คณิตศาสตร์

มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
คณะครุศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ข้อสอบปลายภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2565

รหัสวิชา	ชื่อวิชา	วันเวลาสอบ	คะแนนเต็ม
MAC3310	พีชคณิตนามธรรม	เวลา 09:00 – 12:00 วันจันทร์ ที่ 7 พฤศจิกายน 2565	105 คะแนน 30%

ชื่อ-สกุล... **รหัสนักศึกษา**......................... **หมู่เรียน**..........

คำชี้แจง/ข้อตกลง

1. ข้อสอบมีทั้งหมด **12 หน้า จำนวน 10 ข้อ**
2. เขียนรหัสนักศึกษา และหมู่เรียนด้วย**ตัวบรรจงลงในข้อสอบทุกหน้า**
3. **ห้ามใช้** เครื่องคำนวณ และอุปกรณ์สื่อสารทุกชนิดในขณะสอบ
4. **ไม่อนุญาต**ให้นำเอกสารการเรียน ตำราเรียนทุกชนิดเข้าห้องสอบ
5. **ห้าม** นำข้อสอบออกจากห้องสอบโดยเด็ดขาด
6. หากมี**การทุจริต**ในการสอบ จะได้รับการลงโทษตามระเบียบของมหาวิทยาลัย

ข้าพเจ้าจะปฏิบัติตามข้อตกลงอย่างเคร่งครัด

ลงชื่อผู้เข้าสอบ

....

อาจารย์ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย

ข้อที่	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	รวม
คะแนน											

1. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้โดยไม่ต้องแสดงวิธีทำ (ข้อละ 1 คะแนน)

1.1 ให้ $\varphi : (\mathbb{R}^*, \cdot) \to (\mathbb{R}, +)$ เป็น**ฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน** (homomorphism) ถ้า $\varphi(4) = 6$ แล้ว $\varphi(2)$ มีค่าเท่าใด ____________

1.2 ให้ $\varphi : G \to \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_n$ เป็น**ฟังก์ชันสมสัณฐาน** (isomorphism) ถ้า $|G| = 20$ แล้ว n มีค่าเท่าใด ____________

1.3 จงหา k ที่ทำให้**กรุปผลหาร** (quotient group) $\mathbb{Z}/\langle k\rangle$ มีสมาชิก 10 ตัว ____________

1.4 **ริงย่อย** (subring) ทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_{250}$ มีจำนวนเท่าใด ____________

1.5 จงหาจำนวน **ตัวหารศูนย์** (zero divisor) ทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_{600}$ ____________

1.6 ถ้า $a + b\sqrt{-2}$ เป็น **หน่วย**(unit) ใน $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ แล้ว b มีค่าเท่าใด ____________

1.7 จงยกตัวอย่าง $\langle p\rangle$ ที่เป็น**ไอดีสใหญ่สุด** (maximal ideal) ของ $\mathbb{Z}$ ซึ่ง $50 < p < 60$ ____________

1.8 จงหา**จำนวน ไอดีลเฉพาะ** (prime ideal) ทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_{400}$ ____________

1.9 พหุนาม **ระดับขั้น** (degree) **3** ใน $\mathbb{Z}_5[x]$ มีกี่ตัว ____________

1.10 $\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^5 + cx + \bar{1}\rangle$ เป็น **ฟิลด์** (field) อันดับเท่าใด ____________

ข้อ 2 ถึง 10 จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

2. **(10 คะแนน)** ให้ $\varphi : (\mathbb{Z}, +) \to (M_{22}(\mathbb{Z}_2), +)$ นิยามโดย

$$\varphi(a) = \begin{bmatrix} \overline{a^2} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{a} \end{bmatrix}$$

2.1 **(5 คะแนน)** จงพิสูจน์ว่า φ เป็น**ฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน** (homomorphism)

2.2 **(5 คะแนน)** กำหนดให้ $[0] = \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}$ และ $I = \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{bmatrix}$ จงแสดงว่า

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \{[0], I\}$$

โดยใช้ **ทฤษฎีบทฟังก์ชันสมสัณฐานบทที่หนึ่ง** (The first isomorphism theorem)

3. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

3.1 **(5 คะแนน)** ให้ G_1 และ G_2 เป็นกรุป โดยที่ $\varphi : G_1 \to G_2$ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน (homomorphism) ให้ H เป็นกรุปย่อยของ G_2 ถ้า

$$K = \{x \in G_1 : \varphi(x) \in H\}$$

จงพิสูจน์ว่า K เป็น**กรุปย่อย (subgroup)** ของ G_1

3.2 **(5 คะแนน)** จงหากรุปเรียงสับเปลี่ยนที่สมสัณฐาน (isomorphic) กับ $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ และเป็นกรุปย่อย (subgroup) ของ S_4 โดยใช้**ทฤษฎีบทของเคย์เลย์ (Cayley's Theorem)**

4. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

4.1 **(5 คะแนน)** ให้ $(a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2$ นิยามการดำเนินการ

$$(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$$
$$(a,b)\cdot(c,d) = (ac+5bd, ad+bc)$$

จงตรวจสอบว่า $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ มี**สมบัติการแจกแจง** (distributive law) หรือไม่

4.2 **(5 คะแนน)** ให้ R เป็นริง ถ้า

$$x^2 = x \quad \text{ทุก ๆ } x \in R$$

จงพิสูจน์ว่า R เป็น**ริงสลับที่** (commutative ring)
ข้อเสนอแนะ : พิจารณา $(x+y)^2 = (x+y)$

5. **(11 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

5.1 **(6 คะแนน)** จงตรวจสอบว่า

$$I = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix} : x, y, z \in \mathbb{Z} \right\}$$

