0,1) = 1 \\
f_y(x,y) &= \frac{1}{x+\sqrt{y}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}} \quad\Rightarrow\quad f_x(0,1) = \frac{1}{2} = 0.5
\end{aligned}$$

จากการประมาณค่าเชิงเส้น

$$f(x+dx, y+dy) \approx f(x,y) + f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\ln(0.03+\sqrt{0.97}) &= f(0.03, 0.97) \\
&= f(0+0.03, 1-0.03) \\
&\approx f(0,1) + f_x(0,1)\cdot(0.03) + f_y(0,1)\cdot(-0.03) \\
&= 0 + 1\cdot(0.03) + 0.5\cdot(-0.03) \\
&= 0.03 - 0.015 = 0.015 \qquad \#
\end{aligned}$$

4. (10 **คะแนน**) จงตอบคำถามต่อไปนี้

4.1 (5 **คะแนน**) ให้ $f(x,y)=\arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$ จงหา $f_{yyx}(x,y)$

$$
\begin{aligned}
f_y(x,y) &= \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{x} = \frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x}{y^2+x^2} = x(y^2+x^2)^{-1} \\
f_{yy}(x,y) &= -x(x^2+y^2)^{-2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2) = -x(x^2+y^2)^{-2}(2y) = -2xy(x^2+y^2)^{-2} \\
f_{yyx}(x,y) &= -2xy\cdot\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)^{-2} - (x^2+y^2)^{-2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}2xy \\
&= -2xy(-2(x^2+y^2)^{-3})\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2) - (x^2+y^2)^{-2}\cdot 2y \\
&= 4xy(x^2+y^2)^{-3}(2x) - 2x(x^2+y^2)^{-2} \\
&= \frac{8yx^2}{(x^2+y^2)^3} - \frac{2y}{(x^2+y^2)^2} \quad \#
\end{aligned}
$$

4.2 (5 **คะแนน**) จงใช้ค่าเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันสองตัวแปรประมาณค่าของ

$$\ln(0.04+\sqrt{0.96})$$

ตอบในรูปทศนิยม

วิธีทำ ให้ $f(x,y)=\ln(x+\sqrt{y})$ ให้ $x=0, y=1$ และ $dx=0.04, dy=-0.04$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
f(0,1) &= \ln(0+\sqrt{1}) = 0 \\
f_x(x,y) &= \frac{1}{x+\sqrt{y}}\cdot 1 \quad \Rightarrow \quad f_x(0,1)=1 \\
f_y(x,y) &= \frac{1}{x+\sqrt{y}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}} \quad \Rightarrow \quad f_x(0,1)=\frac{1}{2}=0.5
\end{aligned}
$$

จากการประมาณค่าเชิงเส้น

$$f(x+dx,y+dy)\approx f(x,y)+f_x(x,y)dx+f_y(x,y)dy$$

จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\ln(0.04+\sqrt{0.96}) &= f(0.04,0.96) \\
&= f(0+0.02, 1-0.02) \\
&\approx f(0,1)+f_x(0,1)\cdot(0.04)+f_y(0,1)\cdot(-0.04) \\
&= 0+1\cdot(0.04)+0.5\cdot(-0.04) \\
&= 0.04-0.02 = 0.02 \quad \#
\end{aligned}
$$

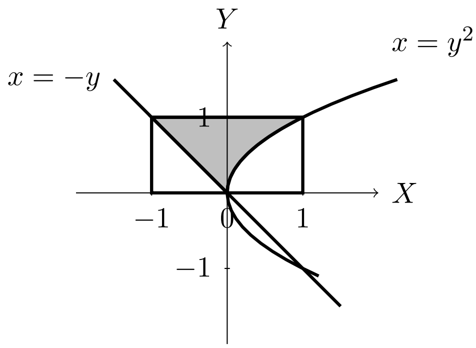
ข้อ 20

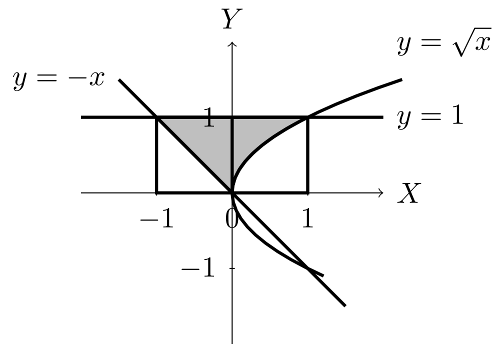
1. (10 **คะแนน**) พิจารณาอินทิกรัลสองชั้น $\int_0^1 \int_{-y}^{y^2} f(x,y)\,dxdy$

