มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
คณะครุศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ข้อสอบปลายภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2564

ชื่อวิชา	พีชคณิตนามธรรม Abstract Algebra
รหัสวิชา	MAC3310
วันเวลาสอบ	วันพฤหัสบดี ที่ 4 พฤศจิกายน 2564 เวลา 13:00 - 16:00
สถานที่สอบ	ห้องเรียนออนไลน์ (โปรแกรม Zoom)
ผู้สอน	ผู้ช่วยศาสตรจารย์ ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย
คะแนน	105 คะแนน คิดเป็น 30%

ข้อ 1

1. **(10 คะแนน)** จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

    1.1 **(5 คะแนน)** ให้ $\varphi : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{C}^*, \cdot)$ นิยามโดย

    $$\varphi(x) = (\cos x + i \sin x)^2$$

    จงตรวจสอบว่า φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน (homomorphism) หรือไม่ และหา Ker(φ)

    1.2 **(5 คะแนน)** ให้ G เป็นกรุปอาบีเลียนซึ่ง $\varphi : G \to G$ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน กำหนดให้

    $$H = \{h \in G : \varphi(h^{-2}) = e\}$$

    จงพิสูจน์ว่า H เป็นกรุปย่อยของ G

1. **(10 คะแนน)** จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

    1.1 **(5 คะแนน)** ให้ $\varphi : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{C}^*, \cdot)$ นิยามโดย

    $$\varphi(x) = (\cos x - i \sin x)^2$$

    จงตรวจสอบว่า φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน (homomorphism) หรือไม่ และหา Ker(φ)

    1.2 **(5 คะแนน)** ให้ G เป็นกรุปอาบีเลียนซึ่ง $\varphi : G \to G$ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน กำหนดให้

    $$H = \{h \in G : \varphi(h^{2}) = e\}$$

    จงพิสูจน์ว่า H เป็นกรุปย่อยของ G

1. **(10 คะแนน)** จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

    1.1 **(5 คะแนน)** ให้ $\varphi : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{C}^*, \cdot)$ นิยามโดย

    $$\varphi(x) = -(\sin x + i \cos x)^2$$

    จงตรวจสอบว่า φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน (homomorphism) หรือไม่ และหา Ker(φ)

    1.2 **(5 คะแนน)** ให้ G เป็นกรุปอาบีเลียนซึ่ง $\varphi : G \to G$ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน กำหนดให้

    $$H = \{h \in G : \varphi(h^{-3}) = e\}$$

    จงพิสูจน์ว่า H เป็นกรุปย่อยของ G

1. **(10 คะแนน)** จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

    1.1 **(5 คะแนน)** ให้ $\varphi : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{C}^*, \cdot)$ นิยามโดย

    $$\varphi(x) = -(\sin x - i \cos x)^2$$

    จงตรวจสอบว่า φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน (homomorphism) หรือไม่ และหา Ker(φ)

    1.2 **(5 คะแนน)** ให้ G เป็นกรุปอาบีเลียนซึ่ง $\varphi : G \to G$ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน กำหนดให้

    $$H = \{h \in G : \varphi(h^{3}) = e\}$$

    จงพิสูจน์ว่า H เป็นกรุปย่อยของ G

ข้อ 2

2. **(10 คะแนน)** จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

   2.1 **(5 คะแนน)** กำหนดให้ $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ นิยามโดย

$$\varphi(x) = (\overline{x^2 + x}, \overline{x^3 + x}) \qquad \text{เมื่อ } x \in \mathbb{Z}$$

   จงพิสูจน์ว่า φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน (homomorphism)
   และใช้ทฤษฎีบทฟังก์ชันสมสัณฐานบทที่หนึ่ง แสดงว่า $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong \{\bar{0}\} \times \mathbb{Z}_3$

   2.2 **(5 คะแนน)** ให้ $K = \{e, a, b, c\}$ แล้ว $(K, *)$ เป็นกรุป โดยนิยาม $*$ ดังต่อไปนี้

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

   จงหากรุปการเรียงสับเปลี่ยนที่สมสัณฐาน (isomorphic) กับ K และเป็นกรุปย่อย (subgroup) ของ S_4

2. **(10 คะแนน)** จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

   2.1 **(5 คะแนน)** กำหนดให้ $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ นิยามโดย

$$\varphi(x) = (\overline{x^2 - x}, \overline{x^3 - 2x}) \qquad \text{เมื่อ } x \in \mathbb{Z}$$

   จงพิสูจน์ว่า φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน (homomorphism)
   และใช้ทฤษฎีบทฟังก์ชันสมสัณฐานบทที่หนึ่ง แสดงว่า $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong \{\bar{0}\} \times \mathbb{Z}_3$

   2.2 **(5 คะแนน)** ให้ $V = \{e, i, j, k\}$ แล้ว $(V, *)$ เป็นกรุป โดยนิยาม $*$ ดังต่อไปนี้

$*$	e	i	j	k
e	e	i	j	k
i	i	e	k	j
j	j	k	e	i
k	k	j	i	e

   จงหากรุปการเรียงสับเปลี่ยนที่สมสัณฐาน (isomorphic) กับ V และเป็นกรุปย่อย (subgroup) ของ S_4

2. **(10 คะแนน)** จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

2.1 **(5 คะแนน)** กำหนดให้ $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ นิยามโดย

$$\varphi(x) = (\overline{x^2 + x}, \overline{x^3 - 2x}) \qquad \text{เมื่อ } x \in \mathbb{Z}$$

จงพิสูจน์ว่า φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน (homomorphism)
และใช้ทฤษฎีบทฟังก์ชันสมสัณฐานบทที่หนึ่ง แสดงว่า $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong \{\bar{0}\} \times \mathbb{Z}_3$

2.2 **(5 คะแนน)** ให้ $K = \{\text{ก}, \text{ข}, \text{ค}, \text{ง}\}$ แล้ว $(K, *)$ เป็นกรุป โดยนิยาม $*$ ดังต่อไปนี้

$*$	ก	ข	ค	ง
ก	ก	ข	ค	ง
ข	ข	ก	ง	ค
ค	ค	ง	ก	ข
ง	ง	ค	ข	ก

จงหากรุปการเรียงสับเปลี่ยนที่สมสัณฐาน (isomorphic) กับ K และเป็นกรุปย่อย (subgroup) ของ S_4

2. **(10 คะแนน)** จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

2.1 **(5 คะแนน)** กำหนดให้ $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ นิยามโดย

$$\varphi(x) = (\overline{x^2 - x}, \overline{x^3 + x}) \qquad \text{เมื่อ } x \in \mathbb{Z}$$

จงพิสูจน์ว่า φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน (homomorphism)
และใช้ทฤษฎีบทฟังก์ชันสมสัณฐานบทที่หนึ่ง แสดงว่า $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong \{\bar{0}\} \times \mathbb{Z}_3$

2.2 **(5 คะแนน)** ให้ $M = \{I, A, B, C\}$ เป็นกรุปย่อยของ $GL_2(\mathbb{R})$ แล้ว โดยที่

$\cdot$	I	A	B	C
I	I	A	B	C
A	A	I	C	B
B	B	C	I	A
C	C	B	A	I

จงหากรุปการเรียงสับเปลี่ยนที่สมสัณฐาน (isomorphic) กับ M และเป็นกรุปย่อย (subgroup) ของ S_4

ข้อ 3

3. (10 **คะแนน**) จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

3.1 (5 **คะแนน**) ให้ $(R, +, \cdot)$ เป็นริง และ $x \in R$ นิยามการดำเนินการใหม่คือ

$$a \odot b = axb \qquad \text{สำหรับ } a, b \in R$$

จงพิสูจน์ว่า $(R, +, \odot)$ เป็นริง (axb หมายถึง $a \cdot x \cdot b$)

3.2 (5 **คะแนน**) ให้ R เป็นริง และ $a, b \in R$ จงแสดงว่า

$$\text{ถ้า} \quad ab = a \quad \text{และ} \quad ba = b \quad \text{แล้ว} \quad a^4 = a$$

3. (10 **คะแนน**) จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

3.1 (5 **คะแนน**) ให้ $(R, +, \cdot)$ เป็นริง และ $y \in R$ นิยามการดำเนินการใหม่คือ

$$a \odot b = ayb \qquad \text{สำหรับ } a, b \in R$$

จงพิสูจน์ว่า $(R, +, \odot)$ เป็นริง (axb หมายถึง $a \cdot y \cdot b$)

3.2 (5 **คะแนน**) ให้ R เป็นริง และ $a, b \in R$ จงแสดงว่า

$$\text{ถ้า} \quad ab = a \quad \text{และ} \quad ba = b \quad \text{แล้ว} \quad b^4 = b$$

3. (10 **คะแนน**) จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

3.1 (5 **คะแนน**) ให้ $(R, +, \cdot)$ เป็นริง และ $x \in R$ นิยามการดำเนินการใหม่คือ

$$a \odot b = ax^2b \qquad \text{สำหรับ } a, b \in R$$

จงพิสูจน์ว่า $(R, +, \odot)$ เป็นริง (ax^2b หมายถึง $a \cdot x \cdot x \cdot b$)

3.2 (5 **คะแนน**) ให้ R เป็นริง และ $a, b \in R$ จงแสดงว่า

$$\text{ถ้า} \quad ab = a \quad \text{และ} \quad ba = b \quad \text{แล้ว} \quad a^3 = a$$

3. (10 **คะแนน**) จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

3.1 (5 **คะแนน**) ให้ $(R, +, \cdot)$ เป็นริง และ $y \in R$ นิยามการดำเนินการใหม่คือ

$$a \odot b = ay^2b \qquad \text{สำหรับ } a, b \in R$$

จงพิสูจน์ว่า $(R, +, \odot)$ เป็นริง (ay^2b หมายถึง $a \cdot y \cdot y \cdot b$)

3.2 (5 **คะแนน**) ให้ R เป็นริง และ $a, b \in R$ จงแสดงว่า

$$\text{ถ้า} \quad ab = a \quad \text{และ} \quad ba = b \quad \text{แล้ว} \quad b^3 = b$$

ข้อ 4

4. (10 **คะแนน**) จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

4.1 (5 **คะแนน**) จงตรวจสอบว่า

$$I = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \\ z & 0 & w \end{bmatrix} : x, y, z, w \in \mathbb{R} \right\}$$

เป็น **ริงย่อย** (subring) และ/หรือ **ไอดีล** (ideal) ของ $M_{33}(\mathbb{R})$ หรือไม่

4.2 (5 **คะแนน**) ให้ I และ J เป็นไอดีลของริง R และ $\varphi : R \to (R/I) \times (R/J)$ นิยามโดย

$$\varphi(r) = (I + r, J + r) \quad \text{เมื่อ } r \in R$$

จงแสดงว่า φ เป็น **ฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของริง** (ring homomorphism)

4. (10 **คะแนน**) จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

4.1 (5 **คะแนน**) จงตรวจสอบว่า

$$I = \left\{ \begin{bmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & w \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix} : x, y, z, w, t \in \mathbb{R} \right\}$$

เป็น **ริงย่อย** (subring) และ/หรือ **ไอดีล** (ideal) ของ $M_{33}(\mathbb{R})$ หรือไม่

4.2 (5 **คะแนน**) ให้ I และ J เป็นไอดีลของริง R และ $\varphi : R \to (R/I) \times (R/J)$ นิยามโดย

$$\varphi(r) = (r + I, r + J) \quad \text{เมื่อ } r \in R$$

จงแสดงว่า φ เป็น **ฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของริง** (ring homomorphism)

4. (10 **คะแนน**) จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

4.1 (5 **คะแนน**) จงตรวจสอบว่า

$$I = \left\{ \begin{bmatrix} x & y & z \\ 0 & w & 0 \\ 0 & t & 0 \end{bmatrix} : x, y, z, w, t \in \mathbb{R} \right\}$$

เป็น **ริงย่อย** (subring) และ/หรือ **ไอดีล** (ideal) ของ $M_{33}(\mathbb{R})$ หรือไม่

4.2 (5 **คะแนน**) ให้ I และ J เป็นไอดีลของริง R และ $\varphi : R \to (R/J) \times (R/I)$ นิยามโดย

$$\varphi(r) = (r + J, r + I) \quad \text{เมื่อ } r \in R$$

จงแสดงว่า φ เป็น **ฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของริง** (ring homomorphism)

4. (10 **คะแนน**) จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

4.1 (5 **คะแนน**) จงตรวจสอบว่า

$$I = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & z \\ x & y & w \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix} : x, y, z, w, t \in \mathbb{R} \right\}$$

เป็น **ริงย่อย** (subring) และ/หรือ **ไอดีล** (ideal) ของ $M_{33}(\mathbb{R})$ หรือไม่

4.2 (5 **คะแนน**) ให้ I และ J เป็นไอดีลของริง R และ $\varphi : R \to (R/J) \times (R/I)$ นิยามโดย

$$\varphi(r) = (J + r, I + r) \quad \text{เมื่อ } r \in R$$

จงแสดงว่า φ เป็น **ฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของริง** (ring homomorphism)

ข้อ 5

5. **(15 คะแนน)** จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

   5.1 **(5 คะแนน)** ให้ $\varphi : \mathbb{Z} \to M_{22}(\mathbb{Z}_6)$ นิยามโดย

$$\varphi(a) = \begin{bmatrix} \overline{3a} & 0 \\ 0 & \overline{a} \end{bmatrix}$$

   จงตรวจสอบว่า φ เป็น **ฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของริง** (ring homomorphism) หรือไม่

   5.2 **(10 คะแนน)** ให้ R และ S เป็นริง กำหนดให้ $\varphi : R \to S$ เป็น**ฟังก์ชันสมสัณฐานของริง** (ring isomorphism) จงพิสูจน์ว่า

   ถ้า R เป็นโดเมนเชิงจำนวนเต็ม แล้ว S เป็นโดเมนเชิงจำนวนเต็ม

5. **(15 คะแนน)** จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

   5.1 **(5 คะแนน)** ให้ $\varphi : \mathbb{Z} \to M_{22}(\mathbb{Z}_6)$ นิยามโดย

$$\varphi(a) = \begin{bmatrix} \overline{a} & 0 \\ 0 & \overline{3a} \end{bmatrix}$$

   จงตรวจสอบว่า φ เป็น **ฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของริง** (ring homomorphism) หรือไม่

   5.2 **(10 คะแนน)** ให้ R และ S เป็นริง กำหนดให้ $\varphi : R \to S$ เป็น**ฟังก์ชันสมสัณฐานของริง** (ring isomorphism) จงพิสูจน์ว่า

   ถ้า S เป็นโดเมนเชิงจำนวนเต็ม แล้ว R เป็นโดเมนเชิงจำนวนเต็ม

5. (15 **คะแนน**) จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

5.1 (5 **คะแนน**) ให้ $\varphi : \mathbb{Z} \to M_{22}(\mathbb{Z}_{12})$ นิยามโดย

$$\varphi(a) = \begin{bmatrix} \overline{4a} & 0 \\ 0 & \overline{a} \end{bmatrix}$$

จงตรวจสอบว่า φ เป็น **ฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของริง** (ring homomorphism) หรือไม่

5.2 (10 **คะแนน**) ให้ R และ S เป็นริง กำหนดให้ $\varphi : R \to S$ เป็น**ฟังก์ชันสมสัณฐานของริง** (ring isomorphism) จงพิสูจน์ว่า

ถ้า R เป็นโดเมนเชิงจำนวนเต็ม แล้ว S เป็นโดเมนเชิงจำนวนเต็ม

5. (15 **คะแนน**) จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

5.1 (5 **คะแนน**) ให้ $\varphi : \mathbb{Z} \to M_{22}(\mathbb{Z}_{12})$ นิยามโดย

$$\varphi(a) = \begin{bmatrix} \overline{a} & 0 \\ 0 & \overline{4a} \end{bmatrix}$$

จงตรวจสอบว่า φ เป็น **ฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของริง** (ring homomorphism) หรือไม่

5.2 (10 **คะแนน**) ให้ R และ S เป็นริง กำหนดให้ $\varphi : R \to S$ เป็น**ฟังก์ชันสมสัณฐานของริง** (ring isomorphism) จงพิสูจน์ว่า

ถ้า S เป็นโดเมนเชิงจำนวนเต็ม แล้ว R เป็นโดเมนเชิงจำนวนเต็ม

ข้อ 6

6. (10 **คะแนน**) จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

6.1 (5 **คะแนน**) ให้ R เป็นริงซึ่งมี $1 \neq 0$ และ $a, b \in R$ ซึ่ง $ab = 1$ จงแสดงว่า