เป็น **ริงย่อย** (subring) และ/หรือ **ไอดีลขวา** (right ideal) และ/หรือ **ไอดีลซ้าย** (left ideal) ของ $M_{33}(\mathbb{Z})$ หรือไม่

5.2 **(5 คะแนน)** ให้ $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{10}$ เป็น**ฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของริง** (ring homomorphism) โดยที่

$$\varphi(2) = \bar{2} \quad \text{และ} \quad \varphi(3) = \bar{8}$$

จงหา $\varphi(11)$

6. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

6.1 **(6 คะแนน)** ให้ p และ $p+2$ เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่

$$\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{p+2} \text{ มีตัวหารศูนย์ 22 ตัว}$$

จงหา **ตัวหารศูนย์ (zero divisor)** ของ $\mathbb{Z}_{p+4}$

6.2 **(4 คะแนน)** ให้ X และ Y เป็น**ไอดีล**ของริง R กำหนดให้

$$X + Y = \{x + y : x \in X \text{ และ } y \in Y\}$$

จงแสดงว่า $X + Y$ เป็น **ไอดีล (ideal)** ของ R

7. **(14 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

   7.1 **(7 คะแนน)** จงหา **ไอดีลใหญ่สุด (maximal ideal)** ของ $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{16}$ พร้อมเขียนแลตทิซ

7.2 **(7 คะแนน)** จงแสดงว่า $3+\sqrt{-12}$ **ลดทอนไม่ได้ (irreducible)** ใน $\mathbb{Z}[\sqrt{-12}]$

8. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

8.1 **(5 คะแนน)** ใน $\mathbb{Z}_5[x]$ กำหนดให้ $a, b, c \in \mathbb{Z}_5$ และ

$$(ax+b)^3 = \bar{3}x^3 + \bar{2}x^2 + x + c$$

จงหา a, b, c ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

8.2 **(5 คะแนน)** ให้ F เป็นฟิลด์ ให้ $a, b \in F$ สมมติว่า

$$t^2 + at + b \neq 0 \quad \text{ทุก ๆ } t \in F$$

จงพิสูจน์ว่า $p(x) = x^2 + ax + b$ **ลดทอนไม่ได้** (irreducible) ใน $F[x]$

9. **(10 คะแนน)** ให้ $p(x) = x^2 + cx + \bar{1}$ และ $\mathbb{Z}_5[x]/\langle p(x)\rangle$ เป็นฟิลด์

9.1 **(5 คะแนน)** จงเลือก $c \in \mathbb{Z}_5$ ที่ทำให้ $\mathbb{Z}_5[x]/\langle p(x)\rangle$ เป็นฟิลด์อันดับ 25

9.2 **(5 คะแนน)** ใช้ $p(x)$ จาก 9.1 หา**ตัวผกผันการคูณ**ของ

$$x + \bar{2} + \langle p(x)\rangle \quad \text{ใน} \quad \mathbb{Z}_5[x]/\langle p(x)\rangle$$

10. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

10.1 **(5 คะแนน)** จงยกตัวอย่างสมาชิกที่**ไม่เป็น สมาชิกเฉพาะ** (prime element) ใน $\mathbb{Z}[\sqrt{-10}]$

10.2 **(5 คะแนน)** คุณคิดว่าก่อนเรียนและหลังเรียนวิชาพีชคณิตนามธรรม แตกต่างหรือเหมือนกันอย่างไร

คณิตศาสตร์

มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
คณะครุศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์
เฉลยข้อสอบปลายภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2565

รหัสวิชา	ชื่อวิชา	วันเวลาสอบ	คะแนนเต็ม
MAC3310	พีชคณิตนามธรรม	เวลา 09:00 – 12:00 วันจันทร์ ที่ 7 พฤศจิกายน 2565	105 คะแนน 30%

โดย ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย

---

1. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้โดยไม่ต้องแสดงวิธีทำ (ข้อละ 1 คะแนน)

1.1 ให้ $\varphi : (\mathbb{R}^*, \cdot) \to (\mathbb{R}, +)$ เป็น**ฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน** (homomorphism) ถ้า $\varphi(4) = 6$ แล้ว $\varphi(2)$ มีค่าเท่าใด 3

แนวคำตอบ เนื่องจาก $6 = \varphi(4) = \varphi(2 \cdot 2) = \varphi(2) + \varphi(2)$ ดังนั้น $\varphi(2) = 3$

1.2 ให้ $\varphi : G \to \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_n$ เป็น**ฟังก์ชันสมสัณฐาน** (isomorphism) ถ้า $|G| = 20$ แล้ว n มีค่าเท่าใด 4

แนวคำตอบ เนื่องจาก $20 = |G| = |\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_n| = 5n$ ดังนั้น $n = 4$

1.3 จงหา k ที่ทำให้ **กรุปผลหาร (quotient group)** $\mathbb{Z}/\langle k \rangle$ มีสมาชิก 10 ตัว −10 หรือ 10

แนวคำตอบ เนื่องจาก $\langle k \rangle = k\mathbb{Z}$ ดังนั้น $|\mathbb{Z}/\langle k \rangle| = |k| = 10$ ฉะนั้น $k = \pm 10$

1.4 **ริงย่อย (subring)** ทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_{250}$ มีจำนวนเท่าใด 8

แนวคำตอบ เนื่องจากริงย่อยของ $\mathbb{Z}_{250}$ คือกรุปย่อยของ $(\mathbb{Z}_{250}, +)$
ดังนั้นจำนวนริงย่อยทั้งหมดเท่ากับจำนวนตัวหารของ $250 = 2 \cdot 5^3$ เท่ากับ $(1+1)(3+1) = 8$

