มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
คณะครุศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ข้อสอบปลายภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2566

รหัสวิชา	ชื่อวิชา	วันเวลาสอบ	คะแนนเต็ม
MAI1305	ทฤษฎีจำนวน	เวลา 09:00 - 12:00 วันจันทร์ ที่ 25 มีนาคม 2567	100 คะแนน 25%

ชื่อ-สกุล.. **รหัสนักศึกษา**................................ **หมู่เรียน**................

คำชี้แจง

1. ข้อสอบมี 18 ข้อ 15 หน้า แบ่งออกเป็น 3 ตอน ประกอบด้วย
   - **ตอนที่** 1 ข้อสอบแบบ 5 ตัวเลือก จำนวน 5 ข้อ (ข้อละ 2 คะแนน รวม 10 คะแนน)
   - **ตอนที่** 2 ข้อสอบแบบเติมคำตอบ จำนวน 5 ข้อ (ข้อละ 2 คะแนน รวม 10 คะแนน)
   - **ตอนที่** 3 ข้อสอบแบบแสดงวิธีทำ จำนวน 8 ข้อ (ข้อละ 10 คะแนน รวม 80 คะแนน)
2. เขียนรหัสนักศึกษา และหมู่เรียนด้วย**ตัวบรรจงลงในข้อสอบทุกหน้า**
3. ไม่อนุญาตให้ใช้เครื่องคำนวณและเครื่องมือสื่อสาร
4. **ห้าม**นำข้อสอบออกจากห้องสอบโดยเด็ดขาด
5. หากมี**การทุจริต**ในการสอบ จะได้รับการลงโทษตามระเบียบของมหาวิทยาลัย

ข้าพเจ้าจะปฏิบัติตามข้อตกลงอย่างเคร่งครัด
ลงชื่อผู้เข้าสอบ

....

อาจารย์ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย

ตอนที่	1	2	3								รวม
ข้อ	1-5	6-10	11	12	13	14	15	16	17	18	
คะแนน											

ตารางแสดงจำนวนเฉพาะไม่เกิน 1000

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37
41	43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89
97	101	103	107	109	113	127	131	137	139	149	151
157	163	167	173	179	181	191	193	197	199	211	223
227	229	233	239	241	251	257	263	269	271	277	281
283	293	307	311	313	317	331	337	347	349	353	359
367	373	379	383	389	397	401	419	421	431	433	439
443	449	457	461	463	467	479	487	491	499	503	509
521	523	541	547	557	563	569	571	577	587	593	599
601	607	613	617	619	631	641	643	647	653	659	661
673	677	683	691	701	709	719	727	733	739	743	751
757	761	769	773	787	797	809	811	821	823	827	829
839	853	859	863	877	881	883	887	907	911	919	929
937	941	947	953	967	971	977	983	911	997		

ตอนที่ 1 : (10 คะแนน) จงกากบาททับข้อที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว ข้อละ 2 คะแนน

1. ให้ a, b เป็นจำนวนเต็ม และ m เป็นจำนวนเต็มบวก ข้อต่อไปนี้**ถูกต้อง**

   ก. ถ้า $a^2 \equiv b^2 \pmod{m}$ แล้ว $a \equiv b \pmod{m}$

   ข. ถ้า $2a \equiv 2b \pmod{m}$ แล้ว $a \equiv b \pmod{m}$

   ค. ถ้า $a + 2 \equiv b + 2 \pmod{m}$ แล้ว $a \equiv b \pmod{m}$

   ง. ถ้า $2a \equiv b^2 \pmod{m}$ แล้ว $a \equiv b \pmod{m}$

   จ. ถ้า $a^2 \equiv 2b \pmod{m}$ แล้ว $a \equiv b \pmod{m}$

2. สมการคอนกรูเอ็นซ์ในข้อใดต่อไปนี้ **ไม่มีคำตอบ**

ก. $20x \equiv 1 \pmod 7$

ข. $21x \equiv 2 \pmod 7$

ค. $22x \equiv 3 \pmod 7$

ง. $23x \equiv 4 \pmod 7$

จ. $24x \equiv 5 \pmod 7$

3. กำหนดให้

$$A = \phi(1000), \quad B = \tau(1000), \quad C = \sigma(100) \quad \text{และ} \quad D = \sigma_2(10)$$

ข้อใดต่อไปนี้ **ถูกต้อง**

ก. $B < D < C < A$

ข. $D < B < C < A$

ค. $B < D < A < C$

ง. $D < B < A < C$

จ. $C < B < D < A$

4. สมการไดโอแฟนไทน์ข้อใดต่อไปนี้ มีคำตอบคือ

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 43 - 24t \end{cases} \quad , t \in \mathbb{Z}$$

ก. $24x + y = 24$

ข. $67x + y = 43$

ค. $24x + y = 43$

ง. $24x + y = 67$

จ. $67x + y = 24$

5. ข้อใดคือ **สามสิ่งอันดับพีทาโกรัสปฐมฐาน (Primitive Pythagorean Triple)**

ก. $\{6, 8, 10\}$

ข. $\{15, 36, 39\}$

ค. $\{40, 42, 58\}$

ง. $\{20, 21, 39\}$

จ. $\{11, 60, 61\}$

ตอนที่ 2 : (10 คะแนน) จงเติมคำตอบในช่องว่าง (ด้านซ้ายบน) ให้ถูกต้อง ข้อละ 2 คะแนน

6. ______________________

จงหา**เศษเหลือ**ที่เกิดจากที่หาร $98!$ ด้วย 101 (ตอบเป็นจำนวนบวก)

