



มหาวิทยาลัยราชภัฏสกลนคร
คณะครุศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ข้อสอบปลายภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2559

รหัสวิชา MED1401	ชื่อวิชา หลักการคณิตศาสตร์ สำหรับครู	วันเวลาสอบ เวลา 13:00 - 16:00 วันอังคาร ที่ 13 ธันวาคม 2559	คะแนนเต็ม 105 คะแนน 35%
----------------------------	---	--	--------------------------------------

ชื่อ-สกุล..... รหัสนักศึกษา..... หมู่เรียน.....

คำชี้แจง

1. ข้อสอบมีทั้งหมด 10 หน้า จำนวน 10 ข้อ
2. เขียนชื่อ-สกุล รหัสนักศึกษา และตอนเรียนด้วยตัวบรรจงลงในข้อสอบทุกหน้า
3. ห้ามใช้เครื่องคำนวณ และอุปกรณ์สื่อสารทุกชนิดในขณะสอบ
4. ไม่อนุญาตให้นำเอกสารการเรียน ตำราเรียนทุกชนิดเข้าห้องสอบ
5. ห้ามนำข้อสอบออกจากห้องสอบโดยเด็ดขาด
6. หากมีการทุจริตในการสอบ จะได้รับการลงโทษตามระเบียบของมหาวิทยาลัย

ลงชื่อ

.....

อาจารย์ผู้สอน อ.ดร.ธัญชศ จำปาหวาย

ข้อที่	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	รวม
คะแนน											

1. จงตอบคำถามต่อไปนี้โดยไม่ต้องแสดงวิธีทำ (ข้อละ 1 คะแนน รวม 10 คะแนน)

1.1 กำหนดฟังก์ชัน $f = \{(1, 2), (2, 5), (6, 2), (8, 10)\}$ _____

จงหาค่าของ $f(f(1) + f^{-1}(2)) + (f \circ f)(6)$

1.2 ให้ $f^{-1}(x) = 2x - 1$ จงหาค่าของ $f(1) + f(3) + f(5) + f(7) + f(9)$ _____

1.3 ให้ $f(x) = x^2$ จงหาภาพ (image) ของ $f([-1, 1])$ _____

1.4 ให้ $f(x) = \frac{1}{x}$ จงหาภาพผกผัน (inverse image) ของ $f^{-1}(\{0, 1, 2, 3\})$ _____

1.5 ให้ $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < a\}$ เมื่อ a เป็นค่าที่ทำให้ $\sup A = 2$ จงหา $\inf A$ _____

1.6 นิยาม $a * b = a + b - 5$ เมื่อ $a, b \in \mathbb{Z}$ จงหาเอกลักษณ์ของ $*$ _____

1.7 ให้ $a, b \in \mathbb{Z}$ นิยาม $a * b = \begin{cases} |a| & \text{เมื่อ } a = b \\ |a - b| & \text{เมื่อ } a \neq b \end{cases}$ _____

จงหาค่าของ $2 * (3 * (4 * (5 * 6)))$

1.8 ให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อนและ $z^2 = (3 - 4i)(4 + 3i)$ จงหาค่าของ $|z|$ _____

1.9 ให้ $z \in \mathbb{C}$ ซึ่ง $z + \bar{z} = 10$ และ $z - \bar{z} = -24i$ จงหา $\sqrt{z \cdot \bar{z}}$ _____

1.10 กำหนดให้ $z = \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}$ จงหาค่า $2 \left(\frac{z}{\bar{z}} \right)^{100}$ _____

ข้อ 2 ถึง 10 จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

2. จงตอบคำถามความต่อไปนี้

2.1 (4 คะแนน) ให้ $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^3 + 1\}$ จงแสดงว่า $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

2.2 (2 คะแนน) ให้ฟังก์ชัน $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ เมื่อ $x \neq -1$ จงหาฟังก์ชันผกผัน $f^{-1}(x)$

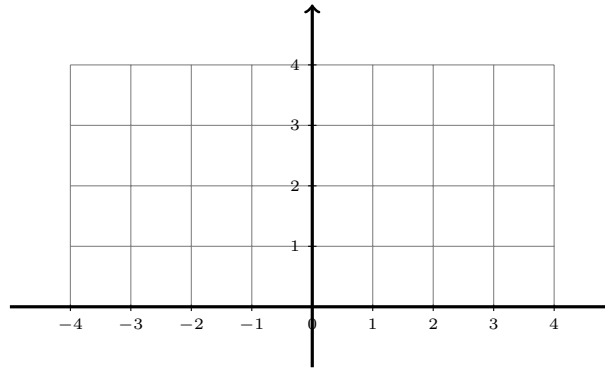
2.3 (4 คะแนน) ให้ $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ นิยามโดย

