มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
คณะครุศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ข้อสอบกลางภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2566

รหัสวิชา	ชื่อวิชา	วันเวลาสอบ	คะแนนเต็ม
MAC3310	พีชคณิตนามธรรม	เวลา 17:00 - 20:00 วันอังคาร ที่ 5 กันยายน 2566	100 คะแนน 25%

ชื่อ-สกุล... **รหัสนักศึกษา**............................... **หมู่เรียน**............

คำชี้แจง

1. ข้อสอบมี 26 ข้อ 14 หน้า แบ่งออกเป็น 3 ตอน ประกอบด้วย
   - **ตอนที่** 1 ข้อสอบแบบ 5 ตัวเลือกจำนวน 10 ข้อ (ข้อละ 2 คะแนน รวม 20 คะแนน)
   - **ตอนที่** 2 ข้อสอบแบบเติมคำตอบจำนวน 10 ข้อ (ข้อละ 2 คะแนน รวม 20 คะแนน)
   - **ตอนที่** 3 ข้อสอบแบบแสดงวิธีทำจำนวน 6 ข้อ (ข้อละ 10 คะแนน รวม 60 คะแนน)
2. เขียนรหัสนักศึกษา และหมู่เรียนด้วย**ตัวบรรจงลงในข้อสอบทุกหน้า**
3. ไม่อนุญาตให้ใช้เครื่องคำนวณและเครื่องมือสื่อสาร
4. **ห้าม**นำข้อสอบออกจากห้องสอบโดยเด็ดขาด
5. หากมี**การทุจริต**ในการสอบ จะได้รับการลงโทษตามระเบียบของมหาวิทยาลัย

ข้าพเจ้าจะปฏิบัติตามข้อตกลงอย่างเคร่งครัด
ลงชื่อผู้เข้าสอบ

....

อาจารย์ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย

ข้อ	ตอนที่ 1 1-10	ตอนที่ 2 11-20	ตอนที่ 3 21	ตอนที่ 3 22	ตอนที่ 3 23	ตอนที่ 3 24	ตอนที่ 3 25	ตอนที่ 3 26	รวม
คะแนน									

ตอนที่ 1 : (20 คะแนน) จงกากบาททับข้อที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว ข้อละ 2 คะแนน

1. กำหนดให้ $a, b \in \mathbb{Z}$ ข้อใดกล่าว**ไม่ถูกต้อง**

   ก. ถ้า $a \mid b$ และ $b \mid c$ แล้ว $a \mid c$

   ข. ถ้า $a \mid (b+c)$ แล้ว $a \mid b$ หรือ $a \mid c$

   ค. ถ้า $a \mid b$ แล้ว $a \mid b^2$

   ง. ถ้า $\gcd(a,b) = d$ แล้วจะได้ว่ามี $x, y \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $d = ax + by$

   จ. ถ้า $a \mid (a+b)^2$ แล้ว $a \mid b^2$

2. ให้ r เป็นความสัมพันธ์บน $\mathbb{Z}$ ที่นิยามโดย

$$x\,r\,y \qquad \text{ก็ต่อเมื่อ} \qquad 2 \mid (x^2 + y^2)$$

   ข้อใดกล่าว**ไม่ถูกต้อง**

   ก. r มีสมบัติสะท้อน (Reflexive)

   ข. r มีสมบัติสมมาตร (Symmetric)

   ค. r มีสมบัติถ่ายทอด (Transitive)

   ง. r เป็นความสัมพันธ์สมมูล (Equivalent relation)

   จ. ชั้นสมมูล (Equivalent class) ของ 0 คือ $[0]_r = \{0, \pm 4, \pm 16, \pm 36, ...\}$

3. ข้อใดกล่าว**ถูกต้อง**

   ก. ถ้า $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ แล้ว $f \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

   ข. $1 + \sqrt{2}$ เป็นตัวผกผันการคูณ (Multiplicative inverse) ในจำนวนจริง ของ $1 - \sqrt{2}$

   ค. ถ้านิยาม $\bar{a} * \bar{b} = \overline{2ab}$ ใน $\mathbb{Z}_3$ จะได้ว่า $\bar{2}$ เป็นเอกลักษณ์ (Identity)

   ง. สมาชิกทุกตัวใน $\mathbb{R}$ มีตัวผกผันการคูณ

   จ. สำหรับ $a, b, c \in \mathbb{R}$ ถ้า $ab = ac$ แล้ว $b = c$

4. สมาชิกของกรุปในข้อใดที่ **อันดับ(order)** มีค่ามากที่สุด
   - ก. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ใน $GL_2(\mathbb{R})$
   - ข. $\bar{4}$ ใน $\mathbb{Z}_{16}$
   - ค. $\bar{3}$ ใน $\mathbb{Z}_{13}^*$
   - ง. $\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$ ใน $\mathbb{C}^*$
   - จ. $(\bar{0}, \bar{2})$ ใน $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{10}$

5. ให้ α, β เป็นสมาชิกใน S_5 ข้อใดกล่าว**ถูกต้อง**
   - ก. $\circ(\alpha\beta) = \circ(\beta) \cdot \circ(\beta)$
   - ข. $\circ(\alpha\beta) = \ell\text{cm}(\circ(\alpha), \circ(\beta))$
   - ค. ถ้า $\alpha^2 = \beta^2$ แล้ว $\alpha = \beta$
   - ง. $(\alpha\beta)^2 = \beta^2\alpha^2$
   - จ. $(\alpha\beta)^{-1} = \beta^{-1}\alpha^{-1}$

6. ให้ G เป็นกรุป โดยที่ $H \subseteq G$ ข้อใดกล่าว**ถูกต้อง**

   ก. H มีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม (Associative law)
   ข. ถ้า $ab^{-1} \in H$ ทุก ๆ $a, b \in H$ แล้ว $H \leq G$
   ค. ถ้า H มีเอกลักษณ์ แล้วจะได้ว่าเอกลักษณ์ใน H อาจไม่ใช่ตัวเดียวกับเอกลักษณ์ของ G
   ง. มีสมาชิกบางตัวใน H ที่ตัวผกผัน(inverse) ไม่อยู่ใน H
   จ. ถ้า $a \in H$ แล้ว $a^{-1} \in H$