   1.1 (5 **คะแนน**) จงวาดกราฟแสดงโดเมนของอินทิกรัลสองชั้นดังกล่าว

   1.2 (5 **คะแนน**) จงเปลี่ยนลำดับการอินทิเกรตของอินทิกรัลสองชั้นดังกล่าว

วิธีทำ โดเมนของอินทิกรัลสองชั้นคือ $\{(x,y) : 0 \le y \le 1$ และ $-y \le x \le y^2\}$
พิจารณากราฟ $x = -y$ และ $x = y^2$ แสดงพื้นที่ได้ดังนี้





จากกราฟแบ่งการอินทิเกรตเป็น 2 ส่วน จะได้ว่า

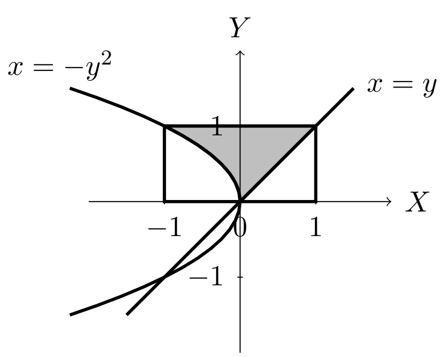
$$\int_0^1 \int_{-y}^{y^2} f(x,y)\,dxdy = \int_{-1}^0 \int_{-x}^1 f(x,y)\,dydx + \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 f(x,y)\,dydx \quad \#$$

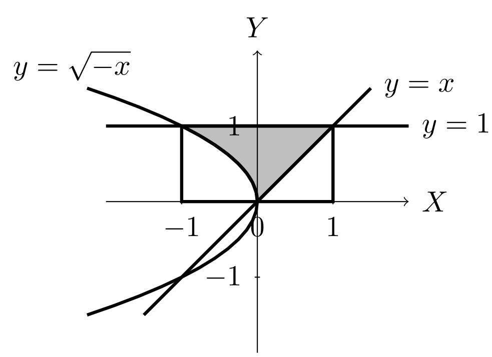
2. (10 **คะแนน**) พิจารณาอินทิกรัลสองชั้น $\int_0^1 \int_{-y^2}^{y} f(x,y)\,dxdy$

   2.1 (5 **คะแนน**) จงวาดกราฟแสดงโดเมนของอินทิกรัลสองชั้นดังกล่าว

   2.2 (5 **คะแนน**) จงเปลี่ยนลำดับการอินทิเกรตของอินทิกรัลสองชั้นดังกล่าว

วิธีทำ โดเมนของอินทิกรัลสองชั้นคือ $\{(x,y) : 0 \le y \le 1$ และ $-y^2 \le x \le y\}$
พิจารณากราฟ $x = -y^2$ และ $x = y$ แสดงพื้นที่ได้ดังนี้





จากกราฟแบ่งการอินทิเกรตเป็น 2 ส่วน จะได้ว่า

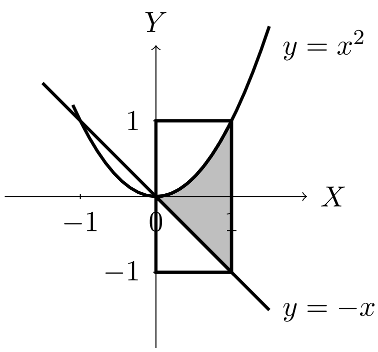
$$\int_0^1 \int_{-y^2}^{y} f(x,y)\,dxdy = \int_{-1}^0 \int_{\sqrt{-x}}^1 f(x,y)\,dydx + \int_0^1 \int_{x}^1 f(x,y)\,dydx \quad \#$$

