คณิตศาสตร์

มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
คณะครุศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ข้อสอบกลางภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2567

รหัสวิชา	ชื่อวิชา	วันเวลาสอบ	คะแนนเต็ม
MAC3310	พีชคณิตนามธรรม	เวลา 13:00 - 16:00 วันศุกร์ ที่ 30 สิงหาคม 2567	100 คะแนน 25%

ชื่อ-สกุล... **รหัสนักศึกษา**................................ **หมู่เรียน**................

คำชี้แจง

1. ข้อสอบมี 18 ข้อ 15 หน้า แบ่งออกเป็น 3 ตอน ประกอบด้วย
   - **ตอนที่** 1 ข้อสอบแบบ 5 ตัวเลือก จำนวน 5 ข้อ (ข้อละ 2 คะแนน รวม 10 คะแนน)
   - **ตอนที่** 2 ข้อสอบแบบเติมคำตอบ จำนวน 5 ข้อ (ข้อละ 2 คะแนน รวม 10 คะแนน)
   - **ตอนที่** 3 ข้อสอบแบบแสดงวิธีทำ จำนวน 8 ข้อ (ข้อละ 10 คะแนน รวม 80 คะแนน)
2. เขียนรหัสนักศึกษา และหมู่เรียนด้วย**ตัวบรรจงลงในข้อสอบทุกหน้า**
3. ไม่อนุญาตให้ใช้เครื่องคำนวณและเครื่องมือสื่อสาร
4. **ห้าม**นำข้อสอบออกจากห้องสอบโดยเด็ดขาด
5. หากมี**การทุจริต**ในการสอบ จะได้รับการลงโทษตามระเบียบของมหาวิทยาลัย

ข้าพเจ้าจะปฏิบัติตามข้อตกลงอย่างเคร่งครัด
ลงชื่อผู้เข้าสอบ

....

อาจารย์ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย

ตอนที่	1	2	3								รวม
ข้อ	1-5	6-10	11	12	13	14	15	16	17	18	
คะแนน											

ตอนที่ 1 : (20 คะแนน) จงกากบาททับข้อที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว ข้อละ 2 คะแนน

1. กำหนดให้ $a, b \in \mathbb{Z}$ ข้อใดกล่าว**ถูกต้อง**

   ก. ถ้า $a \mid b^2$ แล้ว $a \mid b$

   ข. ถ้า $a \mid b$ และ $b \mid a$ แล้ว $a = b$

   ค. ถ้า $a \mid b$ แล้ว $a^2 \mid b$

   ง. ถ้ามี $x, y \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $d = ax + by$ แล้ว $d = \gcd(a, b)$

   จ. ถ้า $a \mid (a+b)(a-b)$ แล้ว $a \mid b^2$

2. ให้ r เป็นความสัมพันธ์บน $\mathbb{Z}$ ที่นิยามโดย

$$x \, r \, y \qquad \text{ก็ต่อเมื่อ} \qquad 3 \mid (x^2 - y^2)$$

   ข้อใดกล่าว**ไม่ถูกต้อง**

   ก. r มีสมบัติสะท้อน (Reflexive)

   ข. r มีสมบัติสมมาตร (Symmetric)

   ค. r มีสมบัติถ่ายทอด (Transitive)

   ง. สำหรับ $x, y \in \mathbb{Z}$ ถ้า $x \, r \, y$ และ $y \, r \, x$ แล้ว $x = y$

   จ. มีชั้นสมมูล (Equivalent class) ทั้งหมด 2 ชั้นคือ $[0]_r, [1]_r$

3. ให้ G เป็นกรุป โดยที่ $a, b, c \in G$ ข้อใดกล่าว**ไม่ถูกต้อง**

ก. ถ้า $a^2 = b^2$ แล้ว $a = b$

ข. ถ้า $ab = ac$ แล้ว $b = c$

ค. ถ้า $\circ(a) = 1$ และ $a = e$ (เป็นเอกลักษณ์)

ง. $(abc)^{-1} = c^{-1}b^{-1}a^{-1}$

จ. ถ้า a ไม่ใช่เอกลักษณ์ และ $a^5 = e$ แล้ว $\circ(a) = 5$

4. สมาชิกของกรุปในข้อใดที่ **อันดับ(order)** ต่างจากข้ออื่น

ก. $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ใน $GL_2(\mathbb{R})$

ข. $\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ ใน $\mathbb{C}^*$

ค. $\bar{5}$ ใน $\mathbb{Z}_{12}^{\times}$

ง. $\bar{6}$ ใน $\mathbb{Z}_{12}$

จ. $(2\ 4)$ ใน S_4

5. พิจารณากรุปการบวก $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9$ ข้อใดกล่าว**ไม่ถูกต้อง**

ก. ตัวผกผัน (inverse) ของ $(\bar{2}, \bar{1})$ คือ $(\bar{2}, \bar{8})$

ข. $[\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9 : \langle(\bar{0}, \bar{3})\rangle] = 12$

ค. อันดับ (order) ของ $(\bar{0}, \bar{3})$ เท่ากับ 6

ง. $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9$ เป็นกรุปวัฏจักร (cyclic group)

จ. กรุปย่อย (subgroup) ทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9$ มี 9 กรุป

ตอนที่ 2 : (20 คะแนน) จงเติมคำตอบในช่องว่าง (ด้านซ้ายบน) ให้ถูกต้อง ข้อละ 2 คะแนน