ถ้า a ไม่เป็นตัวหารศูนย์ แล้ว $ba = 1$

6.2 (5 **คะแนน**) จงหาจำนวนไอดีลทั้งหมดที่ **ไม่ใช่**ไอดีลเฉพาะ (prime ideal) ของ $\mathbb{Z}_{1600}$

6. (10 **คะแนน**) จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

6.1 (5 **คะแนน**) ให้ R เป็นริงซึ่งมี $1 \neq 0$ และ $a, b \in R$ ซึ่ง $ba = 1$ จงแสดงว่า

ถ้า a ไม่เป็นตัวหารศูนย์ แล้ว $ab = 1$

6.2 (5 **คะแนน**) จงหาจำนวนไอดีลทั้งหมดที่ **ไม่ใช่**ไอดีลเฉพาะ (prime ideal) ของ $\mathbb{Z}_{2500}$

6. (10 **คะแนน**) จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

6.1 (5 **คะแนน**) ให้ R เป็นริงซึ่งมี $1 \neq 0$ และ $a, b \in R$ ซึ่ง $ab = 1$ จงแสดงว่า

ถ้า a ไม่เป็นตัวหารศูนย์ แล้ว $ba = 1$

6.2 (5 **คะแนน**)จงหาจำนวนไอดีลทั้งหมดที่ **ไม่ใช่**ไอดีลเฉพาะ (prime ideal) ของ $\mathbb{Z}_{4900}$

6. (10 **คะแนน**) จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

6.1 (5 **คะแนน**) ให้ R เป็นริงซึ่งมี $1 \neq 0$ และ $a, b \in R$ ซึ่ง $ba = 1$ จงแสดงว่า

ถ้า a ไม่เป็นตัวหารศูนย์ แล้ว $ab = 1$

6.2 (5 **คะแนน**) จงหาจำนวนไอดีลทั้งหมดที่ **ไม่ใช่**ไอดีลเฉพาะ (prime ideal) ของ $\mathbb{Z}_{3600}$

ข้อ 7

7. (10 **คะแนน**) จงหา**ไอดีลใหญ่สุด** (maximal ideal) โดยการเขียนแลตทิซของ

$$\mathbb{Z}_{14} \times \mathbb{Z}_5$$

7. (10 **คะแนน**) จงหา**ไอดีลใหญ่สุด** (maximal ideal) โดยการเขียนแลตทิซของ

$$\mathbb{Z}_{14} \times \mathbb{Z}_{11}$$

7. (10 **คะแนน**) จงหา**ไอดีลใหญ่สุด** (maximal ideal) โดยการเขียนแลตทิซของ

$$\mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{11}$$

7. (10 **คะแนน**) จงหา**ไอดีลใหญ่สุด** (maximal ideal) โดยการเขียนแลตทิซของ

$$\mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_7$$

ข้อ 8

8. (10 **คะแนน**) จงตรวจสอบว่า

$2 + \sqrt{-3}$ เป็นสมาชิกที่**ลดทอนไม่ได้** (irreducible) ใน $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ หรือไม่

8. (10 **คะแนน**) จงตรวจสอบว่า

4 เป็น **สมาชิกเฉพาะ** (prime element) ใน $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ หรือไม่

8. (10 **คะแนน**) จงแสดงว่า $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ ไม่เป็น U.F.D

8. (10 **คะแนน**) จงแสดงว่า $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$ ไม่เป็น U.F.D

ข้อ 9

9. **(10 คะแนน)** ให้ F เป็นฟิลด์ และ $a, b, c, d \in F$ โดยที่ $p(x) = x^3 + bx^2 + cx + d \in F[x]$ จงพิสูจน์ว่า

$$\text{มี } \alpha \in F \text{ ซึ่ง } (x - \alpha) \mid p(x) \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad p(x) \text{ เป็นพหุนามลดทอนได้}$$

9. **(10 คะแนน)** ให้ F เป็นฟิลด์ และ $a, b, c, d \in F$ โดยที่ $p(x) = x^3 + bx^2 + cx + d \in F[x]$ จงพิสูจน์ว่า

$$p(x) \text{ เป็นพหุนามลดทอนได้} \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad \text{มี } \alpha \in F \text{ ซึ่ง } (x - \alpha) \mid p(x)$$

9. **(10 คะแนน)** ให้ F เป็นฟิลด์ และ $a, b, c, d \in F$ โดยที่ $p(x) = x^3 + bx^2 + cx + d \in F[x]$ จงพิสูจน์ว่า

$$\text{ทุก ๆ } \alpha \in F \text{ ซึ่ง } (x - \alpha) \nmid p(x) \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad p(x) \text{ เป็นพหุนามลดทอนไม่ได้}$$

9. **(10 คะแนน)** ให้ F เป็นฟิลด์ และ $a, b, c, d \in F$ โดยที่ $p(x) = x^3 + bx^2 + cx + d \in F[x]$ จงพิสูจน์ว่า

$$p(x) \text{ เป็นพหุนามลดทอนไม่ได้} \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad \text{ทุก ๆ } \alpha \in F \text{ ซึ่ง } (x - \alpha) \nmid p(x)$$

ข้อ 10

10. **(10 คะแนน)** จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

10.1 **(5 คะแนน)** ใน $\mathbb{Z}_3[x]$ จงหา $a \in \mathbb{Z}_3$ ที่สอดคล้อง

$$(x^2 + x + a)^3 = x^6 + x^3 + \bar{1}$$

10.2 **(5 คะแนน)** ใน $\mathbb{Z}_3[x]/\left\langle x^2 + \bar{1} \right\rangle$ จงหา**ตัวผกผันการคูณ**ของ $\bar{2}x - \bar{1} + \left\langle x^2 + \bar{1} \right\rangle$

10. **(10 คะแนน)** จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

10.1 **(5 คะแนน)** ใน $\mathbb{Z}_3[x]$ จงหา $a \in \mathbb{Z}_3$ ที่สอดคล้อง

$$(x^2 + x + a)^3 = x^6 + x^3 + \bar{2}$$

10.2 **(5 คะแนน)** ใน $\mathbb{Z}_3[x]/\left\langle x^2 + \bar{1} \right\rangle$ จงหา**ตัวผกผันการคูณ**ของ $\bar{2}x - \bar{2} + \left\langle x^2 + \bar{1} \right\rangle$

10. **(10 คะแนน)** จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

10.1 **(5 คะแนน)** ใน $\mathbb{Z}_3[x]$ จงหา $a \in \mathbb{Z}_3$ ที่สอดคล้อง

$$(x^2 + x + a)^3 = x^6 + x^3 - \bar{1}$$

10.2 **(5 คะแนน)** ใน $\mathbb{Z}_3[x]/\left\langle x^2 + \bar{1} \right\rangle$ จงหา**ตัวผกผันการคูณ**ของ $\bar{2}x + \bar{2} + \left\langle x^2 + \bar{1} \right\rangle$

10. **(10 คะแนน)** จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

10.1 **(5 คะแนน)** ใน $\mathbb{Z}_3[x]$ จงหา $a \in \mathbb{Z}_3$ ที่สอดคล้อง

$$(x^2 + x + a)^3 = x^6 + x^3 - \bar{2}$$

10.2 **(5 คะแนน)** ใน $\mathbb{Z}_3[x]/\left\langle x^2 + \bar{1} \right\rangle$ จงหา**ตัวผกผันการคูณ**ของ $\bar{2}x + \bar{1} + \left\langle x^2 + \bar{1} \right\rangle$

เฉลยข้อสอบปลายภาค Abstract Algebra 2564

1. (10 **คะแนน**) จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

   1.1 (5 **คะแนน**) ให้ $\varphi : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{C}^*, \cdot)$ นิยามโดย

$$\varphi(x) = (\cos x + i \sin x)^2$$

จงตรวจสอบว่า φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน (homomorphism) หรือไม่ และหา Ker(φ)

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \cos^2 x + 2i \cos x \sin x + i^2 \sin^2 x\\ &= (\cos^2 x - \sin^2 x) + i(2 \sin x \cos x)\\ &= \cos 2x + i \sin 2x\end{aligned}$$

ให้ $x, y \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\varphi(x+y) &= \cos 2(x+y) + i \sin 2(x+y)\\ &= \cos 2x \cos 2y - \sin 2x \sin 2y + i \sin 2x \cos 2y + i \cos 2x \sin 2y\\ &= \cos 2x(\cos 2y + i \sin 2y) + i \sin 2x(\cos 2y + i \sin 2y)\\ &= (\cos 2x + i \sin 2x)(\cos 2y + i \sin 2y)\\ &= \varphi(x)\varphi(y)\end{aligned}$$

ดังนั้น φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน $\quad \#$

และจะได้ว่า

$$\begin{aligned}\text{Ker}(\varphi) &= \{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) = 1\}\\ &= \{x \in \mathbb{R} : \cos 2x + i \sin 2x = 1\}\\ &= \{x \in \mathbb{R} : \cos 2x = 1 \text{ และ } \sin 2x = 0\}\\ &= \{x \in \mathbb{R} : 2x = 2k\pi \text{ เมื่อ } k \in \mathbb{Z}\}\\ &= \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}\\ &= \langle \pi \rangle \quad \#\end{aligned}$$

   1.2 (5 **คะแนน**) ให้ G เป็นกรุปอาบีเลียนซึ่ง $\varphi : G \to G$ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน กำหนดให้

$$H = \{h \in G : \varphi(h^{-2}) = e\}$$

จงพิสูจน์ว่า H เป็นกรุปย่อยของ G

บทพิสูจน์. สมมติว่า G เป็นกรุปอาบีเลียนซึ่ง $\varphi : G \to G$ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน
จะเห็นว่า $e \in G$ และ

$$\varphi(e^{-2}) = \varphi(e) = e$$

นั่นคือ $e \in H$ ดังนั้น $H \neq \varnothing$
ให้ $a, b \in H$ จะได้ว่า $\varphi(a^{-2}) = e$ และ $\varphi(b^{-2}) = e$ ฉะนั้น

$$\begin{aligned}\varphi((ab^{-1})^{-2}) = \varphi(a^{-2}b^2) = \varphi(a^{-2})\varphi(b^2) &= \varphi(a^{-2})\varphi((b^{-2})^{-1})\\ &= \varphi(a^{-2})(\varphi(b^{-2}))^{-1} = ee^{-1} = e\end{aligned}$$

นั่นคือ $ab^{-1} \in H$ ดังนั้น $H \leq G$ $\square$

1. **(10 คะแนน)** จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

1.1 **(5 คะแนน)** ให้ $\varphi : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{C}^*, \cdot)$ นิยามโดย

$$\varphi(x) = (\cos x - i \sin x)^2$$

จงตรวจสอบว่า φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน (homomorphism) หรือไม่ และหา Ker(φ)
วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \cos^2 x - 2i \cos x \sin x + i^2 \sin^2 x \\ &= (\cos^2 x - \sin^2 x) - i(2 \sin x \cos x) \\ &= \cos 2x - i \sin 2x\end{aligned}$$

ให้ $x, y \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\varphi(x+y) &= \cos 2(x+y) - i \sin 2(x+y) \\ &= \cos 2x \cos 2y - \sin 2x \sin 2y - i \sin 2x \cos 2y - i \cos 2x \sin 2y \\ &= \cos 2x(\cos 2y - i \sin 2y) - i \sin 2x(\cos 2y - i \sin 2y) \\ &= (\cos 2x - i \sin 2x)(\cos 2y - i \sin 2y) \\ &= \varphi(x)\varphi(y)\end{aligned}$$

ดังนั้น φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน $\quad \#$
และจะได้ว่า

$$\begin{aligned}\text{Ker}(\varphi) &= \{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) = 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : \cos 2x - i \sin 2x = 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : \cos 2x = 1 \text{ และ } \sin 2x = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : 2x = 2k\pi \text{ เมื่อ } k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \langle \pi \rangle \quad \#\end{aligned}$$

1.2 **(5 คะแนน)** ให้ G เป็นกรุปอาบีเลียนซึ่ง $\varphi : G \to G$ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน กำหนดให้

$$H = \{h \in G : \varphi(h^2) = e\}$$

จงพิสูจน์ว่า H เป็นกรุปย่อยของ G

บทพิสูจน์. สมมติว่า G เป็นกรุปอาบีเลียนซึ่ง $\varphi : G \to G$ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน
จะเห็นว่า $e \in G$ และ

$$\varphi(e^2) = \varphi(e) = e$$

นั่นคือ $e \in H$ ดังนั้น $H \neq \varnothing$
ให้ $a, b \in H$ จะได้ว่า $\varphi(a^2) = e$ และ $\varphi(b^2) = e$ ฉะนั้น

$$\begin{aligned}\varphi((ab^{-1})^2) = \varphi(a^2 b^{-2}) = \varphi(a^2)\varphi(b^{-2}) &= \varphi(a^2)\varphi((b^2)^{-1}) \\ = \varphi(a^2)(\varphi(b^2))^{-1} &= ee^{-1} = e\end{aligned}$$

นั่นคือ $ab^{-1} \in H$ ดังนั้น $H \leq G$ $\square$

1. (10 **คะแนน**) จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

1.1 (5 **คะแนน**) ให้ $\varphi : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{C}^*, \cdot)$ นิยามโดย

$$\varphi(x) = -(\sin x + i\cos x)^2$$

จงตรวจสอบว่า φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน (homomorphism) หรือไม่ และหา Ker(φ)

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= -\sin^2 x - 2i\sin x\cos x - i^2\cos^2 x \\
&= (\cos^2 x - \sin^2 x) - i(2\sin x\cos x) \\
&= \cos 2x - i\sin 2x
\end{aligned}$$

ให้ $x, y \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\varphi(x+y) &= \cos 2(x+y) - i\sin 2(x+y) \\
&= \cos 2x\cos 2y - \sin 2x\sin 2y - i\sin 2x\cos 2y - i\cos 2x\sin 2y \\
&= \cos 2x(\cos 2y - i\sin 2y) - i\sin 2x(\cos 2y - i\sin 2y) \\
&= (\cos 2x - i\sin 2x)(\cos 2y - i\sin 2y) \\
&= \varphi(x)\varphi(y)
\end{aligned}$$

ดังนั้น φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน $\#$

และจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\text{Ker}(\varphi) &= \{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) = 1\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : \cos 2x - i\sin 2x = 1\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : \cos 2x = 1 \text{ และ } \sin 2x = 0\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : 2x = 2k\pi \text{ เมื่อ } k \in \mathbb{Z}\} \\
&= \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \\
&= \langle \pi \rangle \quad \#
\end{aligned}$$

1.2 (5 **คะแนน**) ให้ G เป็นกรุปอาบีเลียนซึ่ง $\varphi : G \to G$ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน กำหนดให้

$$H = \{h \in G : \varphi(h^{-3}) = e\}$$

จงพิสูจน์ว่า H เป็นกรุปย่อยของ G

บทพิสูจน์. สมมติว่า G เป็นกรุปอาบีเลียนซึ่ง $\varphi : G \to G$ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน
จะเห็นว่า $e \in G$ และ

$$\varphi(e^{-3}) = \varphi(e) = e$$

นั่นคือ $e \in H$ ดังนั้น $H \neq \varnothing$

ให้ $a, b \in H$ จะได้ว่า $\varphi(a^{-3}) = e$ และ $\varphi(b^{-3}) = e$ ฉะนั้น

$$\begin{aligned}
\varphi((ab^{-1})^{-3}) = \varphi(a^{-3}b^3) = \varphi(a^{-3})\varphi(b^3) &= \varphi(a^{-3})\varphi((b^{-3})^{-1}) \\
= \varphi(a^{-3})(\varphi(b^{-3}))^{-1} &= ee^{-1} = e
\end{aligned}$$

นั่นคือ $ab^{-1} \in H$ ดังนั้น $H \leq G$ $\square$

1. **(10 คะแนน)** จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

   1.1 **(5 คะแนน)** ให้ $\varphi : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{C}^*, \cdot)$ นิยามโดย

$$\varphi(x) = -(\sin x - i\cos x)^2$$

จงตรวจสอบว่า φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน (homomorphism) หรือไม่ และหา Ker(φ)

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= -\sin^2 x + 2i\sin x\cos x - i^2\cos^2 x \\ &= (\cos^2 x - \sin^2 x) + i(2\sin x\cos x) \\ &= \cos 2x + i\sin 2x\end{aligned}$$