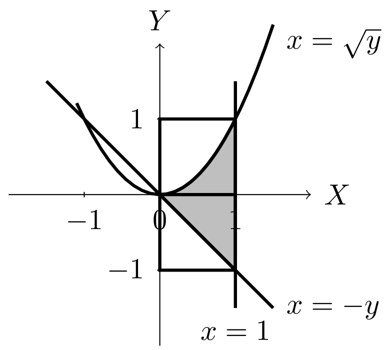
3. (10 **คะแนน**) พิจารณาอินทิกรัลสองชั้น $\int_0^1 \int_{-x}^{x^2} f(x,y)\,dydx$

   3.1 (5 **คะแนน**) จงวาดกราฟแสดงโดเมนของอินทิกรัลสองชั้นดังกล่าว

   3.2 (5 **คะแนน**) จงเปลี่ยนลำดับการอินทิเกรตของอินทิกรัลสองชั้นดังกล่าว

วิธีทำ โดเมนของอินทิกรัลสองชั้นคือ $\{(x,y) : 0 \leq x \leq 1$ และ $-x \leq y \leq x^2\}$
พิจารณากราฟ $y = -x$ และ $y = x^2$ แสดงพื้นที่ได้ดังนี้





จากกราฟแบ่งการอินทิเกรตเป็น 2 ส่วน จะได้ว่า

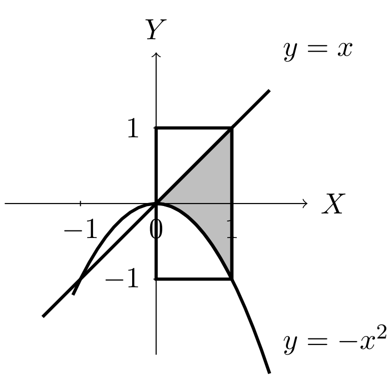
$$\int_0^1 \int_{-x}^{x^2} f(x,y)\,dydx = \int_{-1}^0 \int_{-y}^1 f(x,y)\,dxdy + \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 f(x,y)\,dxdy \quad \#$$

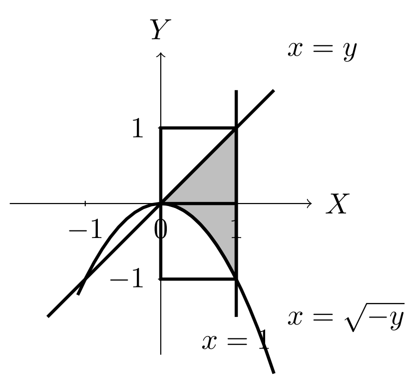
4. (10 **คะแนน**) พิจารณาอินทิกรัลสองชั้น $\int_0^1 \int_{-x^2}^{x} f(x,y)\,dydx$

   4.1 (5 **คะแนน**) จงวาดกราฟแสดงโดเมนของอินทิกรัลสองชั้นดังกล่าว

   4.2 (5 **คะแนน**) จงเปลี่ยนลำดับการอินทิเกรตของอินทิกรัลสองชั้นดังกล่าว

วิธีทำ โดเมนของอินทิกรัลสองชั้นคือ $\{(x,y) : 0 \leq x \leq 1$ และ $-x^2 \leq y \leq x\}$
พิจารณากราฟ $y = -x^2$ และ $y = x$ แสดงพื้นที่ได้ดังนี้





จากกราฟแบ่งการอินทิเกรตเป็น 2 ส่วน จะได้ว่า

$$\int_0^1 \int_{-x^2}^{x} f(x,y)\,dydx = \int_{-1}^0 \int_{\sqrt{-y}}^1 f(x,y)\,dxdy + \int_0^1 \int_{y}^1 f(x,y)\,dxdy \quad \#$$