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{เมื่อ } x \text{ เป็นจำนวนนับคู่} \\ x + 1 & \text{เมื่อ } x \text{ เป็นจำนวนนับคี่} \end{cases}$$

จงตรวจสอบว่าฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชัน 1-1 และทั่วถึงหรือไม่ พร้อมทั้งพิสูจน์คำตอบดังกล่าว

3. กำหนดให้ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ นิยามโดย $f(x) = |x| + 1$

3.1 (2 คะแนน) จงวาดกราฟของ $f(x) = |x| + 1$



3.2 (5 คะแนน) จงหาภาพ (image) $f([-1, 1])$ พร้อมทั้งพิสูจน์

3.3 (5 คะแนน) จงหาภาพผกผัน (inverse image) $f^{-1}([0, 2])$ พร้อมทั้งพิสูจน์

4. จงตอบคำถามต่อไปนี้

4.1 (3 คะแนน) ให้ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ นิยามการดำเนินการ $*$ บน A ดังตาราง

$*$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	1	4	3
3	3	4	1	2
4	4	3	2	1

ก. จงหาค่า $(2 * 3) * ((4 * 2) * (3 * 4))$

ข. จงหาเอกลักษณ์ของ $*$

ค. จงหาอินเวอร์สของ 1, 2, 3 และ 4

4.2 (10 คะแนน) นิยาม $a * b = kab$ เมื่อ $a, b \in \mathbb{Z}$ และ k เป็นค่าคงที่ทำให้ $2 * 3 = -6$

ก. จงหาค่า k

ข. $*$ มีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่มหรือไม่ พร้อมทั้งพิสูจน์

ค. จงหาเอกลักษณ์ของ $*$ พร้อมทั้งพิสูจน์

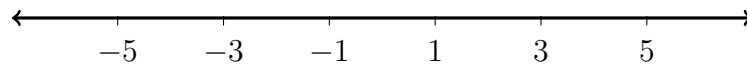
ง. จงหาอินเวอร์สของ $-1, 1, 2$ และ -2 (ถ้ามี)

จ. อินเวอร์สทั้งหมดภายใต้ $*$ บน \mathbb{Z} มีทั้งหมดกี่ตัว พร้อมทั้งให้เหตุผล

5. (10 คะแนน) กำหนดให้เซต $\mathcal{A} = \{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ และเซต $\mathcal{O} = \{2x - 1 \mid x \in \mathbb{Z}\}$

5.1 จงแจกแจงสมาชิกของเซต \mathcal{O} และ \mathcal{A}

5.2 จงเขียนแผนภาพการส่งสมาชิกจาก \mathcal{O} ไปยัง \mathcal{A}



5.3 จงสร้างฟังก์ชัน f จาก \mathcal{O} ไปยัง \mathcal{A}

5.4 จงพิสูจน์ว่า $\mathcal{O} \sim \mathcal{A}$

6. กำหนดสัจพจน์

- | | |
|--|--|
| (R1) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ | $x + y$ และ $x \cdot y$ เป็นจำนวนจริง |
| (R2) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ | $x + y = y + x$ และ $x \cdot y = y \cdot x$ |
| (R3) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ | $(x + y) + z = x + (y + z)$ และ $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ |
| (R4) $\exists! 0 \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}$ | $x + 0 = x = 0 + x$ เรียก 0 เอกลักษณะการบวก |
| (R5) $\exists! 1 \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}$ | $x \cdot 1 = x = 1 \cdot x$ เรียก 1 เอกลักษณะการคูณ |
| (R6) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}$ | $x + y = 0 = y + x$ เรียก y ว่าตัวผกผันสำหรับการบวก x เขียนแทนด้วย $-x$ |
| (R7) $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\} \exists y \in \mathbb{R}$ | $x \cdot y = 1 = y \cdot x$ เรียก y ว่าตัวผกผันสำหรับการคูณของ x เขียนแทนด้วย x^{-1} |
| (R8) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ | $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ |
| (R9) $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$ | $x + y$ และ $x \cdot y$ เป็นจำนวนจริงบวก |
- (R10) ไม่ว่า x จะเป็นจำนวนจริงใดก็ตาม ข้อความต่อไปนี้จะเป็นจริงเพียงข้อเดียวเท่านั้น