1.5 จงหาจำนวน **ตัวหารศูนย์ (zero divisor)** ทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_{600}$ 439

แนวคำตอบ จำนวนตัวหารศูนย์ของ $\mathbb{Z}_{600}$ เท่ากับ

$$\begin{aligned}(600-1) - \phi(600) &= 599 - \phi(2^3 \cdot 3 \cdot 5^2) \\ &= 599 - (2^3 - 2^2)(3-1)(5^2 - 5) \\ &= 599 - 4(2)(20) \\ &= 599 - 160 = 439\end{aligned}$$

1.6 ถ้า $a + b\sqrt{-2}$ เป็น**หน่วย**(unit) ใน $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ แล้ว b มีค่าเท่าใด 0

แนวคำตอบ เนื่องจาก $a + b\sqrt{-2}$ เป็นหน่วยใน $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ ก็ต่อเมื่อ $a^2 + 2b^2 = 1$
ซึ่ง $a, b \in \mathbb{Z}$ ดังนั้น $b = 0$ และ $a = \pm 1$ เท่านั้น

1.7 จงยกตัวอย่าง $\langle p\rangle$ ที่เป็นไอดีสใหญ่สุด (maximal ideal) ของ $\mathbb{Z}$ ซึ่ง $50 < p < 60$ $\langle 53\rangle$ หรือ $\langle 59\rangle$

แนวคำตอบ จะได้ว่า p เป็นจำนวนเฉพาะซึ่ง $50 < p < 60$ ดังนั้น $p = 53, 59$

1.8 จงหา**จำนวน ไอดีลเฉพาะ (prime ideal)** ทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_{400}$ 2

แนวคำตอบ เนื่องจาก $400 = 2^4 \cdot 5^2$ ดังนั้น $\langle 2\rangle$ และ $\langle 5\rangle$ เป็นไอดีสเฉพาะ นั่นคือมี 2 ไอดีล

1.9 พหุนาม **ระดับขั้น (degree)** 3 ใน $\mathbb{Z}_5[x]$ มีกี่ตัว 500

แนวคำตอบ พหุนามระดับขั้น 3 คือ $ax^3 + bx^2 + cx + d$ เมื่อ $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_5$ โดยที่ $a \neq \bar{0}$ เป็นไปได้

$$4 \times 5 \times 5 \times 5 = 500 \text{ แบบ}$$

1.10 $\mathbb{Z}_2[x]/\left\langle x^5 + cx + \bar{1}\right\rangle$ เป็น **ฟิลด์ (field)** อันดับเท่าใด 32

แนวคำตอบ $\mathbb{Z}_2[x]/\left\langle x^5 + cx + \bar{1}\right\rangle$ เป็นฟิลด์อันดับ $2^5 = 32$

ข้อ 2 ถึง 10 จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

2. **(10 คะแนน)** ให้ $\varphi : (\mathbb{Z}, +) \to (M_{22}(\mathbb{Z}_2), +)$ นิยามโดย

$$\varphi(a) = \begin{bmatrix} \overline{a^2} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{a} \end{bmatrix}$$

2.1 **(5 คะแนน)** จงพิสูจน์ว่า φ เป็น**ฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน** (homomorphism)

แนวคำตอบ ให้ $a, b \in \mathbb{Z}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\varphi(a+b) &= \begin{bmatrix} \overline{(a+b)^2} & \bar{0} \\ \bar{0} & \overline{a+b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{a^2+2ab+b^2} & \bar{0} \\ \bar{0} & \overline{a+b} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \overline{a^2} + \overline{2ab} + \overline{b^2} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{a} + \bar{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{a^2} + \bar{0} + \overline{b^2} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{a} + \bar{b} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \overline{a^2} + \overline{b^2} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{a} + \bar{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{a^2} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{b^2} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{b} \end{bmatrix} = \varphi(a) + \varphi(b)
\end{aligned}$$

ดังนั้น φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน

2.2 **(5 คะแนน)** กำหนดให้ $[0] = \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}$ และ $I = \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{bmatrix}$ จงแสดงว่า

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \{[0], I\}$$

โดยใช้ **ทฤษฎีบทฟังก์ชันสมสัณฐานบทที่หนึ่ง** (The first isomorphism theorem)

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\text{Ker}(\varphi) &= \{x \in Z : \varphi(x) = [0]\} \\
&= \left\{ x \in Z : \begin{bmatrix} \overline{x^2} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} \right\} \\
&= \{x \in Z : \overline{x^2} = \bar{0} \text{ และ } \bar{x} = \bar{0}\} \\
&= \{x \in Z : 2 \mid x\} = 2\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

เนื่องจาก a เป็นจำนวนคู่แล้ว $\bar{a} = \overline{a^2} = \bar{0}$ และ a เป็นจำนวนคี่ แล้ว $\bar{a} = \overline{a^2} = \bar{1}$ ดังนั้น

$$\text{Ran}(\varphi) = \left\{ \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{bmatrix} \right\} = \{[0], I\}$$

โดยทฤษฎีบทฟังก์ชันสมสัณฐานบทที่หนึ่ง จะได้ว่า $\mathbb{Z}/\text{Ker}(\varphi) \cong \text{Ran}(\varphi)$ นั่นคือ