7. ให้ G เป็นกรุปวัฏจักร (cyclic) โดยมีตัวก่อกำเนิด (generator) คือ a ข้อใดกล่าว**ไม่ถูกต้อง**

   ก. $G = \langle a \rangle$
   ข. ถ้า $G = \langle b \rangle$ แล้ว $b = a$
   ค. ถ้า $x \in G$ จะได้ว่ามี $k \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $x = a^k$
   ง. G อาจมีตัวก่อกำเนิดตัวอื่น นอกจาก a
   จ. G เป็นกรุปอาบีเลียน (Abelian group)

8. สมาชิกในข้อใดต่อไป**นี้ไม่ใช่** ตัวก่อกำเนิด (generator) ของ $\mathbb{Z}_{10}$

   ก. $\bar{1}$
   ข. $\bar{3}$
   ค. $\bar{5}$
   ง. $\bar{7}$
   จ. $\bar{9}$

9. ให้ G เป็นกรุป และ $H \leq G$ โดยที่ $|G| = 12$ และ $|H| = 4$ ข้อใดกล่าว**ไม่ถูกต้อง**

    ก. ถ้า $Ha = Hb$ แล้ว $a = b$

    ข. $He = H$

    ค. $|aH| = 4$ ทุก ๆ $a \in G$

    ง. $[G : H] = 3$

    จ. จำนวนโคเซตขวาของ H เท่ากับจำนวนโคเซตซ้ายของ H

10. สมาชิกในข้อใดต่อไปนี้เป็น **ตัวผกผัน(inverse)** ของ $\langle \bar{6} \rangle + \bar{2}$ ใน $\mathbb{Z}_{12}/\langle \bar{6} \rangle$

    ก. $\langle \bar{6} \rangle + \bar{1}$

    ข. $\langle \bar{6} \rangle + \bar{2}$

    ค. $\langle \bar{6} \rangle + \bar{3}$

    ง. $\langle \bar{6} \rangle + \bar{4}$

    จ. $\langle \bar{6} \rangle + \bar{5}$

ตอนที่ 2 : (20 คะแนน) จงเติมคำตอบในช่องว่าง (ด้านซ้ายบน) ให้ถูกต้อง ข้อละ 2 คะแนน

11. ____________________

จงหาค่าของ $\phi(23\phi(32))$

12. ____________________

สำหรับ $a, b \in \mathbb{R}$ นิยาม

$$a * b = a \cdot 2^b + b \cdot 3^a$$

แล้ว **เอกลักษณ์ (identity)** ของ $*$ คือจำนวนใด

13. ____________________

จงหา **ตัวผกผัน (inverse)** การคูณของ $\overline{23}$ ใน $\mathbb{Z}_{66}^{\times}$

14. ____________________

ให้ α เป็นสมาชิกใน S_4 และ

$$(1\ 2)\alpha(2\ 3) = (2\ 4)$$

จงหา α^{2566} ตอบในรูปวัฏจักรต่างสมาชิก (disjoint cylce)

15. ____________________

ใน S_5 กำหนดให้

$$\alpha = (1\ 2)^{2023}(3\ 4)^{2566}$$
$$\beta = (1\ 2)(2\ 3)(3\ 4)(4\ 5)$$

จงหา **อันดับ (order)** ของ $\alpha\beta$

16. ____________________

ให้ $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ เป็นสมาชิกใน $GL_2(\mathbb{R})$ จงหาจำนวนสมาชิกของกรุปย่อย $\langle A \rangle$

17. ____________________

จงหาจำนวน **กรุปย่อย (subgroup)** ทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_{23} \times \mathbb{Z}_{66}$

18. ____________________

จงหา $n \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ดรรชนี (index) $[S_n : \langle(1\ 3\ 4\ 5)\rangle] = 180$

19. ____________________

จำนวน **โคเซตซ้าย (left coset)** ของ $\left\langle\overline{11}\right\rangle$ ใน $\mathbb{Z}_{61}^{\times}$ มีกี่โคเซต

20. ____________________

จงหาจำนวน **ตัวก่อกำเนิด (generator)** ทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{11}/\left\langle(\bar{1},\bar{0})\right\rangle$

ตอนที่ 3 : (60 คะแนน) จงแสดงวิธีโดยละเอียด ข้อละ 10 คะแนน

21. **(10 คะแนน)** นิยามการดำเนินการทวิภาค $*$ บนเซต $G = \{1, 2, 3, 4\}$
ถ้า $*$ มีสมบัติสลับที่ (commutative law) และผลการดำเนินการแสดงดังตารางเคย์เลย์

$*$	1	2	3	4
1	3	1		2
2		2	3	
3	4		2	
4		4	1	3

21.1 **(3 คะแนน)** จงเติมค่าในช่องว่างของตารางด้านบนให้สมบูรณ์

21.2 **(2 คะแนน)** จงหา **เอกลักษณ์ (identity)** ของ G (พร้อมให้เหตุผล)

21.3 **(3 คะแนน)** จงหา **ตัวผกผัน (inverse)** ของสมาชิกทุกตัว ใน G (เติมคำตอบในตารางให้สมบูรณ์)

สมาชิก (Elements)	ตัวผกผัน (Inverses)	เหตุผล (Reasons)
1		
2		
3		
4		

21.4 **(2 คะแนน)** จงหา **อันดับ (order)** ของ 1 ใน G

22. **(10 คะแนน)** กำหนดให้ $G = (-2, 2) = \{x \in \mathbb{R} : -2 < x < 2\}$ และ

$$a * b = \frac{4a + 4b}{ab + 4} \quad \text{เมื่อ } a, b \in G$$

จงพิสูจน์ว่า $(G, *)$ เป็นกรุปอาบีเลียน

23. **(10 คะแนน)** นิยามการดำเนินการทวิภาค $*$ บน $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ ดังนี้

$$(a, b) * (c, d) = (c + 2ad, 3bd)$$

จงตรวจสอบว่า $(G, *)$ เป็น กึ่งกรุป (semi-group) / โมนอยด์ (monoid) / หรือกรุป (group)

24. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

24.1 **(5 คะแนน)** จงตรวจสอบว่า H เป็น**กรุปย่อย(subgroup)** ของ $GL_2(\mathbb{R})$ หรือไม่

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$$

24.2 **(5 คะแนน)** กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ เป็นสมาชิกใน $GL_3(\mathbb{R})$