- | | | |
|--------------------------|-------------|---------------------------|
| (1) $x \in \mathbb{R}^+$ | (2) $x = 0$ | (3) $-x \in \mathbb{R}^+$ |
|--------------------------|-------------|---------------------------|

6.1 (5 คะแนน) ให้ $x, y \in \mathbb{R}$ จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้ โดยใช้สัจพจน์ที่กำหนดให้

$$\text{ถ้า } x \neq 0 \text{ และ } y \neq 0 \text{ แล้ว } (xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$$

6.2 (5 คะแนน) ให้ $a, b, c \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $c < 0$ จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้ โดยใช้นิยามและสัจพจน์ที่กำหนดให้

$$a < b \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad ac > bc$$

7. จงตอบคำถามต่อไปนี้

7.1 (5 คะแนน) ให้ $S = (1, 2) \cup \{1, 3\}$ จงหา $\sup S$ และ $\inf S$ พร้อมทั้งพิสูจน์

7.2 (6 คะแนน) ให้ $A = \{\frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$

- ก. จงแจกแจงสมาชิกของเซต A
- ข. จงหา $\sup A$ และ $\inf A$
- ค. จงพิสูจน์ $\sup A$ ที่ได้จากข้อ ข.

8. จงตอบคำถามต่อไปนี้

8.1 (5 คะแนน) ให้ $z \in \mathbb{C}$ ที่สอดคล้องสมการ $z + 3 + 6i = 2\bar{z}$ จงหาค่าของ $z \cdot \bar{z}$

8.2 (5 คะแนน) ให้ $z \in \mathbb{C}$ ซึ่ง $z \neq 0$ และ $z^2(3 - 4i)(1 - 2i) = (7 - 24i)\bar{z}(2 + i)$ จงหาค่าของ $|z|$

9. จงตอบคำถามต่อไปนี้

9.1 (5 คะแนน) ให้ $z \in \mathbb{C}$ ซึ่ง $z^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^7 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^4$ จงหาค่าของ $z^{2016} + (\bar{z})^{2016}$

9.2 (5 คะแนน) ให้ z_1, z_2 และ z_3 เป็นรากที่ 3 ของจำนวนเชิงซ้อนจำนวนหนึ่งโดยที่

$$z_1 = \sqrt{2}(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)$$

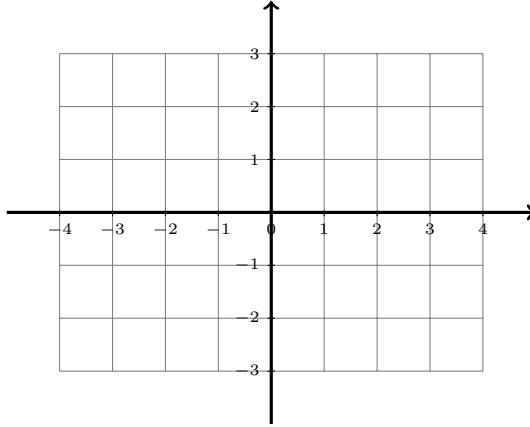
จงหาค่าของ $z_2 \cdot z_3$

10. จงตอบคำถามต่อไปนี้

10.1 (5 คะแนน) กำหนดให้พื้นที่ภายในวงรีที่มีสมการเป็น $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ เท่ากับ πab ให้

$$E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2| + |z + 2| \leq 6\}$$

จงวาดกราฟและหาทั้งพื้นที่ของ E



10.2 (5 คะแนน) ให้เขียนบรรยายหรือภาพวาดที่แสดงออกถึงความรู้สึกที่เกิดขึ้นกับตัวคุณให้ผู้อ่านเข้าใจอย่างชัดเจน (เชื่อมโยงเป็นคำตอบชุดเดียวกัน)

- ก. ความรู้สึกแรกที่ได้เริ่มวิชานี้
- ข. ความรู้สึกเมื่อเรียนวิชานี้จบแล้ว
- ค. ความรู้สึก ณ ตอนนี้
- ง. และขอสามคำฝากถึงอาจารย์ผู้สอน