ให้ $x, y \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\varphi(x+y) &= \cos 2(x+y) + i\sin 2(x+y) \\ &= \cos 2x\cos 2y - \sin 2x\sin 2y + i\sin 2x\cos 2y + i\cos 2x\sin 2y \\ &= \cos 2x(\cos 2y + i\sin 2y) + i\sin 2x(\cos 2y + i\sin 2y) \\ &= (\cos 2x + i\sin 2x)(\cos 2y + i\sin 2y) \\ &= \varphi(x)\varphi(y)\end{aligned}$$

ดังนั้น φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน $\quad\#$

และจะได้ว่า

$$\begin{aligned}\text{Ker}(\varphi) &= \{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) = 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : \cos 2x + i\sin 2x = 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : \cos 2x = 1 \text{ และ } \sin 2x = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : 2x = 2k\pi \text{ เมื่อ } k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \langle \pi \rangle \quad \#\end{aligned}$$

   1.2 **(5 คะแนน)** ให้ G เป็นกรุปอาบีเลียนซึ่ง $\varphi : G \to G$ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน กำหนดให้

$$H = \{h \in G : \varphi(h^3) = e\}$$

จงพิสูจน์ว่า H เป็นกรุปย่อยของ G

บทพิสูจน์. สมมติว่า G เป็นกรุปอาบีเลียนซึ่ง $\varphi : G \to G$ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน
จะเห็นว่า $e \in G$ และ

$$\varphi(e^3) = \varphi(e) = e$$

นั่นคือ $e \in H$ ดังนั้น $H \neq \varnothing$

ให้ $a, b \in H$ จะได้ว่า $\varphi(a^3) = e$ และ $\varphi(b^3) = e$ ฉะนั้น

$$\begin{aligned}\varphi((ab^{-1})^3) = \varphi(a^3b^{-3}) = \varphi(a^3)\varphi(b^{-3}) &= \varphi(a^3)\varphi((b^3)^{-1}) \\ &= \varphi(a^3)(\varphi(b^3))^{-1} = ee^{-1} = e\end{aligned}$$

นั่นคือ $ab^{-1} \in H$ ดังนั้น $H \leq G$ $\quad\square$

ข้อ 2

2. **(10 คะแนน)** จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

2.1 **(5 คะแนน)** กำหนดให้ $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ นิยามโดย

$$\varphi(x) = (\overline{x^2 + x}, \overline{x^3 + x}) \qquad \text{เมื่อ } x \in \mathbb{Z}$$

จงพิสูจน์ว่า φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน (homomorphism)

และใช้ทฤษฎีบทฟังก์ชันสมสัณฐานบทที่หนึ่ง แสดงว่า $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong \{\bar{0}\} \times \mathbb{Z}_3$

วิธีทำ ให้ $x, y \in \mathbb{Z}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\varphi(x+y) &= (\overline{(x+y)^2 + (x+y)}, \overline{(x+y)^3 + (x+y)}) \\
&= (\overline{x^2 + 2xy + y^2 + (x+y)}, \overline{(x^3 + 3xy^2 + 3xy^2 + y^3) + (x+y)}) \\
&= (\overline{x^2 + 2xy + y^2 + (x+y)}, \overline{(x^3 + 3xy^2 + 3xy^2 + y^3) + (x+y)}) \\
&= (\overline{(x^2 + x)} + \overline{(y^2 + y)} + \overline{2xy}, \overline{(x^3 + x)} + \overline{(y^3 + y)} + \overline{3xy^2 + 3xy^2}) \\
&= (\overline{(x^2 + x)} + \overline{(y^2 + y)} + \bar{0}, \overline{(x^3 + x)} + \overline{(y^3 + y)} + \bar{0}) \\
&= (\overline{x^2 + x}, \overline{x^3 + x}) + (\overline{y^2 + y}, \overline{y^3 + y}) \\
&= \varphi(x) + \varphi(y)
\end{aligned}$$

จะเห็นว่า

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}(\varphi) &= \{x \in \mathbb{Z} : \varphi(x) = (\bar{0}, \bar{0})\} \\
&= \{x \in \mathbb{Z} : (\overline{x^2 + x}, \overline{x^3 + x}) = (\bar{0}, \bar{0})\} \\
&= \{x \in \mathbb{Z} : 2 \mid (x^2 + x) \text{ และ } 3 \mid (x^3 + x)\} \\
&= \{x \in \mathbb{Z} : 3 \mid x\} = 3\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\varphi(0) = (\bar{0}, \bar{0})$, $\varphi(1) = (\bar{0}, \bar{2})$ และ $\varphi(2) = (\bar{0}, \bar{1})$

$$\mathrm{Ran}(\varphi) = \{\bar{0}\} \times \mathbb{Z}_3$$

โดยทฤษฎีบทฟังก์ชันสมสันฐานบทที่หนึ่ง จะได้ว่า $\mathbb{Z}/\mathrm{Ker}(\varphi) \cong \mathrm{Ran}(\varphi)$ นั่นคือ

$$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong \{\bar{0}\} \times \mathbb{Z}_3$$

2.2 **(5 คะแนน)** ให้ $K = \{e, a, b, c\}$ แล้ว $(K, *)$ เป็นกรุป โดยนิยาม $*$ ดังต่อไปนี้

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

จงหากรุปการเรียงสับเปลี่ยนที่สมสัณฐาน (isomorphic) กับ K และเป็นกรุปย่อย (subgroup) ของ S_4

วิธีทำ สำหรับ $x \in K$ จะได้ว่า

$$T_e(x) = e * x, \qquad T_a(x) = a * x, \qquad T_b(x) = b * x \qquad \text{และ} \qquad T_c(x) = c * x$$

ดังนั้น $H = \{T_e, T_a, T_b, T_c\}$ เป็นกรุปวิธีเรียงสับเปลี่ยน จะเห็นได้ชัดว่า $(e \mapsto 1, a \mapsto 2, b \mapsto 3, c \mapsto 4)$

$$\begin{aligned}
H &= \left\{ \begin{pmatrix} e & a & b & c \\ e & a & b & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & a & b & c \\ a & e & c & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & a & b & c \\ b & c & e & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & a & b & c \\ c & b & a & e \end{pmatrix} \right\} \\
&\cong \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\} = N
\end{aligned}$$

เนื่องจาก $K \cong H$ และ $H \cong N$ ดังนั้น $K \cong N$ ซึ่ง $N \leq S_4$

2. (10 **คะแนน**) จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

2.1 (5 **คะแนน**) กำหนดให้ $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ นิยามโดย

$$\varphi(x) = (\overline{x^2 - x}, \overline{x^3 - 2x}) \qquad \text{เมื่อ } x \in \mathbb{Z}$$

จงพิสูจน์ว่า φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน (homomorphism)
และใช้ทฤษฎีบทฟังก์ชันสมสัณฐานบทที่หนึ่ง แสดงว่า $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong \{\bar{0}\} \times \mathbb{Z}_3$
วิธีทำ ให้ $x, y \in \mathbb{Z}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\varphi(x+y) &= (\overline{(x+y)^2 - (x+y)}, \overline{(x+y)^3 - 2(x+y)}) \\
&= (\overline{x^2 + 2xy + y^2 - (x+y)}, \overline{(x^3 + 3xy^2 + 3xy^2 + y^3) - 2(x+y)}) \\
&= (\overline{x^2 + 2xy + y^2 - (x+y)}, \overline{(x^3 + 3xy^2 + 3xy^2 + y^3) - 2(x+y)}) \\
&= (\overline{(x^2 - x)} + \overline{(y^2 - y)} + \overline{2xy}, \overline{(x^3 - 2x)} + \overline{(y^3 - 2y)} + \overline{3xy^2 + 3xy^2}) \\
&= (\overline{(x^2 - x)} + \overline{(y^2 - y)} + \bar{0}, \overline{(x^3 - 2x)} + \overline{(y^3 - 2y)} + \bar{0}) \\
&= (\overline{x^2 - x}, \overline{x^3 - 2x}) + (\overline{y^2 - 2y}, \overline{y^3 - 2y}) \\
&= \varphi(x) + \varphi(y)
\end{aligned}$$

จะเห็นว่า

$$\begin{aligned}
\text{Ker}(\varphi) &= \{x \in \mathbb{Z} : \varphi(x) = (\bar{0}, \bar{0})\} \\
&= \{x \in \mathbb{Z} : (\overline{x^2 - x}, \overline{x^3 - 2x}) = (\bar{0}, \bar{0})\} \\
&= \{x \in \mathbb{Z} : 2 \mid (x^2 - x) \text{ และ } 3 \mid (x^3 - 2x)\} \\
&= \{x \in \mathbb{Z} : 3 \mid x\} = 3\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\varphi(0) = (\bar{0}, \bar{0}), \varphi(1) = (\bar{0}, \bar{2})$ และ $\varphi(2) = (\bar{0}, \bar{1})$

$$\text{Ran}(\varphi) = \{\bar{0}\} \times \mathbb{Z}_3$$

โดยทฤษฎีบทฟังก์ชันสมสัณฐานบทที่หนึ่ง จะได้ว่า $\mathbb{Z}/\text{Ker}(\varphi) \cong \text{Ran}(\varphi)$ นั่นคือ

$$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong \{\bar{0}\} \times \mathbb{Z}_3$$

2.2 (5 **คะแนน**) ให้ $V = \{e, i, j, k\}$ แล้ว $(V, *)$ เป็นกรุป โดยนิยาม $*$ ดังต่อไปนี้

$*$	e	i	j	k
e	e	i	j	k
i	i	e	k	j
j	j	k	e	i
k	k	j	i	e

จงหากรุปการเรียงสับเปลี่ยนที่สมสัณฐาน (isomorphic) กับ V และเป็นกรุปย่อย (subgroup) ของ S_4
วิธีทำ สำหรับ $x \in V$ จะได้ว่า

$$T_e(x) = e * x, \qquad T_i(x) = i * x, \qquad T_j(x) = j * x \qquad \text{และ} \qquad T_k(x) = k * x$$

ดังนั้น $H = \{T_e, T_i, T_j, T_k\}$ เป็นกรุปวิธีเรียงสับเปลี่ยน จะเห็นได้ชัดว่า $(e \mapsto 1, i \mapsto 2, j \mapsto 3, k \mapsto 4)$

$$\begin{aligned}
H &= \left\{ \begin{pmatrix} e & i & j & k \\ e & i & j & k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & i & j & k \\ i & e & k & j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & i & j & k \\ j & k & e & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & i & j & k \\ k & j & i & e \end{pmatrix} \right\} \\
&\cong \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\} = N
\end{aligned}$$

เนื่องจาก $V \cong H$ และ $H \cong N$ ดังนั้น $V \cong N$ ซึ่ง $N \leq S_4$

2. (10 **คะแนน**) จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

2.1 (5 **คะแนน**) กำหนดให้ $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ นิยามโดย

$$\varphi(x) = (\overline{x^2 + x}, \overline{x^3 - 2x}) \qquad \text{เมื่อ } x \in \mathbb{Z}$$

จงพิสูจน์ว่า φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน (homomorphism)
และใช้ทฤษฎีบทฟังก์ชันสมสัณฐานบทที่หนึ่ง แสดงว่า $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong \{\bar{0}\} \times \mathbb{Z}_3$
วิธีทำ ให้ $x, y \in \mathbb{Z}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\varphi(x+y) &= (\overline{(x+y)^2 + (x+y)}, \overline{(x+y)^3 - 2(x+y)}) \\
&= (\overline{x^2 + 2xy + y^2 + (x+y)}, \overline{(x^3 + 3xy^2 + 3xy^2 + y^3) - 2(x+y)}) \\
&= (\overline{x^2 + 2xy + y^2 + (x+y)}, \overline{(x^3 + 3xy^2 + 3xy^2 + y^3) - 2(x+y)}) \\
&= (\overline{(x^2 + x)} + \overline{(y^2 + y)} + \overline{2xy}, \overline{(x^3 - 2x)} + \overline{(y^3 - 2y)} + \overline{3xy^2 + 3xy^2}) \\
&= (\overline{(x^2 + x)} + \overline{(y^2 + y)} + \bar{0}, \overline{(x^3 - 2x)} + \overline{(y^3 - 2y)} + \bar{0}) \\
&= (\overline{x^2 + x}, \overline{x^3 - 2x}) + (\overline{y^2 + y}, \overline{y^3 - 2y}) \\
&= \varphi(x) + \varphi(y)
\end{aligned}$$

จะเห็นว่า

$$\begin{aligned}
\text{Ker}(\varphi) &= \{x \in \mathbb{Z} : \varphi(x) = (\bar{0}, \bar{0})\} \\
&= \{x \in \mathbb{Z} : (\overline{x^2 + x}, \overline{x^3 - 2x}) = (\bar{0}, \bar{0})\} \\
&= \{x \in \mathbb{Z} : 2 \mid (x^2 + x) \text{ และ } 3 \mid (x^3 - 2x)\} \\
&= \{x \in \mathbb{Z} : 3 \mid x\} = 3\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\varphi(0) = (\bar{0}, \bar{0}), \varphi(1) = (\bar{0}, \bar{2})$ และ $\varphi(2) = (\bar{0}, \bar{1})$

$$\text{Ran}(\varphi) = \{\bar{0}\} \times \mathbb{Z}_3$$

โดยทฤษฎีบทฟังก์ชันสมสัณฐานบทที่หนึ่ง จะได้ว่า $\mathbb{Z}/\text{Ker}(\varphi) \cong \text{Ran}(\varphi)$ นั่นคือ

$$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong \{\bar{0}\} \times \mathbb{Z}_3$$

2.2 (5 **คะแนน**) ให้ $K = \{$ก, ข, ค, ง$\}$ แล้ว $(K, *)$ เป็นกรุป โดยนิยาม $*$ ดังต่อไปนี้

$*$	ก	ข	ค	ง
ก	ก	ข	ค	ง
ข	ข	ก	ง	ค
ค	ค	ง	ก	ข
ง	ง	ค	ข	ก

จงหากรุปการเรียงสับเปลี่ยนที่สมสัณฐาน (isomorphic) กับ K และเป็นกรุปย่อย (subgroup) ของ S_4
วิธีทำ สำหรับ $x \in K$ จะได้ว่า

$$T_{\text{ก}}(x) = \text{ก} * x, \qquad T_{\text{ข}}(x) = \text{ข} * x, \qquad T_{\text{ค}}(x) = \text{ค} * x \qquad \text{และ} \qquad T_{\text{ง}}(x) = \text{ง} * x$$

ดังนั้น $H = \{T_e, T_i, T_j, T_k\}$ เป็นกรุปวิธีเรียงสับเปลี่ยน จะเห็นได้ชัดว่า (ก $\mapsto 1$, ข $\mapsto 2$, ค $\mapsto 3$, ง $\mapsto 4$)

$$\begin{aligned}
H &= \left\{ \begin{pmatrix} \text{ก} & \text{ข} & \text{ค} & \text{ง} \\ \text{ก} & \text{ข} & \text{ค} & \text{ง} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \text{ก} & \text{ข} & \text{ค} & \text{ง} \\ \text{ข} & \text{ก} & \text{ง} & \text{ค} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \text{ก} & \text{ข} & \text{ค} & \text{ง} \\ \text{ค} & \text{ง} & \text{ก} & \text{ข} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \text{ก} & \text{ข} & \text{ค} & \text{ง} \\ \text{ง} & \text{ค} & \text{ข} & \text{ก} \end{pmatrix} \right\} \\
&\cong \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\} = N
\end{aligned}$$

เนื่องจาก $K \cong H$ และ $H \cong N$ ดังนั้น $K \cong N$ ซึ่ง $N \leq S_4$

2. **(10 คะแนน)** จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

2.1 **(5 คะแนน)** กำหนดให้ $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ นิยามโดย

$$\varphi(x) = (\overline{x^2 - x}, \overline{x^3 + x}) \qquad \text{เมื่อ } x \in \mathbb{Z}$$