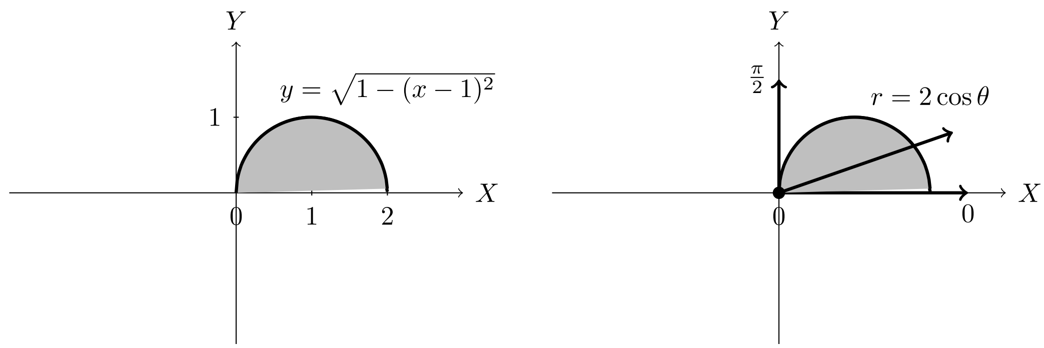
ข้อ 21

1. **(10 คะแนน)** จงหาหาค่าของอินทิกรัลสองชั้น $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dydx$

วิธีทำ โดเมนของอินทิกรัลสองชั้นคือ $\{(x,y) : 0 \le x \le 2$ และ $0 \le y \le \sqrt{1-(x-1)^2}\}$
พิจารณาสมการ $y = \sqrt{1-(x-1)^2}$ เมื่อ $y \ge 0$ นั่นคือ

$$\begin{aligned} y^2 &= 1-(x-1)^2 \\ (x-1)^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

โดเมนคือพื้นครึ่งวงกลม $(x-1)^2 + y^2 = 1$ ส่วนที่เหนือแกน X เขียนกราฟได้ดังนี้



ให้ $x = r\cos\theta$ และ $y = r\sin\theta$ จากสมการ $(x-1)^2 + y^2 = 1$ นั่นคือ

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 1 + y^2 &= 1 \\ x^2 + y^2 &= 2x \\ r^2 &= 2r\cos\theta \\ r &= 2\cos\theta \end{aligned}$$

โดเมนในระบบเชิงขั้วมีขอบเขตดังนี้

$$0 \le r \le 2\cos\theta \quad \text{และ} \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

เนื่องจาก $\sqrt{x^2+y^2} = r$ และ $dydx = rdrd\theta$ ดังนั้น

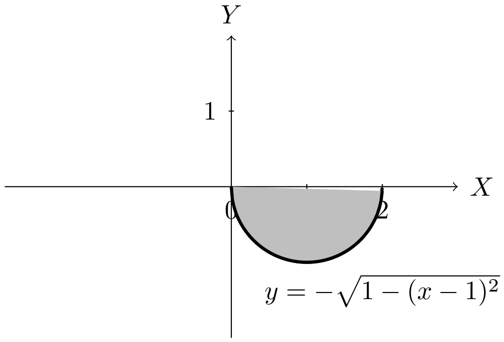
$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dydx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} r \cdot r\,drd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} r^2\,drd\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{3}r^3\right]_{r=0}^{r=2\cos\theta} d\theta = \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta\,d\theta \\ &= \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \cdot \cos\theta\,d\theta = \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\theta)\cdot d\sin\theta \\ &= \frac{8}{3}\left[\sin\theta - \frac{1}{3}\sin^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{8}{3}\left[1 - \frac{1}{3}\right] - 0 \\ &= \frac{16}{9} \quad \# \end{aligned}$$

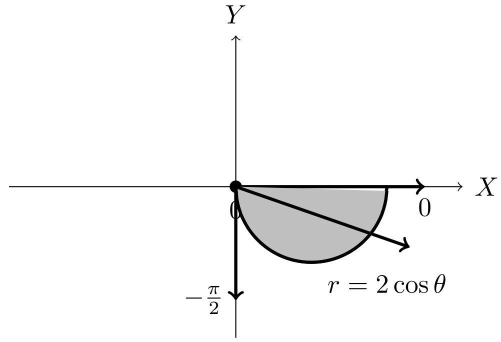
2. (10 **คะแนน**) จงหาหาค่าของอินทิกรัลสองชั้น $\int_0^2 \int_{-\sqrt{1-(x-1)^2}}^0 \sqrt{x^2+y^2}\, dydx$