7. ____________________

จงหาค่าของ $\sum_{d|20} \tau(d)$

8. ____________________

ให้ k เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $1 < k < 100$ ถ้าสมการไดโอแฟนไทน์ต่อไปนี้**มีคำตอบ**

$$134x + 201y = k$$

แล้ว k คือจำนวนใด

9. ______________________

ให้ a, b เป็นค่าคงตัว โดยที่ (x, y, z) เป็นรูปแบบคำตอบของสมการไดโอแฟนไทน์

$$ax + by + z = 17$$

ถ้า $(2, 3, 4)$ และ $(1, 4, 3)$ เป็นคำตอบของสมการนี้ จงหา $a + b$

10. ______________________

จงหาจำนวนเต็มบวก a ที่ทำให้ $\{a, a+1, a+9\}$ เป็นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัส (Pythagorean Triple)

ตอนที่ 3 : (80 คะแนน) จงแสดงวิธีโดยละเอียด ข้อละ 10 คะแนน

11. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

11.1 **(5 คะแนน)** จงพิสูจน์ว่า $28 \mid (6^{2n+2} - 2^{6n+3})$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$ โดยใช้คอนกรูเอ็นซ์

11.2 **(5 คะแนน)** จงหา**เลขท้ายสามตัว**ของ 11^{398} (*ข้อเสนอแนะ*: ใช้ทฤษฎีบทของออยเลอร์)

12. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

12.1 **(5 คะแนน)** จงหา**คำตอบที่ไม่คอนกรูเอนซ์มอดุโล 119** ของสมการ $84x \equiv 35 \pmod{119}$

12.2 **(5 คะแนน)** จงใช้**ทฤษฎีบทของวิลสัน หาเศษเหลือ**ที่เกิดจากการหาร

$$88! + 87! + 86! + 85! \quad \text{ด้วย} \quad 89$$

13. **(10 คะแนน)** จงหา**จำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุด** เมื่อ

หารด้วย $15, 21$ และ 35 เศษเหลือเท่ากับ $10,\ 16$ และ 30 ตามลำดับ

โดยใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือของจีน (CRT)

14. **(10 คะแนน)** ให้ σ เป็นฟังก์ชันซิกมา (ผลบวกของตัวหาร) และ $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$ ที่นิยามโดย

$$f(n) = n \cdot \sigma(n^2) \qquad \text{เมื่อ} \qquad n \in \mathbb{Z}^+$$

14.1 **(5 คะแนน)** จงตรวจสอบว่า f เป็น**ฟังก์ชันเชิงการคูณ** หรือไม่
ถ้าจริงจงพิสูจน์ ไม่จริงจงยกตัวอย่างค้าน

14.2 **(5 คะแนน)** จงหาจำนวนเฉพาะ p, q โดยที่ $p < q$ ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไข

$$f(pq) = 91pq$$

15. **(10 คะแนน)** ถ้า p, q เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่ $p < q$ ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไข (เพียงคู่เดียว)

$$\phi(p^2q^2) = 305(p-1)(q-1)$$

จงหาค่าของ $\tau(pq^2 + qp^2)$

16. **(10 คะแนน)** กำหนดให้ $N = (21!)^2(22!)^0(23!)^2(24!)^4$

16.1 **(8 คะแนน)** จงใช้สูตรโพลิกแนค (Polignac's formula) เขียน **รูปแบบบัญญัติ** ของ N

16.2 **(2 คะแนน)** จงหา**จำนวนเลขศูนย์ที่ลงท้าย**ของจำนวนเต็มบวก N

17. **(10 คะแนน)** อาจารย์คณิตศาสตร์ท่านหนึ่งชอบกินทุเรียนมาก จึงให้ออกไปซื้อทุเรียน ณ ร้านแห่งหนึ่งแถว ตลาด อตก. ปรากฎว่าร้านที่ซื้อมีทุเรียน 3 สายพันธุ์คือ ก้านยาว หมอนทอง และชะนีไข่ โดยมีราคาดังนี้

ชะนีไข่	กิโลกรัมละ	150	บาท
หมอนทอง	กิโลกรัมละ	200	บาท
ก้านยาว	กิโลกรัมละ	300	บาท

ทางร้านคัดทุเรียนที่มีขนาด 2, 3, 4 และ 5 กิโลกรัมต่อลูก เท่านั้น ทุกสายพันธ์มีครบทุกขนาดจำนวนมาก ถ้าอาจารย์ท่านนี้ตั้งจะซื้อให้ครบ 2,000 บาท โดยต้องการกินทุเรียนทั้ง 3 สายพันธ์ ๆ ละลูก (ซื้อจำนวน 3 ลูก ๆ ละสายพันธุ์) จงหาว่าต้องซื้อแต่ละพันธุ์ด้วยขนาดเท่าใดบ้าง และเป็นไปได้กี่แบบ (โดยใช้สมการไดโอแฟนไทน์)

18. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

18.1 **(5 คะแนน)** จงหา**สามสิ่งอันดับพีทาโกรัส (PT)** ที่มีจำนวน 72 พร้อมทั้งระบุด้วยว่าสามจำนวนใดเป็นชนิดปฐมฐาน (PPT)

18.2 **(5 คะแนน)** ให้ t เป็นจำนวนเต็มบวก จงพิสูจน์ว่า

$$\{2t+2, t^2+2t, t^2+2t+2\} \qquad \text{เป็นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัส}$$

และยกตัวอย่างสามสิ่งอันดับพีทาโกรัสปฐมฐาน (PPT) ที่ได้จากสูตรดังกล่าวมาอย่างน้อย 3 ชุด

มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
คณะครุศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์
เฉลยข้อสอบปลายภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2566

รหัสวิชา	ชื่อวิชา	วันเวลาสอบ	คะแนนเต็ม
MAI1305	ทฤษฎีจำนวน	เวลา 09:00 - 12:00 วันจันทร์ ที่ 25 มีนาคม 2567	100 คะแนน 25%