6. ____________________________

จงหาค่าของ $\tau(2^4 \cdot 6^7)$

7. ____________________________

ตัวต่อกำเนิด (generator) ของ $\mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_{67}$ มีทั้งหมดกี่ตัว

8. ____________________

ถ้าทราบว่า $\bar{3}$ เป็นตัวต่อกำเนิด (generator) ของ $\mathbb{Z}_{17}^{\times}$ จงหาตัวกำเนิดตัวอื่น ๆ (ตอบมาอย่างน้อย 1 ตัว)

9. ____________________

จากกรุปย่อยของ S_3 ต่อไปนี้

$$\langle(1\ 2)\rangle,\ \langle(1\ 3)\rangle,\ \langle(2\ 3)\rangle,\ \langle(1\ 2\ 3)\rangle$$

กรุปย่อยใดเป็น **กรุปย่อยปกติ (Normal subgroup)**

10. ____________________________

จงหาตัวผกผัน (inverse) ของ $\langle\bar{4}\rangle + \bar{1}$ ในกรุปผลหาร $\mathbb{Z}_8/\langle\bar{4}\rangle$

ตอนที่ 3 : (80 คะแนน) จงแสดงวิธีโดยละเอียด ข้อละ 10 คะแนน

11. **(10 คะแนน)** นิยามการดำเนินการทวิภาค $*$ บนเซต $G = \{1, 2, 3, 4\}$
ถ้า $*$ มีสมบัติสลับที่ (commutative law) และมีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม (associative law) โดยมีผลการดำเนินการแสดงดังตารางเคย์เลย์

$*$	1	2	3	4
1	a	3	2	b
2	3	1	4	2
3	c	4	1	3
4	1	2	3	4

11.1 **(3 คะแนน)** จงหา a, b และ c

11.2 **(2 คะแนน)** จงหา **เอกลักษณ์ (identity)** ของ G (พร้อมให้เหตุผล)

11.3 **(3 คะแนน)** จงหา **ตัวผกผัน (inverse)** ของสมาชิกทุกตัว ใน G (เติมคำตอบในตารางให้สมบูรณ์)

สมาชิก (Elements)	ตัวผกผัน (Inverses)	เหตุผล (Reasons)
1		
2		
3		
4		

11.4 **(2 คะแนน)** จงหา **อันดับ (order)** ของ 2 ใน G

12. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

12.1 **(5 คะแนน)** จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้ด้วยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

$$2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 2 \qquad \text{สำหรับทุก ๆ } n \in \mathbb{N}$$

12.2 **(5 คะแนน)** ให้ G เป็นกรุป โดยที่ $a \in G$ จงแสดงว่า

$$\text{ถ้า} \quad \circ(a) = n \quad \text{แล้ว} \quad \circ(a^{-1}) = n$$

13. **(10 คะแนน)** นิยามการดำเนินการทวิภาค $*$ บน $\mathbb{R}$ ดังนี้

$$a * b = a + b + 2ab$$

จงตรวจสอบว่า $(\mathbb{R}, *)$ เป็น กึ่งกรุป (semi-group) / โมนอยด์ (monoid) / หรือกรุป (group)

14. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

14.1 **(5 คะแนน)** ให้ α เป็นวัฏจักร ใน S_{67} ที่ไม่ใช่เอกลักษณ์ โดยที่

$$[(2\ 4)\alpha(2\ 4)]^{67} = (1)$$

จงหา **อันดับ (order)** ของ α

14.2 **(5 คะแนน)** จงหา **ตัวผกผันการคูณ (multiplicative inverse)** ของ $\overline{17}$ ใน $\mathbb{Z}_{24}^{\times}$

15. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

15.1 **(5 คะแนน)** จงตรวจสอบว่า H เป็น**กรุปย่อย(subgroup)** ของ $GL_2(\mathbb{R})$ หรือไม่

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

15.2 **(5 คะแนน)** กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ เป็นสมาชิกใน $GL_2(\mathbb{R})$

จงเขียนกรุปย่อย $\langle A \rangle$ ในรูปแบบมีเงื่อนไขที่ไม่ติดเลขชี้กำลัง

16. **(10 คะแนน)** พิจารณากรุปการคูณ $\mathbb{Z}_{22}^{\times}$

16.1 **(3 คะแนน)** จงหา **ตัวก่อกำเนิด (generator)** ของ $\mathbb{Z}_{22}^{\times}$

16.2 **(4 คะแนน)** จงหา **กรุปย่อย (subgroup)** ทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_{22}^{\times}$ (พร้อมแจกแจงสมาชิกของกรุปย่อย)

16.3 **(3 คะแนน)** จงนำกรุปย่อยจากข้อ 16.2 เขียน **แลตทิซ (lattice)**

17. **(10 คะแนน)** ให้ G เป็นกรุปจำกัดที่ $|G| = 6$

จงใช้ทฤษฎีบทลากรองจ์ (Lagrange’s Theorem) แสดงว่ามีสมาชิกใน G ที่มีอันดับเท่ากับ 2 หรือ 3

18. **(10 คะแนน)** ให้ N เป็นกรุปย่อย (subgroup) ของกรุป G จงพิสูจน์ว่า

ถ้า $gNg^{-1} \subseteq N$ ทุก ๆ $g \in G$ แล้ว $(Nh)(Nk) = N(hk)$ ทุก ๆ $h, k \in G$

มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
คณะครุศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์
เฉลยข้อสอบกลางภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2567