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \{[0], I\}$$

3. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

3.1 **(5 คะแนน)** ให้ G_1 และ G_2 เป็นกรุป โดยที่ $\varphi : G_1 \to G_2$ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน (homomorphism) ให้ H เป็นกรุปย่อยของ G_2 ถ้า

$$K = \{x \in G_1 : \varphi(x) \in H\}$$

จงพิสูจน์ว่า K เป็น**กรุปย่อย** (subgroup) ของ G_1

แนวคำตอบ เนื่องจาก $e_1 \in G_1$, $e_2 \in H$ และ $\varphi(e_1) = e_2$ ดังนั้น $e_1 \in K$
ให้ $a, b \in K$ จะได้ว่า $\varphi(a), \varphi(b) \in H$ เนื่องจาก H เป็นกรุปย่อยของ G_2 ฉะนั้น

$$\varphi(a)(\varphi(b))^{-1} \in H$$

พิจารณา

$$\varphi(ab^{-1}) = \varphi(a)\varphi(b^{-1}) = \varphi(a)(\varphi(b))^{-1} \in H$$

ดังนั้น $ab^{-1} \in K$ สรุปได้ว่า K เป็นกรุปย่อยของ G_1

3.2 **(5 คะแนน)** จงหากรุปเรียงสับเปลี่ยนที่สมสัณฐาน (isomorphic) กับ $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ และเป็นกรุปย่อย (subgroup) ของ S_4 โดยใช้**ทฤษฎีบทของเคย์เลย์** (Cayley's Theorem)

แนวคำตอบ พิจารณาฟังก์ชัน $T_a : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ เมื่อ $a \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(\bar{0},\bar{0}), (\bar{0},\bar{1}), (\bar{1},\bar{0}), (\bar{1},\bar{1})\}$ จะได้ว่า

$$T_{(\bar{0},\bar{0})}(x) = (\bar{0},\bar{0}) + x \qquad \longrightarrow \qquad \begin{pmatrix} (\bar{0},\bar{0}) & (\bar{0},\bar{1}) & (\bar{1},\bar{0}) & (\bar{1},\bar{1}) \\ (\bar{0},\bar{0}) & (\bar{0},\bar{1}) & (\bar{1},\bar{0}) & (\bar{1},\bar{1}) \end{pmatrix}$$

$$T_{(\bar{0},\bar{1})}(x) = (\bar{0},\bar{1}) + x \qquad \longrightarrow \qquad \begin{pmatrix} (\bar{0},\bar{0}) & (\bar{0},\bar{1}) & (\bar{1},\bar{0}) & (\bar{1},\bar{1}) \\ (\bar{0},\bar{1}) & (\bar{0},\bar{0}) & (\bar{1},\bar{1}) & (\bar{1},\bar{0}) \end{pmatrix}$$

$$T_{(\bar{1},\bar{0})}(x) = (\bar{1},\bar{0}) + x \qquad \longrightarrow \qquad \begin{pmatrix} (\bar{0},\bar{0}) & (\bar{0},\bar{1}) & (\bar{1},\bar{0}) & (\bar{1},\bar{1}) \\ (\bar{1},\bar{0}) & (\bar{1},\bar{1}) & (\bar{0},\bar{0}) & (\bar{0},\bar{1}) \end{pmatrix}$$

$$T_{(\bar{1},\bar{1})}(x) = (\bar{0},\bar{0}) + x \qquad \longrightarrow \qquad \begin{pmatrix} (\bar{0},\bar{0}) & (\bar{0},\bar{1}) & (\bar{1},\bar{0}) & (\bar{1},\bar{1}) \\ (\bar{1},\bar{1}) & (\bar{1},\bar{0}) & (\bar{0},\bar{1}) & (\bar{0},\bar{0}) \end{pmatrix}$$

ดังนั้นโดยทฤษฎีบทของเคย์เลย์ $H = \{T_{(\bar{0},\bar{0})}, T_{(\bar{0},\bar{1})}, T_{(\bar{1},\bar{0})}, T_{(\bar{1},\bar{1})}\} \cong N$ เมื่อ $N \leq S_4$ โดย

$$(\bar{0},\bar{0}) \mapsto 1 \qquad (\bar{0},\bar{1}) \mapsto 2 \qquad (\bar{1},\bar{0}) \mapsto 3 \quad \text{และ} \quad (\bar{1},\bar{1}) \mapsto 4$$

ดังนั้น

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

เนื่องจาก $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \cong H$ และ $H \cong N$ ดังนั้น $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \cong N$ ซึ่ง $N \leq S_4$

4. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

4.1 **(5 คะแนน)** ให้ $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$ นิยามการดำเนินการ

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac + 5bd, ad + bc)$$

จงตรวจสอบว่า $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ มี**สมบัติการแจกแจง** (distributive law) หรือไม่

แนวคำตอบ ให้ $(a, b), (c, d), (x, y) \in \mathbb{R}^2$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
(a, b) \cdot [(c, d) + (x, y)] &= (a, b) \cdot (c + x, d + y) \\
&= (a(c + x) + 5b(d + y), a(d + y) + b(c + x)) \\
&= (ac + ax + 5bd + 5by, ad + ay + bc + bx) \\
&= ((ac + 5bd) + (ax + 5by), (ad + bc) + (ay + bx)) \\
&= (ac + 5bd, ad + bc) + (ax + 5by, ay + bx) \\
&= [(a, b) \cdot (c, d)] + [(a, b) \cdot (x, y)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[(c, d) + (x, y)] \cdot (a, b) &= (c + x, d + y) \cdot (a, b) \\
&= ((c + x)a + 5(d + y)b, (c + x)b + (d + y)a) \\
&= (ca + xa + 5db + 5yb, cb + xb + da + ya) \\
&= ((ca + 5db) + (xa + 5yb), (cb + da) + (xb + ya)) \\
&= (ca + 5db, cb + da) + (xa + 5yb, xb + ya) \\
&= [(c, d) \cdot (a, b)] + [(x, y) \cdot (a, b)]
\end{aligned}$$