วิธีทำ โดเมนของอินทิกรัลสองชั้นคือ $\{(x,y) : 0 \le x \le 2$ และ $-\sqrt{1-(x-1)^2} \le y \le 0\}$
พิจารณาสมการ $y = -\sqrt{1-(x-1)^2}$ เมื่อ $y \le 0$ นั่นคือ

$$y^2 = 1-(x-1)^2$$
$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

โดเมนคือพื้นครึ่งวงกลม $(x-1)^2 + y^2 = 1$ ส่วนที่ใต้แกน X เขียนกราฟได้ดังนี้





ให้ $x = r\cos\theta$ และ $y = r\sin\theta$ จากสมการ $(x-1)^2 + y^2 = 1$ นั่นคือ

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1$$
$$x^2 + y^2 = 2x$$
$$r^2 = 2r\cos\theta$$
$$r = 2\cos\theta$$

โดเมนในระบบเชิงขั้วมีขอบเขตดังนี้

$$0 \le r \le 2\cos\theta \quad \text{และ} \quad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le 0$$

เนื่องจาก $\sqrt{x^2+y^2} = r$ และ $dydx = rdrd\theta$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \int_{-\sqrt{1-(x-1)^2}}^0 \sqrt{x^2+y^2}\, dydx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \int_0^{2\cos\theta} r \cdot r\, drd\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \int_0^{2\cos\theta} r^2\, drd\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \left[\frac{1}{3}r^3\right]_{r=0}^{r=2\cos\theta} d\theta = \frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos^3\theta\, d\theta \\
&= \frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos^2\theta \cdot \cos\theta\, d\theta = \frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (1-\sin^2\theta)\cdot d\sin\theta \\
&= \frac{8}{3}\left[\sin\theta - \frac{1}{3}\sin^3\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^0 \\
&= 0 - \frac{8}{3}\left[-1 + \frac{1}{3}\right] \\
&= \frac{16}{9} \quad \#
\end{aligned}$$

ข้อ 22

1. (10 **คะแนน**) จงตอบคำถามต่อไปนี้

   1.1 (5 **คะแนน**) จงแสดงว่า $u(x,t) = \sin t \cos x$ **เป็นผลเฉลยเฉพาะ**ของของสมการ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \cos t \cos x \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\sin t \cos x$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\sin t \sin x \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sin t \cos x$$

จะได้ว่า

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\sin t \cos x = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

ดังนั้น $u(x,t) = \sin t \cos x$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของของสมการ $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

   1.2 (5 **คะแนน**) จงหา**ผลเฉลยทั่วไป** ของสมการ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ye^x + e^x}{ye^x + y}$$

วิธีทำ โดยวิธีการแยกตัวแปร จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{ye^x + e^x}{ye^x + y} = \frac{e^x(y+1)}{y(e^x+1)} \\
\frac{y}{y+1}dy &= \frac{e^x}{e^x+1}dx \\
\int \frac{y}{y+1}dy &= \int \frac{e^x}{e^x+1}dx \\
\int \frac{y+1-1}{y+1}dy &= \int \frac{1}{e^x+1}de^x \\
\int 1 - \frac{1}{y+1}dy &= \ln|e^x+1| + C \\
y - \ln|y+1| &= \ln|e^x+1| + C \qquad \#
\end{aligned}$$

2. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

2.1 **(5 คะแนน)** จงแสดงว่า $u(x,t) = \sin 2t \cos x$ **เป็นผลเฉลยเฉพาะ**ของของสมการ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\cos 2t \cos x \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -4\sin 2t \cos x$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\sin 2t \sin x \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sin 2t \cos x$$

จะได้ว่า

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -4\sin 2t \cos x = 4(-\sin 2t \cos x) = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

ดังนั้น $u(x,t) = \sin 2t \cos x$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของของสมการ $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