รหัสวิชา	ชื่อวิชา	วันเวลาสอบ	คะแนนเต็ม
MAC3310	พีชคณิตนามธรรม	เวลา 13:00 - 16:00 วันศุกร์ ที่ 30 สิงหาคม 2567	100 คะแนน 25%

โดย ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย

ตอนที่ 1 : (10 คะแนน) จงกากบาททับข้อที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว ข้อละ 2 คะแนน

1. กำหนดให้ $a, b \in \mathbb{Z}$ ข้อใดกล่าว**ถูกต้อง**

   ก. ถ้า $a \mid b^2$ แล้ว $a \mid b$

   ข. ถ้า $a \mid b$ และ $b \mid a$ แล้ว $a = b$

   ค. ถ้า $a \mid b$ แล้ว $a^2 \mid b$

   ง. ถ้ามี $x, y \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $d = ax + by$ แล้ว $d = \gcd(a, b)$

   จ. ถ้า $a \mid (a+b)(a-b)$ แล้ว $a \mid b^2$ Answer

   ตอบข้อ จ.

   ก. ถ้า $a \mid b^2$ แล้ว $a \mid b$ ไม่ถูกต้องเมื่อเลือก $a = 4$ และ $b = 2$

   ข. ถ้า $a \mid b$ และ $b \mid a$ แล้ว $a = b$ ไม่ถูกต้องเมื่อเลือก $a = 2$ และ $b = -2$

   ค. ถ้า $a \mid b$ แล้ว $a^2 \mid b$ ไม่ถูกต้องเมื่อเลือก $a = 2$ และ $b = 2$

   ง. ถ้ามี $x, y \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $d = ax + by$ แล้ว $d = \gcd(a, b)$ ไม่ถูกต้องเมื่อเลือก $d = 2$ และ $a = 2, b = 3$ และ $x = -5, y = 4$

   จ. ถ้า $a \mid (a+b)(a-b)$ แล้ว $a \mid b^2$ ถูกต้อง
   เนื่องจาก $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ เนื่องจาก $a \mid a^2$ ดังนั้น $a \mid b^2$

2. ให้ r เป็นความสัมพันธ์บน $\mathbb{Z}$ ที่นิยามโดย

$$x\,r\,y \qquad \text{ก็ต่อเมื่อ} \qquad 3 \mid (x^2 - y^2)$$

ข้อใดกล่าว**ไม่ถูกต้อง**

ก. r มีสมบัติสะท้อน (Reflexive)

ข. r มีสมบัติสมมาตร (Symmetric)

ค. r มีสมบัติถ่ายทอด (Transitive)

ง. สำหรับ $x, y \in \mathbb{Z}$ ถ้า $x\,r\,y$ และ $y\,r\,x$ แล้ว $x = y$ Answer

จ. มีชั้นสมมูล (Equivalent class) ทั้งหมด 2 ชั้นคือ $[0]_r, [1]_r$

ตอบข้อ ง. พิจารณา

ก. **สมบัติสะท้อน**
สำหรับจำนวนเต็ม x ใด ๆ จะได้ว่า $x^2 - x^2 = 0$ ดังนั้น $2 \mid (x^2 - x^2)$ สรุปได้ว่า $x\,r\,x$

ข. **สมบัติสมมาตร**
ให้ $x, y \in \mathbb{Z}$ สมมติว่า $x\,r\,y$ นั่นคือ $2 \mid (x^2 - y^2)$ แล้ว $2 \mid (-1)(x^2 - y^2)$ หรือ $2 \mid (y^2 - x^2)$ สรุปได้ว่า $y\,r\,x$

ค. **สมบัติถ่ายทอด**
ให้ $x, y, z \in \mathbb{Z}$ สมมติว่า $x\,r\,y$ และ $y\,r\,z$ จะได้ว่า $2 \mid (x^2 - y^2)$ และ $2 \mid (y^2 - z^2)$
จะได้ว่า $2 \mid [(x^2 - y^2) + (y^2 - z^2)]$ หรือ $2 \mid (x^2 - z^2)$ สรุปได้ว่า $x\,r\,z$

ง. ไม่ถูกต้องเมื่อเลือก $x = 1$ และ $y = 2$ จะเห็นว่า $x\,r\,y$ และ $y\,r\,x$ แต่ $x \neq y$

จ. จาก ก-ค r เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน $\mathbb{Z}$ พิจารณาชั้นสมมูลต่อไปนี้

$$[0]_r = \{a : 3 \mid (a^2 - 0)\} = \{0, \pm 3, \pm 6, ...\}$$
$$[1]_r = \{a : 3 \mid (a^2 - 1)\} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, ...\}$$

ดังนั้นมีชั้นสมมูลทั้งหมด 2 ชั้นคือ $[0]_r, [1]_r$

3. ให้ G เป็นกรุป โดยที่ $a, b, c \in G$ ข้อใดกล่าว**ไม่ถูกต้อง**

ก. ถ้า $a^2 = b^2$ แล้ว $a = b$ Answer

ข. ถ้า $ab = ac$ แล้ว $b = c$

ค. ถ้า $\circ(a) = 1$ และ $a = e$ (เป็นเอกลักษณ์)

ง. $(abc)^{-1} = c^{-1}b^{-1}a^{-1}$

จ. ถ้า a ไม่ใช่เอกลักษณ์ และ $a^5 = e$ แล้ว $\circ(a) = 5$

ตอบข้อ ก. ไม่ถูกต้อง เมื่อเลือก $G = \mathbb{R}^*$ (กรุปการคูณ) และ $a = -2,\ b = 2$

