



มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
คณะครุศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ข้อสอบปลายภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2562

รหัสวิชา MAP2403	ชื่อวิชา พีชคณิตนามธรรม	วันเวลาสอบ เวลา 17:00 – 20:00 วันศุกร์ ที่ 6 ตุลาคม 2562	คะแนนเต็ม 105 คะแนน 35%
---------------------	----------------------------	--	-------------------------------

ชื่อ-สกุล..... รหัสนักศึกษา..... หมู่เรียน.....

คำชี้แจง

- ข้อสอบมีทั้งหมด 12 หน้า จำนวน 10 ข้อ
- เขียนชื่อ-สกุล รหัสนักศึกษา และตอนเรียนด้วยตัวบรรจงลงในข้อสอบทุกหน้า
- ห้ามใช้ เครื่องคำนวณ และอุปกรณ์สื่อสารทุกชนิดในขณะสอบ
- ไม่อนุญาตให้นำเอกสารการเรียน ตำราเรียนทุกชนิดเข้าห้องสอบ
- ห้าม นำข้อสอบออกจากห้องสอบโดยเด็ดขาด
- หากมีการทุจริตในการสอบ จะได้รับการลงโทษตามระเบียบของมหาวิทยาลัย

ลงชื่อผู้เข้าสอบ

.....

อาจารย์ผู้สอน ผศ.ดร.ธนชัยศ จำปาหวาย

ข้อที่	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	รวม
คะแนน											

1. (10 คะแนน) จงตอบคำถามต่อไปนี้โดยไม่ต้องแสดงวิธีทำ (ข้อละ 1 คะแนน)

1.1 ให้ $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ เป็นฟังก์ชันสัทิสฐานฐาน (homomorphism) และ $a \in G_1$ _____

ถ้า $\circ(a) = 6$ แล้ว $\circ(\varphi(a))$ เป็นค่าใดได้บ้าง

1.2 ให้ $\varphi : G \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ เป็นฟังก์ชันสมสัทิสฐานฐาน (isomorphism) แล้ว $|G|$ มีค่าเท่าใด _____

1.3 จงหาจำนวนสมาชิกของกรุปผลหาร $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ _____

1.4 รังย่อย (subring) ทั้งหมดของ \mathbb{Z}_{200} มีจำนวนเท่าใด _____

1.5 จงหาจำนวนตัวหารศูนย์ (zero divisor) ทั้งหมดของ \mathbb{Z}_{500} _____

1.6 จงหาหน่วย(unit) ทั้งหมดใน $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ _____

1.7 ให้ $40 < p < 50$ และ $\langle p \rangle$ เป็นไอดีลใหญ่สุด (maximal ideal) ของ \mathbb{Z} _____

จงหา p ทั้งหมดที่เป็นไปได้

1.8 จงหาจำนวนไอดีลเฉพาะ (prime ideal) ทั้งหมดของ \mathbb{Z}_{150} _____

1.9 พหุนามระดับชั้น (degree) 2 ใน $\mathbb{Z}_3[x]$ มีกี่ตัว _____

1.10 จงหาจำนวนสมาชิกของ $\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2 + \bar{1} \rangle$ _____

ข้อ 2 ถึง 10 จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

2. (9 คะแนน) จงตอบคำถามต่อไปนี้

2.1 (5 คะแนน) ให้ $\varphi : (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (M_{22}(\mathbb{Z}), +)$ นิยามโดย

$$\varphi(a) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

จงตรวจสอบว่า φ เป็น ฟังก์ชันสัทิสต์ฐาน (homomorphism) หรือไม่ พร้อมทั้งหา $\text{Ker}(\varphi)$

2.2 (4 คะแนน) ให้ $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ เป็นฟังก์ชันสัทิสต์ฐาน (homomorphism) จงพิสูจน์ว่า

$\text{Ker}(\varphi)$ เป็น กรุย่อยปกติ (normal subgroup) ของ G_1

3. (9 คะแนน) จงตอบคำถามต่อไปนี้

3.1 (5 คะแนน) จงแสดงว่า $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_5$

โดยใช้ ทฤษฎีบทฟังก์ชันสมมูลฐานบทที่หนึ่ง (The first isomorphism theorem) สำหรับกรุป

