คณิตศาสตร์

มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
คณะครุศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ข้อสอบปลายภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2565

รหัสวิชา	ชื่อวิชา	วันเวลาสอบ	คะแนนเต็ม
MAC2302	ทฤษฎีจำนวน	เวลา 17:00 - 20:00 วันจันทร์ ที่ 31 ตุลาคม 2565	105 คะแนน 30%

ชื่อ-สกุล.. **รหัสนักศึกษา**.................................... **หมู่เรียน**............

คำชี้แจง

1. ข้อสอบมีทั้งหมด 14 **หน้า จำนวน** 10 **ข้อ**
2. เขียนรหัสนักศึกษา และหมู่เรียนด้วย**ตัวบรรจงลงในข้อสอบทุกหน้า**
3. **ห้ามใช้** เครื่องคำนวณ และอุปกรณ์สื่อสารทุกชนิดในขณะสอบ
4. **ไม่อนุญาต**ให้นำเอกสารการเรียน ตำราเรียนทุกชนิดเข้าห้องสอบ
5. **ห้าม**นำข้อสอบออกจากห้องสอบโดยเด็ดขาด
6. หากมี**การทุจริต**ในการสอบ จะได้รับการลงโทษตามระเบียบของมหาวิทยาลัย

ข้าพเจ้าจะปฏิบัติตามข้อตกลงอย่างเคร่งครัด
ลงชื่อผู้เข้าสอบ

....

อาจารย์ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย

ข้อที่	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	รวม
คะแนน											

ตารางแสดงจำนวนเฉพาะไม่เกิน 1000

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37
41	43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89
97	101	103	107	109	113	127	131	137	139	149	151
157	163	167	173	179	181	191	193	197	199	211	223
227	229	233	239	241	251	257	263	269	271	277	281
283	293	307	311	313	317	331	337	347	349	353	359
367	373	379	383	389	397	401	419	421	431	433	439
443	449	457	461	463	467	479	487	491	499	503	509
521	523	541	547	557	563	569	571	577	587	593	599
601	607	613	617	619	631	641	643	647	653	659	661
673	677	683	691	701	709	719	727	733	739	743	751
757	761	769	773	787	797	809	811	821	823	827	829
839	853	859	863	877	881	883	887	907	911	919	929
937	941	947	953	967	971	977	983	911	997		

1. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้โดยไม่ต้องแสดงวิธีทำ (ข้อละ 1 คะแนน)

1.1 จงหา**เลขสองหลักสุด**ของจำนวน 97^{2565} ____________

1.2 จง**ยกตัวอย่าง** x ที่สอดคล้อง $x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{19}$ ____________

1.3 จง**ยกตัวอย่าง** $a > 10$ ที่ทำให้สมการ $ax \equiv 65 \pmod{22}$ มีคำตอบ ____________

1.4 จงหาจำนวนเต็ม k ที่ทำให้ $\sigma(2^k) = \phi(2^{11}) - 1$ ____________

1.5 จงหาค่าของ $\tau(2^{10} - 1)$ ____________

1.6 กำหนดให้ $[x - 1.2] = 3$ จงหา**ค่าต่ำสูงสุด**ของ $[4x]$ ____________

1.7 จงหาค่าของ $\sigma(\sigma_2(22))$ ____________

1.8 ถ้า $\{a, 5a-5, 5a-4\}$ เป็น**สามสิ่งอันดับพีทาโกรัส** (PT) จงหา $a > 1$ ____________

1.9 ถ้า $(k, 2)$ เป็น**คำตอบเฉพาะราย**ของ $5x + ky = 91$ จงหา k ____________

1.10 จงหา**สมการไดโอแฟนไทน์**ที่มีคำตอบคือ ____________

$$\begin{cases} x &= (t-1)(t+1) \\ y &= t+1 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{Z}$$

ข้อ 2 ถึง 10 จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

2. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

   2.1 **(5 คะแนน)** จงแสดงว่า $19 \mid (4 \cdot 3^{3n+2} + 2^{3n+1})$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$ โดยใช้สมภาค

   2.2 **(5 คะแนน)** ให้ x, y เป็นจำนวนเต็ม และ p เป็นจำนวนเฉพาะ จงพิสูจน์ว่า

   ถ้า $x(p+1)^{2565} \equiv y(p-1) \pmod{p}$ แล้ว $y(p+1)^{2565} \equiv x(p-1) \pmod{p}$

3. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

   3.1 **(5 คะแนน)** จงหา**คำตอบที่ไม่สมภาคกัน** ของสมการ $60x \equiv 25 \pmod{65}$

   3.2 **(5 คะแนน)** จงใช้**ทฤษฎีบทของวิลสัน** หารเศษเหลือที่เกิดจากหาร

$$21 \cdot 64! - 22 \cdot 65! + 23 \cdot 66! \quad \text{ด้วย} \quad 67$$

4. **(13 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

   4.1 **(5 คะแนน)** จงหา**เศษเหลือ**ที่เกิดจากการหาร $(87^{88}+87^{87})^{8887}$ ด้วย 89
   ข้อเสนอแนะ : ใช้ทฤษฎีบทของแฟร์มาต์ (Fermat's Theorem)

4.2 **(8 คะแนน)** จงหา**จำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุด** เมื่อ

$$\text{หารด้วย } 12, 15 \text{ และ } 25 \text{ เศษเหลือเท่ากับ } 7, 13 \text{ และ } 18 \text{ ตามลำดับ}$$

โดยใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือของจีน (CRT)