4. สมาชิกของกรุปในข้อใดที่ **อันดับ(order)** ต่างจากข้ออื่น

ก. $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ใน $GL_2(\mathbb{R})$

ข. $\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ ใน $\mathbb{C}^*$ Answer

ค. $\bar{5}$ ใน $\mathbb{Z}_{12}^{\times}$

ง. $\bar{6}$ ใน $\mathbb{Z}_{12}$

จ. $(2\ 4)$ ใน S_4

ตอบข้อ ข. พิจารณา

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I & \longrightarrow \quad \circ\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) &= 2 \\
\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)^8 &= \left(cis\tfrac{\pi}{4}\right)^8 = cis2\pi = 1 & \longrightarrow \quad \circ\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}i\right) &= 8 \\
(\bar{5})^2 &= \overline{25} = \bar{1} & \longrightarrow \quad \circ(\bar{5}) &= 2 \\
2(\bar{6}) &= \overline{12} = \bar{0} & \longrightarrow \quad \circ(\bar{6}) &= 2 \\
(2\ 4)^2 &= (1) & \longrightarrow \quad \circ((2\ 4)) &= 2
\end{aligned}$$

5. พิจารณากรุปการบวก $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9$ ข้อใดกล่าว**ไม่ถูกต้อง**

ก. ตัวผกผัน (inverse) ของ $(\bar{2}, \bar{1})$ คือ $(\bar{2}, \bar{8})$

ข. $[\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9 : \langle(\bar{0}, \bar{3})\rangle] = 12$

ค. อันดับ (order) ของ $(\bar{0}, \bar{3})$ เท่ากับ 6 Answer

ง. $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9$ เป็นกรุปวัฏจักร (cyclic group)

จ. กรุปย่อย (subgroup) ทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9$ มี 9 กรุป

ตอบข้อ ค.

ก. เนื่องจาก $(\bar{2}, \bar{1}) + (\bar{2}, \bar{8}) = (\bar{0}, \bar{0})$ ดังนั้น ตัวผกผันของ $(\bar{2}, \bar{1})$ คือ $(\bar{2}, \bar{8})$

ข. $[\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9 : \langle(\bar{0}, \bar{3})\rangle] = \dfrac{|\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9|}{\circ((\bar{0}, \bar{3}))} = \dfrac{4 \times 9}{3} = 12$

ค. ไม่ถูกต้องเนื่องจาก

$$3(\bar{0}, \bar{3}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

ดังนั้นอันดับของ $(\bar{0}, \bar{3})$ เท่ากับ 3 Answer

ง. $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9$ เป็นกรุปวัฏจักร (cyclic group) เนื่องจาก $\gcd(4, 9) = 1$

จ. เนื่องจาก $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9$ เป็นกรุปวัฏจักร ดังนั้นกรุปย่อยทั้งหมดเท่ากับ จำนวนตัวหารของ $n = 4 \times 9$

$$\tau(4 \times 9) = \tau(2^2 \times 3^2) = (2+1)(2+1) = 9$$

ตอนที่ 2 : (10 คะแนน) จงเติมคำตอบในช่องว่าง (ด้านซ้ายมือ) ให้ถูกต้อง ข้อละ 2 คะแนน

6. **ตอบ** 96

จงหาค่าของ $\tau(2^4 \cdot 6^7)$

แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \tau(2^4 \cdot 6^7) &= \tau(2^4 \cdot 2^7 \cdot 3^7) = \tau(2^{11} \cdot 3^7) \\ &= (11+1)(7+1) \\ &= 12(8) \\ &= 96 \quad \# \end{aligned}$$

7. **ตอบ** 528

ตัวต่อกำเนิด (generator) ของ $\mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_{67}$ มีทั้งหมดกี่ตัว

แนวคำตอบ $\mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_{67}$ เป็นกรุปวัฏจักร (cyclic group) เนื่องจาก $\gcd(24, 67) = 1$ จำนวนตัวก่อกำเนิดเท่ากับ

$$\begin{aligned} \phi(24 \cdot 67) &= \phi(2^3 \cdot 3 \cdot 67) \\ &= (2^3 - 2^2)(3-1)(67-1) \\ &= 4(2)(66) \\ &= 528 \end{aligned}$$

8. **ตอบ** $\bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{14}$

ถ้าทราบว่า $\bar{3}$ เป็นตัวต่อกำเนิด (generator) ของ $\mathbb{Z}_{17}^{\times}$ จงหาตัวกำเนิดตัวอื่น ๆ (ตอบมาอย่างน้อย 1 ตัว)

แนวคำตอบ จะเห็นว่า $n = \phi(17) = 16$ พิจารณา

$$1 \leq k < 16 \text{ และ } \gcd(k, 16) = 1 \text{ นั่นคือ } k = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15$$

ดังนั้นตัวต่อกำเนิดของ $\mathbb{Z}_{17}^{\times}$ คือ

$$a^k = \begin{cases} (\bar{3})^1 & = \bar{3} \\ (\bar{3})^3 & = \overline{10} \\ (\bar{3})^5 & = \bar{5} \\ (\bar{3})^7 & = \overline{11} \\ (\bar{3})^9 & = \overline{14} \\ (\bar{3})^{11} & = \bar{7} \\ (\bar{3})^{13} & = \overline{12} \\ (\bar{3})^{15} & = \bar{6} \end{cases}$$