จงเขียนกรุปย่อย $\langle A \rangle$ ในรูปแบบมีเงื่อนไขที่ไม่ติดเลขชี้กำลัง

25. **(10 คะแนน)** พิจารณากรุปการคูณ $\mathbb{Z}_{19}^{\times}$

25.1 **(3 คะแนน)** จงหา **ตัวก่อกำเนิด (generator)** ของ $\mathbb{Z}_{19}^{\times}$

25.2 **(4 คะแนน)** จงหา **กรุปย่อย (subgroup)** ทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_{19}^{\times}$ (พร้อมแจกแจงสมาชิกของกรุปย่อย)

25.3 **(3 คะแนน)** จงนำกรุปย่อยจากข้อ 25.2 เขียน **แลตทิซ (lattice)**

26. **(10 คะแนน)** ให้ M และ N เป็นกรุปย่อย (subgroup) ของกรุป G จงพิสูจน์ว่า

$$\text{ถ้า} \quad M \trianglelefteq G \quad \text{และ} \quad N \trianglelefteq G \quad \text{แล้ว} \quad MN \trianglelefteq G$$

<u>ข้อเสนอแนะ</u> อาจใช้ทฤษฎีบทที่ว่า สำหรับ H, K และ N เป็นกรุปย่อยของกรุป G จะได้ว่า

1. $HK \leq G$ ก็ต่อเมื่อ $HK = KH$
2. $N \trianglelefteq G$ ก็ต่อเมื่อ $gN = Ng$ ทุก ๆ $g \in G$

มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
คณะครุศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์
เฉลยข้อสอบกลางภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2566

รหัสวิชา	ชื่อวิชา	วันเวลาสอบ	คะแนนเต็ม
MAC3310	พีชคณิตนามธรรม	เวลา 17:00 - 20:00 วันอังคาร ที่ 5 กันยายน 2566	100 คะแนน 25%

โดย ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย

ตอนที่ 1 : (20 คะแนน) จงกากบาททับข้อที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว ข้อละ 2 คะแนน

1. กำหนดให้ $a, b \in \mathbb{Z}$ ข้อใดกล่าว**ไม่ถูกต้อง**

   ก. ถ้า $a \mid b$ และ $b \mid c$ แล้ว $a \mid c$

   ข. ถ้า $a \mid (b+c)$ แล้ว $a \mid b$ หรือ $a \mid c$ Answer

   ค. ถ้า $a \mid b$ แล้ว $a \mid b^2$

   ง. ถ้า $\gcd(a,b) = d$ แล้วจะได้ว่ามี $x, y \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $d = ax + by$

   จ. ถ้า $a \mid (a+b)^2$ แล้ว $a \mid b^2$

   ตอบข้อ ข. ไม่ถูกต้องเมื่อเลือก $a = 4, b = 2, c = 2$

2. ให้ r เป็นความสัมพันธ์บน $\mathbb{Z}$ ที่นิยามโดย

$$x \, r \, y \qquad \text{ก็ต่อเมื่อ} \qquad 2 \mid (x^2 + y^2)$$

   ข้อใดกล่าว**ไม่ถูกต้อง**

   ก. r มีสมบัติสะท้อน (Reflexive)

   ข. r มีสมบัติสมมาตร (Symmetric)

   ค. r มีสมบัติถ่ายทอด (Transitive)

   ง. r เป็นความสัมพันธ์สมมูล (Equivalent relation)

   จ. ชั้นสมมูล (Equivalent class) ของ 0 คือ $[0]_r = \{0, \pm 4, \pm 16, \pm 36, ...\}$ Answer

   ตอบข้อ จ. พิจารณา

   1. **สมบัติสะท้อน**
      สำหรับจำนวนเต็ม x ใด ๆ จะได้ว่า $x^2 + x^2 = 2x^2$ ดังนั้น $2 \mid (x^2 + x^2)$ สรุปได้ว่า $x \, r \, x$
   2. **สมบัติสมมาตร**
      ให้ $x, y \in \mathbb{Z}$ สมมติว่า $x \, r \, y$ นั่นคือ $2 \mid (x^2 + y^2)$ แล้ว $2 \mid (y^2 + x^2)$ สรุปได้ว่า $y \, R \, x$
   3. **สมบัติถ่ายทอด**
      ให้ $x, y, z \in \mathbb{Z}$ สมมติว่า $x \, r \, y$ และ $y \, r \, z$ จะได้ว่า $2 \mid (x^2 + y^2)$ และ $2 \mid (y^2 + z^2)$ จะได้ว่า $2 \mid [(x^2 + y^2) + (y^2 + z^2)]$ หรือ $2 \mid (x^2 + 2y^2 + z^2)$ เนื่องจาก $2 \mid 2y^2$ ฉะนั้น $2 \mid (x^2 + z^2)$ สรุปได้ว่า $x \, r \, z$

ดังนั้น r เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน $\mathbb{Z}$ พิจารณาชั้นสมมูลต่อไปนี้

$$[0] = \{a : 2 \mid (a^2 + 0)\} = \{0, \pm 2, \pm 4, ...\}$$

ดังนั้นข้อ จ. ไม่ถูกต้อง

3. ข้อใดกล่าว**ถูกต้อง**

   ก. ถ้า $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ แล้ว $f \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

   ข. $1 + \sqrt{2}$ เป็นตัวผกผันการคูณ (Multiplicative inverse) ในจำนวนจริง ของ $1 - \sqrt{2}$

   ค. ถ้านิยาม $\bar{a} * \bar{b} = \overline{2ab}$ ใน $\mathbb{Z}_3$ จะได้ว่า $\bar{2}$ เป็นเอกลักษณ์ (Identity) Answer

   ง. สมาชิกทุกตัวใน $\mathbb{R}$ มีตัวผกผันการคูณ

   จ. สำหรับ $a, b, c \in \mathbb{R}$ ถ้า $ab = ac$ แล้ว $b = c$

ตอบข้อ ค. สำหรับ $\bar{a} \in \mathbb{Z}_3$ จะเห็นว่า

$$\bar{a} * \bar{2} = \overline{2a2} = \overline{4a} = \bar{4} \cdot \bar{a} = \bar{1} \cdot \bar{a} = \overline{1 \cdot a} = \bar{a}$$
$$\bar{2} * \bar{a} = \overline{2(2)a} = \overline{4a} = \bar{4} \cdot \bar{a} = \bar{1} \cdot \bar{a} = \overline{1 \cdot a} = \bar{a}$$