5. (10 **คะแนน**) จงตอบคำถามต่อไปนี้

5.1 (5 **คะแนน**) จงหาค่าของ

$$\sigma\left(\sum_{d|75}\tau(d^2)\right)$$

5.2 (5 **คะแนน**) ให้ ϕ เป็นฟังก์ชันฟีออยเลอร์ และ $f:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{R}$ ที่นิยามโดย

$$f(n)=n\phi(n^2) \qquad \text{เมื่อ} \qquad n\in\mathbb{Z}^+$$

จงแสดงว่า f เป็น**ฟังก์ชันเชิงการคูณ** และ $2f(2^a)=2^{3a}$ ทุก ๆ จำนวนเต็มบวก a

6. (10 **คะแนน**) จงตอบคำถามต่อไปนี้

6.1 (5 **คะแนน**) จงหาค่าของ

$$\phi(\phi(10! + 9! + 8!))$$

6.2 (5 **คะแนน**) จงหาจำนวนเฉพาะ p และ q ที่แตกต่างกัน มา**อย่างน้อย 5 คู่** ที่สอดคล้องเงื่อนไข

$$\phi(pq) = p^2 - 1$$

7. (10 **คะแนน**) จงตอบคำถามต่อไปนี้

7.1 (5 **คะแนน**) จงใช้สูตรโพลิกแนค (Polignac's formula) เขียน **รูปแบบบัญญัติ (canonical form)** ของ

$$20! - 19! - 18!$$

7.2 (5 **คะแนน**) จงหาจำนวนเต็มบวก n ที่มากที่สุดที่ 147^n หารลงตัว $1500!$

8. **(12 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

8.1 **(5 คะแนน)** แม่ค้าผลไม้สมัครเล่นนำเงิน 1050 บาท เพื่อไปซื้อ

มะม่วงจากอินเดีย ลูกละ 22 บาท และลูกพับจากเมืองจีน ลูกละ 65 บาท

แม่ค้าคนนี้ต้องซื้อผลไม้ทั้ง 2 ชนิดจำนวนเท่าใดบ้างจึงจะใช้เงินหมดพอดี (ใช้สมการไดโอแฟนไทน์)

8.2 **(7 คะแนน)** อาจารย์ท่านหนึ่งห้อง 1144 ต้องการทานโยเกิร์ต 3 ยี่ห้อรสธรรมชาติ พักเที่ยงจึงให้เงิน 200 บาท กับนักศึกษาไปซื้อ

โยเกิร์ตบัลเกเรีย	ถ้วยละ	20	บาท
โยเกิร์ตเมจิ	ถ้วยละ	15	บาท
โยเกิร์ตริชเซส	ถ้วยละ	16	บาท

ปรากฏว่า นักศึกษากลับมาพร้อมโยเกิร์ตทั้ง 3 ยี่ห้อ โดยมีเงินทอน 10 บาท
ถามว่าเงินทอนดังกล่าวถูกต้องหรือไม่ เพราะเหตุใด

ถ้าเป็นไปได้จำนวนโยเกิร์ตที่อาจารย์ท่านนี้ได้รับมี**กี่แบบ มีแบบไหนบ้าง** (ใช้สมการไดโอแฟนไทน์)

9. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

   9.1 **(5 คะแนน)** จงหา**สามสิ่งอันดับพีทาโกรัส** (PT) ที่มีจำนวน 60 พร้อมทั้งระบุด้วยว่าสามจำนวนใดเป็นชนิดปฐมฐาน (PPT)

9.2 **(5 คะแนน)** ให้ v เป็นจำนวนเต็มบวก จงพิสูจน์ว่า

$$\{2v+1, 2v^2+2v, 2v^2+2v+1\} \qquad \text{เป็นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัส}$$

และยกตัวอย่างสามสิ่งอันดับพีทาโกรัสปฐมฐาน (PPT) ที่ได้จากสูตรดังกล่าวมาอย่างน้อย 5 ชุด

10. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

10.1 **(5 คะแนน)** จงพิสูจน์ว่า **ไม่มี**จำนวนเต็ม a, b และ c ที่ทำให้

$$\{3a+1, 3b+2, c\} \quad \text{เป็นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัส}$$

ข้อเสนอแนะ : โดยใช้วิธีขัดแย้ง และขั้นตอนวิธีการหาร

10.2 **(5 คะแนน)** สิ่งที่ได้รับจากวิชาจากวิชาทฤษฎีจำนวน และคุณคิดว่าจะนำไปใช้ในการจัดการเรียนรู้ในระดับชั้นมัธยมอย่างไร

มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
คณะครุศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์

เฉลยข้อสอบปลายภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2565

รหัสวิชา	**ชื่อวิชา**	**วันเวลาสอบ**	**คะแนนเต็ม**
MAC2302	ทฤษฎีจำนวน	เวลา 17:00 - 20:00 วันจันทร์ ที่ 31 ตุลาคม 2565	105 คะแนน 30%

โดย ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย

---

1. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้โดยไม่ต้องแสดงวิธีทำ (ข้อละ 1 คะแนน)

1.1 จงหา**เลขสองหลักสุด**ของจำนวน 97^{2565} 57

แนวคำตอบ เนื่องจาก $\gcd(100, 97) = 1$ และ $\phi(100) = \phi(2^2 \cdot 5^2) = (2^2 - 2)(5^2 - 5) = 40$
โดยทฤษฎีบทของออยเลอร์ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
97^{40} &\equiv 1 && \pmod{100} \\
(97^{40})^{64} &\equiv 1^{64} && \pmod{100} \\
97^{2560} &\equiv 1 && \pmod{100} \\
97^{2560} \cdot 97^5 &\equiv 1 \cdot 97^5 && \pmod{100} \\
97^{2565} &\equiv (-3)^5 && \pmod{100} \\
&\equiv -243 && \pmod{100} \\
&\equiv -43 \equiv 57 && \pmod{100}
\end{aligned}$$

ดังนั้น เลขสองหลักสุดของจำนวน 97^{2565} คือ 57 #

1.2 จง**ยกตัวอย่าง** x ที่สอดคล้อง $x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{19}$ 7

แนวคำตอบ เลือก $x = 7$ จะได้ว่า $7^2 + 7 + 1 = 57 = 3 \cdot 19 \equiv 0 \pmod{19}$

1.3 จง**ยกตัวอย่าง** $a > 10$ ที่ทำให้สมการ $ax \equiv 65 \pmod{22}$ มีคำตอบ 13,15,17,...