9. ตอบ $\langle(1\ 2\ 3)\rangle$

จากกรุปย่อยของ S_3 ต่อไปนี้

$$\langle(1\ 2)\rangle,\ \langle(1\ 3)\rangle,\ \langle(2\ 3)\rangle,\ \langle(1\ 2\ 3)\rangle$$

กรุปย่อยใดเป็น **กรุปย่อยปกติ (Normal subgroup)**

แนวคำตอบ เนื่องจาก

$$[S_3 : \langle(1\ 2\ 3)\rangle] = \frac{|S_3|}{\circ((1\ 2\ 3))} = \frac{3!}{3} = 2$$

โดยทฤษฎีบท สรุปได้ว่า $\langle(1\ 2\ 3)\rangle$ เป็นกรุปย่อยปกติ

10. ตอบ $\langle\bar{4}\rangle + \bar{3}$

จงหาตัวผกผัน (inverse) ของ $\langle\bar{4}\rangle + \bar{1}$ ในกรุปผลหาร $\mathbb{Z}_8/\left\langle\bar{4}\right\rangle$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\langle\bar{4}\rangle &= \{\bar{0}, \bar{4}\}\\
\langle\bar{4}\rangle + \bar{1} &= \{\bar{1}, \bar{5}\}\\
\langle\bar{4}\rangle + \bar{2} &= \{\bar{2}, \bar{6}\}\\
\langle\bar{4}\rangle + \bar{3} &= \{\bar{3}, \bar{7}\}
\end{aligned}$$

จะเห็นว่า $\langle\bar{4}\rangle$ เป็นเอกลักษณ์ของ

$$\mathbb{Z}_8/\left\langle\bar{4}\right\rangle = \{\left\langle\bar{4}\right\rangle, \langle\bar{4}\rangle + \bar{1}, \langle\bar{4}\rangle + \bar{2}, \langle\bar{4}\rangle + \bar{3}\}$$

เนื่องจาก

$$(\langle\bar{4}\rangle + \bar{1}) + (\langle\bar{4}\rangle + \bar{3}) = \langle\bar{4}\rangle + \bar{4} = \langle\bar{4}\rangle$$

ดังนั้น $\langle\bar{4}\rangle + \bar{3}$ เป็นตัวผกผันของ $\langle\bar{4}\rangle + \bar{1}$

ตอนที่ 3 : (80 คะแนน) จงแสดงวิธีโดยละเอียด ข้อละ 10 คะแนน

11. **(10 คะแนน)** นิยามการดำเนินการทวิภาค $*$ บนเซต $G = \{1, 2, 3, 4\}$
ถ้า $*$ มีสมบัติสลับที่ (commutative law) และมีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม (associative law) โดยมีผลการดำเนินการแสดงดังตารางเคย์เลย์

$*$	1	2	3	4
1	a	3	2	b
2	3	1	4	2
3	c	4	1	3
4	1	2	3	4

11.1 **(3 คะแนน)** จงหา a, b และ c
โดยสมบัติการสลับที่จะได้ว่า

$$c = 3 * 1 = 1 * 3 = 2 \quad \#$$
$$b = 1 * 4 = 4 * 1 = 1 \quad \#$$

โดยสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม

$$a = 1 * 1 = 1 * (2 * 2) = (1 * 2) * 2 = 3 * 2 = 4 \quad \#$$

11.2 **(2 คะแนน)** จงหา **เอกลักษณ์ (identity)** ของ G (พร้อมให้เหตุผล)
แนวคำตอบ จากตารางและข้อ 11.1 จะเห็นว่า

$$a * 4 = a = 4 * a \qquad \text{ทุก ๆ } a \in G$$

ดังนั้น 2 เป็นเอกลักษณ์ของ G

11.3 **(3 คะแนน)** จงหา **ตัวผกผัน (inverse)** ของสมาชิกทุกตัว ใน G (เติมคำตอบในตารางให้สมบูรณ์)

สมาชิก (Elements)	ตัวผกผัน (Inverses)	เหตุผล (Reasons)
1	1	$1 * 1 = 4$
2	3	$2 * 3 = 4 = 3 * 2$
3	2	$3 * 2 = 4 = 2 * 3$
4	4	$4 * 4 = 4$

11.4 **(2 คะแนน)** จงหา **อันดับ (order)** ของ 2 ใน G
แนวคำตอบ เนื่องจาก $e = 2$ พิจารณา

$$\begin{aligned} 2^2 &= 2 * 2 &&= 1 \\ 2^3 &= 2^2 * 2 = 1 * 2 &&= 3 \\ 2^4 &= 2^3 * 2 = 3 * 2 &&= 4 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\circ(2) = 4 \quad \#$

12. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

12.1 **(5 คะแนน)** จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้ด้วยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

$$2+2^2+2^3+\cdots+2^n=2^{n+1}-2 \qquad \text{สำหรับทุก ๆ } n\in\mathbb{N}$$

แนวคำตอบ ให้ $n\in\mathbb{N}$ และ $P(n)$ แทนข้อความ

$$2+2^2+2^3+\cdots+2^n=2^{n+1}-2$$

กรณี $n=1$ จะได้ว่า $2=4-2=2^{1+1}-2$ ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง
ให้ $k\in\mathbb{N}$ สมมติว่า $P(k)$ เป็นจริง จะได้ว่า

$$\begin{aligned}2+2^2+2^3+\cdots+2^k+2^{k+1}&=2^{k+1}-2+2^{k+1}\\&=2\cdot 2^{k+1}-2\\&=2^{k+2}-2\end{aligned}$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์สรุปได้ว่า