จงพิสูจน์ว่า φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน (homomorphism)
และใช้ทฤษฎีบทฟังก์ชันสมสัณฐานบทที่หนึ่ง แสดงว่า $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong \{\bar{0}\} \times \mathbb{Z}_3$
วิธีทำ ให้ $x, y \in \mathbb{Z}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\varphi(x+y) &= (\overline{(x+y)^2 - (x+y)}, \overline{(x+y)^3 + (x+y)}) \\
&= (\overline{x^2 + 2xy + y^2 - (x+y)}, \overline{(x^3 + 3xy^2 + 3xy^2 + y^3) + (x+y)}) \\
&= (\overline{x^2 + 2xy + y^2 - (x+y)}, \overline{(x^3 + 3xy^2 + 3xy^2 + y^3) + (x+y)}) \\
&= (\overline{(x^2 - x)} + \overline{(y^2 - y)} + \overline{2xy}, \overline{(x^3 + x)} + \overline{(y^3 + y)} + \overline{3xy^2 + 3xy^2}) \\
&= (\overline{(x^2 - x)} + \overline{(y^2 - y)} + \bar{0}, \overline{(x^3 + x)} + \overline{(y^3 + y)} + \bar{0}) \\
&= (\overline{x^2 - x}, \overline{x^3 - x}) + (\overline{y^2 - y}, \overline{y^3 + y}) \\
&= \varphi(x) + \varphi(y)
\end{aligned}$$

จะเห็นว่า

$$\begin{aligned}
\text{Ker}(\varphi) &= \{x \in \mathbb{Z} : \varphi(x) = (\bar{0}, \bar{0})\} \\
&= \{x \in \mathbb{Z} : (\overline{x^2 - x}, \overline{x^3 + x}) = (\bar{0}, \bar{0})\} \\
&= \{x \in \mathbb{Z} : 2 \mid (x^2 - x) \text{ และ } 3 \mid (x^3 + x)\} \\
&= \{x \in \mathbb{Z} : 3 \mid x\} = 3\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\varphi(0) = (\bar{0}, \bar{0}), \varphi(1) = (\bar{0}, \bar{2})$ และ $\varphi(2) = (\bar{0}, \bar{1})$

$$\text{Ran}(\varphi) = \{\bar{0}\} \times \mathbb{Z}_3$$

โดยทฤษฎีบทฟังก์ชันสมสันฐานบทที่หนึ่ง จะได้ว่า $\mathbb{Z}/\text{Ker}(\varphi) \cong \text{Ran}(\varphi)$ นั่นคือ

$$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong \{\bar{0}\} \times \mathbb{Z}_3$$

2.2 **(5 คะแนน)** ให้ $M = \{I, A, B, C\}$ เป็นกรุปย่อยของ $GL_2(\mathbb{R})$ แล้ว โดยที่

$\cdot$	I	A	B	C
I	I	A	B	C
A	A	I	C	B
B	B	C	I	A
C	C	B	A	I

จงหากรุปการเรียงสับเปลี่ยนที่สมสัณฐาน (isomorphic) กับ M และเป็นกรุปย่อย (subgroup) ของ S_4
วิธีทำ สำหรับ $X \in M$ จะได้ว่า

$$T_I(X) = IX, \quad T_A(X) = AX, \quad T_B(X) = BX \quad \text{และ} \quad T_C(X) = CX$$

ดังนั้น $H = \{T_I, T_A, T_B, T_C\}$ เป็นกรุปวิธีเรียงสับเปลี่ยน จะเห็นได้ชัดว่า $(I \mapsto 1, A \mapsto 2, B \mapsto 3, C \mapsto 4)$

$$\begin{aligned}
H &= \left\{ \begin{pmatrix} I & A & B & C \\ I & A & B & C \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I & A & B & C \\ A & I & C & B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I & A & B & C \\ B & C & I & A \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I & A & B & C \\ C & B & A & I \end{pmatrix} \right\} \\
&\cong \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\} = N
\end{aligned}$$

เนื่องจาก $M \cong H$ และ $H \cong N$ ดังนั้น $M \cong N$ ซึ่ง $N \leq S_4$

ข้อ 3

3. **(10 คะแนน)** จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

3.1 **(5 คะแนน)** ให้ $(R,+,\cdot)$ เป็นริง และ $x \in R$ นิยามการดำเนินการใหม่คือ

$$a \odot b = axb \qquad \text{สำหรับ } a,b \in R$$

จงพิสูจน์ว่า $(R,+,\odot)$ เป็นริง (axb หมายถึง $a \cdot x \cdot b$)

บทพิสูจน์. ให้ $(R,+,\cdot)$ เป็นริง และ $x \in R$
จะเห็นว่า $(R,+)$ เป็นกรุปอาบีเลียน เพียงพอที่จะแสดงว่า $(R,\odot)$ เป็นกึ่งกรุป
ให้ $a,b,c \in R$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} a \odot (b \odot c) &= a \odot (bxc) = ax(bxc) \\ &= (axb)xc = (axb) \odot c \\ &= (a \odot b) \odot c \end{aligned}$$

ดังนั้น $\odot$ มีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม

$$\begin{aligned} a \odot (b+c) = ax(b+c) = axb + axc = (a \odot b) + (a \odot c) \\ (b+c) \odot a = (b+c)xa = bxa + cxa = (b \odot a) + (c \odot a) \end{aligned}$$

ดังนั้น $\odot$ มีสมบัติการแจกแจง สรุปได้ว่า $(R,+,\odot)$ เป็นริง $\square$

3.2 **(5 คะแนน)** ให้ R เป็นริง และ $a,b \in R$ จงแสดงว่า

$$\text{ถ้า } \; ab = a \; \text{ และ } \; ba = b \; \text{ แล้ว } \; a^4 = a$$

บทพิสูจน์. ให้ $a,b \in R$ สมมติว่า $ab = a$ และ $ba = b$ จะได้ว่า

$$a^2 = aa = (ab)a = a(ba) = a(b) = ab = a$$

ดังนั้น

$$a^4 = a^2a^2 = aa = a^2 = a$$

$\square$

3. (10 **คะแนน**) จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

3.1 (5 **คะแนน**) ให้ $(R, +, \cdot)$ เป็นริง และ $y \in R$ นิยามการดำเนินการใหม่คือ

$$a \odot b = ayb \qquad \text{สำหรับ } a, b \in R$$

จงพิสูจน์ว่า $(R, +, \odot)$ เป็นริง (axb หมายถึง $a \cdot y \cdot b$)

บทพิสูจน์. ให้ $(R, +, \cdot)$ เป็นริง และ $y \in R$
จะเห็นว่า $(R, +)$ เป็นกรุปอาบีเลียน เพียงพอที่จะแสดงว่า $(R, \odot)$ เป็นกึ่งกรุป
ให้ $a, b, c \in R$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} a \odot (b \odot c) &= a \odot (byc) = ay(byc) \\ &= (ayb)yc = (ayb) \odot c \\ &= (a \odot b) \odot c \end{aligned}$$

ดังนั้น $\odot$ มีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม

$$\begin{aligned} a \odot (b + c) = ay(b + c) = ayb + ayc = (a \odot b) + (a \odot c) \\ (b + c) \odot a = (b + c)ya = bya + cya = (b \odot a) + (c \odot a) \end{aligned}$$

ดังนั้น $\odot$ มีสมบัติการแจกแจง สรุปได้ว่า $(R, +, \odot)$ เป็นริง $\square$

3.2 (5 **คะแนน**) ให้ R เป็นริง และ $a, b \in R$ จงแสดงว่า

$$\text{ถ้า } \ ab = a \ \text{ และ } \ ba = b \ \text{ แล้ว } \ b^4 = b$$

บทพิสูจน์. ให้ $a, b \in R$ สมมติว่า $ab = a$ และ $ba = b$ จะได้ว่า

$$b^2 = bb = (ba)b = b(ab) = b(a) = ba = b$$

ดังนั้น

$$b^4 = b^2 b^2 = bb = b^2 = b$$

$\square$

3. (10 **คะแนน**) จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

3.1 (5 **คะแนน**) ให้ $(R, +, \cdot)$ เป็นริง และ $x \in R$ นิยามการดำเนินการใหม่คือ

$$a \odot b = ax^2b \qquad \text{สำหรับ } a, b \in R$$

จงพิสูจน์ว่า $(R, +, \odot)$ เป็นริง (ax^2b หมายถึง $a \cdot x \cdot x \cdot b$)

บทพิสูจน์. ให้ $(R, +, \cdot)$ เป็นริง และ $x \in R$
จะเห็นว่า $(R, +)$ เป็นกรุปอาบีเลียน เพียงพอที่จะแสดงว่า $(R, \odot)$ เป็นกึ่งกรุป
ให้ $a, b, c \in R$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} a \odot (b \odot c) &= a \odot (bx^2c) = ax^2(bx^2c) \\ &= (ax^2b)x^2c = (ax^2b) \odot c \\ &= (a \odot b) \odot c \end{aligned}$$

ดังนั้น $\odot$ มีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม

$$\begin{aligned} a \odot (b + c) = ax^2(b + c) = ax^2b + ax^2c = (a \odot b) + (a \odot c) \\ (b + c) \odot a = (b + c)x^2a = bx^2a + cx^2a = (b \odot a) + (c \odot a) \end{aligned}$$

ดังนั้น $\odot$ มีสมบัติการแจกแจง สรุปได้ว่า $(R, +, \odot)$ เป็นริง $\square$

3.2 (5 **คะแนน**) ให้ R เป็นริง และ $a, b \in R$ จงแสดงว่า

$$\text{ถ้า} \quad ab = a \quad \text{และ} \quad ba = b \quad \text{แล้ว} \quad a^3 = a$$

บทพิสูจน์. ให้ $a, b \in R$ สมมติว่า $ab = a$ และ $ba = b$ จะได้ว่า

$$a^2 = aa = (ab)a = a(ba) = a(b) = ab = a$$

ดังนั้น

$$a^3 = a^2a = (a)a = a^2 = a$$

$\square$

3. (10 **คะแนน**) จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

3.1 (5 **คะแนน**) ให้ $(R, +, \cdot)$ เป็นริง และ $y \in R$ นิยามการดำเนินการใหม่คือ

$$a \odot b = ay^2b \qquad \text{สำหรับ } a, b \in R$$

จงพิสูจน์ว่า $(R, +, \odot)$ เป็นริง (ay^2b หมายถึง $a \cdot y \cdot y \cdot b$)

บทพิสูจน์. ให้ $(R, +, \cdot)$ เป็นริง และ $y \in R$
จะเห็นว่า $(R, +)$ เป็นกรุปอาบีเลียน เพียงพอที่จะแสดงว่า $(R, \odot)$ เป็นกึ่งกรุป
ให้ $a, b, c \in R$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} a \odot (b \odot c) &= a \odot (by^2c) = ay^2(by^2c) \\ &= (ay^2b)y^2c = (ay^2b) \odot c \\ &= (a \odot b) \odot c \end{aligned}$$

ดังนั้น $\odot$ มีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม

$$a \odot (b + c) = ay^2(b + c) = ay^2b + ay^2c = (a \odot b) + (a \odot c)$$
$$(b + c) \odot a = (b + c)y^2a = by^2a + cy^2a = (b \odot a) + (c \odot a)$$

ดังนั้น $\odot$ มีสมบัติการแจกแจง สรุปได้ว่า $(R, +, \odot)$ เป็นริง $\square$

3.2 (5 **คะแนน**) ให้ R เป็นริง และ $a, b \in R$ จงแสดงว่า

$$\text{ถ้า} \quad ab = a \quad \text{และ} \quad ba = b \quad \text{แล้ว} \quad b^3 = b$$

บทพิสูจน์. ให้ $a, b \in R$ สมมติว่า $ab = a$ และ $ba = b$ จะได้ว่า

$$b^2 = bb = (ba)b = b(ab) = b(a) = ba = b$$

ดังนั้น

$$b^3 = b^2b = (b)b = b^2 = b$$

$\square$

ข้อ 4

4. (10 **คะแนน**) จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

4.1 (5 **คะแนน**) จงตรวจสอบว่า

$$I = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \\ z & 0 & w \end{bmatrix} : x, y, z, w \in \mathbb{R} \right\}$$

เป็น **ริงย่อย** (subring) และ/หรือ **ไอดีล** (ideal) ของ $M_{33}(\mathbb{R})$ หรือไม่

วิธีทำ ให้ $\begin{bmatrix} x & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \\ z & 0 & w \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & d \end{bmatrix}$ เป็นสมาชิกใน I จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} x & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \\ z & 0 & w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+a & 0 & y+b \\ 0 & 0 & 0 \\ z+c & 0 & w+d \end{bmatrix} \in I$$

$$\begin{bmatrix} x & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \\ z & 0 & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xa+yc & 0 & xb+yd \\ 0 & 0 & 0 \\ za+wc & 0 & zb+wd \end{bmatrix} \in I$$

ดังนั้น I เป็นริงย่อยของ $M_{33}(\mathbb{R})$

จะเห็นว่า

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \notin I$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \notin I$$

นั่นคือ I ไม่เป็นไอดีลขวา และไอดีลซ้าย $M_{33}(\mathbb{R})$ ดังนั้น I ไม่เป็นไอดีลของ $M_{33}(\mathbb{R})$

4.2 (5 **คะแนน**) ให้ I และ J เป็นไอดีลของริง R และ $\varphi : R \to (R/I) \times (R/J)$ นิยามโดย

$$\varphi(r) = (I + r, J + r) \quad \text{เมื่อ } r \in R$$

จงแสดงว่า φ เป็น **ฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของริง** (ring homomorphism)

บทพิสูจน์. ให้ $a, b \in R$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \varphi(a+b) &= (I + (a+b), J + (a+b)) \\ &= ((I+a) + (I+b), (J+a) + (J+b)) \\ &= (I+a, J+a) + (I+b, J+b) \\ &= \varphi(a) + \varphi(b) \\ \varphi(ab) &= (I + (ab), J + (ab)) \\ &= ((I+a)(I+b), (J+a)(J+b)) \\ &= (I+a, J+a)(I+b, J+b) \\ &= \varphi(a)\varphi(b) \end{aligned}$$

ดังนั้น φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของริง $\square$

4. (10 **คะแนน**) จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

4.1 (5 **คะแนน**) จงตรวจสอบว่า

$$I = \left\{ \begin{bmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & w \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix} : x, y, z, w, t \in \mathbb{R} \right\}$$

เป็น **ริงย่อย** (subring) และ/หรือ **ไอดีล** (ideal) ของ $M_{33}(\mathbb{R})$ หรือไม่

วิธีทำ ให้ $\begin{bmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & w \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix}$ เป็นสมาชิกใน I จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & w \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+a & y+b & z+c \\ 0 & 0 & w+d \\ 0 & 0 & t+e \end{bmatrix} \in I$$

$$\begin{bmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & w \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xa & xb & xc+yd+ze \\ 0 & 0 & we \\ 0 & 0 & te \end{bmatrix} \in I$$

ดังนั้น I เป็นริงย่อยของ $M_{33}(\mathbb{R})$
จะเห็นว่า

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \notin I$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \notin I$$

นั่นคือ I ไม่เป็นไอดีลขวา และไอดีลซ้าย $M_{33}(\mathbb{R})$ ดังนั้น I ไม่เป็นไอดีลของ $M_{33}(\mathbb{R})$

4.2 (5 **คะแนน**) ให้ I และ J เป็นไอดีลของริง R และ $\varphi : R \to (R/I) \times (R/J)$ นิยามโดย

$$\varphi(r) = (r + I, r + J) \quad \text{เมื่อ } r \in R$$

จงแสดงว่า φ เป็น **ฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของริง** (ring homomorphism)

บทพิสูจน์. ให้ $a, b \in R$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \varphi(a+b) &= ((a+b)+I, (a+b)+J) \\ &= ((a+I)+(b+I), (a+J)+(b+J)) \\ &= (a+I, a+J) + (b+I, b+J) \\ &= \varphi(a) + \varphi(b) \\ \varphi(ab) &= ((ab)+I, (ab)+J) \\ &= ((a+I)(b+I), (a+J)(b+J)) \\ &= (a+I, a+J)(b+I, b+J) \\ &= \varphi(a)\varphi(b) \end{aligned}$$

ดังนั้น φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของริง $\square$

4. (10 **คะแนน**) จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

4.1 (5 **คะแนน**) จงตรวจสอบว่า

$$I = \left\{ \begin{bmatrix} x & y & z \\ 0 & w & 0 \\ 0 & t & 0 \end{bmatrix} : x, y, z, w, t \in \mathbb{R} \right\}$$

เป็น **ริงย่อย** (subring) และ/หรือ **ไอดีล** (ideal) ของ $M_{33}(\mathbb{R})$ หรือไม่

วิธีทำ ให้ $\begin{bmatrix} x & y & z \\ 0 & w & 0 \\ 0 & t & 0 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & 0 \\ 0 & e & 0 \end{bmatrix}$ เป็นสมาชิกใน I จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} x & y & z \\ 0 & w & 0 \\ 0 & t & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & 0 \\ 0 & e & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+a & y+b & z+c \\ 0 & w+d & 0 \\ 0 & t+e & 0 \end{bmatrix} \in I$$

$$\begin{bmatrix} x & y & z \\ 0 & w & 0 \\ 0 & t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & 0 \\ 0 & e & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xa & xb+yd+ze & xc \\ 0 & wd & 0 \\ 0 & te & 0 \end{bmatrix} \in I$$