แนวคำตอบ เนื่องจาก $d = \gcd(a, 22) = 1, 2, 11, 22$ และ
$ax \equiv 65 \pmod{22}$ มีคำตอบ ก็ต่อเมื่อ $d \mid 65$
ดังนั้น $\gcd(a, 22) = d = 1$ ฉะนั้นเลือก $a > 10$ ซึ่ง $2 \nmid a$ และ $11 \nmid a$
ตัวอย่างเช่น $a = 13, 15, 17, 19$ เป็นต้น

1.4 จงหาจำนวนเต็ม k ที่ทำให้ $\sigma(2^k) = \phi(2^{11}) - 1$ 9

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\sigma(2^k) &= \phi(2^{11}) - 1 \\
\frac{2^{k+1} - 1}{2 - 1} &= (2^{11} - 2^{10}) - 1 \\
2^{k+1} - 1 &= 2^{11} - 2^{10} - 1 \\
2^{k+1} &= 2^{11} - 2^{10} = 2^{10}(2 - 1) = 2^{10}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $k + 1 = 10$ นั่นคือ $k = 9$ #

1.5 จงหาค่าของ $\tau(2^{12}-1)$ 8

แนวคำตอบ พิจารณา $2^{10}-1=(2^5-1)(2^5+1)=31(33)=3\cdot 11\cdot 31$ ดังนั้น

$$\tau(2^{12}-1)=\tau(3\cdot 11\cdot 31)=(1+1)(1+1)(1+1)=8$$

1.6 กำหนดให้ $[x-1.2]=3$ จงหา**ค่าต่ำสูงสุด**ของ $[4x]$ 16

แนวคำตอบ เนื่องจาก $[x-1.2]=3$ จะได้ว่า

$$\begin{array}{ccccc} 3 & \leq & x-1.2 & < & 4 \\ 4.2 & \leq & x & < & 5.2 \\ 16.8 & \leq & 4x & < & 20.8 \end{array}$$

ดังนั้นค่าต่ำสูงสุดของ $[4x]=[16.8]=16$ #

1.7 จงหาค่าของ $\sigma(\sigma_2(22))$ 1116

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}\sigma(\sigma_2(22)) &= \sigma(\sigma_2(2\cdot 11))=\sigma(1^2+2^2+11^2+22^2)\\ &= \sigma(1+4+121+484)=\sigma(610)\\ &= \sigma(2\cdot 5\cdot 61)=(1+2)(5+1)(61+1)=1116 \quad \#\end{aligned}$$

1.8 ถ้า $\{a,5a-5,5a-4\}$ เป็น**สามสิ่งอันดับพีทาโกรัส** (PT) จงหา $a>1$ 9

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}(5a-4)^2 &= a^2+(5a-5)^2\\ 25a^2-40a+16 &= a^2+25a^2-50a+25\\ 0 &= a^2-10a+9=(a-9)(a-1)\end{aligned}$$

ดังนั้น $a=9$ #

1.9 ถ้า $(k,2)$ เป็น**คำตอบเฉพาะราย**ของ $5x+ky=91$ จงหา k 13

แนวคำตอบ เนื่องจาก $(k,2)$ เป็นคำตอบเฉพาะรายของสมการนี้ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}5k+k(2) &= 91\\ 7k &= 91 \quad \longrightarrow \quad \therefore k=\frac{91}{7}=13 \quad \#\end{aligned}$$

1.10 จงหา**สมการไดโอแฟนไทน์**ที่มีคำตอบคือ $x=y^2-2y$

$$\begin{cases} x = (t-1)(t+1) \\ y = t+1 \end{cases}, \quad t\in\mathbb{Z}$$

แนวคำตอบ เนื่องจาก $t=y-1$ ดังนั้น

$$x=(t-1)(t+1)=(y-1-1)(y-1+1)=(y-2)y=y^2-2y$$

ดังนั้นสมการไดโอแฟนไทน์คือ $x=y^2-2y$ #

ข้อ 2 ถึง 10 จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

2. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

    2.1 **(5 คะแนน)** จงแสดงว่า $19 \mid (4 \cdot 3^{3n+2} + 2^{3n+1})$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$ โดยใช้สมภาค

    แนวคำตอบ ให้ $n \in \mathbb{N}$ เนื่องจาก $27 \equiv 8 \pmod{19}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
3^3 &\equiv 2^3 && \pmod{19} \\
(3^3)^n &\equiv (2^3)^n && \pmod{19} \\
3^{3n} &\equiv 2^{3n} && \pmod{19} \\
3^{3n} \cdot 36 &\equiv 2^{3n} \cdot 36 && \pmod{19} \\
3^{3n} \cdot 4 \cdot 3^2 &\equiv 2^{3n} \cdot (-2) && \pmod{19} \\
4 \cdot 3^{3n+2} &\equiv -2^{3n+1} && \pmod{19}
\end{aligned}$$

    สรุปได้ว่า $19 \mid (4 \cdot 3^{3n+2} + 2^{3n+1})$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$

    2.2 **(5 คะแนน)** ให้ x, y เป็นจำนวนเต็ม และ p เป็นจำนวนเฉพาะ จงพิสูจน์ว่า

$$\text{ถ้า} \quad x(p+1)^{2565} \equiv y(p-1) \pmod{p} \quad \text{แล้ว} \quad y(p+1)^{2565} \equiv x(p-1) \pmod{p}$$

    แนวคำตอบ ให้ x, y เป็นจำนวนเต็ม และ p เป็นจำนวนเฉพาะ
    สมมติ $x(p+1)^{2565} \equiv y(p-1) \pmod{p}$
    เนื่องจาก $(p+1) \equiv 1 \pmod{p}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
(p+1)^{2565} &\equiv 1^{2565} = 1 && \pmod{p} \\
(p+1)^{2565} &\equiv 1 && \pmod{p}
\end{aligned}$$

    โดยสมมติฐานจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
x(p+1)^{2565} &\equiv x && \pmod{p} \\
y(p-1) &\equiv x && \pmod{p}
\end{aligned}$$

    โดย $(p-1) \equiv -1 \pmod{p}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
y(-1) &\equiv x && \pmod{p} \\
y \cdot 1 &\equiv x(-1) && \pmod{p} \\
y \cdot 1 &\equiv x(p-1) && \pmod{p}
\end{aligned}$$

    โดย $(p+1)^{2565} \equiv 1 \pmod{p}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
y \cdot 1 &\equiv x(p-1) && \pmod{p} \\
y(p+1)^{2565} &\equiv x(p-1) && \pmod{p}
\end{aligned}$$

3. (10 **คะแนน**) จงตอบคำถามต่อไปนี้

3.1 (5 **คะแนน**) จงหา**คำตอบที่ไม่สมภาคกัน** ของสมการ $60x \equiv 25 \pmod{65}$

แนวคำตอบ เนื่องจาก $\gcd(60, 65) = 5$ และ $5 \mid 25$ ดังนั้น $60x \equiv 25 \pmod{65}$ มีคำตอบ
พิจารณา $12x \equiv 5 \pmod{13}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} -x &\equiv 5 \pmod{13} \\ x &\equiv -5 \pmod{13} \end{aligned}$$

ดังนั้น $x = -5 + 13t$ เมื่อ $t = 0, 1, 2, 3, 4$ เป็นคำตอบที่ไม่สมภาคกันมอดุโล 65 นั่นคือ

$$x = -5, 8, 21, 34, 47 \quad \#$$

3.2 (5 **คะแนน**) จงใช้**ทฤษฎีบทของวิลสัน** หารเศษเหลือที่เกิดจากหาร

$$21 \cdot 64! - 22 \cdot 65! + 23 \cdot 66! \quad \text{ด้วย} \quad 67$$

แนวคำตอบ เนื่องจาก 67 เป็นจำนวนเฉพาะ โดยทฤษฎีบทของวิลสัน จะได้ว่า

$$66! \equiv -1 \pmod{67}$$

ฉะนั้น

$$23 \cdot 66! \equiv -23 \pmod{67}$$

และ

$$\begin{aligned} 65! \cdot 66 &\equiv -1 \pmod{67} \\ 65! \cdot (-1) &\equiv -1 \pmod{67} \\ 65! &\equiv 1 \pmod{67} \\ 22 \cdot 65! &\equiv 22 \pmod{67} \end{aligned}$$

พิจารณา

$$\begin{aligned} 64! \cdot 65 &\equiv 1 \pmod{67} \\ 64! \cdot (-2) &\equiv 1 \pmod{67} \\ 64! \cdot (-2) \cdot 34 &\equiv 34 \pmod{67} \\ 64! \cdot (-68) &\equiv 34 \pmod{67} \\ 64! \cdot (-1) &\equiv 34 \pmod{67} \\ 64! &\equiv -34 \pmod{67} \\ 64! &\equiv 33 \pmod{67} \\ 21 \cdot 64! &\equiv 21 \cdot 33 = 693 \pmod{67} \end{aligned}$$

ฉะนั้น

$$\begin{aligned} 21 \cdot 64! - 22 \cdot 65! + 23 \cdot 66! &\equiv 693 - 22 - 23 \pmod{67} \\ &\equiv 648 \pmod{67} \\ &\equiv 9(67) + 45 \pmod{67} \\ &\equiv 45 \pmod{67} \end{aligned}$$

ดังนั้น 67 หาร $21 \cdot 64! - 22 \cdot 65! + 23 \cdot 66!$ เศษเหลือเท่ากับ 45 $\quad \#$

4. (13 **คะแนน**) จงตอบคำถามต่อไปนี้

4.1 (5 **คะแนน**) จงหา**เศษเหลือ**ที่เกิดจากการหาร $(87^{88}+87^{87})^{8887}$ ด้วย 89
ข้อเสนอแนะ : ใช้ทฤษฎีบทของแฟร์มาต์ (Fermat's Theorem)

แนวคำตอบ เนื่องจาก 89 เป็นจำนวนเฉพาะ และ $89 \nmid 87$ โดยทฤษฎีบทของแฟร์มาต์ จะได้ว่า

$$87^{88} \equiv 1 \pmod{89}$$

ฉะนั้น

$$\begin{aligned}
87 \cdot 87^{87} &\equiv 1 && \pmod{89}\\
(-2) \cdot 87^{87} &\equiv 1 && \pmod{89}\\
-45 \cdot (-2) \cdot 87^{87} &\equiv -45 && \pmod{89}\\
90 \cdot 87^{87} &\equiv -45 && \pmod{89}\\
1 \cdot 87^{87} &\equiv 44 && \pmod{89}\\
87^{87} &\equiv 44 && \pmod{89}
\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
87^{88}+87^{87} &\equiv 1+44 && \pmod{89}\\
87^{88}+87^{87} &\equiv 45 && \pmod{89}\\
(87^{88}+87^{87})^{8887} &\equiv 45^{8887} && \pmod{89}
\end{aligned}$$

เนื่องจาก $89 \nmid 45$ โดยทฤษฎีบทของแฟร์มาต์ จะได้ว่า

$$45^{88} \equiv 1 \pmod{89}$$

ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}
(45^{88})^{100} &\equiv 1^{100} && \pmod{89}\\
45^{8800} &\equiv 1 && \pmod{89}\\
45^{8800} \cdot 45^{87} &\equiv 45^{87} && \pmod{89}\\
45^{8887} &\equiv 45^{87} && \pmod{89}
\end{aligned}$$

พิจารณา

$$\begin{aligned}
45 \cdot 45^{87} &\equiv 1 && \pmod{89}\\
2 \cdot 45 \cdot 45^{87} &\equiv 2 && \pmod{89}\\
90 \cdot 45^{87} &\equiv 2 && \pmod{89}\\
1 \cdot 45^{87} &\equiv 2 && \pmod{89}\\
45^{87} &\equiv 2 && \pmod{89}
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$(87^{88}+87^{87})^{8887} \equiv 45^{8887} \equiv 45^{87} \equiv 2 \pmod{89}$$