ดังนั้น $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ มีสมบัติการแจกแจง

4.2 **(5 คะแนน)** ให้ R เป็นริง ถ้า

$$x^2 = x \quad \text{ทุก ๆ } x \in R$$

จงพิสูจน์ว่า R เป็น**ริงสลับที่** (commutative ring)

ข้อเสนอแนะ : พิจารณา $(x + y)^2 = (x + y)$

แนวคำตอบ ให้ $x, y \in R$ จะได้ว่า $x^2 = x$ และ $y^2 = y$ และ $(x + y)^2 = (x + y)$ พิจารณา

$$\begin{aligned}
x + y &= (x + y)^2 \\
x + y &= (x + y)(x + y) \\
x + y &= x^2 + xy + yx + y^2 \\
x + y &= x + xy + yx + y \\
xy &= -yx = (-y)x
\end{aligned}$$

เนื่องจาก $(-y)^2 = (-y)$ และ $(-y)^2 = (-y)(-y) = y(y) = y^2 = y$ จะได้ว่า $y = -y$ ดังนั้น

$$xy = yx$$

สรุปได้ว่า R เป็นริงสลับที่

5. **(11 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

5.1 **(6 คะแนน)** จงตรวจสอบว่า

$$I = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix} : x, y, z \in \mathbb{Z} \right\}$$

เป็น **ริงย่อย** (subring) และ/หรือ **ไอดีลขวา** (right ideal) และ/หรือ **ไอดีลซ้าย** (left ideal) ของ $M_{33}(\mathbb{Z})$ หรือไม่

แนวคำตอบ ให้ $x, y, z, a, b, c \in \mathbb{Z}$ จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & x-a \\ 0 & 0 & y-b \\ 0 & 0 & z-c \end{bmatrix} \in I$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & xc \\ 0 & 0 & yb \\ 0 & 0 & zc \end{bmatrix} \in I$$

ดังนั้น I เป็นริงย่อยของ $M_{33}(\mathbb{Z})$

ให้ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix} \in I$ และ $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \in M_{33}(\mathbb{Z})$ จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_1x + a_2y + a_3z \\ 0 & 0 & b_1x + b_2y + b_3z \\ 0 & 0 & c_1x + c_2y + c_3z \end{bmatrix} \in I$$

ดังนั้น I เป็นไอดีลซ้าย (left ideal) ของ $M_{33}(\mathbb{Z})$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \notin I$$

ดังนั้น I ไม่เป็นไอดีลขวา (right ideal) ของ $M_{33}(\mathbb{Z})$

5.2 **(5 คะแนน)** ให้ $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{10}$ เป็น**ฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของริง** (ring homomorphism) โดยที่

$$\varphi(2) = \bar{2} \quad \text{และ} \quad \varphi(3) = \bar{8}$$

จงหา $\varphi(11)$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned} \varphi(11) &= \varphi(5+6) \\ &= \varphi(5) + \varphi(6) \\ &= \varphi(2+3) + \varphi(2 \cdot 3) \\ &= \varphi(2) + \varphi(3) + \varphi(2)\varphi(3) \\ &= \bar{2} + \bar{8} + \bar{2} \cdot \bar{8} \\ &= \overline{10} + \overline{16} \\ &= \bar{0} + \bar{6} \\ &= \bar{6} \quad \# \end{aligned}$$

6. (10 **คะแนน**) จงตอบคำถามต่อไปนี้

6.1 (6 **คะแนน**) ให้ p และ $p+2$ เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่

$$\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{p+2} \text{ มีตัวหารศูนย์ 22 ตัว}$$

จงหา **ตัวหารศูนย์** (zero divisor) ของ $\mathbb{Z}_{p+4}$

แนวคำตอบ พิจารณา

ตัวหารศูนย์	เงื่อนไข	จำนวนตัวหารศูนย์
$(\bar{0}, \bar{x})$	$x = 1, 2, 3, ..., p+1$	$p+1$
$(\bar{x}, \bar{0})$	$x = 1, 2, 3, ..., p-1$	$p-1$

จะได้ว่าจำนวนตัวหารศูนย์ของ $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{p+2}$ เท่ากับ $(p+1)+(p-1) = 2p = 22$ ดังนั้น $p = 11$
ฉะนั้น $p + 4 = 15$ ตัวหารศูนย์ของ $\mathbb{Z}_{15}$ คือ $\bar{3}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{12}$ $\quad \#$

6.2 (4 **คะแนน**) ให้ X และ Y เป็น**ไอดีล**ของริง R กำหนดให้

$$X + Y = \{x + y : x \in X \text{ และ } y \in Y\}$$

จงแสดงว่า $X+Y$ เป็น **ไอดีล** (ideal) ของ R

แนวคำตอบ สมมติว่า X และ Y เป็นไอดีลของริง R ให้ $x \in X$, $y \in Y$ และ $r \in R$ จะได้ว่า

$$xr, rx \in X \qquad \text{และ} \qquad yr, ry \in Y$$

$$(x+y)r = xr + yr \in X + Y \qquad \therefore (X+Y)R \subseteq (X+Y)$$
$$r(x+y) = rx + ry \in X + Y \qquad \therefore R(X+Y) \subseteq (X+Y)$$