ดังนั้น $\bar{2}$ เป็นเอกลักษณ์

4. สมาชิกของกรุปในข้อใดที่ **อันดับ(order)** มีค่ามากที่สุด

   ก. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ใน $GL_2(\mathbb{R})$

   ข. $\bar{4}$ ใน $\mathbb{Z}_{16}$

   ค. $\bar{3}$ ใน $\mathbb{Z}_{13}^*$

   ง. $\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$ ใน $\mathbb{C}^*$ Answer

   จ. $(\bar{0}, \bar{2})$ ใน $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{10}$

ตอบข้อ ง. พิจารณา

$$\begin{array}{rclcrcl}
\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I & \longrightarrow & \circ\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right) & = & 2 \\
4(\bar{4}) & = & \overline{16} = \bar{0} & \longrightarrow & \circ(\bar{4}) & = & 4 \\
(\bar{3})^3 & = & \overline{27} = \bar{1} & \longrightarrow & \circ(\bar{3}) & = & 3 \\
\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^6 & = & \left(cis\frac{\pi}{3}\right)^6 = cis2\pi = 1 & \longrightarrow & \circ\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) & = & 6 \\
5(0, \bar{2}) & = & (0, \overline{10}) = (\bar{0}, \bar{0}) & \longrightarrow & \circ((\bar{0}, \bar{2})) & = & 5
\end{array}$$

5. ให้ α, β เป็นสมาชิกใน S_5 ข้อใดกล่าว**ถูกต้อง**

   ก. $\circ(\alpha\beta) = \circ(\beta) \cdot \circ(\beta)$

   ข. $\circ(\alpha\beta) = \ell\text{cm}(\circ(\alpha), \circ(\beta))$

   ค. ถ้า $\alpha^2 = \beta^2$ แล้ว $\alpha = \beta$

   ง. $(\alpha\beta)^2 = \beta^2\alpha^2$

   จ. $(\alpha\beta)^{-1} = \beta^{-1}\alpha^{-1}$ Answer

   ตอบข้อ จ. เนื่องจาก S_5 เป็นกรุปจึงมีสมบัติในข้อ จ.

6. ให้ G เป็นกรุป โดยที่ $H \subseteq G$ ข้อใดกล่าว**ถูกต้อง**

   ก. H มีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม (Associative law) Answer

   ข. ถ้า $ab^{-1} \in H$ ทุก ๆ $a, b \in H$ แล้ว $H \leq G$

   ค. ถ้า H มีเอกลักษณ์ แล้วจะได้ว่าเอกลักษณ์ใน H อาจไม่ใช่ตัวเดียวกับเอกลักษณ์ของ G

   ง. มีสมาชิกบางตัวใน H ที่ตัวผกผัน(inverse) ไม่อยู่ใน H

   จ. ถ้า $a \in H$ แล้ว $a^{-1} \in H$

   ตอบข้อ ก. เนื่องจาก G เป็นกรุป และ $H \subseteq G$ จะได้ว่า H มีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม

7. ให้ G เป็นกรุปวัฏจักร (cyclic) โดยมีตัวก่อกำเนิด (generator) คือ a ข้อใดกล่าว**ไม่ถูกต้อง**

   ก. $G = \langle a \rangle$

   ข. ถ้า $G = \langle b \rangle$ แล้ว $b = a$ Answer

   ค. ถ้า $x \in G$ จะได้ว่ามี $k \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $x = a^k$

   ง. G อาจมีตัวก่อกำเนิดตัวอื่น นอกจาก a

   จ. G เป็นกรุปอาบีเลียน (Abelian group)

   ตอบข้อ ข. ไม่จริงเพราะตัวก่อกำเนิดอาจมีได้มากกว่า 1 ตัว เช่น $\mathbb{Z}_6$

8. สมาชิกในข้อใดต่อไป**นี้ไม่ใช่** ตัวก่อกำเนิด (generator) ของ $\mathbb{Z}_{10}$

   ก. $\bar{1}$

   ข. $\bar{3}$

   ค. $\bar{5}$ Answer

   ง. $\bar{7}$

   จ. $\bar{9}$

   ตอบข้อ ค. จะเห็นว่า $\langle \bar{1} \rangle = \mathbb{Z}_{10}$ และ $|\mathbb{Z}_{10}| = 10$ สำหรับ $1 \leq k < 10$ ซึ่ง $\gcd(k, 10) = 1$ นั่นคือ $k = 1, 3, 7, 9$ ดังนั้นตัวก่อกำเนิดทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_{10}$ คือ

$$\begin{cases} 1(\bar{1}) & = \bar{1} \\ 3(\bar{1}) & = \bar{3} \\ 7(\bar{1}) & = \bar{7} \\ 9(\bar{1}) & = \bar{9} \end{cases}$$

   ดังนั้น $\bar{5}$ ไม่เป็นตัวก่อกำเนิดของ $\mathbb{Z}_{10}$

9. ให้ G เป็นกรุป และ $H \leq G$ โดยที่ $|G| = 12$ และ $|H| = 4$ ข้อใดกล่าว**ไม่ถูกต้อง**

   ก. ถ้า $Ha = Hb$ แล้ว $a = b$ Answer

   ข. $He = H$

   ค. $|aH| = 4$ ทุก ๆ $a \in G$

   ง. $[G : H] = 3$

   จ. จำนวนโคเซตขวาของ H เท่ากับจำนวนโคเซตซ้ายของ H

   ตอบข้อ ก. ไม่จริงเช่น $G = \mathbb{Z}_{12}$ และ $H = \langle\bar{3}\rangle = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\}$ จะเห็นว่า $H + \bar{3} = H + \bar{6}$ แต่ $\bar{3} \neq \bar{6}$

10. สมาชิกในข้อใดต่อไปนี้เป็น **ตัวผกผัน(inverse)** ของ $\langle\bar{6}\rangle + \bar{2}$ ใน $\mathbb{Z}_{12}/\langle\bar{6}\rangle$