นั่นคือ 89 หาร $(87^{88}+87^{87})^{8887}$ เศษเหลือเท่ากับ 2 $\#$

4.2 **(8 คะแนน)** จงหา**จำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุด** เมื่อ

หารด้วย 12, 15 และ 25 เศษเหลือเท่ากับ 7, 13 และ 18 ตามลำดับ

โดยใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือของจีน (CRT)

แนวคำตอบ ให้ x เป็นจำนวนเต็มที่สอดคล้องเงื่อนไข

$$\begin{aligned} x &\equiv 7 \pmod{12} \\ x &\equiv 13 \pmod{15} \\ x &\equiv 18 \pmod{25} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\gcd(12,15) = 3$ ซึ่ง $3 \mid (7-13)$, $\gcd(12,25) = 1$ ซึ่ง $1 \mid (7-18)$
และ $\gcd(15,25) = 5$ ซึ่ง $5 \mid (13-18)$ ดังนั้นระบบสมการนี้มีคำตอบ
จาก $x \equiv 7 \pmod{12}$ มีคำตอบเดียวกับระบบคำตอบของสมการ

$$\begin{aligned} x &\equiv 7 \pmod{3} &\longrightarrow&& x &\equiv 1 \pmod{3} \\ x &\equiv 7 \pmod{4} &\longrightarrow&& x &\equiv 3 \pmod{4} \end{aligned}$$

จาก $x \equiv 13 \pmod{15}$ มีคำตอบเดียวกับระบบคำตอบของสมการ

$$\begin{aligned} x &\equiv 13 \pmod{3} &\longrightarrow&& x &\equiv 1 \pmod{3} \\ x &\equiv 13 \pmod{5} &\longrightarrow&& x &\equiv 3 \pmod{5} \end{aligned}$$

คำตอบของสมการ $x \equiv 3 \pmod{5}$ คือ

$$x = ..., 3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, 43, ...$$

คำตอบของสมการ $x \equiv 18 \pmod{25}$ คือ

$$x = ..., 18, 43, 68, ...$$

จะเห็นว่า ทุกค่าคำตอบของสมการ $x \equiv 18 \pmod{25}$ จะเป็นคำตอบของสมการ $x \equiv 3 \pmod{5}$ ดังนั้นคำตอบของระบบสมการนี้จะสอดคล้องระบบสมการ

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod{3} \\ x &\equiv 3 \pmod{4} \\ x &\equiv 18 \pmod{25} \end{aligned}$$

พิจารณาสมการ

$$\begin{aligned} 4(25)x &= 100x = & x &\equiv 1 \pmod{3} &\longrightarrow&& x_1 = 1 \\ 3(25)x &= 75x = & -x &\equiv 1 \pmod{4} &\longrightarrow&& x_2 = -1 \\ 3(4)x &= 12x = & 12x &\equiv 1 \pmod{25} \\ && 24x &\equiv 2 \pmod{25} \\ && -x &\equiv 2 \pmod{25} &\longrightarrow&& x_3 = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_0 &= 4(25)(1)(1) + 3(25)(-1)(3) + 3(4)(-2)(18) \\ &= 100 - 225 - 432 \\ &= -557 \\ &= 300(-2) + 43 \end{aligned}$$

จะได้ว่าคำตอบของระบบสมการนี้คือ $x \equiv -557 \equiv 43 \pmod{300}$ ดังนั้นจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดเมื่อ หารด้วย 12, 15 และ 25 เศษเหลือเท่ากับ 7, 13 และ 18 ตามลำดับ เท่ากับ 43 #

5. (10 **คะแนน**) จงตอบคำถามต่อไปนี้

5.1 (5 **คะแนน**) จงหาค่าของ

$$\sigma\left(\sum_{d|75}\tau(d^2)\right)$$

แนวคำตอบ เนื่องจากตัวหารของ 75 คือ 1, 3, 5, 15, 25, 75 ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\sigma\left(\sum_{d|75}\tau(d^2)\right) &= \sigma\left(\tau(1^2)+\tau(3^2)+\tau(5^2)+\tau(15^2)+\tau(25^2)+\tau(75^2)\right)\\
&= \sigma\left(\tau(1)+\tau(3^2)+\tau(5^2)+\tau(3^2\cdot 5^2)+\tau(5^4)+\tau(3^2\cdot 5^4)\right)\\
&= \sigma\left(1+(2+1)+(2+1)+(2+1)(2+1)+(4+1)+(2+1)(4+1)\right)\\
&= \sigma\left(1+3+3+9+5+15\right)\\
&= \sigma(36)=\sigma(2^2\cdot 3^2)\\
&= (1+2+2^2)(1+3+3^2)\\
&= 7(13)=91 \quad \#
\end{aligned}$$

5.2 (5 **คะแนน**) ให้ ϕ เป็นฟังก์ชันฟีออยเลอร์ และ $f:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{R}$ ที่นิยามโดย

$$f(n)=n\phi(n^2) \qquad \text{เมื่อ} \qquad n\in\mathbb{Z}^+$$

จงแสดงว่า f เป็น**ฟังก์ชันเชิงการคูณ** และ $2f(2^a)=2^{3a}$ ทุก ๆ จำนวนเต็มบวก a

แนวคำตอบ ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง $\gcd(m,n)=1$ จะได้ว่า $\gcd(m^2,n^2)=1$ ฉะนั้น

$$\begin{aligned}
f(mn) &= (mn)\phi((mn)^2)=mn\phi(m^2n^2)=mn\phi(m^2)\phi(n^2)\\
&= [m\phi(m^2)][n\phi(n^2)]=f(m)f(n)
\end{aligned}$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันเชิงการคูณ
ให้ a เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
2f(2^a) &= 2\cdot 2^a\phi((2^a)^2)=2^{a+1}\phi(2^{2a})\\
&= 2^{a+1}(2^{2a}-2^{2a-1})\\
&= 2^{a+1}\cdot 2^{2a-1}(2-1)\\
&= 2^{3a}
\end{aligned}$$