ดังนั้น $X+Y$ เป็นไอดีลของ R

7. **(14 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

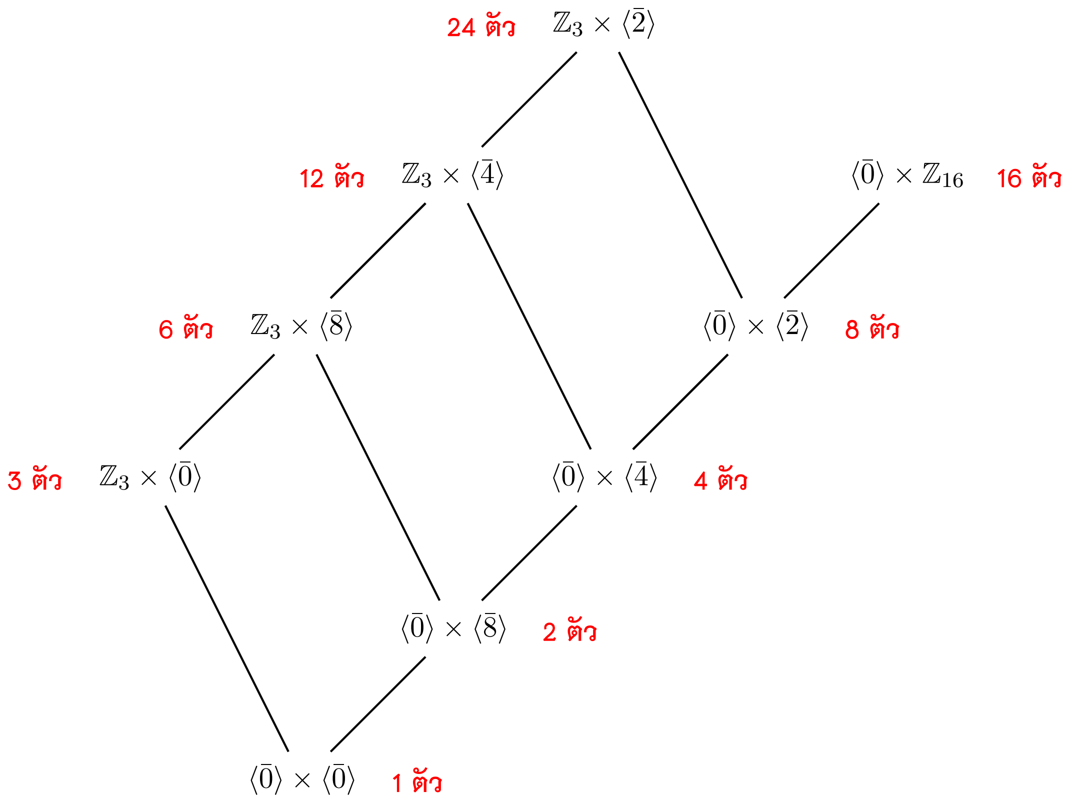
7.1 **(7 คะแนน)** จงหา **ไอดีลใหญ่สุด (maximal ideal)** ของ $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{16}$ พร้อมเขียนแลตทิซ

แนวคำตอบ ไอดีสของ $\mathbb{Z}_3$ คือ $\langle \bar{0} \rangle , \mathbb{Z}_3$ และ ไอดีสของ $\mathbb{Z}_{16}$ คือ $\langle \bar{0} \rangle , \langle \bar{2} \rangle , \langle \bar{4} \rangle , \langle \bar{8} \rangle , \mathbb{Z}_{16}$

ไอดีลทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_6$ คือ

$$\begin{array}{ccccc} \langle \bar{0} \rangle \times \langle \bar{0} \rangle & \langle \bar{0} \rangle \times \langle \bar{2} \rangle & \langle \bar{0} \rangle \times \langle \bar{4} \rangle & \langle \bar{0} \rangle \times \langle \bar{8} \rangle & \langle \bar{0} \rangle \times \mathbb{Z}_{16} \\ \mathbb{Z}_3 \times \langle \bar{0} \rangle & \mathbb{Z}_3 \times \langle \bar{2} \rangle & \mathbb{Z}_3 \times \langle \bar{4} \rangle & \mathbb{Z}_3 \times \langle \bar{8} \rangle & \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{16} \end{array}$$

เขียนเลตทิซโดยไม่มีไอดีส $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{16}$ ได้ดังรูป



จากแผนภาพจะได้ว่า $\mathbb{Z}_3 \times \langle \bar{2} \rangle$ และ $\langle \bar{0} \rangle \times \mathbb{Z}_{16}$ เป็นไอดีลใหญ่สุดของ $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{16}$

7.2 **(7 คะแนน)** จงแสดงว่า $3+\sqrt{-12}$ **ลดทอนไม่ได้** (irreducible) ใน $\mathbb{Z}[\sqrt{-12}]$

แนวคำตอบ ให้ $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ โดยที่ $3+\sqrt{-12} = (a+b\sqrt{-12})(c+d\sqrt{-12})$ จะได้ว่า

$$(ac+12bd)+(ad+bc)\sqrt{-12} = 3+\sqrt{-12}$$

ดังนั้น $ac+12bd=3$ และ $ad+bc=1$ แล้ว

$$(a-b\sqrt{-12})(c-d\sqrt{-12}) = (ac+12bd)-(bc+ad)\sqrt{-12} = 3-\sqrt{-12}$$

ฉะนั้น

$$\begin{aligned}(a^2+12b^2)(c^2+12d^2) &= (a+b\sqrt{-12})(c+d\sqrt{-12})(a-b\sqrt{-12})(c-d\sqrt{-12})\\ &= (3+\sqrt{-12})(3-\sqrt{-12})\\ &= 3^2+12 = 21\\ &= 1\cdot 21 = 3\cdot 7\end{aligned}$$