$$2+2^2+2^3+\cdots+2^n=2^{n+1}-2 \qquad \text{สำหรับทุก ๆ } n\in\mathbb{N}$$

12.2 **(5 คะแนน)** ให้ G เป็นกรุป โดยที่ $a\in G$ จงแสดงว่า

$$\text{ถ้า} \quad \circ(a)=n \quad \text{แล้ว} \quad \circ(a^{-1})=n$$

แนวคำตอบ สมมติว่า $\circ(a)=n$ จะได้ว่า $a^n=e$ พิจารณา

$$(a^{-1})^n=(a^n)^{-1}=e^{-1}=e$$

ให้ $k\in\mathbb{N}$ โดยที่ $(a^{-1})^k=e$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(a^k)^{-1}&=(a^{-1})^k=e\\ [(a^k)^{-1}]^{-1}&=e^{-1}\\ a^k&=e\end{aligned}$$

ดังนั้น $n\mid k$ นั่นคือ $n\le k$
สรุปได้ว่า $\circ(a^{-1})=n$

13. **(10 คะแนน)** นิยามการดำเนินการทวิภาค $*$ บน $\mathbb{R}$ ดังนี้

$$a * b = a + b + 2ab$$

จงตรวจสอบว่า $(\mathbb{R}, *)$ เป็น กึ่งกรุป (semi-group) / โมนอยด์ (monoid) / หรือกรุป (group)

แนวคำตอบ ให้ $a, b, c \in G$

$$\begin{aligned}
a * (b * c) &= a * (b + c + 2bc) \\
&= a + (b + c + 2bc) + 2a(b + c + 2bc) \\
&= a + b + c + 2bc + 2ab + 2ac + 4abc \\
&= a + b + 2ab + c + 2ac + 2bc + 4abc \\
&= (a + b + 2ab) + c + 2(a + b + 2ab)c \\
&= (a + b + 2ab) * c \\
&= (a * b) * c
\end{aligned}$$

ดังนั้น $*$ มีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่มบนเซต G เนื่องจาก

$$\begin{aligned}
a * 0 = a + 0 + 2 \cdot a \cdot 0 = a \\
0 * a = 0 + a + 2 \cdot 0 \cdot a = a
\end{aligned}$$

จะได้ว่า 0 เป็นเอกลักษณ์ใน G
สมมติว่า $a = -\frac{1}{2}$ มีตัวผกผันเป็น $b \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

$$0 = -\frac{1}{2} * b = -\frac{1}{2} + b + 2\left(-\frac{1}{2}\right) b = -\frac{1}{2} + b - b = -\frac{1}{2}$$

ซึ่งเป็นไปไม่ได้
สรุปได้ว่า $(\mathbb{R}, *)$ เป็นโมนอยด์

14. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

14.1 **(5 คะแนน)** ให้ α เป็นวัฏจักร ใน S_{67} ที่ไม่ใช่เอกลักษณ์ โดยที่

$$[(2\ 4)\alpha(2\ 4)]^{67} = (1)$$

จงหา **อันดับ (order)** ของ α

แนวคำตอบ

$$\begin{aligned}
[(2\ 4)\alpha(2\ 4)]^2 &= [(2\ 4)\alpha(2\ 4)][(2\ 4)\alpha(2\ 4)] = (2\ 4)\alpha(2\ 4)^2\alpha(2\ 4)\\
&= (2\ 4)\alpha(1)\alpha(2\ 4) = (2\ 4)\alpha^2(2\ 4)\\
[(2\ 4)\alpha(2\ 4)]^3 &= [(2\ 4)\alpha^2(2\ 4)][(2\ 4)\alpha(2\ 4)] = (2\ 4)\alpha^2(2\ 4)^2\alpha(2\ 4)\\
&= (2\ 4)\alpha^2(1)\alpha(2\ 4) = (2\ 4)\alpha^3(2\ 4)\\
[(2\ 4)\alpha(2\ 4)]^4 &= [(2\ 4)\alpha^3(2\ 4)][(2\ 4)\alpha(2\ 4)] = (2\ 4)\alpha^3(2\ 4)^2\alpha(2\ 4)\\
&= (2\ 4)\alpha^3(1)\alpha(2\ 4) = (2\ 4)\alpha^4(2\ 4)\\
&\ \vdots\\
[(2\ 4)\alpha(2\ 4)]^{67} &= (2\ 4)\alpha^{67}(2\ 4)\\
(1) &= (2\ 4)\alpha^{67}(2\ 4)\\
(2\ 4)(1)(2\ 4) &= (2\ 4)(2\ 4)\alpha^{67}(2\ 4)(2\ 4)\\
(2\ 4)^2 &= (2\ 4)^2\alpha^{67}(2\ 4)^2\\
(1) &= (1)\alpha^{67}(1)\\
(1) &= \alpha^{67}
\end{aligned}$$

จะได้ว่า $\circ(\alpha) \mid 67$ ฉะนั้น $\circ(\alpha) = 1, 67$ (67 เป็นจำนวนเฉพาะ)
เนื่องจาก α ไม่ใช่เอกลักษณ์ นั่นคือ $\circ(\alpha) \neq 1$ สรุปได้ว่า $\circ(\alpha) = 67 \quad \#$

14.2 **(5 คะแนน)** จงหา **ตัวผกผันการคูณ (multiplicative inverse)** ของ $\overline{17}$ ใน $\mathbb{Z}_{24}^{\times}$