6. (10 **คะแนน**) จงตอบคำถามต่อไปนี้

6.1 (5 **คะแนน**) จงหาค่าของ

$$\phi(\phi(10! + 9! + 8!))$$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned} 10! + 9! + 8! &= 8!(10 \cdot 9 + 9 + 1) = 8! \cdot 100 \\ &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot (2^2 \cdot 5^2) \\ &= 2^9 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \phi(10! + 9! + 8!) &= \phi(2^9 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7) \\ &= (2^9 - 2^8)(3^2 - 3)(5^3 - 5^2)(7 - 1) \\ &= 2^8(2 - 1)(6)(100)6 \\ &= 2^8 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 5^2 \cdot 2 \cdot 3 \\ &= 2^{12} \cdot 3^2 \cdot 5^2 \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \phi(\phi(10! + 9! + 8!)) &= \phi(2^{12} \cdot 3^2 \cdot 5^2) \\ &= (2^{12} - 2^{11})(3^2 - 3)(5^2 - 5) \\ &= 2^{11}(2 - 1)(6)(20) \\ &= 2048(120) \\ &= 245760 \quad \# \end{aligned}$$

6.2 (5 **คะแนน**) จงหาจำนวนเฉพาะ p และ q ที่แตกต่างกัน มา**อย่างน้อย 5 คู่** ที่สอดคล้องเงื่อนไข

$$\phi(pq) = p^2 - 1$$

แนวคำตอบ เนื่องจาก p และ q เป็นจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกัน จะได้ว่า $\gcd(p, q) = 1$ และ

$$\begin{aligned} \phi(pq) &= p^2 - 1 \\ \phi(p)\phi(q) &= (p - 1)(p + 1) \\ (p - 1)(q - 1) &= (p - 1)(p + 1) \\ q - 1 &= p + 1 && \because p - 1 > 0 \\ q &= p + 2 \end{aligned}$$

นั่นคือ p และ q คือจำนวนเฉพาะที่ติดกัน (จำนวนเฉพาะคู่แฝด : Twin prime)
ดังนั้นแสดงตัวอย่างน้อย 5 คู่ดังนี้ (ดูจากตารางจำนวนเฉพาะ)

p	$q = p + 2$
3	5
5	7
11	13
17	19
29	31
71	73
101	103
107	109

7. (10 **คะแนน**) จงตอบคำถามต่อไปนี้

7.1 (5 **คะแนน**) จงใช้สูตรโพลิกแนค (Polignac's formula) เขียน **รูปแบบบัญญัติ** (canonical form) ของ

$$20! - 19! - 18!$$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$20! - 19! - 18! = 18!(20 \cdot 19 - 19 - 1) = 18!(380 - 19 - 1) = 18! \cdot 360$$

วิธีทำ จะเห็นว่า

$$\begin{aligned}
e_2(18) &= \left[\frac{18}{2}\right] + \left[\frac{18}{2^2}\right] + \left[\frac{18}{2^3}\right] + \left[\frac{18}{2^4}\right] = 9 + 4 + 2 + 1 = 16 \\
e_3(18) &= \left[\frac{18}{3}\right] + \left[\frac{18}{3^2}\right] = 6 + 2 = 8 \\
e_5(18) &= \left[\frac{18}{5}\right] = 3 \\
e_7(18) &= \left[\frac{18}{7}\right] = 2 \\
e_{11}(18) &= e_{13}(18) = e_{13}(18) = e_{17}(18) = 1
\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$18! = 2^{16} \cdot 3^8 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$$

ดังนั้นรูปแบบบัญญัติของ $20! - 19! - 18!$ คือ

$$\begin{aligned}
20! - 19! - 18! &= 2^{16} \cdot 3^8 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot (2^3 \cdot 3^2 \cdot 5) \\
&= 2^{19} \cdot 3^{10} \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \quad \#
\end{aligned}$$

7.2 (5 **คะแนน**) จงหาจำนวนเต็มบวก n ที่มากที่สุดที่ 147^n หารลงตัว $1500!$

แนวคำตอบ เนื่องจาก $147 = 3 \cdot 7^2$ พิจารณารูปแบบบัญญัติ $1500!$ นั่นคือ

$$1500! = 2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot 5^{a_3} \cdot 7^{a_4} \cdot p_5^{a_5} \cdots p_k^{a_k}$$

ใช้สูตรโพลิกแนคหา a_2 และ a_4

$$\begin{aligned}
a_2 = e_3(1500) &= \left[\frac{1500}{3}\right] + \left[\frac{1500}{3^2}\right] + \left[\frac{1500}{3^3}\right] + \left[\frac{1500}{3^4}\right] + \left[\frac{1500}{3^5}\right] + \left[\frac{1500}{3^6}\right] \\
&= 500 + 166 + 55 + 18 + 6 + 2 \\
&= 747 \\
a_4 = e_7(1500) &= \left[\frac{1500}{7}\right] + \left[\frac{1500}{7^2}\right] + \left[\frac{1500}{7^3}\right] \\
&= 214 + 30 + 4 \\
&= 248
\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
1500! &= 2^{a_1} \cdot 3^{747} \cdot 5^{a_3} \cdot 7^{248} \cdot p_5^{a_5} \cdots p_k^{a_k} \\
&= 3^{623} \cdot 3^{124} \cdot (7^2)^{124} \cdot 2^{a_1} \cdot 5^{a_3} \cdot p_5^{a_5} \cdots p_k^{a_k} \\
&= 3^{623} \cdot (3 \cdot 7^2)^{124} \cdot 2^{a_1} \cdot 5^{a_3} \cdot p_5^{a_5} \cdots p_k^{a_k} \\
&= 3^{623} \cdot 147^{124} \cdot 2^{a_1} \cdot 5^{a_3} \cdot p_5^{a_5} \cdots p_k^{a_k}
\end{aligned}$$