ถ้า $a^2+12b^2=3$ แล้ว $a^2=3-12b^2\geq 0$ นั่นคือ $b^2\leq \frac{3}{12}=0.25$ ดังนั้น $b=0$

จะได้ว่า $a^2+0=3$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก $a\in\mathbb{Z}$

เนื่องจาก a^2+12b^2 และ c^2+12d^2 เป็นจำนวนเต็มบวก พิจารณาเพียง 2 กรณีดังนี้

กรณี 1. $a^2+12b^2=1$ และ $c^2+12d^2=16$ จะได้ $a+b\sqrt{-12}$ เป็นหน่วย

กรณี 2. $a^2+12b^2=16$ และ $c^2+12d^2=1$ จะได้ว่า $c+d\sqrt{-12}$ เป็นหน่วย

สรุปได้ว่า $3+\sqrt{-12}$ ลดทอนไม่ได้ใน $\mathbb{Z}[\sqrt{-12}]$

8. (10 **คะแนน**) จงตอบคำถามต่อไปนี้

8.1 (5 **คะแนน**) ใน $\mathbb{Z}_5[x]$ กำหนดให้ $a, b, c \in \mathbb{Z}_5$ และ

$$(ax+b)^3 = \bar{3}x^3 + \bar{2}x^2 + x + c$$

จงหา a, b, c ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

แนวคำตอบ เนื่องจาก $\mathbb{Z}_5[x]$ เป็นริงสลับที่ได้ ดังนั้น

$$a^3x^3 + 3a^2bx^2 + 3ab^2x^2 + b^3 = \bar{3}x^3 + \bar{2}x^2 + x + c$$

และพิจารณา $a, b, c \in \mathbb{Z}_5$ ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} a^3 &= \bar{3} & \longrightarrow \quad & a = \bar{2} \\ 3a^2b &= \bar{2} & & \\ 3(\bar{2})^2b = \overline{12}b = \bar{2}b &= \bar{2} & \longrightarrow \quad & b = \bar{1} \\ 3ab^2 = 3(\bar{2})(\bar{1})^2 = \bar{6} &= \bar{1} & & \\ b^3 = (\bar{1})^3 = \bar{1} &= c & \longrightarrow \quad & c = \bar{1} \end{aligned}$$

ดังนั้น $a = \bar{2}$ และ $b = c = \bar{1}$

8.2 (5 **คะแนน**) ให้ F เป็นฟิลด์ ให้ $a, b \in F$ สมมติว่า

$$t^2 + at + b \neq 0 \quad \text{ทุก ๆ } t \in F$$

จงพิสูจน์ว่า $p(x) = x^2 + ax + b$ **ลดทอนไม่ได้** (irreducible) ใน $F[x]$

แนวคำตอบ สมมติว่า $t^2 + at + b \neq 0$ ทุก ๆ $t \in F$

พิสูจน์โดยวิธีขัดแย้ง สมมติว่า $p(x) = x^2 + ax + b$ ลดทอนได้ใน $F[x]$ จะได้ว่ามี $c, d \in F$ ซึ่ง

$$p(x) = (x+c)(x+d)$$

นั่นคือ

$$x^2 + ax + b = x^2 + (c+d)x + cd$$

จะได้ว่า $c + d = a$ หรือ $c = a - d$ และ $cd = b$ ฉะนั้น

$$\begin{aligned} cd = (a-d)d &= b \\ ad - d^2 &= b \\ d^2 - ad + b &= 0 \\ (-d)^2 + a(-d) + b &= 0 \end{aligned}$$

ถ้าให้ $t = -d \in F$ แล้ว $t^2 + at + b = 0$ เกิดข้อขัดแย้งกับสมมติฐาน
$p(x) = x^2 + ax + b$ ลดทอนไม่ได้ใน $F[x]$

9. **(10 คะแนน)** ให้ $p(x) = x^2 + cx + \bar{1}$ และ $\mathbb{Z}_5[x]/\langle p(x)\rangle$ เป็นฟิลด์

9.1 **(5 คะแนน)** จงเลือก $c \in \mathbb{Z}_5$ ที่ทำให้ $\mathbb{Z}_5[x]/\langle p(x)\rangle$ เป็นฟิลด์อันดับ 25

แนวคำตอบ สมมติว่า $p(x) = x^2 + cx + \bar{1}$ ลดทอนได้ใน $\mathbb{Z}_5[x]$ จะได้ว่ามี $a, b \in \mathbb{Z}_5$ ซึ่ง

$$x^2 + cx + \bar{1} = (x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

นั่นคือ $a + b = c$ และ $ab = \bar{1}$ พิจารณาค่าที่เป็นไปได้จากตาราง

a	b	ab	$a+b$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$
$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$

จากตารางจะเห็นได้ว่า $a + b \neq \bar{1}, \bar{4}$ จะทำให้เกิดข้อขัดแย้งเมื่อ $a + b = \bar{1}, \bar{4}$ ดังนั้น
เลือก $c = \bar{1}, \bar{4}$ จะทำให้ได้ว่า $p(x) = x^2 + x + \bar{1}$ และ $p(x) = x^2 + \bar{4}x + \bar{1}$ ลดทอนไม่ได้ใน $\mathbb{Z}_5[x]$
โดยทฤษฎีบทจะสรุปได้ว่า $\mathbb{Z}_5[x]/\langle p(x)\rangle$ เป็นฟิลด์อันดับ $5^2 = 25$

9.2 **(5 คะแนน)** ใช้ $p(x)$ จาก 9.1 หา**ตัวผกผันการคูณ**ของ

$$x + \bar{2} + \langle p(x)\rangle \quad \text{ใน} \quad \mathbb{Z}_5[x]/\langle p(x)\rangle$$