โดย ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย

ตอนที่ 1 : (10 คะแนน) จงกากบาททับข้อที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว ข้อละ 2 คะแนน

1. ให้ a, b เป็นจำนวนเต็ม และ m เป็นจำนวนเต็มบวก ข้อต่อไปนี้**ถูกต้อง**

   ก. ถ้า $a^2 \equiv b^2 \pmod{m}$ แล้ว $a \equiv b \pmod{m}$

   ข. ถ้า $2a \equiv 2b \pmod{m}$ แล้ว $a \equiv b \pmod{m}$

   ค. ถ้า $a + 2 \equiv b + 2 \pmod{m}$ แล้ว $a \equiv b \pmod{m}$ Answer

   ง. ถ้า $2a \equiv b^2 \pmod{m}$ แล้ว $a \equiv b \pmod{m}$

   จ. ถ้า $a^2 \equiv 2b \pmod{m}$ แล้ว $a \equiv b \pmod{m}$

   ตอบข้อ ค.

   ก. ผิด ถ้าเลือก $m = 4$ และ $a = 1, b = 3$

   ข. ผิด ถ้าเลือก $m = 4$ และ $a = 1, b = 3$

   ค. ถูก ถ้า $a + 2 \equiv b + 2 \pmod{m}$ จะได้ว่า $m \mid [(b + 2) - (a + 2)]$
   นั่นคือ $m \mid (b - a)$ หรือ $a \equiv b \pmod{m}$

   ง. ผิด ถ้าเลือก $m = 2$ และ $a = 1, b = 4$

   จ. ผิด ถ้าเลือก $m = 2$ และ $a = 4, b = 1$

2. สมการคอนกรูเอ็นซ์ในข้อใดต่อไปนี้ **ไม่มีคำตอบ**

   ก. $20x \equiv 1 \pmod 7$

   ข. $21x \equiv 2 \pmod 7$ Answer

   ค. $22x \equiv 3 \pmod 7$

   ง. $23x \equiv 4 \pmod 7$

   จ. $24x \equiv 5 \pmod 7$

ตอบข้อ ข.

ก. เนื่องจาก $d = \gcd(20, 7) = 1$ และ $d \mid 1$ ดังนั้น $20x \equiv 1 \pmod 7$ มีคำตอบ

ข. เนื่องจาก $d = \gcd(21, 7) = 7$ และ $d \nmid 2$ ดังนั้น $21x \equiv 2 \pmod 7$ **ไม่มีคำตอบ**

ค. เนื่องจาก $d = \gcd(22, 7) = 1$ และ $d \mid 3$ ดังนั้น $22x \equiv 3 \pmod 7$ มีคำตอบ

ง. เนื่องจาก $d = \gcd(23, 7) = 1$ และ $d \mid 4$ ดังนั้น $23x \equiv 4 \pmod 7$ มีคำตอบ

จ. เนื่องจาก $d = \gcd(24, 7) = 1$ และ $d \mid 5$ ดังนั้น $24x \equiv 5 \pmod 7$ มีคำตอบ

3. กำหนดให้

$$A = \phi(1000), \qquad B = \tau(1000), \qquad C = \sigma(100) \qquad \text{และ} \qquad D = \sigma_2(10)$$

ข้อใดต่อไปนี้ **ถูกต้อง**

ก. $B < D < C < A$ Answer

ข. $D < B < C < A$

ค. $B < D < A < C$

ง. $D < B < A < C$

จ. $C < B < D < A$

ตอบข้อ ก. แนวคำตอบ

$$\begin{aligned}
A &= \phi(1000) = \phi(2^2 \cdot 5^3) = (2^3 - 2^2)(5^3 - 5^2) = (4)(100) = 400 \\
B &= \tau(1000) = \tau(2^3 \cdot 5^3) = (3+1)(3+1) = 16 \\
C &= \sigma(100) = \sigma(2^2 \cdot 5^2) = \sigma(2^2)\sigma(5^2) = (1+2+2^2)(1+5+5^2) = 7(31) = 217 \\
D &= \sigma_2(10) = \sigma_2(2 \cdot 5) = \sigma_2(2)\sigma_2(5) = (1^2+2^2)(1^2+5^2) = (5)(26) = 130
\end{aligned}$$

สรุปได้ว่า

$$B < D < C < A$$

4. สมการไดโอแฟนไทน์ข้อใดต่อไปนี้ มีคำตอบคือ

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 43 - 24t \end{cases} ,t \in \mathbb{Z}$$

ก. $24x + y = 24$

ข. $67x + y = 43$

ค. $24x + y = 43$

ง. $24x + y = 67$ Answer

จ. $67x + y = 24$

ตอบข้อ ง. แทนค่า $t = x - 1$ ในสมการ $y = 43 - 24t$ จะได้ว่า

$$y = 43 - 24(x-1) = 43 - 24x + 24 = 67 - 24x$$
$$24x + y = 67$$

5. ข้อใดคือ **สามสิ่งอันดับพีทาโกรัสปฐมฐาน (Primitive Pythagorean Triple)**

ก. $\{6, 8, 10\}$

ข. $\{15, 36, 39\}$

ค. $\{40, 42, 58\}$

ง. $\{20, 21, 39\}$

จ. $\{11, 60, 61\}$ Answer

ตอบข้อ จ.