จำนวนเต็มบวก n ที่มากที่สุดที่ 147^n ที่หาร $1500!$ ลงตัว คือ $n = 124 \quad \#$

8. (12 **คะแนน**) จงตอบคำถามต่อไปนี้

8.1 (5 **คะแนน**) แม่ค้าผลไม้สมัครเล่นนำเงิน 1050 บาท เพื่อไปซื้อ

มะม่วงจากอินเดีย ลูกละ 22 บาท และลูกพับจากเมืองจีน ลูกละ 65 บาท

แม่ค้าคนนี้ต้องซื้อผลไม้ทั้ง 2 ชนิดจำนวนเท่าใดบ้างจึงจะใช้เงินหมดพอดี (ใช้สมการไดโอแฟนไทน์)
แนวคำตอบ ให้ x แทนจำนวนมะม่วงจากอินเดีย และ y แทนจำนวนลูกพับจากเมืองจีน จะได้ว่า

$$22x + 65y = 1050$$

เนื่องจาก $\gcd(22, 55) = 1$ และ $1 \mid 1050$ ดังนั้นสมการนี้มีคำตอบเป็นจำนวนเต็ม
หา x_0 และ y_0 จาก $65y - 1050 = -22x$ นั่นคือ

$$\begin{aligned} 65y &\equiv 1050 && (\text{mod } 22) \\ -y &\equiv 16 && (\text{mod } 22) \\ y &\equiv -16 && (\text{mod } 22) \\ y &\equiv 6 && (\text{mod } 22) \end{aligned}$$

นั่นคือ $y_0 = 6$ และ $22x_0 + 65(6) = 1050$ จะได้ว่า $x_0 = 30$ คำตอบของสมการนี้คือ

$$\begin{cases} x = 30 + 65t \\ y = 6 - 22t \end{cases} \quad \text{เมื่อ } t \in \mathbb{Z}$$

เนื่องจาก $x = 30 + 65t > 0 \longrightarrow t > -0.46$ และ $y = 6 - 22t > 0 \longrightarrow t < 0.27$
ทำให้ได้ว่า $t = 0$ สรุปได้ว่าแม่ค่าซื้อผลไม้ทั้ง 2 ชนิดเพียงแบบเดียวคือ

มะม่วงจากอินเดีย 30 ลูก และลูกพับจากเมืองจีน 6 ลูก

8.2 (7 **คะแนน**) อาจารย์ท่านหนึ่งห้อง 1144 ต้องการทานโยเกิร์ต 3 ยี่ห้อรสธรรมชาติ พักเที่ยงจึงให้เงิน 200 บาท กับนักศึกษาไปซื้อ

โยเกิร์ตบัลแกเรีย	ถ้วยละ	20	บาท
โยเกิร์ตเมจิ	ถ้วยละ	15	บาท
โยเกิร์ตริชเซส	ถ้วยละ	16	บาท

ปรากฏว่า นักศึกษากลับมาพร้อมโยเกิร์ตทั้ง 3 ยี่ห้อ โดยมีเงินทอน 10 บาท
ถามว่าเงินทอนดังกล่าวถูกต้องหรือไม่ เพราะเหตุใด
ถ้าเป็นไปได้จำนวนโยเกิร์ตที่อาจารย์ท่านนี้ได้รับมี**กี่แบบ มีแบบไหนบ้าง** (ใช้สมการไดโอแฟนไทน์)
แนวคำตอบ ให้ x แทนจำนวนโยเกิร์ตบัลเกเรีย y แทนจำนวนโยเกิร์ตเมจิ และ z แทนโยเกิร์ตริชเซส
โดยที่ x, y, z เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้น

$$20x + 15y + 16z = 190$$

เนื่องจาก $\gcd(20, 15, 16) = 1$ แล้ว $1 \mid 190$ ดังนั้น สมการนี้มีคำตอบในระบบจำนวนเต็ม จะได้ว่า

$$20x + 16z = 190 - 15y$$

เนื่องจาก $\gcd(20, 16) = 4$ ดังนั้น $4 \mid (190 - 15y)$ นั่นคือ $15y \equiv 190 \pmod 4$ หรือ $-y \equiv 2 \pmod 4$

$$y \equiv -2 \pmod 4 \longrightarrow y \equiv 2 \pmod 4$$

ดังนั้น $y = 2 + 4t$ เมื่อ $t \in \mathbb{Z}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 20x + 16z &= 190 - 15(2 + 4t) \\ 20x + 16z &= 190 - 30 - 60t \\ 20x + 16z &= 160 - 60t \\ 5x + 4z &= 40 - 15t \\ 5x + 15t &= 40 - 4z \\ 5(x + 3t) &= 4(10 - z) \end{aligned}$$

ฉะนั้น $5 \mid 4(10-z)$ เนื่องจาก $\gcd(5,4)=1$ ดังนั้น $5 \mid (10-z)$ นั่นคือ $10-z=5s$ เมื่อ $s \in \mathbb{Z}$ แล้ว $z=10-5s$
พิจารณา

$$\begin{aligned}5(x+3t) &= 4(10-(10-5s)) = 4(10-10+5s) = 20s \\ x+3t &= 4s \\ x &= 4s-3t\end{aligned}$$

ดังนั้นคำตอบของสมการ $20x+15y+16z=190$ คือ

$$\begin{cases} x &= 4s-3t \\ y &= 2+4t \\ z &= 10-5s \end{cases} \qquad \text{เมื่อ } t,s \in \mathbb{Z}$$

พิจารณา

$$\begin{aligned}&x = 4s-3t > 0 \\ &y = 2+4t > 0 \quad \longrightarrow \quad t > -0.5 \text{ หรือ } t = 0,1,2,... \\ &z = 10-5s > 0 \quad \longrightarrow \quad s < 2 \text{ หรือ } s = 1,0,-1,-2...\end{aligned}$$