แนวคำตอบ ให้ $a, b \in \mathbb{Z}_5$
<u>กรณี $c = \bar{1}$</u>

$$\begin{aligned}
(ax + b + \langle x^2 + x + \bar{1}\rangle)(x + \bar{2} + \langle x^2 + \bar{4}x + \bar{1}\rangle) &= \bar{1} + \langle x^2 + x + \bar{1}\rangle \\
(ax+b)(x+\bar{2}) + \langle x^2 + x + \bar{1}\rangle &= \bar{1} + \langle x^2 + x + \bar{1}\rangle \\
ax^2 + \bar{2}ax + bx + \bar{2}b + \langle x^2 + x + \bar{1}\rangle &= \bar{1} + \langle x^2 + x + \bar{1}\rangle \\
a(x^2 + x + \bar{1}) - ax - a + \bar{2}ax + bx + \bar{2}b + \langle x^2 + x + \bar{1}\rangle &= \bar{1} + \langle x^2 + x + \bar{1}\rangle \\
(a+b)x + (\bar{2}b - a) + \langle x^2 + x + \bar{1}\rangle &= \bar{1} + \langle x^2 + x + \bar{1}\rangle
\end{aligned}$$

จะได้ว่า $a + b = 0$ หรือ $b = \bar{2}a$ และ $\bar{2}b - a = \bar{1}$ นั่นคือ

$$\begin{aligned}
(a+b) + (\bar{2} - a) &= \bar{1} \\
\bar{3}b &= \bar{1} \quad \longrightarrow \quad b = \bar{2} \quad \longrightarrow \quad a = -\bar{2} = \bar{3}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\bar{3}x + \bar{2} + \langle x^2 + x + \bar{1}\rangle$ เป็นตัวผกผันของ $x + \bar{2} + \langle x^2 + x + \bar{1}\rangle$ ใน $\mathbb{Z}_5[x]/\langle x^2 + x + \bar{1}\rangle$
<u>กรณี $c = \bar{4}$</u>

$$\begin{aligned}
(ax + b + \langle x^2 + \bar{4}x + \bar{1}\rangle)(x + \bar{2} + \langle x^2 + \bar{4}x + \bar{1}\rangle) &= \bar{1} + \langle x^2 + \bar{4}x + \bar{1}\rangle \\
(ax+b)(x+\bar{2}) + \langle x^2 + \bar{4}x + \bar{1}\rangle &= \bar{1} + \langle x^2 + \bar{4}x + \bar{1}\rangle \\
ax^2 + \bar{2}ax + bx + \bar{2}b + \langle x^2 + \bar{4}x + \bar{1}\rangle &= \bar{1} + \langle x^2 + \bar{4}x + \bar{1}\rangle \\
a(x^2 + \bar{4}x + \bar{1}) - \bar{4}ax - a + \bar{2}ax + bx + \bar{2}b + \langle x^2 + \bar{4}x + \bar{1}\rangle &= \bar{1} + \langle x^2 + \bar{4}x + \bar{1}\rangle \\
(-\bar{2}a + b)x + (\bar{2}b - a) + \langle x^2 + \bar{4}x + \bar{1}\rangle &= \bar{1} + \langle x^2 + \bar{4}x + \bar{1}\rangle
\end{aligned}$$

จะได้ว่า $-\bar{2}a + b = 0$ หรือ $b = \bar{2}a$ และ $\bar{2}b - a = \bar{1}$ นั่นคือ

$$\begin{aligned}
\bar{2}(\bar{2}a) - a &= \bar{1} \\
\bar{3}a &= \bar{1} \quad \longrightarrow \quad a = \bar{2} \quad \longrightarrow \quad b = \bar{2}(\bar{2}) = \bar{4}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\bar{2}x + \bar{4} + \langle x^2 + \bar{4}x + \bar{1}\rangle$ เป็นตัวผกผันของ $x + \bar{2} + \langle x^2 + \bar{4}x + \bar{1}\rangle$ ใน $\mathbb{Z}_5[x]/\langle x^2 + \bar{4}x + \bar{1}\rangle$

10. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

10.1 **(5 คะแนน)** จงยกตัวอย่างสมาชิกที่**ไม่เป็น สมาชิกเฉพาะ (prime element)** ใน $\mathbb{Z}[\sqrt{-10}]$

แนวคำตอบ จะเห็นว่า

$$11 \cdot 1 = 11 = (1+\sqrt{-10})(1-\sqrt{-10})$$

จะได้ว่า $11 \mid (1+\sqrt{-10})(1-\sqrt{-10})$

สมมติว่า $11 \mid (1+\sqrt{-10})$ จะได้ว่ามี $x, y \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง

$$\begin{aligned} 11(x+y\sqrt{-10}) &= 1+\sqrt{-10} \\ 11x + 11y\sqrt{-10} &= 1+\sqrt{-10} \end{aligned}$$

ทำให้ได้ว่า $11x = 1$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้เพราะว่า $x \in \mathbb{Z}$ ดังนั้น $11 \nmid (1+\sqrt{-10})$

ในทำนองเดียวกัน $11 \nmid (1-\sqrt{-10})$

สรุปได้ว่า 11 ไม่เป็นสมาชิกเฉพาะของ $\mathbb{Z}[\sqrt{-10}]$

10.2 **(5 คะแนน)** คุณคิดว่าก่อนเรียนและหลังเรียนวิชาพีชคณิตนามธรรม แตกต่างหรือเหมือนกันอย่างไร