ก. ไม่เป็น เนื่องจาก $\gcd(6, 8, 10) = 2$

ข. ไม่เป็น เนื่องจาก $\gcd(15, 36, 39) = 3$

ค. ไม่เป็น เนื่องจาก $\gcd(40, 42, 58) = 2$

ง. ไม่เป็น เนื่องจาก $\gcd(20, 21, 39) = 1$ แต่ $20^2 + 21^2 \neq 39^2$

จ. เป็น เนื่องจาก $\gcd(11, 60, 61) = 1$ และ $11^2 + 60^2 = 61^2$

ตอนที่ 2 : (10 คะแนน) จงเติมคำตอบในช่องว่าง (ด้านซ้ายบน) ให้ถูกต้อง ข้อละ 2 คะแนน

6. ตอบ 50

จงหา**เศษเหลือ**ที่เกิดจากที่หาร $98!$ ด้วย 101 (ตอบเป็นจำนวนบวก)

แนวคำตอบ เนื่องจาก 101 เป็นจำนวนเฉพาะ โดยทฤษฎีของวิลสัน จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
(101-1)! &\equiv -1 \pmod{101}\\
100! &\equiv -1 \pmod{101}\\
100\cdot 99! &\equiv -1 \pmod{101}\\
-1\cdot 99! &\equiv -1 \pmod{101}\\
99! &\equiv 1 \pmod{101}\\
99\cdot 98! &\equiv 1 \pmod{101}\\
-2\cdot 98! &\equiv 1 \pmod{101}\\
-100\cdot 98! &\equiv 50 \pmod{101}\\
98! &\equiv 50 \pmod{101}
\end{aligned}$$

ดังนั้นเศษเหลือที่เกิดจากที่หาร 98! ด้วย 101 เท่ากับ 50 $\#$

7. ตอบ 18

จงหาค่าของ $\sum\limits_{d|20} \tau(d)$

แนวคำตอบ เนื่องจากตัวหารของ 20 คือ 1, 2, 4, 5, 10, 20 ดังนั้น

$$\begin{aligned}
X = \sum_{d|20} \tau(d) &= \tau(1)+\tau(2)+\tau(4)+\tau(5)+\tau(10)+\tau(20)\\
&= 1+(1+1)+\tau(2^2)+(1+1)+\tau(2\cdot 5)+\tau(2^2\cdot 5)\\
&= 1+2+(2+1)+2+(1+1)(1+1)+(2+1)(1+1)\\
&= 1+2+3+2+4+6\\
&= 18 \quad \#
\end{aligned}$$

8. ตอบ 67

ให้ k เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $1<k<100$ ถ้าสมการไดโอแฟนไทน์ต่อไปนี้**มีคำตอบ**

$$134x+201y=k$$

แล้ว k คือจำนวนใด

แนวคำตอบ พิจารณา

$$d=\gcd(134,201)=\gcd(67\cdot 2, 67\cdot 3)=67$$

แล้ว $134x+201y=k$ มีคำตอบ ก็ต่อเมื่อ $67 \mid k$ จะได้ว่า $k=67,134,201,\ldots$
เนื่องจาก $1<k<100$ สรุปได้ว่า $k=67$ $\#$

9. ตอบ 5

ให้ a, b เป็นค่าคงตัว โดยที่ (x, y, z) เป็นรูปแบบคำตอบของสมการไดโอแฟนไทน์

$$ax + by + z = 17$$

ถ้า $(2,3,4)$ และ $(1,4,3)$ เป็นคำตอบของสมการนี้ จงหา $a+b$

แนวคำตอบ เนื่องจาก $(2,3,4)$ และ $(1,4,3)$ เป็นคำตอบของสมการนี้ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 2a + 3b + 4 &= 17 \\ 2a + 3b &= 13 \qquad (1) \\ a + 4b + 3 &= 17 \\ a + 4b &= 14 \qquad (2) \\ a &= 14 - 4b \end{aligned}$$

แทน $a = 14 - 4b$ แทนในสมการ (1) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 2(14-4b) + 3b &= 13 \\ 28 - 8b + 3b &= 13 \\ -5b &= -15 \\ b &= 3 \quad \longrightarrow \quad a = 14 - 4(3) = 2 \end{aligned}$$

ดังนั้น $a + b = 2 + 3 = 5$ #

10. ตอบ 20

จงหาจำนวนเต็มบวก a ที่ทำให้ $\{a, a+1, a+9\}$ เป็นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัส (Pythagorean Triple)

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned} a^2 + (a+1)^2 &= (a+9)^2 \\ a^2 + a^2 + 2a + 1 &= a^2 + 18a + 81 \\ a^2 - 16a - 80 &= 0 \\ (a-20)(a+4) &= 0 \\ a &= 20, -4 \end{aligned}$$

ดังนั้น $a = 20$ #

ตอนที่ 3 : (80 คะแนน) จงแสดงวิธีโดยละเอียด ข้อละ 10 คะแนน

11. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

11.1 **(5 คะแนน)** จงพิสูจน์ว่า $28 \mid (6^{2n+2} - 2^{6n+3})$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$ โดยใช้คอนกรูเอ็นซ์

บทพิสูจน์. ให้ $n \in \mathbb{N}$ เนื่องจาก $64 \equiv 36 \pmod{28}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
2^6 &\equiv 6^2 &&\pmod{28}\\
(2^6)^n &\equiv (6^2)^n &&\pmod{28}\\
2^{6n} &\equiv 6^{2n} &&\pmod{28}\\
2^{6n}\cdot 36 &\equiv 6^{2n}\cdot 36 &&\pmod{28}\\
2^{6n}\cdot 8 &\equiv 6^{2n}\cdot 6^2 &&\pmod{28}\\
2^{6n}\cdot 2^3 &\equiv 6^{2n+2} &&\pmod{28}\\
2^{6n+3} &\equiv 6^{2n+2} &&\pmod{28}
\end{aligned}$$

สรุปได้ว่า $28 \mid (6^{2n+2} - 2^{6n+3})$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$ □