2.2 **(5 คะแนน)** จงหา**ผลเฉลยทั่วไป** ของสมการ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ye^x - e^x}{ye^x + y}$$

วิธีทำ โดยวิธีการแยกตัวแปร จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} = \frac{ye^x - e^x}{ye^x + y} &= \frac{e^x(y-1)}{y(e^x+1)} \\
\frac{y}{y-1}dy &= \frac{e^x}{e^x+1}dx \\
\int \frac{y}{y-1}dy &= \int \frac{e^x}{e^x+1}dx \\
\int \frac{y-1+1}{y-1}dy &= \int \frac{1}{e^x+1}de^x \\
\int 1 + \frac{1}{y-1}dy &= \ln|e^x+1| + C \\
y + \ln|y-1| &= \ln|e^x+1| + C \qquad \#
\end{aligned}$$

3. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

3.1 **(5 คะแนน)** จงแสดงว่า $u(x,t) = \sin 3t \cos x$ **เป็นผลเฉลยเฉพาะ**ของของสมการ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 3\cos 3t \cos x \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -9\sin 3t \cos x$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\sin t \sin x \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sin t \cos x$$

จะได้ว่า

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -9\sin 3t \cos x = 9(-\sin 3t \cos x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

ดังนั้น $u(x,t) = \sin 3t \cos x$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของของสมการ $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

3.2 **(5 คะแนน)** จงหา**ผลเฉลยทั่วไป** ของสมการ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ye^x + e^x}{ye^x - y}$$

วิธีทำ โดยวิธีการแยกตัวแปร จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{ye^x + e^x}{ye^x - y} = \frac{e^x(y+1)}{y(e^x-1)} \\
\frac{y}{y+1}dy &= \frac{e^x}{e^x-1}dx \\
\int \frac{y}{y+1}dy &= \int \frac{e^x}{e^x-1}dx \\
\int \frac{y+1-1}{y+1}dy &= \int \frac{1}{e^x-1}de^x \\
\int 1 - \frac{1}{y+1}dy &= \ln|e^x-1| + C \\
y - \ln|y+1| &= \ln|e^x-1| + C \qquad \#
\end{aligned}$$

4. (10 **คะแนน**) จงตอบคำถามต่อไปนี้

4.1 (5 **คะแนน**) จงแสดงว่า $u(x,t) = \sin 4t \cos x$ **เป็นผลเฉลยเฉพาะ**ของของสมการ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 4\cos 4t \cos x \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -16\sin 4t \cos x$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\sin t \sin x \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sin t \cos x$$

จะได้ว่า

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -16\sin 4t \cos x = 16(-\sin 4t \cos x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

ดังนั้น $u(x,t) = \sin 4t \cos x$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของของสมการ $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

4.2 (5 **คะแนน**) จงหา**ผลเฉลยทั่วไป** ของสมการ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ye^x - e^x}{ye^x - y}$$

วิธีทำ โดยวิธีการแยกตัวแปร จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{ye^x - e^x}{ye^x - y} = \frac{e^x(y-1)}{y(e^x-1)} \\
\frac{y}{y-1}dy &= \frac{e^x}{e^x-1}dx \\
\int \frac{y}{y-1}dy &= \int \frac{e^x}{e^x-1}dx \\
\int \frac{y-1+1}{y-1}dy &= \int \frac{1}{e^x-1}de^x \\
\int 1 + \frac{1}{y-1}dy &= \ln|e^x-1| + C \\
y + \ln|y-1| &= \ln|e^x-1| + C \qquad \#
\end{aligned}$$

ข้อ 23

1. **(10 คะแนน)** จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x+y}{x+2y}$$

วิธีทำ จัดรูปสมการได้เป็น

$$(2x+y)dx - (x+2y)dy = 0$$

ให้ $M(x,y) = 2x+y$ และ $N(x,y) = -x-2y$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} M(\lambda x, \lambda y) &= 2(\lambda x) + (\lambda y) = \lambda(2x+y) = \lambda M(x,y) \\ N(\lambda x, \lambda y) &= -(\lambda x) - 2(\lambda y) = \lambda(-x-2y) = \lambda N(x,y) \end{aligned}$$