    ก. $\langle\bar{6}\rangle + \bar{1}$

    ข. $\langle\bar{6}\rangle + \bar{2}$

    ค. $\langle\bar{6}\rangle + \bar{3}$

    ง. $\langle\bar{6}\rangle + \bar{4}$ Answer

    จ. $\langle\bar{6}\rangle + \bar{5}$

    ตอบข้อ ง. จะเห็นว่า $\langle\bar{6}\rangle + \bar{0}$ เป็นเอกลักษณ์ของ $\mathbb{Z}_{12}/\langle\bar{6}\rangle$ และ

$$(\langle\bar{6}\rangle + \bar{2}) + (\langle\bar{6}\rangle + \bar{4}) = \langle\bar{6}\rangle + (\bar{2} + \bar{4}) = \langle\bar{6}\rangle + \bar{6} = \langle\bar{6}\rangle + \bar{0}$$
$$(\langle\bar{6}\rangle + \bar{4}) + (\langle\bar{6}\rangle + \bar{2}) = \langle\bar{6}\rangle + (\bar{4} + \bar{2}) = \langle\bar{6}\rangle + \bar{6} = \langle\bar{6}\rangle + \bar{0}$$

    ดังนั้น $\langle\bar{6}\rangle + \bar{4}$ เป็นตัวผกผันของ $\langle\bar{6}\rangle + \bar{2}$ ใน $\mathbb{Z}_{12}/\langle\bar{6}\rangle$

ตอนที่ 2 : (20 คะแนน) จงเติมคำตอบในช่องว่าง (ด้านซ้ายมือ) ให้ถูกต้อง ข้อละ 2 คะแนน

11. **ตอบ** 176

จงหาค่าของ $\phi(23\phi(32))$

แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\phi(23\phi(32)) &= \phi(23\phi(2^5)) = \phi(23(2^5-2^4)) \\ &= \phi(23\cdot 16) = \phi(23\cdot 2^4) \\ &= (23-1)(2^4-2^3) = 22\cdot 8 = 176 \quad \#\end{aligned}$$

12. **ตอบ** 0

สำหรับ $a, b \in \mathbb{R}$ นิยาม

$$a * b = a\cdot 2^b + b\cdot 3^a$$

แล้ว **เอกลักษณ์ (identity)** ของ $*$ คือจำนวนใด

แนวคำตอบ สำหรับ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}a*0 &= a\cdot 2^0 + 0\cdot 3^a = a \\ 0*a &= 0\cdot 2^a + a\cdot 3^0 = a\end{aligned}$$

ดังนั้น 0 เป็นเอกลักษณ์ $\#$

13. **ตอบ** 23

จงหา **ตัวผกผัน (inverse)** การคูณของ $\overline{23}$ ใน $\mathbb{Z}_{66}^{\times}$

แนวคำตอบ พิจารณาเมทริกซ์ในการหา $\gcd(23, 66) = 1$

$$\begin{array}{rrrl} 66 & 1 & 0 & R_1 \\ 23 & 0 & 1 & R_2 \\ 20 & 1 & -2 & R_3 = R_1 - 2R_2 \\ 3 & -1 & 3 & R_4 = R_2 - R_3 \\ 2 & 7 & -20 & R_5 = R_3 - 6R_4 \\ 1 & -8 & 23 & R_6 = R_4 - R_5 \end{array}$$

ดังนั้น $1 = 66(-8) + 23(23)$ จะได้ว่า

$$\bar{1} = \overline{66(-8)+23(23)} = \overline{23}\cdot\overline{23}$$

ดังนั้น $\overline{23}$ เป็นตัวผกผันการคูณของ $\overline{23}$ ใน $\mathbb{Z}_{66}^{\times}$

14. ตอบ $(1\ 3)(2\ 4)$

ให้ α เป็นสมาชิกใน S_4 และ

$$(1\ 2)\alpha(2\ 3) = (2\ 4)$$

จงหา α^{2566} ตอบในรูปวัฏจักรต่างสมาชิก (disjoint cylce)

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}(1\ 2)(1\ 2)\alpha(2\ 3)(2\ 3) &= (1\ 2)(2\ 4)(2\ 3)\\ (1)\alpha(1) &= \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\end{pmatrix}\\ \alpha &= (1\ 2\ 3\ 4)\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\alpha^{2566} &= (1\ 2\ 3\ 4)^{2566} = (1\ 2\ 3\ 4)^{4(641)+2}\\ &= [(1\ 2\ 3\ 4)^4]^{641}(1\ 2\ 3\ 4)^2\\ &= (1)^{641}(1\ 2\ 3\ 4)(1\ 2\ 3\ 4)\\ &= (1\ 2\ 3\ 4)(1\ 2\ 3\ 4)\\ &= \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 1 & 2\end{pmatrix} = (1\ 3)(2\ 4) \quad \#\end{aligned}$$

15. ตอบ 4

ใน S_5 กำหนดให้

$$\begin{aligned}\alpha &= (1\ 2)^{2023}(3\ 4)^{2566}\\ \beta &= (1\ 2)(2\ 3)(3\ 4)(4\ 5)\end{aligned}$$

จงหา **อันดับ (order)** ของ $\alpha\beta$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}\alpha &= (1\ 2)^{2(1011)+1}(3\ 4)^{2(1283)} = (1\ 2)^{2(1011)}(1\ 2)[(3\ 4)^2]^{1283}\\ &= [(1\ 2)^2]^{1011}(1\ 2)(1)^{1283} = [(1)^2]^{1011}(1\ 2)(1)\\ &= (1)^{1011}(1\ 2) = (1)(1\ 2) = (1\ 2)\\ \beta &= (1\ 2)(2\ 3)(3\ 4)(4\ 5) = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1\end{pmatrix} = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)\\ \alpha\beta &= (1\ 2)(1\ 2\ 3\ 4\ 5) = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2\end{pmatrix} = (2\ 3\ 4\ 5)\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\circ(\alpha\beta) = 4 \quad \#$$

16. ตอบ 2

ให้ $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ เป็นสมาชิกใน $GL_2(\mathbb{R})$ จงหาจำนวนสมาชิกของกรุปย่อย $\langle A \rangle$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

ฉะนั้น $\circ(A) = 2$ ดังนั้น $|\langle A \rangle| = \circ(A) = 2 \quad \#$

17. ตอบ 16

จงหาจำนวน **กรุปย่อย (subgroup)** ทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_{23} \times \mathbb{Z}_{66}$