11.2 **(5 คะแนน)** จงหา**เลขท้ายสามตัว**ของ 11^{398} (*ข้อเสนอแนะ*: ใช้ทฤษฎีบทของออยเลอร์)

แนวคำตอบ เนื่องจาก $\gcd(1000, 11) = 1$ และ

$$\phi(1000) = \phi(2^3 \cdot 5^3) = (2^3 - 2^2)(5^3 - 5^2) = 400$$

โดยทฤษฎีบทของออยเลอร์ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
11^{\phi(1000)} &\equiv 1 &&\pmod{1000}\\
11^{400} &\equiv 1 &&\pmod{1000}\\
11\cdot 11^{399} &\equiv 1 &&\pmod{1000}\\
91\cdot 11\cdot 11^{399} &\equiv 91 &&\pmod{1000}\\
1001\cdot 11^{399} &\equiv 91 &&\pmod{1000}\\
11^{399} &\equiv 91 &&\pmod{1000}\\
11\cdot 11^{398} &\equiv 91 &&\pmod{1000}\\
91\cdot 11\cdot 11^{398} &\equiv 91\cdot 91 &&\pmod{1000}\\
1001\cdot 11^{398} &\equiv 8281 &&\pmod{1000}\\
11^{398} &\equiv 281 &&\pmod{1000}
\end{aligned}$$

ดังนั้นเลขท้ายสามตัวของ 11^{398} คือ 281 #

12. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

12.1 **(5 คะแนน)** จงหา**คำตอบที่ไม่คอนกรูเอนซ์มอดุโล** 119 ของสมการ $84x \equiv 35 \pmod{119}$

แนวคำตอบ เนื่องจาก $\gcd(84, 119) = 7$ และ $7 \mid 35$ ดังนั้น $84x \equiv 35 \pmod{119}$ มีคำตอบ
พิจารณา $12x \equiv 5 \pmod{17}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
-5x &\equiv 5 && (\bmod\ 17)\\
-x &\equiv 5 && (\bmod\ 17) \quad \because \gcd(5,17)=1\\
-x &\equiv 1 && (\bmod\ 17)\\
x &\equiv -1 && (\bmod\ 17)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $x = -1 + 17t$ เมื่อ $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ เป็นคำตอบที่ไม่คอนกรูเอนซ์มอดุโล 119 นั่นคือ

$$x = -1, 16, 33, 50, 67, 84, 101 \qquad \#$$

12.2 **(5 คะแนน)** จงใช้**ทฤษฎีบทของวิลสัน หาเศษเหลือ**ที่เกิดจากการหาร

$$88! + 87! + 86! + 85! \quad \text{ด้วย} \quad 89$$

แนวคำตอบ นื่องจาก 89 เป็นจำนวนเฉพาะ โดยทฤษฎีของวิลสัน จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
(89-1)! &\equiv -1 && (\bmod\ 89)\\
88! &\equiv -1 && (\bmod\ 89)\\
88 \cdot 87! &\equiv -1 && (\bmod\ 89)\\
-1 \cdot 87! &\equiv -1 && (\bmod\ 89)\\
87! &\equiv 1 && (\bmod\ 89)\\
87 \cdot 86! &\equiv 1 && (\bmod\ 89)\\
-2 \cdot 86! &\equiv 1 && (\bmod\ 89)\\
-90 \cdot 86! &\equiv 45 && (\bmod\ 89)\\
-1 \cdot 86! &\equiv 45 && (\bmod\ 89)\\
86! &\equiv -45 && (\bmod\ 89)\\
86 \cdot 85! &\equiv -45 && (\bmod\ 89)\\
-3 \cdot 85! &\equiv 44 && (\bmod\ 89)\\
-90 \cdot 85! &\equiv 30 \cdot 44 = 1320 && (\bmod\ 89)\\
-1 \cdot 85! &\equiv 74 && (\bmod\ 89)\\
85! &\equiv -74 && (\bmod\ 89)\\
85! &\equiv 15 && (\bmod\ 89)
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
88! + 87! + 86! + 85! &\equiv -1 + 1 - 45 + 15 && (\bmod\ 89)\\
&\equiv -30 && (\bmod\ 89)\\
&\equiv 59 && (\bmod\ 89)
\end{aligned}$$

สรุปได้ว่าเศษเหลือที่เกิดจากหาร $88! + 87! + 86! + 85!$ ด้วย 89 เท่ากับ 59 $\qquad \#$

13. **(10 คะแนน)** จงหา**จำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุด** เมื่อ

หารด้วย $15, 21$ และ 35 เศษเหลือเท่ากับ 10, 16 และ 30 ตามลำดับ

โดยใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือของจีน (CRT)

แนวคำตอบ ให้ x เป็นจำนวนเต็มที่สอดคล้องเงื่อนไข

$$\begin{aligned} x &\equiv 10 \pmod{15} \\ x &\equiv 16 \pmod{21} \\ x &\equiv 30 \pmod{35} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\gcd(15,21) = 3$ ซึ่ง $3 \mid (10-16)$, $\gcd(15,35) = 5$ ซึ่ง $5 \mid (10-30)$
และ $\gcd(21,35) = 7$ ซึ่ง $7 \mid (16-30)$ ดังนั้นระบบสมการนี้มีคำตอบ
เนื่องจาก $\gcd(3,5) = 1$ ฉะนั้น $x \equiv 10 \pmod{15}$ มีคำตอบเดียวกับระบบคำตอบของสมการ

$$\begin{aligned} x &\equiv 10 \pmod{3} &\longrightarrow\quad x &\equiv 1 \pmod{3} \\ x &\equiv 10 \pmod{5} &\longrightarrow\quad x &\equiv 0 \pmod{5} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\gcd(3,7) = 1$ ฉะนั้น $x \equiv 16 \pmod{21}$ มีคำตอบเดียวกับระบบคำตอบของสมการ

$$\begin{aligned} x &\equiv 16 \pmod{3} &\longrightarrow\quad x &\equiv 1 \pmod{3} \\ x &\equiv 16 \pmod{7} &\longrightarrow\quad x &\equiv 2 \pmod{7} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\gcd(5,7) = 1$ ฉะนั้น $x \equiv 30 \pmod{35}$ มีคำตอบเดียวกับระบบคำตอบของสมการ

$$\begin{aligned} x &\equiv 30 \pmod{5} &\longrightarrow\quad x &\equiv 0 \pmod{5} \\ x &\equiv 30 \pmod{7} &\longrightarrow\quad x &\equiv 2 \pmod{7} \end{aligned}$$