แนวคำตอบ พิจารณาเมทริกซ์ในการหา $\gcd(17, 24) = 1$

$$\begin{array}{rrrl}
24 & 1 & 0 & R_1\\
17 & 0 & 1 & R_2\\
7 & 1 & -1 & R_3 = R_1 - R_2\\
3 & -2 & 3 & R_4 = R_2 - 2R_3\\
1 & 5 & -7 & R_5 = R_3 - 2R_4
\end{array}$$

ดังนั้น $1 = 24(5) + 17(-7)$ จะได้ว่า

$$\overline{1} = \overline{24(5) + 17(-7)} = \overline{17} \cdot \overline{-7}$$

ดังนั้น $\overline{-7} = \overline{17}$ เป็นตัวผกผันการคูณของ $\overline{17}$ ใน $\mathbb{Z}_{24}^{\times}$

15. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

15.1 **(5 คะแนน)** จงตรวจสอบว่า H เป็น**กรุปย่อย(subgroup)** ของ $GL_2(\mathbb{R})$ หรือไม่

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

แนวคำตอบ เลือก $x = 0$ จะได้ว่า $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in H$ ดังนั้น $H \neq \varnothing$

ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^x \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^y \end{bmatrix}$ เป็นสมาชิกใน H นั่นคือ $x, y \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

$$AB^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^y \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^x \end{bmatrix} \frac{1}{2^y} \begin{bmatrix} 2^y & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{-y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{x-y} \end{bmatrix} \in H$$

เนื่องจาก $x - y \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า $AB^{-1} \in H$ ดังนั้น H เป็นกรุปย่อยของ $GL_2(\mathbb{R})$

15.2 **(5 คะแนน)** กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ เป็นสมาชิกใน $GL_2(\mathbb{R})$

จงเขียนกรุปย่อย $\langle A \rangle$ ในรูปแบบมีเงื่อนไขที่ไม่ติดเลขชี้กำลัง

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\
A^2 &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
A^3 &= A^2 A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\
A^4 &= A^3 A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&\vdots \\
A^n &= \begin{bmatrix} (-1)^n & (-1)^{n+1}n \\ 0 & (-1)^n \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $A^n = \begin{bmatrix} (-1)^n & (-1)^{n+1}n \\ 0 & (-1)^n \end{bmatrix}$ เมื่อ $n \in \mathbb{N}$ และ I เป็นเมติกซ์เอกลักษณ์

จะเห็นว่า $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ แล้ว

$$A^{-n} = (A^n)^{-1} = \begin{bmatrix} (-1)^n & (-1)^{n+1}n \\ 0 & (-1)^n \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (-1)^n & (-1)^{n+1}(-n) \\ 0 & (-1)^n \end{bmatrix} \text{ เมื่อ } n \in \mathbb{N}$$

และ $A^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$ สรุปได้ว่า

$$\langle A \rangle = \left\{ \begin{bmatrix} (-1)^n & (-1)^{n+1}n \\ 0 & (-1)^n \end{bmatrix} : n \in \mathbb{Z} \right\}$$

16. **(10 คะแนน)** พิจารณากรุปการคูณ $\mathbb{Z}_{22}^{\times}$

16.1 **(3 คะแนน)** จงหา **ตัวก่อกำเนิด (generator)** ของ $\mathbb{Z}_{22}^{\times}$

แนวคำตอบ จะเห็นว่า $n = \phi(22) = \phi(2 \cdot 11) = (2-1)(11-1) = 10$ พิจารณา

$$\begin{array}{rclclcl}
(\overline{7})^1 & & & & & = & \overline{7} \\
(\overline{7})^2 & & & = & \overline{49} & = & \overline{5} \\
(\overline{7})^3 & = & (\overline{7})(\overline{2})^2 = (\overline{7})(\overline{5}) & = & \overline{35} & = & \overline{13} \\
(\overline{7})^4 & = & (\overline{7})(\overline{7})^3 = (\overline{7})(\overline{13}) & = & \overline{91} & = & \overline{3} \\
(\overline{7})^5 & = & (\overline{7})(\overline{7})^4 = (\overline{7})(\overline{3}) & = & \overline{21} & = & \overline{-1} \\
(\overline{7})^6 & = & (\overline{7})(\overline{7})^5 = (\overline{7})(\overline{-1}) & = & \overline{-7} & = & \overline{15} \\
(\overline{7})^7 & = & (\overline{7})(\overline{7})^6 = (\overline{7})(\overline{-7}) & = & \overline{-49} & = & \overline{17} = \overline{-5} \\
(\overline{7})^8 & = & (\overline{7})(\overline{7})^7 = (\overline{7})(\overline{-5}) & = & \overline{-35} & = & \overline{9} \\
(\overline{7})^9 & = & (\overline{7})(\overline{7})^8 = (\overline{7})(\overline{9}) & = & \overline{63} & = & \overline{19} = \overline{-3} \\
(\overline{7})^{10} & = & (\overline{7})(\overline{7})^9 = (\overline{7})(\overline{-3}) & = & \overline{-21} & = & \overline{1}
\end{array}$$

ดังนั้น $\circ(\overline{7}) = 10 = n$

สรุปได้ว่า $\overline{7}$ เป็นตัวก่อกำเนิดของ $\mathbb{Z}_{22}^{\times}$ $\quad\#$