ดังนั้น I เป็นริงย่อยของ $M_{33}(\mathbb{R})$

จะเห็นว่า

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \notin I$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \notin I$$

นั่นคือ I ไม่เป็นไอดีลขวา และไอดีลซ้าย $M_{33}(\mathbb{R})$ ดังนั้น I ไม่เป็นไอดีลของ $M_{33}(\mathbb{R})$

4.2 (5 **คะแนน**) ให้ I และ J เป็นไอดีลของริง R และ $\varphi : R \to (R/J) \times (R/I)$ นิยามโดย

$$\varphi(r) = (r+J, r+I) \quad \text{เมื่อ } r \in R$$

จงแสดงว่า φ เป็น **ฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของริง** (ring homomorphism)

บทพิสูจน์. ให้ $a, b \in R$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \varphi(a+b) &= ((a+b)+J, (a+b)+I) \\ &= ((a+J)+(b+J), (a+I)+(b+I)) \\ &= (a+J, a+I) + (b+J, b+I) \\ &= \varphi(a) + \varphi(b) \\ \varphi(ab) &= ((ab)+J, (ab)+I) \\ &= ((a+J)(b+J), (a+I)(b+I)) \\ &= (a+J, a+I)(b+J, b+I) \\ &= \varphi(a)\varphi(b) \end{aligned}$$

ดังนั้น φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของริง $\square$

4. (10 **คะแนน**) จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

4.1 (5 **คะแนน**) จงตรวจสอบว่า

$$I = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & z \\ x & y & w \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix} : x, y, z, w, t \in \mathbb{R} \right\}$$

เป็น **ริงย่อย** (subring) และ/หรือ **ไอดีล** (ideal) ของ $M_{33}(\mathbb{R})$ หรือไม่

วิธีทำ ให้ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & z \\ x & y & w \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ a & b & d \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix}$ เป็นสมาชิกใน I จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & z \\ x & y & w \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ a & b & d \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & z+c \\ x+a & y+b & w+d \\ 0 & 0 & t+e \end{bmatrix} \in I$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & z \\ x & y & w \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ a & b & d \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & ze \\ ya & yb & xc+yd+we \\ 0 & 0 & te \end{bmatrix} \in I$$

ดังนั้น I เป็นริงย่อยของ $M_{33}(\mathbb{R})$
จะเห็นว่า

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \notin I$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \notin I$$

นั่นคือ I ไม่เป็นไอดีลขวา และไอดีลซ้าย $M_{33}(\mathbb{R})$ ดังนั้น I ไม่เป็นไอดีลของ $M_{33}(\mathbb{R})$

4.2 (5 **คะแนน**) ให้ I และ J เป็นไอดีลของริง R และ $\varphi : R \to (R/J) \times (R/I)$ นิยามโดย

$$\varphi(r) = (J + r, I + r) \quad \text{เมื่อ } r \in R$$

จงแสดงว่า φ เป็น **ฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของริง** (ring homomorphism)

บทพิสูจน์. ให้ $a, b \in R$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \varphi(a+b) &= (J + (a+b), I + (a+b)) \\ &= ((J+a) + (J+b), (I+a) + (I+b)) \\ &= (J+a, I+a) + (J+b, I+b) \\ &= \varphi(a) + \varphi(b) \\ \varphi(ab) &= (J + (ab), I + (ab)) \\ &= ((J+a)(J+b), (I+a)(I+b)) \\ &= (J+a, I+a)(J+b, I+b) \\ &= \varphi(a)\varphi(b) \end{aligned}$$

ดังนั้น φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของริง $\square$

ข้อ 5

5. **(15 คะแนน)** จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

5.1 **(5 คะแนน)** ให้ $\varphi : \mathbb{Z} \to M_{22}(\mathbb{Z}_6)$ นิยามโดย

$$\varphi(a) = \begin{bmatrix} \overline{3a} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{a} \end{bmatrix}$$

จงตรวจสอบว่า φ เป็น **ฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของริง** (ring homomorphism) หรือไม่

วิธีทำ ให้ $a, b \in \mathbb{Z}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\varphi(a+b) &= \begin{bmatrix} \overline{3(a+b)} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{a+b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{3a+3b} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{a+b} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \overline{3a}+\overline{3b} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{a}+\overline{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{3a} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{3b} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{b} \end{bmatrix} = \varphi(a) + \varphi(b) \\
\varphi(ab) &= \begin{bmatrix} \overline{3(ab)} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{ab} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{9ab} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{ab} \end{bmatrix} \qquad \text{เนื่องจาก } \overline{3} = \overline{9} \text{ ใน } \mathbb{Z}_6 \\
&= \begin{bmatrix} \overline{3a}\cdot\overline{3b} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{a}\cdot\overline{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{3a} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{3b} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{b} \end{bmatrix} = \varphi(a)\varphi(b)
\end{aligned}$$

ดังนั้น φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของริง

5.2 **(10 คะแนน)** ให้ R และ S เป็นริง กำหนดให้ $\varphi : R \to S$ เป็น**ฟังก์ชันสมสัณฐานของริง** (ring isomorphism) จงพิสูจน์ว่า

ถ้า R เป็นโดเมนเชิงจำนวนเต็ม แล้ว S เป็นโดเมนเชิงจำนวนเต็ม

บทพิสูจน์. ให้ $\varphi : R \to S$ เป็นฟังก์ชันสมสัณฐานของริง จะได้ว่า φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของริง แบบ 1-1 และทั่วถึง

สมมติว่า R เป็นโดเมนเชิงจำนวนเต็ม ให้ $a, b \in S$ จะได้ว่ามี $x, y \in R$ ซึ่ง $\varphi(x) = a$ และ $\varphi(y) = b$

สมมติว่า $ab = 0_S$ ฉะนั้น

$$0_S = ab = \varphi(x)\varphi(y) = \varphi(xy)$$

นั่นคือ $xy \in \text{Ker}(\varphi)$ เนื่องจาก φ เป็นฟังก์ชัน 1-1 จะได้ว่า $\text{Ker}(\varphi) = \{0_R\}$ หรือ $xy = 0_R$

และเนื่องจาก R เป็นโดเมนเชิงจำนวนเต็ม ฉะนั้น $x = 0_R$ หรือ $y = 0_R$ สรุปได้ว่า

$$a = \varphi(x) = \varphi(0_R) = 0_S \quad \text{หรือ} \quad b = \varphi(y) = \varphi(0_R) = 0_S$$

นั่นคือ S เป็นโดเมนเชิงจำนวนเต็ม $\square$

5. (15 **คะแนน**) จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

5.1 (5 **คะแนน**) ให้ $\varphi : \mathbb{Z} \to M_{22}(\mathbb{Z}_6)$ นิยามโดย

$$\varphi(a) = \begin{bmatrix} \overline{a} & 0 \\ 0 & \overline{3a} \end{bmatrix}$$

จงตรวจสอบว่า φ เป็น **ฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของริง** (ring homomorphism) หรือไม่

วิธีทำ ให้ $a, b \in \mathbb{Z}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\varphi(a+b) &= \begin{bmatrix} \overline{a+b} & 0 \\ 0 & \overline{3(a+b)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{a+b} & 0 \\ 0 & \overline{3a+3b} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \overline{a}+\overline{b} & 0 \\ 0 & \overline{3a}+\overline{3b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{a} & 0 \\ 0 & \overline{3a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{b} & 0 \\ 0 & \overline{3b} \end{bmatrix} = \varphi(a)+\varphi(b) \\
\varphi(ab) &= \begin{bmatrix} \overline{ab} & 0 \\ 0 & \overline{3(ab)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{ab} & 0 \\ 0 & \overline{9ab} \end{bmatrix} & \text{เนื่องจาก } \overline{3} = \overline{9} \text{ ใน } \mathbb{Z}_6 \\
&= \begin{bmatrix} \overline{a}\cdot\overline{b} & 0 \\ 0 & \overline{3a}\cdot\overline{3b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{a} & 0 \\ 0 & \overline{3a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{b} & 0 \\ 0 & \overline{3b} \end{bmatrix} = \varphi(a)\varphi(b)
\end{aligned}$$

ดังนั้น φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของริง

5.2 (10 **คะแนน**) ให้ R และ S เป็นริง กำหนดให้ $\varphi : R \to S$ เป็น**ฟังก์ชันสมสัณฐานของริง** (ring isomorphism) จงพิสูจน์ว่า

ถ้า S เป็นโดเมนเชิงจำนวนเต็ม แล้ว R เป็นโดเมนเชิงจำนวนเต็ม

บทพิสูจน์. ให้ $\varphi : R \to S$ เป็นฟังก์ชันสมสัณฐานของริง จะได้ว่า φ และ φ^{-1} เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของริง แบบ 1-1 และทั่วถึง
สมมติว่า S เป็นโดเมนเชิงจำนวนเต็ม ให้ $a, b \in R$ จะได้ว่ามี $\varphi(a), \varphi(b) \in S$
สมมติว่า $ab = 0_R$ ฉะนั้น

$$\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab) = \varphi(0_R) = 0_S$$

เนื่องจาก S เป็นโดเมนเชิงจำนวนเต็ม ฉะนั้น $\varphi(a) = 0_S$ หรือ $\varphi(b) = 0_S$
นั่นคือ $a \in \text{Ker}(\varphi)$ หรือ $b \in \text{Ker}(\varphi)$ เนื่องจาก φ เป็นฟังก์ชัน 1-1 จะได้ว่า $\text{Ker}(\varphi) = \{0_R\}$ ฉะนั้น

$$a = 0_R \quad \text{หรือ} \quad b = 0_R$$

นั่นคือ R เป็นโดเมนเชิงจำนวนเต็ม □

5. (15 **คะแนน**) จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

5.1 (5 **คะแนน**) ให้ $\varphi : \mathbb{Z} \to M_{22}(\mathbb{Z}_{12})$ นิยามโดย

$$\varphi(a) = \begin{bmatrix} \overline{4a} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{a} \end{bmatrix}$$

จงตรวจสอบว่า φ เป็น **ฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของริง** (ring homomorphism) หรือไม่

วิธีทำ ให้ $a, b \in \mathbb{Z}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\varphi(a+b) &= \begin{bmatrix} \overline{4(a+b)} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{a+b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{4a+4b} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{a+b} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \overline{4a}+\overline{4b} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{a}+\overline{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{4a} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{4b} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{b} \end{bmatrix} = \varphi(a) + \varphi(b) \\
\varphi(ab) &= \begin{bmatrix} \overline{4(ab)} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{ab} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{16ab} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{ab} \end{bmatrix} \qquad \text{เนื่องจาก } \overline{4} = \overline{16} \text{ ใน } \mathbb{Z}_{12} \\
&= \begin{bmatrix} \overline{4a}\cdot\overline{4b} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{a}\cdot\overline{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{4a} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{4b} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{b} \end{bmatrix} = \varphi(a)\varphi(b)
\end{aligned}$$

ดังนั้น φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของริง

5.2 (10 **คะแนน**) ให้ R และ S เป็นริง กำหนดให้ $\varphi : R \to S$ เป็น**ฟังก์ชันสมสัณฐานของริง** (ring isomorphism) จงพิสูจน์ว่า

ถ้า R เป็นโดเมนเชิงจำนวนเต็ม แล้ว S เป็นโดเมนเชิงจำนวนเต็ม

บทพิสูจน์. ให้ $\varphi : R \to S$ เป็นฟังก์ชันสมสัณฐานของริง จะได้ว่า φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของริง แบบ 1-1 และทั่วถึง

สมมติว่า R เป็นโดเมนเชิงจำนวนเต็ม ให้ $a, b \in S$ จะได้ว่ามี $x, y \in R$ ซึ่ง $\varphi(x) = a$ และ $\varphi(y) = b$

สมมติว่า $ab = 0_S$ ฉะนั้น

$$0_S = ab = \varphi(x)\varphi(y) = \varphi(xy)$$

นั่นคือ $xy \in \text{Ker}(\varphi)$ เนื่องจาก φ เป็นฟังก์ชัน 1-1 จะได้ว่า $\text{Ker}(\varphi) = \{0_R\}$ หรือ $xy = 0_R$

และเนื่องจาก R เป็นโดเมนเชิงจำนวนเต็ม ฉะนั้น $x = 0_R$ หรือ $y = 0_R$ สรุปได้ว่า

$$a = \varphi(x) = \varphi(0_R) = 0_S \quad \text{หรือ} \quad b = \varphi(y) = \varphi(0_R) = 0_S$$

นั่นคือ S เป็นโดเมนเชิงจำนวนเต็ม $\square$

5. (15 **คะแนน**) จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

5.1 (5 **คะแนน**) ให้ $\varphi : \mathbb{Z} \to M_{22}(\mathbb{Z}_{12})$ นิยามโดย

$$\varphi(a) = \begin{bmatrix} \overline{a} & 0 \\ 0 & \overline{4a} \end{bmatrix}$$

จงตรวจสอบว่า φ เป็น **ฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของริง** (ring homomorphism) หรือไม่

วิธีทำ ให้ $a, b \in \mathbb{Z}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\varphi(a+b) &= \begin{bmatrix} \overline{a+b} & 0 \\ 0 & \overline{4(a+b)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{a+b} & 0 \\ 0 & \overline{4a+4b} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \overline{a}+\overline{b} & 0 \\ 0 & \overline{4a}+\overline{4b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{a} & 0 \\ 0 & \overline{4a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{b} & 0 \\ 0 & \overline{4b} \end{bmatrix} = \varphi(a)+\varphi(b) \\
\varphi(ab) &= \begin{bmatrix} \overline{ab} & 0 \\ 0 & \overline{4(ab)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{ab} & 0 \\ 0 & \overline{16ab} \end{bmatrix} && \text{เนื่องจาก } \overline{4} = \overline{16} \text{ ใน } \mathbb{Z}_{12} \\
&= \begin{bmatrix} \overline{a}\cdot\overline{b} & 0 \\ 0 & \overline{4a}\cdot\overline{4b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{a} & 0 \\ 0 & \overline{4a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{b} & 0 \\ 0 & \overline{4b} \end{bmatrix} = \varphi(a)\varphi(b)
\end{aligned}$$

ดังนั้น φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของริง

5.2 (10 **คะแนน**) ให้ R และ S เป็นริง กำหนดให้ $\varphi : R \to S$ เป็น**ฟังก์ชันสมสัณฐานของริง** (ring isomorphism) จงพิสูจน์ว่า

ถ้า S เป็นโดเมนเชิงจำนวนเต็ม แล้ว R เป็นโดเมนเชิงจำนวนเต็ม

บทพิสูจน์. ให้ $\varphi : R \to S$ เป็นฟังก์ชันสมสัณฐานของริง จะได้ว่า φ และ φ^{-1} เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของริง แบบ 1-1 และทั่วถึง
สมมติว่า S เป็นโดเมนเชิงจำนวนเต็ม ให้ $a, b \in R$ จะได้ว่ามี $\varphi(a), \varphi(b) \in S$
สมมติว่า $ab = 0_R$ ฉะนั้น

$$\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab) = \varphi(0_R) = 0_S$$

เนื่องจาก S เป็นโดเมนเชิงจำนวนเต็ม ฉะนั้น $\varphi(a) = 0_S$ หรือ $\varphi(b) = 0_S$
นั่นคือ $a \in \text{Ker}(\varphi)$ หรือ $b \in \text{Ker}(\varphi)$ เนื่องจาก φ เป็นฟังก์ชัน 1-1 จะได้ว่า $\text{Ker}(\varphi) = \{0_R\}$ ฉะนั้น

$$a = 0_R \quad \text{หรือ} \quad b = 0_R$$

นั่นคือ R เป็นโดเมนเชิงจำนวนเต็ม $\square$

ข้อ 6

6. (10 **คะแนน**) จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

6.1 (5 **คะแนน**) ให้ R เป็นริงซึ่งมี $1 \neq 0$ และ $a, b \in R$ ซึ่ง $ab = 1$ จงแสดงว่า