ดังนั้นคำตอบของระบบสมการนี้จะสอดคล้องระบบสมการ

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod{3} \\ x &\equiv 0 \pmod{5} \\ x &\equiv 2 \pmod{7} \end{aligned}$$

พิจารณาสมการ

$$\begin{aligned} 5(7)x &= 35x = -x \equiv 1 \pmod{3} &\longrightarrow\quad x_1 = -1 \\ 3(7)x &= 21x = x \equiv 1 \pmod{5} &\longrightarrow\quad x_2 = 1 \\ 3(5)x &= 15x = x \equiv 1 \pmod{7} &\longrightarrow\quad x_3 = 1 \end{aligned}$$

ฉะนั้น

$$\begin{aligned} x_0 &\equiv 5(7)(-1)(1) + 3(7)(1)(0) + 3(5)(2)(1) \pmod{3 \cdot 5 \cdot 7} \\ &\equiv -35 + 0 + 30 \pmod{105} \\ &\equiv -5 \pmod{105} \\ &\equiv 100 \pmod{105} \end{aligned}$$

จะได้ว่าคำตอบของระบบสมการนี้คือ $x \equiv 100 \pmod{105}$ ดังนั้นจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดเมื่อ
หารด้วย $15, 21$ และ 35 เศษเหลือเท่ากับ 10, 16 และ 30 ตามลำดับ เท่ากับ 100 $\#$

14. **(10 คะแนน)** ให้ σ เป็นฟังก์ชันซิกมา (ผลบวกของตัวหาร) และ $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$ ที่นิยามโดย

$$f(n) = n \cdot \sigma(n^2) \qquad \text{เมื่อ} \qquad n \in \mathbb{Z}^+$$

14.1 **(5 คะแนน)** จงตรวจสอบว่า f เป็น**ฟังก์ชันเชิงการคูณ** หรือไม่
ถ้าจริงจงพิสูจน์ ไม่จริงจงยกตัวอย่างค้าน

แนวคำตอบ ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง $\gcd(m,n) = 1$ จะได้ว่า $\gcd(m^2, n^2) = 1$ ฉะนั้น

$$\begin{aligned} f(mn) &= (mn)\sigma((mn)^2) = mn\sigma(m^2n^2) = mn\sigma(m^2)\sigma(n^2) \\ &= [m\sigma(m^2)][n\sigma(n^2)] = f(m)f(n) \end{aligned}$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันเชิงการคูณ

14.2 **(5 คะแนน)** จงหาจำนวนเฉพาะ p, q โดยที่ $p < q$ ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไข

$$f(pq) = 91pq$$

แนวคำตอบ เนื่องจาก $p < q$ จะได้ว่า $\gcd(p, q) = 1$ โดยข้อ 14.1

$$\begin{aligned} f(pq) &= 91pq \\ f(p)f(q) &= 91pq \\ p\sigma(p^2) \cdot q\sigma(q^2) &= 91pq \\ \sigma(p^2) \cdot \sigma(q^2) &= 91 \\ (1 + p + p^2)(1 + p + p^2) &= \cdot 7 \cdot 13 \\ (1 + p + p^2)(1 + p + p^2) &= 7 \cdot 13 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $1 < p < q$ ทำให้ได้ว่า $1 + p + p^2 = 7$ และ $1 + q + q^2 = 13$ นั่นคือ

$$\begin{array}{rcl|rcl} p^2 + p - 6 &=& 0 & q^2 + q - 12 &=& 0 \\ (p-2)(p+3) &=& 0 & (p-3)(p+4) &=& 0 \end{array}$$

ดังนั้น $p = 2$ และ $q = 3$ #

15. **(10 คะแนน)** ถ้า p, q เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่ $p < q$ ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไข (เพียงคู่เดียว)

$$\phi(p^2q^2) = 305(p-1)(q-1)$$

จงหาค่าของ $\tau(pq^2 + qp^2)$

แนวคำตอบ เนื่องจาก p, q เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่ $p < q$ จะได้ว่า $\gcd(p, q) = 1$ และ

$$\begin{aligned} \phi(p^2)\phi(q^2) &= 305(p-1)(q-1) \\ (p^2 - p)(q^2 - q) &= 305(p-1)(q-1) \\ p(p-1)q(q-1) &= 305(p-1)(q-1) \\ pq &= 5 \cdot 61 \end{aligned}$$

ดังนั้น $p = 5$ และ $q = 61$ สรุปได้ว่า

$$\begin{aligned} \tau(pq^2 + qp^2) &= \tau(pq(p+q)) = \tau(5 \cdot 61(5 + 61)) \\ &= \tau(5 \cdot 61 \cdot 66) \\ &= \tau(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 61) \\ &= (1+1)(1+1)(1+1)(1+1)(1+1) \\ &= 32 \quad \# \end{aligned}$$

16. **(10 คะแนน)** กำหนดให้ $N = (21!)^2(22!)^0(23!)^2(24!)^4$

16.1 **(8 คะแนน)** จงใช้สูตรโพลิกแนค (Polignac's formula) เขียน **รูปแบบบัญญัติ** ของ N