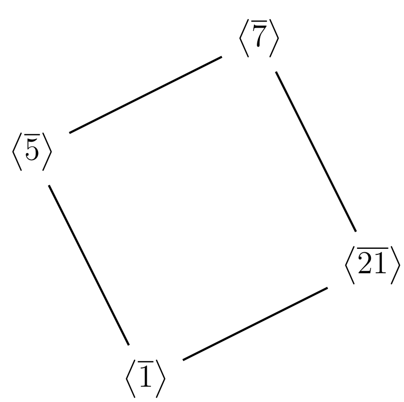
16.2 **(4 คะแนน)** จงหา **กรุปย่อย (subgroup)** ทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_{22}^{\times}$ (พร้อมแจกแจงสมาชิกของกรุปย่อย)

แนวคำตอบ จาก $\langle\overline{7}\rangle = \mathbb{Z}_{22}^{\times}$ ตัวหารของ 10 คือ 1, 2, 5, 10 ดังนั้นกรุปย่อยของ $\mathbb{Z}_{19}^{\times}$ คือ

$$\begin{aligned}
\left\langle(\overline{7})^{\frac{10}{1}}\right\rangle &= \langle(\overline{7})^{10}\rangle = \langle\overline{1}\rangle = \{\overline{1}\} \\
\left\langle(\overline{7})^{\frac{10}{2}}\right\rangle &= \langle(\overline{7})^{5}\rangle = \langle\overline{21}\rangle = \{\overline{1}, \overline{21}\} \\
\left\langle(\overline{7})^{\frac{10}{5}}\right\rangle &= \langle(\overline{7})^{2}\rangle = \langle\overline{5}\rangle = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{3}, \overline{15}, \overline{9}\} \\
\left\langle(\overline{7})^{\frac{10}{10}}\right\rangle &= \langle(\overline{7})^{1}\rangle = \langle\overline{7}\rangle = \mathbb{Z}_{22}^{\times} = \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{9}, \overline{13}, \overline{15}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{21}\}
\end{aligned}$$

16.3 **(3 คะแนน)** จงนำกรุปย่อยจากข้อ 16.2 เขียน **แลตทิซ (lattice)**

แนวคำตอบ เขียนแลตทิซได้ดังนี้



17. **(10 คะแนน)** ให้ G เป็นกรุปจำกัดที่ $|G| = 6$

จงใช้ทฤษฎีบทลากรองจ์ (Lagrange's Theorem) แสดงว่ามีสมาชิกใน G ที่มีอันดับเท่ากับ 2 หรือ 3

แนวคำตอบ สมมติว่าไม่มีสมาชิกใน G ที่มีอันดับเท่ากับ 2 และ 3
ให้ $a \in G$ โดยที่ a ไม่ใช่เอกลักษณ์ จะได้ว่า

$\langle a \rangle$ เป็นกรุปย่อยของ G

โดยทฤษฎีบทลากรองจ์ (Lagrange's Theorem) $|\langle a \rangle|$ หาร $|G|$ ลงตัว หรือ $\circ(a) \mid 6$
ฉะนั้น $\circ(a) = 1, 2, 3, 6$ แต่ a ไม่ใช่เอกลักษณ์และไม่มีอันดับ 2 และ 3 ดังนั้น $\circ(a) = 6 = |G|$
ทำให้ได้ว่า ทุกสมาชิกใน G ที่ไม่ใช่เอกลักษณ์มีอันดับเท่ากับ 6 หรือกล่าวได้ว่า

ทุกสมาชิกที่ไม่ใช่เอกลักษณ์ เป็นตัวก่อกำเนิดของ G

นั่นคือจำนวนตัวก่อกำเนิดของ G เท่ากับ 5 เกิดข้อขัดแย้งกับทฤษฎีบทที่ว่าตัวก่อกำเนิดของ G เท่ากับ $\phi(6) = 2$

18. **(10 คะแนน)** ให้ N เป็นกรุปย่อย (subgroup) ของกรุป G จงพิสูจน์ว่า

$$\text{ถ้า} \quad gNg^{-1} \subseteq N \quad \text{ทุก ๆ } g \in G \quad \text{แล้ว} \quad (Nh)(Nk) = N(hk) \quad \text{ทุก ๆ } h, k \in G$$

แนวคำตอบ ให้ N เป็นกรุปย่อยของกรุป G สมมติว่า $gNg^{-1} \subseteq N$ ทุก ๆ $g \in G$
ให้ $h, k \in G$

<u>ขั้นที่ 1</u> จะแสดงว่า $(Nh)(Nk) \subseteq N(hk)$
ให้ $x \in (Nh)(Nk)$ จะได้ว่ามี $n_1, n_2 \in N$ ซึ่ง $x = (n_1h)(n_2k) = n_1(hn_2)k$
จะเห็นว่า $hn_2h^{-1} \in hNh^{-1} \subseteq N$

นั่นคือมี $n_3 \in N$ ซึ่ง

$$\begin{aligned} hn_2h^{-1} &= n_3 \\ hn_2 &= n_3h \end{aligned}$$

เนื่องจาก $n_1n_3 \in N$ จะได้ว่า

$$x = n_1(hn_2)k = n_1(n_3h)k = (n_1n_3)hk \in N(hk)$$

<u>ขั้นที่ 2</u> จะแสดงว่า $N(hk) \subseteq (Nh)(Nk)$
ให้ $x \in N(hk)$ จะได้ว่ามี $n \in N$ ซึ่ง $x = n(hk)$ เนื่องจาก $e \in N$ ฉะนั้น

$$x = n(hk) = (nh)(ek) \in (Nh)(Nk)$$

สรุปได้ว่า $(Nh)(Nk) = N(hk)$