ถ้า a ไม่เป็นตัวหารศูนย์ แล้ว $ba = 1$

บทพิสูจน์. ให้ R เป็นริงซึ่งมี $1 \neq 0$ และ $a, b \in R$ ซึ่ง $ab = 1$
สมมติว่า a ไม่เป็นตัวหารศูนย์ จะได้ว่า

$$a(ba - 1) = a(ba) - a = (ab)a - a = 1a - a = a - a = 0$$

ถ้า $ba - 1 \neq 0$ จะขัดแย้งกับ a ไม่เป็นตัวหารศูนย์ ดังนั้น $ba - 1 = 0$ หรือ $ba = 1$ $\square$

6.2 (5 **คะแนน**) จงหาจำนวนไอดีลทั้งหมดที่ **ไม่ใช่**ไอดีลเฉพาะ (prime ideal) ทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_{1600}$
วิธีทำ พิจารณา $1600 = 16 \cdot 100 = 2^4 \cdot 2^2 \cdot 5^2 = 2^6 \cdot 5^2$ จะได้ว่า

$$\tau(1600) = \tau(2^6 \cdot 5^2) = (6 + 1)(2 + 1) = 21$$

ดังนั้น $\mathbb{Z}_{1600}$ มีไอดีสทั้งหมด 21 ไอดีล
และไอดีลเฉพาะมี 2 ไอดีล คือ $\langle \bar{2} \rangle$ และ $\langle \bar{5} \rangle$ ดังนั้น

จำนวนไอดีลทั้งหมดที่ไม่ใช่ไอดีลเฉพาะเท่ากับ $21 - 2 = 19$ #

6. (10 **คะแนน**) จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

6.1 (5 **คะแนน**) ให้ R เป็นริงซึ่งมี $1 \neq 0$ และ $a, b \in R$ ซึ่ง $ba = 1$ จงแสดงว่า

ถ้า a ไม่เป็นตัวหารศูนย์ แล้ว $ab = 1$

บทพิสูจน์. ให้ R เป็นริงซึ่งมี $1 \neq 0$ และ $a, b \in R$ ซึ่ง $ba = 1$
สมมติว่า a ไม่เป็นตัวหารศูนย์ จะได้ว่า

$$(ab - 1)a = (ab)a - a = a(ba) - a = a1 - a = a - a = 0$$

ถ้า $ab - 1 \neq 0$ จะขัดแย้งกับ a ไม่เป็นตัวหารศูนย์ ดังนั้น $ab - 1 = 0$ หรือ $ab = 1$ $\square$

6.2 (5 **คะแนน**) จงหาจำนวนไอดีลทั้งหมดที่ **ไม่ใช่**ไอดีลเฉพาะ (prime ideal) ของ $\mathbb{Z}_{2500}$
วิธีทำ พิจารณา $2500 = 25 \cdot 100 = 5^2 \cdot 2^2 \cdot 5^2 = 2^2 \cdot 5^4$ จะได้ว่า

$$\tau(2500) = \tau(2^2 \cdot 5^4) = (2 + 1)(4 + 1) = 15$$

ดังนั้น $\mathbb{Z}_{2500}$ มีไอดีสทั้งหมด 15 ไอดีล
และไอดีลเฉพาะมี 2 ไอดีล คือ $\langle \bar{2} \rangle$ และ $\langle \bar{5} \rangle$ ดังนั้น

จำนวนไอดีลทั้งหมดที่ไม่ใช่ไอดีลเฉพาะเท่ากับ $15 - 2 = 13$ #

6. **(10 คะแนน)** จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

6.1 **(5 คะแนน)** ให้ R เป็นริงซึ่งมี $1 \neq 0$ และ $a, b \in R$ ซึ่ง $ab = 1$ จงแสดงว่า

ถ้า a ไม่เป็นตัวหารศูนย์ แล้ว $ba = 1$

บทพิสูจน์. ให้ R เป็นริงซึ่งมี $1 \neq 0$ และ $a, b \in R$ ซึ่ง $ab = 1$
สมมติว่า a ไม่เป็นตัวหารศูนย์ จะได้ว่า

$$a(ba - 1) = a(ba) - a = (ab)a - a = 1a - a = a - a = 0$$

ถ้า $ba - 1 \neq 0$ จะขัดแย้งกับ a ไม่เป็นตัวหารศูนย์ ดังนั้น $ba - 1 = 0$ หรือ $ba = 1$ □

6.2 **(5 คะแนน)**จงหาจำนวนไอดีลทั้งหมดที่ **ไม่ใช่**ไอดีลเฉพาะ (prime ideal) ของ $\mathbb{Z}_{4900}$
วิธีทำ พิจารณา $4900 = 49 \cdot 100 = 7^2 \cdot 2^2 \cdot 5^2 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$ จะได้ว่า

$$\tau(4900) = \tau(2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2) = (2+1)(2+1)(2+1) = 27$$

ดังนั้น $\mathbb{Z}_{4900}$ มีไอดีสทั้งหมด 27 ไอดีล
และไอดีลเฉพาะมี 3 ไอดีล คือ $\langle \bar{2} \rangle$, $\langle \bar{5} \rangle$และ $\langle \bar{7} \rangle$ ดังนั้น

จำนวนไอดีลทั้งหมดที่ไม่ใช่ไอดีลเฉพาะเท่ากับ $27 - 3 = 24$ #

6. **(10 คะแนน)** จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

6.1 **(5 คะแนน)** ให้ R เป็นริงซึ่งมี $1 \neq 0$ และ $a, b \in R$ ซึ่ง $ba = 1$ จงแสดงว่า

ถ้า a ไม่เป็นตัวหารศูนย์ แล้ว $ab = 1$

บทพิสูจน์. ให้ R เป็นริงซึ่งมี $1 \neq 0$ และ $a, b \in R$ ซึ่ง $ba = 1$
สมมติว่า a ไม่เป็นตัวหารศูนย์ จะได้ว่า

$$(ab - 1)a = (ab)a - a = a(ba) - a = a1 - a = a - a = 0$$

ถ้า $ab - 1 \neq 0$ จะขัดแย้งกับ a ไม่เป็นตัวหารศูนย์ ดังนั้น $ab - 1 = 0$ หรือ $ab = 1$ □

6.2 **(5 คะแนน)** จงหาจำนวนไอดีลทั้งหมดที่ **ไม่ใช่**ไอดีลเฉพาะ (prime ideal) ของ $\mathbb{Z}_{3600}$
วิธีทำ พิจารณา $3600 = 36 \cdot 100 = 4 \cdot 9 \cdot 2^2 \cdot 5^2 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ จะได้ว่า

$$\tau(3600) = \tau(2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2) = (4+1)(2+1)(2+1) = 45$$

ดังนั้น $\mathbb{Z}_{3600}$ มีไอดีสทั้งหมด 45 ไอดีล
และไอดีลเฉพาะมี 3 ไอดีล คือ $\langle \bar{2} \rangle$, $\langle \bar{3} \rangle$ และ $\langle \bar{5} \rangle$ ดังนั้น

จำนวนไอดีลทั้งหมดที่ไม่ใช่ไอดีลเฉพาะเท่ากับ $45 - 3 = 42$ #

ข้อ 7

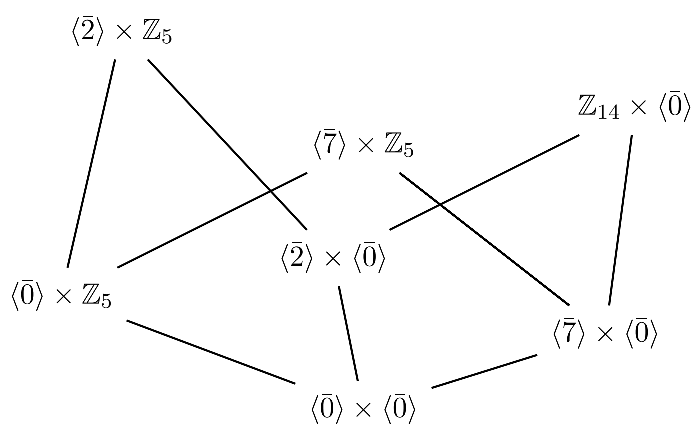
7. (10 **คะแนน**) จงหา**ไอดีลใหญ่สุด** (maximal ideal) โดยการเขียนแลตทิซของ

$$\mathbb{Z}_{14} \times \mathbb{Z}_5$$

วิธีทำ จะเห็นว่า
ไอดีลทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_{14}$ คือ $\langle\bar{0}\rangle$, $\langle\bar{2}\rangle$, $\langle\bar{7}\rangle$ และ $\mathbb{Z}_{14}$
ไอดีลทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_5$ คือ $\langle\bar{0}\rangle$ และ $\mathbb{Z}_5$
ดังนั้นไอดีลทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_{14} \times \mathbb{Z}_5$ คือ

$$\begin{array}{cccc} \langle\bar{0}\rangle \times \langle\bar{0}\rangle & \langle\bar{0}\rangle \times \mathbb{Z}_5 & \langle\bar{2}\rangle \times \langle\bar{0}\rangle & \langle\bar{2}\rangle \times \mathbb{Z}_5 \\ \langle\bar{7}\rangle \times \langle\bar{0}\rangle & \langle\bar{7}\rangle \times \mathbb{Z}_5 & \mathbb{Z}_{14} \times \langle\bar{0}\rangle & \mathbb{Z}_{14} \times \mathbb{Z}_5 \end{array}$$

เขียนเลตทิซโดยไม่มีไอดีส $\mathbb{Z}_{14} \times \mathbb{Z}_5$ ได้ดังรูป



จากแผนภาพจะได้ว่า $\mathbb{Z}_{14} \times \langle\bar{0}\rangle$, $\langle\bar{7}\rangle \times \mathbb{Z}_5$ และ $\langle\bar{2}\rangle \times \mathbb{Z}_5$ เป็นไอดีลใหญ่สุดของ $\mathbb{Z}_{14} \times \mathbb{Z}_5$

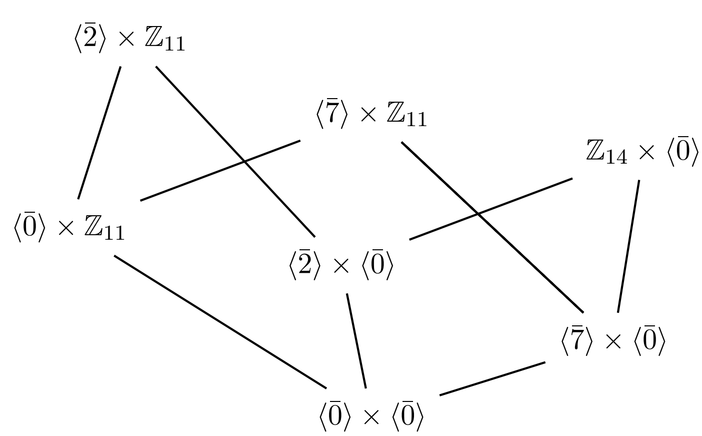
7. (10 **คะแนน**) จงหา**ไอดีลใหญ่สุด** (maximal ideal) โดยการเขียนแลตทิซของ

$$\mathbb{Z}_{14} \times \mathbb{Z}_{11}$$

วิธีทำ จะเห็นว่า
ไอดีลทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_{14}$ คือ $\langle\bar{0}\rangle$, $\langle\bar{2}\rangle$, $\langle\bar{7}\rangle$ และ $\mathbb{Z}_{14}$
ไอดีลทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_{11}$ คือ $\langle\bar{0}\rangle$ และ $\mathbb{Z}_{11}$
ดังนั้นไอดีลทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_{14} \times \mathbb{Z}_{11}$ คือ

$$\begin{array}{cccc} \langle\bar{0}\rangle \times \langle\bar{0}\rangle & \langle\bar{0}\rangle \times \mathbb{Z}_{11} & \langle\bar{2}\rangle \times \langle\bar{0}\rangle & \langle\bar{2}\rangle \times \mathbb{Z}_{11} \\ \langle\bar{7}\rangle \times \langle\bar{0}\rangle & \langle\bar{7}\rangle \times \mathbb{Z}_{11} & \mathbb{Z}_{14} \times \langle\bar{0}\rangle & \mathbb{Z}_{14} \times \mathbb{Z}_{11} \end{array}$$

เขียนเลตทิซโดยไม่มีไอดีส $\mathbb{Z}_{14} \times \mathbb{Z}_{11}$ ได้ดังรูป



จากแผนภาพจะได้ว่า $\mathbb{Z}_{14} \times \langle\bar{0}\rangle$, $\langle\bar{7}\rangle \times \mathbb{Z}_{11}$ และ $\langle\bar{2}\rangle \times \mathbb{Z}_{11}$ เป็นไอดีลใหญ่สุดของ $\mathbb{Z}_{14} \times \mathbb{Z}_{11}$

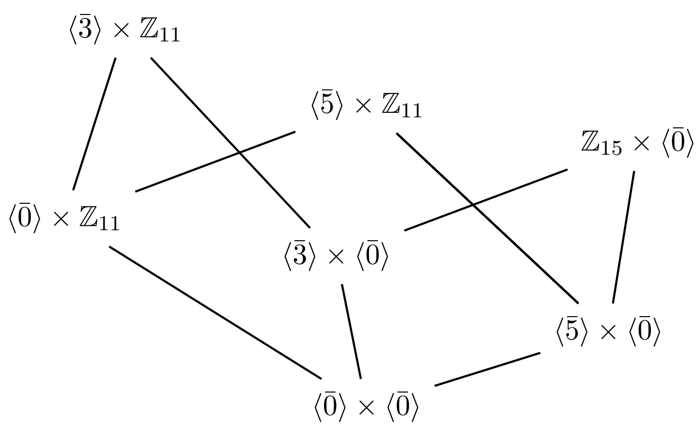
7. (10 **คะแนน**) จงหา**ไอดีลใหญ่สุด** (maximal ideal) โดยการเขียนแลตทิซของ

$$\mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{11}$$

วิธีทำ จะเห็นว่า
ไอดีลทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_{15}$ คือ $\langle\bar{0}\rangle$, $\langle\bar{3}\rangle$, $\langle\bar{5}\rangle$ และ $\mathbb{Z}_{15}$
ไอดีลทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_{11}$ คือ $\langle\bar{0}\rangle$ และ $\mathbb{Z}_{11}$
ดังนั้นไอดีลทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{11}$ คือ

$$\begin{array}{cccc} \langle\bar{0}\rangle \times \langle\bar{0}\rangle & \langle\bar{0}\rangle \times \mathbb{Z}_{11} & \langle\bar{3}\rangle \times \langle\bar{0}\rangle & \langle\bar{3}\rangle \times \mathbb{Z}_{11} \\ \langle\bar{5}\rangle \times \langle\bar{0}\rangle & \langle\bar{5}\rangle \times \mathbb{Z}_{11} & \mathbb{Z}_{15} \times \langle\bar{0}\rangle & \mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{11} \end{array}$$

เขียนเลตทิซโดยไม่มีไอดีส $\mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{11}$ ได้ดังรูป



จากแผนภาพจะได้ว่า $\mathbb{Z}_{15} \times \langle\bar{0}\rangle$, $\langle\bar{5}\rangle \times \mathbb{Z}_{11}$ และ $\langle\bar{3}\rangle \times \mathbb{Z}_{11}$ เป็นไอดีลใหญ่สุดของ $\mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{11}$

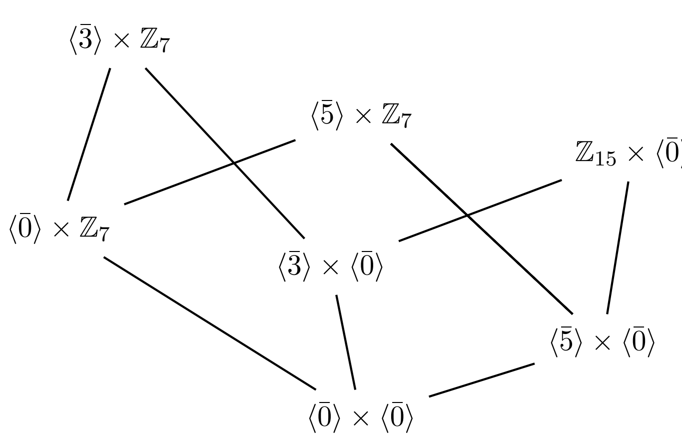
7. (10 **คะแนน**) จงหา**ไอดีลใหญ่สุด** (maximal ideal) โดยการเขียนแลตทิซของ

$$\mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{7}$$

วิธีทำ จะเห็นว่า
ไอดีลทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_{15}$ คือ $\langle\bar{0}\rangle$, $\langle\bar{3}\rangle$, $\langle\bar{5}\rangle$ และ $\mathbb{Z}_{15}$
ไอดีลทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_{7}$ คือ $\langle\bar{0}\rangle$ และ $\mathbb{Z}_{7}$
ดังนั้นไอดีลทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{7}$ คือ

$$\begin{array}{cccc} \langle\bar{0}\rangle \times \langle\bar{0}\rangle & \langle\bar{0}\rangle \times \mathbb{Z}_{7} & \langle\bar{3}\rangle \times \langle\bar{0}\rangle & \langle\bar{3}\rangle \times \mathbb{Z}_{7} \\ \langle\bar{5}\rangle \times \langle\bar{0}\rangle & \langle\bar{5}\rangle \times \mathbb{Z}_{7} & \mathbb{Z}_{15} \times \langle\bar{0}\rangle & \mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{7} \end{array}$$