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned} N &= (21!)^2(1)(23\cdot 22\cdot 21!)^2(24\cdot 23\cdot 22\cdot 21!)^4 \\ &= (21!)^2\cdot 23^2\cdot 22^2\cdot (21!)^2\cdot 24^4\cdot 23^4\cdot 22^4\cdot (21!)^4 \\ &= (21!)^8\cdot 22^6\cdot 23^6\cdot 24^4 \\ &= (21!)^8\cdot (2\cdot 11)^6\cdot 23^6\cdot (2^3\cdot 3)^4 \\ &= (21!)^8\cdot 2^6\cdot 11^6\cdot 23^6\cdot 2^{12}\cdot 3^4 \\ &= (21!)^8\cdot 2^{18}\cdot 3^4\cdot 11^6\cdot 23^6 \end{aligned}$$

ใช้สูตรของโพลิกแนคกับ 21!

$$\begin{aligned} e_2(21) &= \left[\frac{21}{2}\right] + \left[\frac{21}{2^2}\right] + \left[\frac{21}{2^3}\right] + \left[\frac{21}{2^4}\right] = 10+5+2+1 = 18 \\ e_3(21) &= \left[\frac{21}{3}\right] + \left[\frac{21}{3^2}\right] = 7+2 = 9 \\ e_5(21) &= \left[\frac{21}{5}\right] = 4 \\ e_7(21) &= \left[\frac{21}{7}\right] = 3 \\ e_{11}(21) &= e_{13}(21) = e_{17}(21) = e_{19}(21) = 1 \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 21! &= 2^{18}\cdot 3^9\cdot 5^4\cdot 7^3\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19 \\ (21!)^8 &= (2^{18}\cdot 3^9\cdot 5^4\cdot 7^3\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19)^8 \\ &= 2^{144}\cdot 3^{72}\cdot 5^{32}\cdot 7^{24}\cdot 11^8\cdot 13^8\cdot 17^8\cdot 19^8 \end{aligned}$$

ดังนั้นรูปแบบบัญญัติของ N คือ

$$\begin{aligned} N &= (21!)^8\cdot 2^{18}\cdot 3^4\cdot 11^6\cdot 23^6 \\ &= 2^{162}\cdot 3^{76}\cdot 5^{32}\cdot 7^{24}\cdot 11^{14}\cdot 13^8\cdot 17^{24}\cdot 19^8\cdot 23^6 \quad \# \end{aligned}$$

16.2 **(2 คะแนน)** จงหา**จำนวนเลขศูนย์ที่ลงท้าย**ของจำนวนเต็มบวก N

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned} N &= (2^{32}\cdot 2^{130})\cdot 3^{76}\cdot 5^{32}\cdot 7^{24}\cdot 11^{14}\cdot 13^8\cdot 17^8\cdot 19^8\cdot 23^6 \\ &= (2^{32}\cdot 5^{32})\cdot 2^{130}\cdot 3^{76}\cdot 7^{24}\cdot 11^{14}\cdot 13^8\cdot 17^8\cdot 19^8\cdot 23^6 \\ &= 10^{32}\cdot 2^{130}\cdot 3^{76}\cdot 7^{24}\cdot 11^{14}\cdot 13^8\cdot 17^8\cdot 19^8\cdot 23^6 \end{aligned}$$

ดังนั้น จำนวนเลขศูนย์ที่ลงท้ายของจำนวนเต็มบวก N เท่ากับ 32 ตัว $\#$

17. **(10 คะแนน)** อาจารย์คณิตศาสตร์ท่านหนึ่งชอบกินทุเรียนมาก จึงให้ออกไปซื้อทุเรียน ณ ร้านแห่งหนึ่งแถว ตลาด อตก. ปรากฎว่าร้านที่ซื้อมีทุเรียน 3 สายพันธุ์คือ ก้านยาว หมอนทอง และชะนีไข่ โดยมีราคาดังนี้

ชะนีไข่	กิโลกรัมละ	150	บาท
หมอนทอง	กิโลกรัมละ	200	บาท
ก้านยาว	กิโลกรัมละ	300	บาท

ทางร้านคัดทุเรียนที่มีขนาด 2, 3, 4 และ 5 กิโลกรัมต่อลูก เท่านั้น ทุกสายพันธ์มีครบทุกขนาดจำนวนมาก ถ้าอาจารย์ท่านนี้ตั้งจะซื้อให้ครบ 2,000 บาท โดยต้องการกินทุเรียนทั้ง 3 สายพันธ์ ๆ ละลูก (ซื้อจำนวน 3 ลูก ๆ ละสายพันธุ์) จงหาว่าต้องซื้อแต่ละพันธุ์ด้วยขนาดเท่าใดบ้าง และเป็นไปได้กี่แบบ (โดยใช้สมการไดโอแฟนไทน์)

แนวคำตอบ กำหนดให้

x	แทนน้ำหนักทุเรียนพันธุ์ชะนีไข่	หน่วยกิโลกรัม	เมื่อ $2 \leq x \leq 5$
y	แทนน้ำหนักทุเรียนพันธุ์หมอนทอง	หน่วยกิโลกรัม	เมื่อ $2 \leq y \leq 5$
z	แทนน้ำหนักทุเรียนพันธุ์ก้านยาว	หน่วยกิโลกรัม	เมื่อ $2 \leq z \leq 5$