พิจารณาจำนวนโยเกิร์ตริชเซสภายใต้เงื่อนไข x,y,z เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ $s=1$

s	1	1
t	0	1
$x=4s-3t$	4	1
$y=2+4t$	2	6
$z=10-5s$	5	5
$20x+15y+16z$	190	190

สรุปเงินทอนที่ได้รับถูกต้องเนื่องจากสมการนี้มีคำตอบเป็นจำนวนเต็มบวก และเป็นไปได้ทั้งหมด 2 แบบ คือ
แบบที่ 1 โยเกิร์ตบัลแกเรีย 4 ถ้วย โยเกิร์ตเมจิ 2 ถ้วย และ โยเกิร์ตริชเซส 5 ถ้วย
แบบที่ 2 โยเกิร์ตบัลแกเรีย 1 ถ้วย โยเกิร์ตเมจิ 6 ถ้วย และ โยเกิร์ตริชเซส 5 ถ้วย

9. (10 **คะแนน**) จงตอบคำถามต่อไปนี้

9.1 (5 **คะแนน**) จงหา**สามสิ่งอันดับพีทาโกรัส** (PT) ที่มีจำนวน 60 พร้อมทั้งระบุด้วยว่าสามจำนวนใดเป็นชนิดปฐมฐาน (PPT)

แนวคำตอบ

กรณี $60 = 2(1 \cdot 30) = 2(2 \cdot 15) = 2(3 \cdot 10) = 2(5 \cdot 6) = 2uv$

กรณี $60 = 1 \cdot 60 = 2 \cdot 30 = 3 \cdot 20 = 4 \cdot 15 = 5 \cdot 12 = 6 \cdot 10 = (u - v)(u + v)$ ดังนั้น

$$\begin{array}{rcl|rcl} u - v &=& 2 & u - v &=& 6 \\ u + v &=& 30 & u + v &=& 10 \\ u &=& 16 & u &=& 8 \\ v &=& 14 & v &=& 2 \end{array}$$

ดังนั้นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัสปฐมฐานคือ

u	v	$a = u^2 - v^2$	$b = 2uv$	$c = u^2 + v^2$	
30	1	899	60	901	PPT
15	2	221	60	229	PPT
10	3	91	60	109	PPT
6	5	11	60	61	PPT
16	14	60	448	452	
8	2	60	32	68	

9.2 (5 **คะแนน**) ให้ v เป็นจำนวนเต็มบวก จงพิสูจน์ว่า

$$\{2v + 1, 2v^2 + 2v, 2v^2 + 2v + 1\} \quad \text{เป็นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัส}$$

และยกตัวอย่างสามสิ่งอันดับพีทาโกรัสปฐมฐาน (PPT) ที่ได้จากสูตรดังกล่าวมาอย่างน้อย 5 ชุด

แนวคำตอบ ให้ v เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$\begin{aligned} (2v^2 + 2v + 1)^2 &= (2v^2)^2 + (2v)^2 + 1^2 + 2(2v^2)(2v) + 2(2v^2)1 + 2(2v)(1) \\ &= 4v^4 + 4v^2 + 1 + 8v^3 + 4v^2 + 4v \\ &= (4v^2 + 4v^2 + 1) + (4v^4 + 8v^3 + 4v^2) \\ &= [(2v)^2 + 2(2v) + 1^2] + [(2v^2)^2 + 2(2v^2)(2v) + (2v)^2] \\ &= (2v + 1)^2 + (2v^2 + 2v)^2 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\{2v + 1, 2v^2 + 2v, 2v^2 + 2v + 1\}$ เป็นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัส
แสดงตัวอย่าง สามสิ่งอันดับพีทาโกรัสปฐมฐาน (PPT) ดังต่อไปนี้

v	$a = 2v + 1$	$b = 2v^2 + 2v$	$c = 2v^2 + 2v + 1$
1	3	4	5
2	5	12	13
3	7	24	25
4	9	40	41
5	11	60	61

10. (10 **คะแนน**) จงตอบคำถามต่อไปนี้

10.1 (5 **คะแนน**) จงพิสูจน์ว่า **ไม่มี**จำนวนเต็ม a, b และ c ที่ทำให้

$$\{3a+1, 3b+2, c\} \quad \text{เป็นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัส}$$

ข้อเสนอแนะ : โดยใช้วิธีขัดแย้ง และขั้นตอนวิธีการหาร

แนวคำตอบ สมมติว่ามีจำนวนเต็ม a, b และ c ที่ทำให้ $\{3a+1, 3b+2, c\}$ เป็นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัส จะได้ว่า

$$\begin{aligned} c^2 &= (3a+1)^2 + (3b+2)^2 \\ c^2 &= 9a^2 + 6a + 1 + 9b^2 + 12b + 4 \\ c^2 &= 3(3a^2 + 3b^2 + 2a + 4b + 1) + 2 \\ c^2 - 2 &= 3(3a^2 + 3b^2 + 2a + 4b + 1) \end{aligned}$$

นั่นคือ $3 \mid (c^2 - 2)$ หรือ $c^2 \equiv 2 \pmod 3$
โดยขั้นตอนวิธีการหารจะได้ว่า $c \equiv 0, 1, -1 \pmod 3$ ฉะนั้น

$$c^2 \equiv 0, 1 \pmod 3$$

ดังนั้นเกิดข้อขัดแย้งกับ $c^2 \equiv 2 \pmod 3$ สรุปได้ว่า **ไม่มี**จำนวนเต็ม a, b และ c ที่ทำให้

$$\{3a+1, 3b+2, c\} \quad \text{เป็นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัส}$$

10.2 (5 **คะแนน**) สิ่งที่ได้รับจากวิชาจากวิชาทฤษฎีจำนวน และคุณคิดว่าจะนำไปใช้ในการจัดการเรียนรู้ในระดับชั้นมัธยม อย่างไร