ดังนั้น $(2x+y)dx - (x+2y)dy = 0$ เป็นสมการเอกพันธุ์ดีกรีหนึ่ง
ให้ $y = vx$ จะได้ว่า $dy = vdx + xdv$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} (2x+y)dx - (x+2y)dy &= 0 \\ (2x+vx)dx - (x+2vx)(xdv+vdx) &= 0 \\ (2x+vx)dx - (1+2v)x^2dv - (xv+2v^2x)dx &= 0 \\ (2x-2v^2x)dx &= (1+2v)x^2dv \\ (1-v^2)2xdx &= (1+2v)x^2dv \\ \frac{2x}{x^2}dx &= \frac{1+2v}{1-v^2}dv \\ \int \frac{2}{x}dx &= \int \frac{1+2v}{1-v^2}dv \\ 2\ln|x| &= \int \frac{\frac{3}{2}}{1-v} - \frac{\frac{1}{2}}{1+v}dv \\ 2\ln|x| &= \frac{3}{2}\int \frac{1}{1-v}dv - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+v}dv \\ 2\ln|x| &= -\frac{3}{2}\ln|1-v| - \frac{1}{2}\ln|1+v| \\ 2\ln|x| &= -\frac{3}{2}\ln\left|1-\frac{y}{x}\right| - \frac{1}{2}\ln\left|1+\frac{y}{x}\right| + C \\ 4\ln|x| &= -3\ln\left|1-\frac{y}{x}\right| - \ln\left|1+\frac{y}{x}\right| + 4C \end{aligned}$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการนี้คือ

$$4\ln|x| = -3\ln\left|1-\frac{y}{x}\right| - \ln\left|1+\frac{y}{x}\right| + C \quad \#$$

2. **(10 คะแนน)** จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y^2}{y + 2xy}$$

วิธีทำ 1. สมการแม่นตรง จัดรูปสมการได้เป็น

$$(2x - y^2)dx - (y + 2xy)dy = 0$$

ให้ $M(x, y) = 2x - y^2$ และ $N(x, y) = -y - 2xy$ จะได้ว่า

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2y = \frac{\partial N}{\partial x}$$

ดังนั้นสมการนี้เป็นสมการแม่นตรง จะได้ว่า $F(x, y) = C$ เป็นผลเฉลยของสมการนี้ พิจารณา

$$F(x, y) = \int M(x, y)\, dx = \int 2x - y^2\, dx = x^2 - y^2x + C(y)$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y} &= N(x, y) \\ -2xy + C'(y) &= -y - 2xy \\ C'(y) &= -y \\ C(y) &= -\frac{1}{2}y^2 + c \end{aligned}$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ $x^2 - y^2x - \frac{1}{2}y^2 = C$ #

วิธีทำ 2. สมการแบร์นูลลี จัดรูปสมการได้เป็น

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{2x}{y + 2xy} - \frac{y^2}{y + 2xy} = \frac{2x}{y(1 + 2x)} - \frac{y^2}{y(1 + 2x)} = \frac{2x}{1 + 2x} \cdot y^{-1} - \frac{y}{1 + 2x} \\ \frac{dy}{dx} + \frac{1}{1 + 2x} \cdot y &= \frac{2x}{1 + 2x} \cdot y^{-1} \end{aligned}$$

จะเห็นว่าสมการนี้เป็นสมการแบร์นูลลีโดยที่ $n = -1$ จะได้ว่า

$$P(x) = \frac{1}{1 + 2x} \quad \text{และ} \quad Q(x) = \frac{2x}{1 + 2x}$$

แล้ว

$$\mu = e^{\int (1-n)P(x)dx} = e^{\int \frac{2}{1+2x}dx} = e^{\ln|1+2x|} = 1 + 2x$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการนี้คือ

$$\begin{aligned} y^{1-n} &= \frac{1}{\mu}\left(\int (1 - n)\mu Q(x)\, dx + C\right) \\ y^2 &= \frac{1}{1 + 2x}\left(\int 2 \cdot (1 + 2x) \cdot \frac{2x}{1 + 2x} dx + C\right) = \frac{1}{1 + 2x}\left(\int 4x dx + C\right) \\ &= \frac{1}{1 + 2x}\left(2x^2 + C\right) \\ (1 + 2x)y^2 &= 2x^2 + C \end{aligned}$$