เขียนเลตทิซโดยไม่มีไอดีส $\mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{7}$ ได้ดังรูป



จากแผนภาพจะได้ว่า $\mathbb{Z}_{15} \times \langle\bar{0}\rangle$, $\langle\bar{5}\rangle \times \mathbb{Z}_{7}$ และ $\langle\bar{3}\rangle \times \mathbb{Z}_{7}$ เป็นไอดีลใหญ่สุดของ $\mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{7}$

ข้อ 8

8. **(10 คะแนน)** จงตรวจสอบว่า

$2+\sqrt{-3}$ เป็นสมาชิกที่**ลดทอนไม่ได้** (irreducible) ใน $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ หรือไม่

วิธีทำ ให้ $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ โดยที่ $2+\sqrt{-3}=(a+b\sqrt{-3})(c+d\sqrt{-3})$ จะได้ว่า

$$(ac+3bd)+(ad+bc)\sqrt{-3}=2+\sqrt{-3}$$

ดังนั้น $ac+3bd=2$ และ $ad+bc=1$ แล้ว

$$(a-b\sqrt{-3})(c-d\sqrt{-3})=(ac+3bd)-(bc+ad)\sqrt{-3}=2-\sqrt{-3}$$

ฉะนั้น

$$\begin{aligned}(a^2+3b^2)(c^2+3d^2) &= (a+b\sqrt{-3})(c+d\sqrt{-3})(a-b\sqrt{-3})(c-d\sqrt{-3}) \\ &= (2+\sqrt{-3})(2-\sqrt{-3}) \\ &= 7 = 1\cdot 7\end{aligned}$$

เนื่องจาก a^2+3b^2 และ c^2+3d^2 เป็นจำนวนเต็มบวก พิจารณาเพียง 2 กรณีดังนี้

กรณี 1. $a^2+3b^2=1$ และ $c^2+3d^2=7$ จะได้ $a+b\sqrt{-3}$ เป็นหน่วย

กรณี 2. $a^2+3b^2=7$ และ $c^2+3d^2=1$ จะได้ว่า $c+d\sqrt{-3}$ เป็นหน่วย

สรุปได้ว่า $2+\sqrt{-3}$ ลดทอนไม่ได้ใน $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$

8. **(10 คะแนน)** จงตรวจสอบว่า

4 เป็น **สมาชิกเฉพาะ** (prime element) ใน $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ หรือไม่

วิธีทำ จะเห็นว่า

$$4\cdot 1=4=(1+\sqrt{-3})(1-\sqrt{-3})$$

จะได้ว่า $4 \mid (1+\sqrt{-3})(1-\sqrt{-3})$
สมมติว่า $4 \mid (1+\sqrt{-3})$ จะได้ว่ามี $x, y \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง

$$\begin{aligned}4(x+y\sqrt{-3}) &= 1+\sqrt{-3} \\ 4x+4y\sqrt{-3} &= 1+\sqrt{-3}\end{aligned}$$

ทำให้ได้ว่า $4x=1$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้เพราะว่า $x\in\mathbb{Z}$ ดังนั้น $4 \nmid (1+\sqrt{-3})$
ในทำนองเดียวกัน $4 \nmid (1-\sqrt{-3})$
สรุปได้ว่า 4 ไม่เป็นสมาชิกเฉพาะของ $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$

8. **(10 คะแนน)** จงแสดงว่า $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ ไม่เป็น U.F.D

วิธีทำ จะเห็นว่า 6 เขียนเป็นผลคูณได้ 2 แบบ

$$6 = 2 \cdot 3 = (1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5})$$

จะแสดงว่า ไม่มีหน่วย u_1, u_2 ใน $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ ที่ทำให้ $2 = u_1(1+\sqrt{-5})$ และ $2 = u_2(1-\sqrt{-5})$
สมมติว่า $x + y\sqrt{-5}$ เป็นหน่วยใน $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ ซึ่ง $2 = (x+y\sqrt{-5})(1+\sqrt{-5})$

$$2 = (x-5y) + (x+y)\sqrt{-5}$$

นั่นคือ $2 = x - 5y$ และ $x + y = 0$ หรือ $y = -x$ จะได้ว่า

$$2 = x - 5(-x) = 6x \text{ หรือ } 1 = 3x \text{ เป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก } x \text{ เป็นจำนวนเต็ม}$$

ในทำนองเดียวกัน ไม่มี u_2 ใน $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ ที่ทำให้ $2 = u_2(1-\sqrt{-5})$
ดังนั้น $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ ไม่เป็น U.F.D.

8. **(10 คะแนน)** จงแสดงว่า $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$ ไม่เป็น U.F.D

วิธีทำ จะเห็นว่า 8 เขียนเป็นผลคูณได้ 2 แบบ

$$8 = 2 \cdot 4 = (1+\sqrt{-7})(1-\sqrt{-7})$$

จะแสดงว่า ไม่มีหน่วย u_1, u_2 ใน $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$ ที่ทำให้ $2 = u_1(1+\sqrt{-7})$ และ $2 = u_2(1-\sqrt{-7})$
สมมติว่า $x + y\sqrt{-7}$ เป็นหน่วยใน $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$ ซึ่ง $2 = (x+y\sqrt{-7})(1+\sqrt{-7})$

$$2 = (x-7y) + (x+y)\sqrt{-7}$$

นั่นคือ $2 = x - 7y$ และ $x + y = 0$ หรือ $y = -x$ จะได้ว่า

$$2 = x - 7(-x) = 8x \text{ หรือ } 1 = 4x \text{ เป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก } x \text{ เป็นจำนวนเต็ม}$$

ในทำนองเดียวกัน ไม่มี u_2 ใน $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$ ที่ทำให้ $2 = u_2(1-\sqrt{-7})$
ดังนั้น $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$ ไม่เป็น U.F.D.

ข้อ 9

9. (10 **คะแนน**) ให้ F เป็นฟิลด์ และ $a, b, c, d \in F$ โดยที่ $p(x) = x^3 + bx^2 + cx + d \in F[x]$ จงพิสูจน์ว่า

$$\text{มี } \alpha \in F \text{ ซึ่ง } (x-\alpha) \mid p(x) \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad p(x) \text{ เป็นพหุนามลดทอนได้}$$

บทพิสูจน์. ให้ F เป็นฟิลด์ และ $a, b, c, d \in F$ โดยที่ $p(x) = x^3 + bx^2 + cx + d \in F[x]$
$(\rightarrow)$ สมมติ มี $\alpha \in F$ ซึ่ง $(x-\alpha) \mid p(x)$ จะได้ว่า มี $q(x) \in F(x)$ ซึ่ง

$$p(x) = (x-\alpha)q(x)$$

เนื่องจาก $p(x)$ มีระดับขั้นเป็น 3 และ $x-\alpha$ มีระดับขั้นเป็น 1 (ไม่เป็นหน่วย) ดังนั้น $q(x)$ มีระดับขั้นเป็น 2
ฉะนั้น $q(x)$ ไม่เป็นหน่วย สรุปได้ว่า $p(x)$ เป็นพหุนามลดทอนได้
$(\leftarrow)$ สมมติว่า $p(x)$ เป็นพหุนามลดทอนได้ มี $f(x), g(x) \in F(x)$ ซึ่ง

$$p(x) = f(x)g(x)$$

โดยที่ $f(x)$ และ $g(x)$ ไม่เป็นหน่วย นั่นคือ $\deg f(x) \neq 0$ และ $\deg g(x) \neq 0$ เนื่องจาก

$$\deg f(x) + \deg g(x) = \deg f(x)g(x) = \deg p(x) = 3$$

โดยไม่เสียนัยทั่วไป จะได้ว่า $\deg f(x) = 1$ และ $\deg g(x) = 2$
เนื่องจาก $p(x)$ เป็นพหุนามโมนิก มี $\alpha \in F$ ซึ่ง $f(x) = x - \alpha$ นั่นคือ $(x-\alpha) \mid p(x)$ □

9. (10 **คะแนน**) ให้ F เป็นฟิลด์ และ $a, b, c, d \in F$ โดยที่ $p(x) = x^3 + bx^2 + cx + d \in F[x]$ จงพิสูจน์ว่า

$$p(x) \text{ เป็นพหุนามลดทอนได้} \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad \text{มี } \alpha \in F \text{ ซึ่ง } (x-\alpha) \mid p(x)$$

บทพิสูจน์. ให้ F เป็นฟิลด์ และ $a, b, c, d \in F$ โดยที่ $p(x) = x^3 + bx^2 + cx + d \in F[x]$
$(\rightarrow)$ สมมติว่า $p(x)$ เป็นพหุนามลดทอนได้ มี $f(x), g(x) \in F(x)$ ซึ่ง

$$p(x) = f(x)g(x)$$

โดยที่ $f(x)$ และ $g(x)$ ไม่เป็นหน่วย นั่นคือ $\deg f(x) \neq 0$ และ $\deg g(x) \neq 0$ เนื่องจาก

$$\deg f(x) + \deg g(x) = \deg f(x)g(x) = \deg p(x) = 3$$

โดยไม่เสียนัยทั่วไป จะได้ว่า $\deg f(x) = 1$ และ $\deg g(x) = 2$
เนื่องจาก $p(x)$ เป็นพหุนามโมนิก มี $\alpha \in F$ ซึ่ง $f(x) = x - \alpha$ นั่นคือ $(x-\alpha) \mid p(x)$
$(\leftarrow)$ สมมติ มี $\alpha \in F$ ซึ่ง $(x-\alpha) \mid p(x)$ จะได้ว่า มี $q(x) \in F(x)$ ซึ่ง

$$p(x) = (x-\alpha)q(x)$$

เนื่องจาก $p(x)$ มีระดับขั้นเป็น 3 และ $x-\alpha$ มีระดับขั้นเป็น 1 (ไม่เป็นหน่วย) ดังนั้น $q(x)$ มีระดับขั้นเป็น 2
ฉะนั้น $q(x)$ ไม่เป็นหน่วย สรุปได้ว่า $p(x)$ เป็นพหุนามลดทอนได้ □

9. (**10 คะแนน**) ให้ F เป็นฟิลด์ และ $a, b, c, d \in F$ โดยที่ $p(x) = x^3 + bx^2 + cx + d \in F[x]$ จงพิสูจน์ว่า

$$\text{ทุก ๆ } \alpha \in F \text{ ซึ่ง } (x - \alpha) \nmid p(x) \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad p(x) \text{ เป็นพหุนามลดทอนไม่ได้}$$

บทพิสูจน์. ให้ F เป็นฟิลด์ และ $a, b, c, d \in F$ โดยที่ $p(x) = x^3 + bx^2 + cx + d \in F[x]$
$(\rightarrow)$ สมมติว่า ทุก ๆ $\alpha \in F$ ซึ่ง $(x - \alpha) \nmid p(x)$
ให้ $f(x)$ และ $g(x)$ เป็นสมาชิกใน $F(x)$ ซึ่ง

$$p(x) = f(x)g(x)$$

จะได้ว่า $\deg f(x) + \deg g(x) = \deg f(x)g(x) = \deg p(x) = 3$ จะได้ว่า

$$\deg f(x) = 3 \text{ และ } \deg g(x) = 0 \text{ ดังนั้น } g(x) = d \in F - \{0\} \text{ เป็นหน่วย}$$

หรือ

$$\deg f(x) = 0 \text{ และ } \deg g(x) = 3 \text{ ดังนั้น } f(x) = d \in F - \{0\} \text{ เป็นหน่วย}$$

ถ้า $\deg f(x) = 1$ และ $\deg g(x) = 2$
เนื่องจาก $p(x)$ เป็นพหุนามโมนิก จะได้ว่า $f(x) = x - \beta$ นั่นคือ $(x - \beta) \mid p(x)$ ขัดแย้งกับสมมติฐาน
ในทำนองเดียวกัน ถ้า $\deg f(x) = 2$ และ $\deg g(x) = 1$ จะเกิดข้อขัดแย้งกับสมมติฐาน
สรุปได้ว่า $p(x)$ เป็นพหุนามลดทอนไม่ได้
$(\leftarrow)$ พิสูจน์โดยวิธีแย้งสลับที่ สมมติ มี $\alpha \in F$ ซึ่ง $(x - \alpha) \mid p(x)$ จะได้ว่า มี $q(x) \in F(x)$ ซึ่ง

$$p(x) = (x - \alpha)q(x)$$

เนื่องจาก $p(x)$ มีระดับขั้นเป็น 3 และ $x - \alpha$ มีระดับขั้นเป็น 1 (ไม่เป็นหน่วย) ดังนั้น $q(x)$ มีระดับขั้นเป็น 2
ฉะนั้น $q(x)$ ไม่เป็นหน่วย สรุปได้ว่า $p(x)$ เป็นพหุนามลดทอนได้ $\square$

9. (**10 คะแนน**) ให้ F เป็นฟิลด์ และ $a, b, c, d \in F$ โดยที่ $p(x) = x^3 + bx^2 + cx + d \in F[x]$ จงพิสูจน์ว่า

$$p(x) \text{ เป็นพหุนามลดทอนไม่ได้} \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad \text{ทุก ๆ } \alpha \in F \text{ ซึ่ง } (x - \alpha) \nmid p(x)$$

บทพิสูจน์. ให้ F เป็นฟิลด์ และ $a, b, c, d \in F$ โดยที่ $p(x) = x^3 + bx^2 + cx + d \in F[x]$
$(\rightarrow)$ พิสูจน์โดยวิธีแย้งสลับที่ สมมติ มี $\alpha \in F$ ซึ่ง $(x - \alpha) \mid p(x)$ จะได้ว่า มี $q(x) \in F(x)$ ซึ่ง

$$p(x) = (x - \alpha)q(x)$$

เนื่องจาก $p(x)$ มีระดับขั้นเป็น 3 และ $x - \alpha$ มีระดับขั้นเป็น 1 (ไม่เป็นหน่วย) ดังนั้น $q(x)$ มีระดับขั้นเป็น 2
ฉะนั้น $q(x)$ ไม่เป็นหน่วย สรุปได้ว่า $p(x)$ เป็นพหุนามลดทอนได้
$(\leftarrow)$ สมมติว่า ทุก ๆ $\alpha \in F$ ซึ่ง $(x - \alpha) \nmid p(x)$
ให้ $f(x)$ และ $g(x)$ เป็นสมาชิกใน $F(x)$ ซึ่ง

$$p(x) = f(x)g(x)$$

จะได้ว่า $\deg f(x) + \deg g(x) = \deg f(x)g(x) = \deg p(x) = 3$ จะได้ว่า

$$\deg f(x) = 3 \text{ และ } \deg g(x) = 0 \text{ ดังนั้น } g(x) = d \in F - \{0\} \text{ เป็นหน่วย}$$

หรือ

$$\deg f(x) = 0 \text{ และ } \deg g(x) = 3 \text{ ดังนั้น } f(x) = d \in F - \{0\} \text{ เป็นหน่วย}$$

ถ้า $\deg f(x) = 1$ และ $\deg g(x) = 2$
เนื่องจาก $p(x)$ เป็นพหุนามโมนิก จะได้ว่า $f(x) = x - \beta$ นั่นคือ $(x - \beta) \mid p(x)$ ขัดแย้งกับสมมติฐาน
ในทำนองเดียวกัน ถ้า $\deg f(x) = 2$ และ $\deg g(x) = 1$ จะเกิดข้อขัดแย้งกับสมมติฐาน
สรุปได้ว่า $p(x)$ เป็นพหุนามลดทอนไม่ได้ $\square$