ฉะนั้น

$$150x + 200y + 300z = 2000$$

เนื่องจาก $\gcd(150, 200, 300) = 50$ แล้ว $50 \mid 2000$ ดังนั้น สมการนี้มีคำตอบในระบบจำนวนเต็ม จัดรูปสมการได้เป็น $3x + 4y + 6z = 40$ พิจารณา

$$3x + 6z = 40 - 4y$$

เนื่องจาก $\gcd(3, 6) = 3$ ดังนั้น $3 \mid (40 - 4y)$ นั่นคือ $4y \equiv 40 \pmod 3$ หรือ $y \equiv 1 \pmod 3$
ดังนั้น $y = 1 + 3t$ เมื่อ $t \in \mathbb{Z}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
3x + 6z &= 40 - 4(1 + 3t) \\
3x + 6z &= 40 - 4 - 12t \\
3x + 6z &= 36 - 12t \\
x + 2z &= 12 - 4t \\
x &= 12 - 4t - 2z
\end{aligned}$$

ให้ $z = s$ เมื่อ $s \in \mathbb{Z}$ แล้ว $x = 12 - 4t - 2s$ ดังนั้นคำตอบของสมการ $20x + 15y + 16z = 190$ คือ

$$\begin{cases} x = 12 - 4t - 2s \\ y = 1 + 3t \\ z = s \end{cases} \qquad \text{เมื่อ } t, s \in \mathbb{Z}$$

จาก $2 \leq z \leq 5$ จะได้ว่า $s = 2, 3, 4, 5$
จาก $2 \leq y \leq 5$ จะได้ว่า $2 \leq 1 + 3t \leq 5$ นั่นคือ $t = 1$
จาก $2 \leq x \leq 5$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
2 \leq 12 - 4t - 2s &\leq 5 \\
2 \leq 12 - 4(1) - 2s &\leq 5 \\
2 \leq 8 - 2s &\leq 5 \\
-6 \leq -2s &\leq -3 \\
1.5 \leq s &\leq 3 \qquad \longrightarrow s = 2, 3
\end{aligned}$$

แสดงคำตอบที่เป็นไปได้ดังตารางต่อไปนี้

s	2	3
t	1	1
$x = 12 - 4t - 2s$	4	2
$y = 1 + 3t$	4	4
$z = s$	2	3
$150x + 200y + 300z$	2000	2000

สรุปซื้อได้จำนวน 3 ลูก ๆ ละสายพันธุ์ เป็นไปได้ทั้งหมด 2 แบบ คือ

แบบที่ 1 ซื้อทุเรียนพันธุ์ ชะนีไข่ขนาด 4 กก. หมอนทองขนาด 4 กก. และก้านยาวขนาด 2 กก.

แบบที่ 2 ซื้อทุเรียนพันธุ์ ชะนีไข่ขนาด 2 กก. หมอนทองขนาด 4 กก. และก้านยาวขนาด 3 กก.

18. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

18.1 **(5 คะแนน)** จงหา**สามสิ่งอันดับพีทาโกรัส (PT)** ที่มีจำนวน 72 พร้อมทั้งระบุด้วยว่าสามจำนวนใดเป็นชนิดปฐมฐาน (PPT)

แนวคำตอบ

กรณี $72 = 2(1\cdot 36) = 2(2\cdot 18) = 2(3\cdot 12) = 2(4\cdot 9) = 2uv$

กรณี $72 = 1\cdot 72 = 2\cdot 36 = 3\cdot 24 = 4\cdot 18 = 6\cdot 12 = 8\cdot 9 = (u-v)(u+v)$ ดังนั้น

$u-v$	$=$	1	2	3	4	6	8
$u+v$	$=$	72	36	24	18	12	9
$2u$	$=$	73	38	27	22	18	17
u	$=$	$-$	19	$-$	11	9	$-$
v	$=$	$-$	17	$-$	7	3	$-$

สามสิ่งอันดับพีทาโกรัส และชนิดปฐมฐานที่มีเงื่อนไข $u > v > 0$, $\gcd(u,v) = 1$ และ u, v ไม่ใช่จำนวนคู่พร้อมกันหรือคี่พร้อมกัน แสดงได้ดังนี้

u	v	$a = u^2 - v^2$	$b = 2uv$	$c = u^2 + v^2$	
36	1	1295	72	1297	PPT
18	2	320	72	328	
12	3	135	72	153	
9	4	65	72	97	PPT
19	17	72	646	650	
11	7	72	154	170	
9	3	72	54	90	

18.2 **(5 คะแนน)** ให้ t เป็นจำนวนเต็มบวก จงพิสูจน์ว่า

$$\{2t+2, t^2+2t, t^2+2t+2\} \quad \text{เป็นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัส}$$

และยกตัวอย่างสามสิ่งอันดับพีทาโกรัสปฐมฐาน (PPT) ที่ได้จากสูตรดังกล่าวมาอย่างน้อย 3 ชุด

แนวคำตอบ ให้ v เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
(t^2+2t+2)^2 &= (t^2)^2 + (2t)^2 + 2^2 + 2(t^2)(2t) + 2(t^2)2 + 2(2t)(2) \\
&= t^4 + 4t^2 + 4 + 4t^3 + 4t^2 + 8t \\
&= (4t^2 + 8t + 4) + (t^4 + 4t^3 + 4t^2) \\
&= [(2t)^2 + 2(2t)2 + 2^2] + [(t^2)^2 + 2(t^2)(2t) + (2t)^2] \\
&= (2t+2)^2 + (t^2+2t)^2
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\{2t+2, t^2+2t, t^2+2t+t\}$ เป็นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัส

แสดงตัวอย่าง สามสิ่งอันดับพีทาโกรัสปฐมฐาน (PPT) ดังต่อไปนี้

t	$a = 2t+2$	$b = t^2+2t$	$c = t^2+2t+2$
1	4	3	5
3	8	15	17
5	12	35	37
7	16	63	65
9	20	99	101
11	24	143	145
13	28	195	197