ข้อ 24

1. **(10 คะแนน)** จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$(x^2-1)\frac{dy}{dx}+2y=(x+1)^2(x-1) \qquad \text{เมื่อ} \quad y(0)=1$$

วิธีทำ จัดรูปสมการใหม่ได้เป็น

$$\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x^2-1}\cdot y=\frac{(x+1)^2(x-1)}{x^2-1}=\frac{(x+1)^2(x-1)}{(x+1)(x-1)}=x+1$$

จะเห็นว่าสมการนี้เป็นสมการเชิงเส้นอันอับหนึ่งโดยที่

$$P(x)=\frac{2}{x^2-1}=\frac{2}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1} \quad \text{และ} \quad Q(x)=x+1$$

แล้ว

$$\mu=e^{\int P(x)dx}=e^{\int \frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}dx}=e^{\ln|x-1|-\ln|x+1|}=e^{\ln|\frac{x-1}{x+1}|}=\frac{x-1}{x+1}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
y&=\frac{1}{\mu}\left(\int \mu Q(x)\,dx+C\right)\\
&=\frac{x+1}{x-1}\left(\int \frac{x-1}{x+1}\cdot(x+1)dx+C\right)\\
&=\frac{x+1}{x-1}\left(\int x+1dx+c\right)\\
&=\frac{x+1}{x-1}\left(\frac{1}{2}x^2+x+C\right)
\end{aligned}$$

จาก $x=0$ และ $y=1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
1&=(-1)(0+C)\\
\therefore C&=-1
\end{aligned}$$

ดังนั้นผลเฉลยเฉพาะของสมการนี้คือ

$$y=\frac{x+1}{x-1}\left(\frac{1}{2}x^2+x-1\right) \qquad \#$$

2. **(10 คะแนน)** จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$(x^2 - x)\frac{dy}{dx} + y = (xy)^2(x-1) \qquad \text{เมื่อ} \quad y(2) = 1$$

วิธีทำ จัดรูปสมการใหม่ได้เป็น

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x^2 - x} \cdot y = \frac{(xy)^2(x-1)}{x^2 - x} = \frac{x^2y^2(x-1)}{x(x-1)} = xy^2$$

จะเห็นว่าสมการนี้เป็นสมการแบร์นูลลีโดยที่ $n = 2$ จะได้ว่า

$$P(x) = \frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{(x-1)x} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} \quad \text{และ} \quad Q(x) = x$$

แล้ว

$$\mu = e^{\int (1-n)P(x)dx} = e^{\int -\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x}dx} = e^{-\ln|x-1| + \ln|x|} = e^{\ln\left|\frac{x}{x-1}\right|} = \frac{x}{x-1}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
y^{1-n} &= \frac{1}{\mu}\left(\int (1-n)\mu Q(x)\,dx + C\right) \\
y^{-1} &= \frac{x}{x-1}\left(\int -\frac{x}{x-1} \cdot x dx + C\right) \\
&= \frac{x-1}{x}\left(-\int \frac{x^2}{x-1}dx + c\right) \\
&= \frac{x-1}{x}\left(-\int x + 1 + \frac{1}{x-1}dx + c\right) \\
&= \frac{x-1}{x}\left(-\frac{1}{2}x^2 - x - \ln|x-1| + C\right)
\end{aligned}$$

จาก $x = 2$ และ $y = 1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{2}(-2 - 2 + 0 + C) \\
\therefore C &= 6
\end{aligned}$$

ดังนั้นผลเฉลยเฉพาะของสมการนี้คือ

$$y^{-1} = \frac{x-1}{x}\left(-\frac{1}{2}x^2 - x - \ln|x-1| + 6\right) \qquad \#$$