ข้อ 10

10. **(10 คะแนน)** จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

10.1 **(5 คะแนน)** ใน $\mathbb{Z}_3[x]$ จงหา $a \in \mathbb{Z}_3$ ที่สอดคล้อง

$$(x^2+x+a)^3 = x^6+x^3+\bar{1}$$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned} (x^2+x+a)^2(x^2+x+a) &= x^6+x^3+\bar{1} \\ (x^4+x^2+a^2+\bar{2}x^3+\bar{2}ax^2+\bar{2}ax)(x^2+x+a) &= x^6+x^3+\bar{1} \\ (x^4+\bar{2}x^3+(\bar{2}a+\bar{1})x^2+\bar{2}ax+a^2)(x^2+x+a) &= x^6+x^3+\bar{1} \end{aligned}$$

จะเห็นว่า

$\cdot$	x^4	$\bar{2}x^3$	$(\bar{2}a+\bar{1})x^2$	$\bar{2}ax$	a^2
x^2	x^6	$\bar{2}x^5$	$(\bar{2}a+\bar{1})x^4$	$\bar{2}ax^3$	a^2x^2
x	x^5	$\bar{2}x^4$	$(\bar{2}a+\bar{1})x^3$	$\bar{2}ax^2$	a^2x
a	ax^4	$\bar{2}ax^3$	$(\bar{2}a^2+a)x^2$	$\bar{2}a^2x$	a^3

ผลคูณเท่ากับ $x^6+\bar{3}x^5+(\bar{3}a+\bar{3})x^4+(\bar{6}a+\bar{1})x^3+(\bar{3}a^2+\bar{3})x^2+\bar{3}a^2x+a^3 = x^6+x^3+a^3$

ฉะนั้น

$$x^6+x^3+a^3 = x^6+x^3+\bar{1}$$

จะได้ว่า $a^3=\bar{1}$ ดังนั้น $a=\bar{1}$ #

10.2 **(5 คะแนน)** ใน $\mathbb{Z}_3[x]/\left\langle x^2+\bar{1}\right\rangle$ จงหา**ตัวผกผันการคูณ**ของ $\bar{2}x-\bar{1}+\left\langle x^2+\bar{1}\right\rangle$

วิธีทำ ให้ $a,b \in \mathbb{Z}_3$ ซึ่ง

$$\begin{aligned} (ax+b+\left\langle x^2+\bar{1}\right\rangle)(\bar{2}x-\bar{1}\left\langle x^2+\bar{1}\right\rangle) &= \bar{1}+\left\langle x^2+\bar{1}\right\rangle \\ (ax+b)(\bar{2}x-\bar{1})+\left\langle x^2+\bar{1}\right\rangle &= \bar{1}+\left\langle x^2+\bar{1}\right\rangle \\ \bar{2}ax^2-ax+\bar{2}bx-b+\left\langle x^2+\bar{1}\right\rangle &= \bar{1}+\left\langle x^2+\bar{1}\right\rangle \\ \bar{2}a(x^2+\bar{1})-\bar{2}a-ax+\bar{2}bx-b+\left\langle x^2+\bar{1}\right\rangle &= \bar{1}+\left\langle x^2+\bar{1}\right\rangle \\ (\bar{2}b-a)x-\bar{2}a-b+\left\langle x^2+\bar{1}\right\rangle &= \bar{1}+\left\langle x^2+\bar{1}\right\rangle \end{aligned}$$

จะได้ว่า $\bar{2}b-a=\bar{0}$ และ $-\bar{2}a-b=\bar{1}$ จะได้

$$\begin{aligned} (\bar{2}b-a)+(-\bar{2}a-b) &= \bar{0}+\bar{1} \\ \bar{b}-\bar{3}a &= \bar{1} \\ \bar{b}-\bar{0} &= \bar{1} \\ b &= \bar{1} \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} a &= \bar{2}b \\ a &= \bar{2}(\bar{1}) = \bar{2} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\bar{2}x+\bar{1}+\left\langle x^2+\bar{1}\right\rangle \text{ เป็นตักผกผันของ } \bar{2}x-\bar{1}+\left\langle x^2+\bar{1}\right\rangle \text{ ใน } \mathbb{Z}_3[x]/\left\langle x^2+\bar{1}\right\rangle \quad \#$$

10. **(10 คะแนน)** จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

10.1 **(5 คะแนน)** ใน $\mathbb{Z}_3[x]$ จงหา $a \in \mathbb{Z}_3$ ที่สอดคล้อง

$$(x^2+x+a)^3 = x^6+x^3+\bar{2}$$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned} (x^2+x+a)^2(x^2+x+a) &= x^6+x^3+\bar{2} \\ (x^4+x^2+a^2+\bar{2}x^3+\bar{2}ax^2+\bar{2}ax)(x^2+x+a) &= x^6+x^3+\bar{2} \\ (x^4+\bar{2}x^3+(\bar{2}a+\bar{1})x^2+\bar{2}ax+a^2)(x^2+x+a) &= x^6+x^3+\bar{2} \end{aligned}$$

จะเห็นว่า

$\cdot$	x^4	$\bar{2}x^3$	$(\bar{2}a+\bar{1})x^2$	$\bar{2}ax$	a^2
x^2	x^6	$\bar{2}x^5$	$(\bar{2}a+\bar{1})x^4$	$\bar{2}ax^3$	a^2x^2
x	x^5	$\bar{2}x^4$	$(\bar{2}a+\bar{1})x^3$	$\bar{2}ax^2$	a^2x
a	ax^4	$\bar{2}ax^3$	$(\bar{2}a^2+a)x^2$	$\bar{2}a^2x$	a^3

ผลคูณเท่ากับ $x^6+\bar{3}x^5+(\bar{3}a+\bar{3})x^4+(\bar{6}a+\bar{1})x^3+(\bar{3}a^2+\bar{3})x^2+\bar{3}a^2x+a^3 = x^6+x^3+a^3$

ฉะนั้น

$$x^6+x^3+a^3 = x^6+x^3+\bar{2}$$

จะได้ว่า $a^3=\bar{2}$ ดังนั้น $a=\bar{2}$ #

10.2 **(5 คะแนน)** ใน $\mathbb{Z}_3[x]/\left\langle x^2+\bar{1}\right\rangle$ จงหา**ตัวผกผันการคูณ**ของ $\bar{2}x-\bar{2}+\left\langle x^2+\bar{1}\right\rangle$

วิธีทำ ให้ $a, b \in \mathbb{Z}_3$ ซึ่ง

$$\begin{aligned} (ax+b+\left\langle x^2+\bar{1}\right\rangle)(\bar{2}x-\bar{2}\left\langle x^2+\bar{1}\right\rangle) &= \bar{1}+\left\langle x^2+\bar{1}\right\rangle \\ (ax+b)(\bar{2}x-\bar{2})+\left\langle x^2+\bar{1}\right\rangle &= \bar{1}+\left\langle x^2+\bar{1}\right\rangle \\ \bar{2}ax^2-\bar{2}ax+\bar{2}bx-\bar{2}b+\left\langle x^2+\bar{1}\right\rangle &= \bar{1}+\left\langle x^2+\bar{1}\right\rangle \\ \bar{2}a(x^2+\bar{1})-\bar{2}a-\bar{2}ax+\bar{2}bx-\bar{2}b+\left\langle x^2+\bar{1}\right\rangle &= \bar{1}+\left\langle x^2+\bar{1}\right\rangle \\ (\bar{2}b-\bar{2}a)x-\bar{2}a-\bar{2}b+\left\langle x^2+\bar{1}\right\rangle &= \bar{1}+\left\langle x^2+\bar{1}\right\rangle \end{aligned}$$

จะได้ว่า $\bar{2}b-\bar{2}a=\bar{0}$ และ $-\bar{2}a-\bar{2}b=\bar{1}$ จะได้

$$\begin{aligned} (\bar{2}b-\bar{2}a)+(-\bar{2}a-\bar{2}b) &= \bar{0}+\bar{1} \\ -\bar{4}a &= \bar{1} \\ a &= \bar{2} \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} \bar{2}b = \bar{2}a &= \bar{4} \\ b &= \bar{2} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\bar{2}x+\bar{2}+\left\langle x^2+\bar{1}\right\rangle \text{ เป็นตักผกผันของ } \bar{2}x-\bar{2}+\left\langle x^2+\bar{1}\right\rangle \text{ ใน } \mathbb{Z}_3[x]/\left\langle x^2+\bar{1}\right\rangle \quad \#$$

10. **(10 คะแนน)** จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

10.1 **(5 คะแนน)** ใน $\mathbb{Z}_3[x]$ จงหา $a \in \mathbb{Z}_3$ ที่สอดคล้อง

$$(x^2 + x + a)^3 = x^6 + x^3 - \bar{1}$$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}(x^2+x+a)^2(x^2+x+a) &= x^6 + x^3 - \bar{1}\\ (x^4 + x^2 + a^2 + \bar{2}x^3 + \bar{2}ax^2 + \bar{2}ax)(x^2+x+a) &= x^6 + x^3 - \bar{1}\\ (x^4 + \bar{2}x^3 + (\bar{2}a+\bar{1})x^2 + \bar{2}ax + a^2)(x^2+x+a) &= x^6 + x^3 - \bar{1}\end{aligned}$$

จะเห็นว่า

$\cdot$	x^4	$\bar{2}x^3$	$(\bar{2}a+\bar{1})x^2$	$\bar{2}ax$	a^2
x^2	x^6	$\bar{2}x^5$	$(\bar{2}a+\bar{1})x^4$	$\bar{2}ax^3$	a^2x^2
x	x^5	$\bar{2}x^4$	$(\bar{2}a+\bar{1})x^3$	$\bar{2}ax^2$	a^2x
a	ax^4	$\bar{2}ax^3$	$(\bar{2}a^2+a)x^2$	$\bar{2}a^2x$	a^3

ผลคูณเท่ากับ $x^6 + \bar{3}x^5 + (\bar{3}a+\bar{3})x^4 + (\bar{6}a+\bar{1})x^3 + (\bar{3}a^2+\bar{3})x^2 + \bar{3}a^2x + a^3 = x^6 + x^3 + a^3$

ฉะนั้น

$$x^6 + x^3 + a^3 = x^6 + x^3 - \bar{1}$$

จะได้ว่า $a^3 = -\bar{1}$ ดังนั้น $a = \bar{2}$ #

10.2 **(5 คะแนน)** ใน $\mathbb{Z}_3[x]/\left\langle x^2+\bar{1}\right\rangle$ จงหา**ตัวผกผันการคูณ**ของ $\bar{2}x + \bar{2} + \left\langle x^2+\bar{1}\right\rangle$

วิธีทำ ให้ $a, b \in \mathbb{Z}_3$ ซึ่ง

$$\begin{aligned}(ax+b+\left\langle x^2+\bar{1}\right\rangle)(\bar{2}x+\bar{2}\left\langle x^2+\bar{1}\right\rangle) &= \bar{1} + \left\langle x^2+\bar{1}\right\rangle\\ (ax+b)(\bar{2}x+\bar{2}) + \left\langle x^2+\bar{1}\right\rangle &= \bar{1} + \left\langle x^2+\bar{1}\right\rangle\\ \bar{2}ax^2 + \bar{2}ax + \bar{2}bx + \bar{2}b + \left\langle x^2+\bar{1}\right\rangle &= \bar{1} + \left\langle x^2+\bar{1}\right\rangle\\ \bar{2}a(x^2+\bar{1}) - \bar{2}a + \bar{2}ax + \bar{2}bx + \bar{2}b + \left\langle x^2+\bar{1}\right\rangle &= \bar{1} + \left\langle x^2+\bar{1}\right\rangle\\ (\bar{2}b+\bar{2}a)x - \bar{2}a + \bar{2}b + \left\langle x^2+\bar{1}\right\rangle &= \bar{1} + \left\langle x^2+\bar{1}\right\rangle\end{aligned}$$

จะได้ว่า $\bar{2}b + \bar{2}a = \bar{0}$ และ $-\bar{2}a + \bar{2}b = \bar{1}$ จะได้

$$\begin{aligned}(\bar{2}b+\bar{2}a) + (-\bar{2}a+\bar{2}b) &= \bar{0} + \bar{1}\\ \bar{4}b &= \bar{1}\\ b &= \bar{1}\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}\bar{2}a &= -\bar{2}b = -\bar{2}(\bar{1}) = -\bar{2}\\ a &= \bar{2}\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\bar{2}x + \bar{1} + \left\langle x^2+\bar{1}\right\rangle \text{ เป็นตักผกผันของ } \bar{2}x + \bar{2} + \left\langle x^2+\bar{1}\right\rangle \text{ ใน } \mathbb{Z}_3[x]/\left\langle x^2+\bar{1}\right\rangle \qquad \#$$

10. **(10 คะแนน)** จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

10.1 **(5 คะแนน)** ใน $\mathbb{Z}_3[x]$ จงหา $a \in \mathbb{Z}_3$ ที่สอดคล้อง

$$(x^2+x+a)^3 = x^6+x^3-\bar{2}$$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}(x^2+x+a)^2(x^2+x+a) &= x^6+x^3-\bar{2}\\ (x^4+x^2+a^2+\bar{2}x^3+\bar{2}ax^2+\bar{2}ax)(x^2+x+a) &= x^6+x^3-\bar{2}\\ (x^4+\bar{2}x^3+(\bar{2}a+\bar{1})x^2+\bar{2}ax+a^2)(x^2+x+a) &= x^6+x^3-\bar{2}\end{aligned}$$

จะเห็นว่า

$\cdot$	x^4	$\bar{2}x^3$	$(\bar{2}a+\bar{1})x^2$	$\bar{2}ax$	a^2
x^2	x^6	$\bar{2}x^5$	$(\bar{2}a+\bar{1})x^4$	$\bar{2}ax^3$	a^2x^2
x	x^5	$\bar{2}x^4$	$(\bar{2}a+\bar{1})x^3$	$\bar{2}ax^2$	a^2x
a	ax^4	$\bar{2}ax^3$	$(\bar{2}a^2+a)x^2$	$\bar{2}a^2x$	a^3

ผลคูณเท่ากับ $x^6+\bar{3}x^5+(\bar{3}a+\bar{3})x^4+(\bar{6}a+\bar{1})x^3+(\bar{3}a^2+\bar{3})x^2+\bar{3}a^2x+a^3 = x^6+x^3+a^3$

ฉะนั้น

$$x^6+x^3+a^3 = x^6+x^3-\bar{2}$$

จะได้ว่า $a^3 = -\bar{2}$ ดังนั้น $a = \bar{1}$ #

10.2 **(5 คะแนน)** ใน $\mathbb{Z}_3[x]/\left\langle x^2+\bar{1}\right\rangle$ จงหา**ตัวผกผันการคูณ**ของ $\bar{2}x+\bar{1}+\left\langle x^2+\bar{1}\right\rangle$

วิธีทำ ให้ $a, b \in \mathbb{Z}_3$ ซึ่ง

$$\begin{aligned}(ax+b+\left\langle x^2+\bar{1}\right\rangle)(\bar{2}x+\bar{1}\left\langle x^2+\bar{1}\right\rangle) &= \bar{1}+\left\langle x^2+\bar{1}\right\rangle\\ (ax+b)(\bar{2}x+\bar{1})+\left\langle x^2+\bar{1}\right\rangle &= \bar{1}+\left\langle x^2+\bar{1}\right\rangle\\ \bar{2}ax^2+ax+\bar{2}bx+b+\left\langle x^2+\bar{1}\right\rangle &= \bar{1}+\left\langle x^2+\bar{1}\right\rangle\\ \bar{2}a(x^2+\bar{1})-\bar{2}a+ax+\bar{2}bx+b+\left\langle x^2+\bar{1}\right\rangle &= \bar{1}+\left\langle x^2+\bar{1}\right\rangle\\ (\bar{2}b+a)x-\bar{2}a+b+\left\langle x^2+\bar{1}\right\rangle &= \bar{1}+\left\langle x^2+\bar{1}\right\rangle\end{aligned}$$

จะได้ว่า $\bar{2}b+a=\bar{0}$ และ $-\bar{2}a+b=\bar{1}$ จะได้

$$\begin{aligned}(\bar{2}b+a)+(-\bar{2}a+b) &= \bar{0}+\bar{1}\\ \bar{3}b-a &= \bar{1}\\ \bar{0}-a &= \bar{1}\\ a &= \bar{2}\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}\bar{2}b &= -a = -\bar{2}\\ b &= \bar{2}\end{aligned}$$

ดังนั้น

$\bar{2}x+\bar{2}+\left\langle x^2+\bar{1}\right\rangle$ เป็นตัวผกผันของ $\bar{2}x+\bar{1}+\left\langle x^2+\bar{1}\right\rangle$ ใน $\mathbb{Z}_3[x]/\left\langle x^2+\bar{1}\right\rangle$ #