แนวคำตอบ จะเห็นว่า $\gcd(23, 66) = 1$ ฉะนั้น $\mathbb{Z}_{23} \times \mathbb{Z}_{66}$ เป็นกรุปวัฏจักร ดังนั้นจำนวน กรุปย่อยทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_{23} \times \mathbb{Z}_{66}$ เท่ากับจำนวนตัวหารของ $23 \cdot 66$ นั่นคือ

$$\tau(23 \cdot 66) = \tau(23 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11) = (1+1)(1+1)(1+1)(1+1) = 16 \quad \#$$

18. ตอบ 6

จงหา $n \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ดรรชนี (index) $[S_n : \langle (1\ 3\ 4\ 5) \rangle] = 180$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$180 = [S_n : \langle (1\ 3\ 4\ 5) \rangle] = \frac{|S_n|}{|\langle (1\ 3\ 4\ 5) \rangle|} = \frac{n!}{\circ(1\ 3\ 4\ 5)} = \frac{n!}{4}$$

จะได้ว่า $n! = 180 \cdot 4 = 720 = 6!$ ดังนั้น $n = 6 \quad \#$

19. ตอบ 15

จำนวน **โคเซตซ้าย (left coset)** ของ $\langle \overline{11} \rangle$ ใน $\mathbb{Z}_{61}^{\times}$ มีกี่โคเซต

แนวคำตอบ เนื่องจาก $(\overline{11})^2 = \overline{121} = \overline{-1}$ แล้ว $(\overline{11})^4 = (\overline{-1})^2 = \overline{1}$
ฉะนั้น $\circ(\overline{11}) = 4$ ใน $\mathbb{Z}_{61}^{\times}$ จำนวนโคเซตซ้ายของ $\langle \overline{11} \rangle$ ใน $\mathbb{Z}_{61}^{\times}$ เท่ากับ

$$[\mathbb{Z}_{61}^{\times} : \langle \overline{11} \rangle] = \frac{|\mathbb{Z}_{61}^{\times}|}{|\langle \overline{11} \rangle|} = \frac{\phi(61)}{\circ(\overline{11})} = \frac{60}{4} = 15$$

20. ตอบ 10

จงหาจำนวน **ตัวก่อกำเนิด (generator)** ทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{11} / \langle (\bar{1}, \bar{0}) \rangle$

แนวคำตอบ เนื่องจาก $\gcd(2, 11) = 1$ ฉะนั้น $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{11}$ เป็นกรุปวัฏจักร ทำให้ได้ว่า $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{11} / \langle (\bar{1}, \bar{0}) \rangle$ เป็นกรุปวัฏจักรที่มีสมาชิกเท่ากับ

$$n = [\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{11} : \langle (\bar{1}, \bar{0}) \rangle] = \frac{2 \cdot 11}{\circ((\bar{1}, \bar{0}))} = \frac{22}{2} = 11$$

ดังนั้นจำนวนตัวก่อกำเนิดทั้งหมดเท่ากับ

$$\phi(n) = \phi(11) = 10 \quad \#$$

ตอนที่ 3 : (60 คะแนน) จงแสดงวิธีโดยละเอียด ข้อละ 10 คะแนน

21. **(10 คะแนน)** นิยามการดำเนินการทวิภาค $*$ บนเซต $G = \{1, 2, 3, 4\}$
ถ้า $*$ มีสมบัติสลับที่ (commutative law) และผลการดำเนินการแสดงดังตารางเคย์เลย์

21.1 **(3 คะแนน)** จงเติมค่าในช่องว่างของตารางด้านบนให้สมบูรณ์
แนวคำตอบ เนื่องจาก $*$ มีสมบัติสลับที่ จะได้ตารางที่สมมาตร ดังนี้

$*$	1	2	3	4
1	3	1	4	2
2	1	2	3	4
3	4	3	2	1
4	2	4	1	3

21.2 **(2 คะแนน)** จงหา **เอกลักษณ์ (identity)** ของ G (พร้อมให้เหตุผล)
แนวคำตอบ จากตารางจะเห็นว่า

$$a * 2 = a = 2 * a \qquad \text{ทุก ๆ } a \in G$$

ดังนั้น 2 เป็นเอกลักษณ์ของ G

21.3 **(3 คะแนน)** จงหา **ตัวผกผัน (inverse)** ของสมาชิกทุกตัว ใน G (เติมคำตอบในตารางให้สมบูรณ์)
แนวคำตอบ เนื่องจาก $e = 2$ จะได้ว่า

สมาชิก (Elements)	ตัวผกผัน (Inverses)	เหตุผล (Reasons)
1	4	$1 * 4 = 2 = 4 * 1$
2	2	$2 * 2 = 2$
3	3	$3 * 3 = 2$
4	1	$1 * 4 = 2 = 4 * 1$

21.4 **(2 คะแนน)** จงหา **อันดับ (order)** ของ 1 ใน G
แนวคำตอบ เนื่องจาก $e = 2$ พิจารณา

$$\begin{aligned} 1^2 &= 1 * 1 &&= 3 \\ 1^3 &= 1^2 * 1 = 3 * 1 &&= 4 \\ 1^4 &= 1^3 * 1 = 4 * 1 &&= 2 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\circ(1) = 4 \quad \#$

22. **(10 คะแนน)** กำหนดให้ $G = (-2, 2)$ และ

$$a * b = \frac{4a + 4b}{ab + 4} \quad \text{เมื่อ } a, b \in G$$

จงพิสูจน์ว่า $(G, *)$ เป็นกรุปอาบีเลียน

แนวคำตอบ ให้ $a, b, c \in G$

$$\begin{aligned}
a * (b * c) &= a * \left(\frac{4b + 4c}{bc + 4}\right) \\
&= \frac{4a + 4\left(\frac{4b+4c}{bc+4}\right)}{a\left(\frac{4b+4c}{bc+4}\right) + 4} \\
&= \frac{4a(bc + 4) + 4(4b + 4c)}{a(4b + 4c) + 4(bc + 4)} \\
&= \frac{4abc + 16a + 16b + 16c}{4ab + 4ac + 4bc + 16} \\
&= \frac{4(4a + 4b) + 4c(ab + 4)}{(4a + 4b)c + 4(ab + 4)} \\
&= \frac{4\left(\frac{4a+4b}{ab+4}\right) + 4c}{\left(\frac{4a+4b}{ab+4}\right)c + 4} \\
&= \left(\frac{4a + 4b}{ab + 4}\right) * c \\
&= (a * b) * c
\end{aligned}$$