3.2 (4 คะแนน) ให้ $G = \{-1, 1, i, -i\}$ เมื่อ $i^2 = -1$ แล้ว (G, \cdot) เป็นกรุป

จงหากรุปเรียงสับเปลี่ยนที่สมมูลฐาน (isomorphic) กับ G และเป็นกรุปย่อย (subgroup) ของ S_4

โดยใช้ทฤษฎีบทของเคย์เลย์ (Cayley's Theorem)

4. (10 คะแนน) ให้ $a, b \in \mathbb{R}$ นิยามการดำเนินการทวิภาคโดย

$$a \oplus b = a + b$$

$$a \odot b = 3ab$$

จงพิสูจน์ว่า $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ เป็นริงสลับที่ซึ่งมีหนึ่ง

5. (13 คะแนน) จงตอบคำถามต่อไปนี้

5.1 (6 คะแนน) จงตรวจสอบว่า S เป็น ริงย่อย (subring) ไอเดียลขวา ไอเดียลซ้าย หรือ ไอเดียล (ideal) ของ $M_{22}(\mathbb{R})$ หรือไม่ เมื่อ

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x & x \\ x & x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

5.2 (7 คะแนน) ให้ $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_6$ กำหนดโดย $\varphi(x) = (3\bar{x})^4$
 จงตรวจสอบว่า φ เป็นริงโฮมอมอร์ฟิซึม (ring homomorphism) หรือไม่

6. (13 คะแนน) จงตอบคำถามต่อไปนี้

6.1 (6 คะแนน) ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ ถ้า ตัวหารศูนย์ (zero divisor) ของ $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_4$ มีทั้งหมด 35 ตัว จงหา p

6.2 (7 คะแนน) ให้ R เป็นริงสลับที่ และ I เป็นไอดีลของ R กำหนดให้

$$K = \{x \in R : \text{มี } n \in \mathbb{N} \text{ ซึ่ง } x^n \in I\}$$

จงแสดงว่า K เป็น ไอดีล (ideal) ของ R

7. (14 คะแนน) จงตอบคำถามต่อไปนี้

7.1 (7 คะแนน) จงหา ไอเดียลใหญ่สุด (maximal ideal) ของ $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_9$ พร้อมเขียนแลตทิซ

7.2 (7 คะแนน) จงแสดงว่า $1 - \sqrt{-7}$ ลดทอนไม่ได้ (irreducible) ใน $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$

8. (9 คะแนน) จงตอบคำถามต่อไปนี้

8.1 (4 คะแนน) ใน $\mathbb{Z}_5[x]$ กำหนดให้ $a, b \in \mathbb{Z}_5$ และ

$$(x - \bar{1})(x + \bar{2}) + (x + a)(x + \bar{1}) + (x + b)(x + \bar{2}) = \bar{3}x^2 + \bar{3}x + \bar{2}$$

จงหา a, b ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

8.2 (5 คะแนน) ให้ F เป็นฟิลด์ ให้ $m, c \in F$ ซึ่ง $m \neq 0$ จงพิสูจน์ว่า

$mx + c$ ลดทอนไม่ได้ (irreducible) ใน $F[x]$

9. (8 คะแนน) จงตอบคำถามต่อไปนี้

9.1 (4 คะแนน) จงยกตัวอย่าง **ฟิลด์ (field)** ที่มีสมาชิก 121 ตัว

9.2 (4 คะแนน) จงหาตัวผกผันการคูณของ

$$2x - 3 + \langle x^2 + x + 1 \rangle \text{ ใน } \mathbb{R}[x]/\langle x^2 + x + 1 \rangle$$

10. (10 คะแนน) จงตอบคำถามต่อไปนี้

10.1 (5 คะแนน) คุณคิดว่าควรเพิ่มเนื้อหาเรื่อง **กรุป (group)** ลงไปใน **สาระที่ 1 จำนวนและพีชคณิต** ในหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พ.ศ. 2551 (ฉบับปรับปรุง 2560) หรือไม่เพราะเหตุใด

10.2 (5 คะแนน) สิ่งที่ได้จากการเรียนวิชา **พีชคณิตนามธรรม (Abstract Algebra)** ที่ทำให้นักศึกษาคณิตศาสตร์มีความแตกต่างจากนักศึกษาคณะสาขาอื่น ๆ คืออะไรเพราะเหตุใด