ดังนั้น $*$ มีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่มบนเซต G เนื่องจาก

$$a * 0 = \frac{4a + 4 \cdot 0}{a0 + 4} = a = \frac{4 \cdot 0 + 4a}{0a + 4} = 0 * a$$

จะได้ว่า 0 เป็นเอกลักษณ์ใน G ให้ $a \in G$ แล้ว

$$a * (-a) = \frac{4a + 4(-a)}{a(-a) + 4} = 0 = \frac{4(-a) + 4a}{-a(a) + 4} = (-a) * a$$

นั่นคือ $-a$ เป็นตัวผกผันของ a
พิจารณา

$$a * b = \frac{4a + 4b}{ab + 4} = \frac{4b + 4a}{ba + 4} = b * a$$

ดังนั้น $*$ มีสมบัติสลับที่บนเซต G
สรุปได้ว่า $(G, *)$ เป็นกรุปอาบีเลียน

23. **(10 คะแนน)** นิยามการดำเนินการทวิภาค $*$ บน $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ ดังนี้

$$(a, b) * (c, d) = (c + 2ad, 3bd)$$

จงตรวจสอบว่า $(G, *)$ เป็น กึ่งกรุป (semi-group) / โมนอยด์ (monoid) / หรือกรุป (group)

แนวคำตอบ เลือก $(1, 2), (0, 1), (1, 1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
(1, 2) * [(0, 1) * (1, 1)] &= (1, 2) * (1 + 2 \cdot 0 \cdot 1, 3 \cdot 1 \cdot 1) \\
&= (1, 2) * (1, 3) \\
&= (1 + 2 \cdot 1 \cdot 3, 3 \cdot 2 \cdot 3) \\
&= (7, 18)
\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}
[(1, 2) * (0, 1)] * (1, 1) &= (0 + 2 \cdot 1 \cdot 1, 3 \cdot 2 \cdot 1) \\
&= (2, 6) * (1, 1) \\
&= (1 + 2 \cdot 2 \cdot 1, 3 \cdot 6 \cdot 1) \\
&= (5, 18)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $(1, 2) * [(0, 1) * (1, 1)] \neq [(1, 2) * (0, 1)] * (1, 1)$
ฉะนั้น $*$ ไม่มีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม
สรุปได้ว่า $(G, *)$ ไม่เป็นกึ่งกรุป ไม่เป็นโมนอยด์ และไม่เป็นกรุป

24. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

24.1 **(5 คะแนน)** จงตรวจสอบว่า H เป็น**กรุปย่อย(subgroup)** ของ $GL_2(\mathbb{R})$ หรือไม่

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$$

แนวคำตอบ สำหรับ $a = 1$ เห็นได้ชัดว่า $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in H$

ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ เป็นสมาชิกใน H นั่นคือ $a, b \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

$$AB^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a-b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in H$$

เนื่องจาก $a - b \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า $AB^{-1} \in H$ ดังนั้น H เป็นกรุปย่อยของ $GL_2(\mathbb{R})$

24.2 **(5 คะแนน)** กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ เป็นสมาชิกใน $GL_3(\mathbb{R})$

จงเขียนกรุปย่อย $\langle A \rangle$ ในรูปแบบมีเงื่อนไขที่ไม่ติดเลขชี้กำลัง

แนวคำตอบ เนื่องจาก $\langle A \rangle = \{A^k : k \in \mathbb{Z}\}$ สำหรับ $n \in \mathbb{N}$ พิจารณา

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^3A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, n \in \mathbb{N}$$

จะเห็นว่า $I = A^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ พิจารณาตัวผกผันของ A คือ $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ และ

$$A^{-2} = A^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-3} = A^{-2}A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$A^{-n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, n \in \mathbb{N}$$

ดังนั้น

$$\langle A \rangle = \left\{ A^k : k \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^k : k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

25. **(10 คะแนน)** พิจารณากรุปการคูณ $\mathbb{Z}_{19}^{\times}$

25.1 **(3 คะแนน)** จงหา **ตัวก่อกำเนิด (generator)** ของ $\mathbb{Z}_{19}^{\times}$

แนวคำตอบ จะเห็นว่า $n = \phi(19) = 18$ พิจารณา

$$\begin{array}{lcllll}
(\bar{2})^1 & & & & = & \bar{2} \\
(\bar{2})^2 & & & & = & \bar{4} \\
(\bar{2})^3 & & & & = & \bar{8} \\
(\bar{2})^4 & & & = \ \overline{16} & = & \overline{-3} \\
(\bar{2})^5 & = & (\bar{2})(\bar{2})^4 = (\bar{2})(\overline{-3}) & = \ \overline{-6} & = & \overline{13} \\
(\bar{2})^6 & = & (\bar{2})(\bar{2})^5 = (\bar{2})(\overline{-6}) & = \ \overline{-12} & = & \bar{7} \\
(\bar{2})^7 & = & (\bar{2})(\bar{2})^6 = (\bar{2})(\bar{7}) & = \ \overline{14} & = & \overline{-5} \\
(\bar{2})^8 & = & (\bar{2})(\bar{2})^7 = (\bar{2})(\overline{-5}) & = \ \overline{-10} & = & \bar{9} \\
(\bar{2})^9 & = & (\bar{2})(\bar{2})^8 = (\bar{2})(\bar{9}) & = \ \overline{18} & = & \overline{-1}
\end{array}$$

จะได้ว่า $(\bar{2})^{18} = ((\bar{2})^9)^2 = (\overline{-1})^2 = 1$ ดังนั้น $\circ(\bar{2}) = 18 = n$

สรุปได้ว่า $\bar{2}$ เป็นตัวก่อกำเนิดของ $\mathbb{Z}_{19}^{\times}$ #

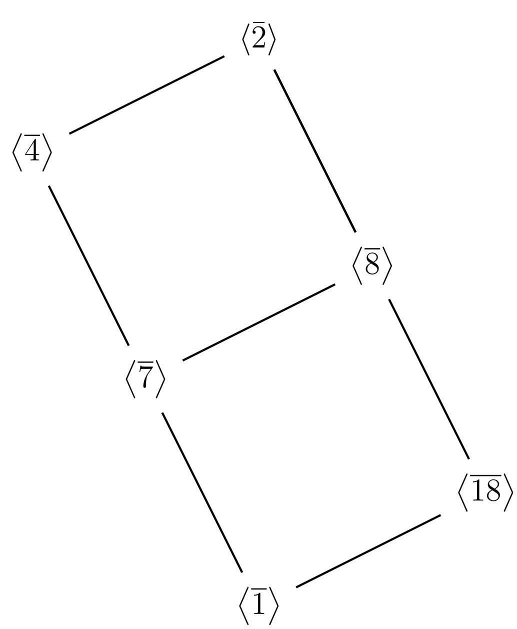
25.2 **(4 คะแนน)** จงหา **กรุปย่อย (subgroup)** ทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_{19}^{\times}$ (พร้อมแจกแจงสมาชิกของกรุปย่อย)

แนวคำตอบ จาก $\langle\bar{2}\rangle = \mathbb{Z}_{19}^{\times}$ ตัวหารของ 18 คือ 1, 2, 3, 6, 9, 18 ดังนั้นกรุปย่อยของ $\mathbb{Z}_{19}^{\times}$ คือ

$$\left\langle(\bar{2})^{\frac{18}{1}}\right\rangle = \langle(\bar{2})^{18}\rangle = \langle\bar{1}\rangle = \{\bar{1}\}$$
$$\left\langle(\bar{2})^{\frac{18}{2}}\right\rangle = \langle(\bar{2})^{9}\rangle = \langle\overline{18}\rangle = \{\bar{1}, \overline{18}\}$$
$$\left\langle(\bar{2})^{\frac{18}{3}}\right\rangle = \langle(\bar{2})^{6}\rangle = \langle\bar{7}\rangle = \{\bar{1}, \bar{7}, \overline{11}\}$$
$$\left\langle(\bar{2})^{\frac{18}{6}}\right\rangle = \langle(\bar{2})^{3}\rangle = \langle\bar{8}\rangle = \{\bar{1}, \bar{8}, \bar{7}, \overline{18}, \overline{11}, \overline{12}\}$$
$$\left\langle(\bar{2})^{\frac{18}{9}}\right\rangle = \langle(\bar{2})^{2}\rangle = \langle\bar{4}\rangle = \{\bar{1}, \bar{4}, \overline{16}, \bar{7}, \bar{9}, \overline{17}, \overline{11}, \bar{6}, \bar{5}\}$$
$$\left\langle(\bar{2})^{\frac{18}{18}}\right\rangle = \langle(\bar{2})^{1}\rangle = \langle\bar{2}\rangle = \mathbb{Z}_{19}^{\times}$$

25.3 **(3 คะแนน)** จงนำกรุปย่อยจากข้อ 25.2 เขียน **แลตทิซ (lattice)**

แนวคำตอบ เขียนแลตทิซได้ดังนี้



26. **(10 คะแนน)** ให้ M และ N เป็นกรุปย่อย (subgroup) ของกรุป G จงพิสูจน์ว่า

$$\text{ถ้า} \quad M \trianglelefteq G \quad \text{และ} \quad N \trianglelefteq G \quad \text{แล้ว} \quad MN \trianglelefteq G$$

<u>ข้อเสนอแนะ</u> อาจใช้ทฤษฎีบทที่ว่า สำหรับ H, K และ N เป็นกรุปย่อยของกรุป G จะได้ว่า

1. $HK \leq G$ ก็ต่อเมื่อ $HK = KH$
2. $N \trianglelefteq G$ ก็ต่อเมื่อ $gN = Ng$ ทุก ๆ $g \in G$

บทพิสูจน์. ให้ M และ N เป็นกรุปย่อยของกรุป G
สมมติว่า $M \trianglelefteq G$ และ $N \trianglelefteq G$ จะแสดงว่า $MN \trianglelefteq G$

<u>ขั้นที่ 1</u> จะแสดงว่า $MN \leq G$
เนื่องจาก $M \trianglelefteq G$ จะได้ว่า $Mg = gM$ ทุก ๆ $g \in G$ จะเห็นว่า $N \subseteq G$ ทำให้ได้ว่า

$$nM = Mn \quad \text{ทุก ๆ } n \in N$$

ดังนั้น $MN = NM$ โดยทฤษฎีบทจากข้อเสนอแนะ 1. จะได้ว่า $MN \leq G$

<u>ขั้นที่ 2</u> จะแสดงว่า $MN \trianglelefteq G$ โดยแสดงว่า $gMN = NMg$ ทุก ๆ $g \in G$
ให้ $g \in G$
($\subseteq$) ให้ $x \in gMN$ เนื่องจาก $MN = NM$ ฉะนั้น $x \in gNM$ นั่นคือ

$$x = gn_1m_1 \qquad \text{สำหรับบาง } n_1 \in N \text{ และ } m_1 \in M$$

จะได้ว่า $x = gn_1m_1 \in gn_1M = Mgn_1$ นั่นคือมี $m_2 \in M$ ซึ่ง $x = m_2gn_1$
จะเห็นว่า $gn_1 \in gN = Ng$ นั่นคือมี $n_2 \in N$ ซึ่ง $gn_1 = n_2g$ ทำให้ได้ว่า

$$x = m_2n_2g \in MNg$$

ดังนั้น $gMN \subseteq MNg$
($\supseteq$) ให้ $y \in MNg$ เนื่องจาก $MN = NM$ ฉะนั้น $y \in NMg$ นั่นคือ

$$y = n_1m_1g \qquad \text{สำหรับบาง } n_1 \in N \text{ และ } m_1 \in M$$

จะได้ว่า $x = n_1m_1g \in Nm_1g = m_1gN$ นั่นคือมี $n_2 \in M$ ซึ่ง $x = m_1gn_2$
จะเห็นว่า $m_1g \in Mg = gM$ นั่นคือมี $m_2 \in N$ ซึ่ง $m_1g = gm_2$ ทำให้ได้ว่า

$$x = gm_2n_2 \in gMN$$

ดังนั้น $MNg \subseteq gMN$
ฉะนั้น $gMN = NMg$

สรุปได้ว่า $MN \trianglelefteq G$ $\square$