มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
คณะครุศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ข้อสอบกลางภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2566

รหัสวิชา	**ชื่อวิชา**	**วันเวลาสอบ**	**คะแนนเต็ม**
MAI1302	แคลคูลัส ๑	เวลา 17:00 - 20:00 วันพฤหัส ที่ 7 กันยายน 2566	100 คะแนน 25%

ชื่อ-สกุล... **รหัสนักศึกษา**...................................... **หมู่เรียน**........................

คำชี้แจง

1. ข้อสอบมี 26 ข้อ 18 หน้า แบ่งออกเป็น 3 ตอน ประกอบด้วย
    - **ตอนที่ 1** ข้อสอบแบบ 5 ตัวเลือก จำนวน 10 ข้อ (ข้อละ 2 คะแนน รวม 20 คะแนน)
    - **ตอนที่ 2** ข้อสอบแบบเติมคำตอบ จำนวน 10 ข้อ (ข้อละ 2 คะแนน รวม 20 คะแนน)
    - **ตอนที่ 3** ข้อสอบแบบแสดงวิธีทำ จำนวน 6 ข้อ (ข้อละ 10 คะแนน รวม 60 คะแนน)
2. เขียนรหัสนักศึกษา และหมู่เรียนด้วย**ตัวบรรจงลงในข้อสอบทุกหน้า**
3. ไม่อนุญาตให้ใช้เครื่องคำนวณและเครื่องมือสื่อสาร
4. **ห้าม**นำข้อสอบออกจากห้องสอบโดยเด็ดขาด
5. หากมี**การทุจริต**ในการสอบ จะได้รับการลงโทษตามระเบียบของมหาวิทยาลัย

ข้าพเจ้าจะปฏิบัติตามข้อตกลงอย่างเคร่งครัด
ลงชื่อผู้เข้าสอบ

....

อาจารย์ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย

ข้อ	ตอนที่ 1 1-10	ตอนที่ 2 11-20	ตอนที่ 3 21	ตอนที่ 3 22	ตอนที่ 3 23	ตอนที่ 3 24	ตอนที่ 3 25	ตอนที่ 3 26	รวม
คะแนน									

ตอนที่ 1 : (20 คะแนน) จงกากบาททับข้อที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว ข้อละ 2 คะแนน

1. ให้ $\lim_{x\to 2} f(x) = 3$ ข้อใดกล่าว**ถูกต้อง**

   ก. ถ้า x มีค่าใกล้ ๆ 2 แล้ว $f(x)$ มีค่าใกล้ ๆ 3 หรือเท่ากับ 3

   ข. ถ้า x มีค่าใกล้ ๆ 2 แล้ว $f(x)$ มีค่าใกล้ ๆ 3

   ค. ถ้า$f(x)$ มีค่าใกล้ ๆ 3 แล้ว x มีค่าใกล้ ๆ 2

   ง. f มีความต่อเนื่องที่ $x = 2$

   จ. $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ มีค่าเท่ากับ 3 หรือไม่ก็ได้

2. ลิมิตในข้อใดต่อไปนี้มีค่าเท่ากับ 1

   ก. $\lim_{x\to 0^-} \frac{x|x|}{x}$

   ข. $\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{|x|}$

   ค. $\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{x^2}}{x}$

   ง. $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{x}$

   จ. $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+x}{x}$

3. กำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{เมื่อ } x \leq 1 \\ x|x|+1 & \text{เมื่อ } 1 < x \leq 2 \\ x+1 & \text{เมื่อ } x \geq 2 \end{cases}$$

ข้อใดกล่าว**ไม่ถูกต้อง**

ก. f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 1$

ข. f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 2$

ค. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

ง. $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$

จ. f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่บนช่วง $(2, \infty)$

4. กำหนดให้ $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ ข้อใดกล่าว**ถูกต้อง**

ก. เราสามารถหาอัตราการเปลี่ยนเฉลี่ยของ f บนช่วงใด ๆ ได้เสมอ

ข. อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ f บนช่วง $[1, 4]$ เท่ากับ $-\frac{1}{2}$

ค. อัตราการเปลี่ยนแปลงของ f ขณะ $x = 1$ เท่ากับ $-\frac{1}{2}$

ง. สมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่ $x = 1$ คือ $y = -\frac{1}{2}x$

จ. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \dfrac{1}{2}$

5. ให้ f, g และ h เป็นฟังก์ชันค่าจริง ข้อใดกล่าว**ถูกต้อง**

ก. $\dfrac{d}{dx}[f(x)]^2 = 2f(x) \cdot f'(x)$

ข. $\dfrac{d}{dx}[\ln(x)]^2 = \left(\dfrac{1}{x}\right)^2$

ค. $\dfrac{d}{dx}\sqrt{x^2+1} = \sqrt{2x}$

ง. $(fgh)' = f'g'h'$

จ. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

6. ให้ $f(x) = xe^x$ ข้อใดกล่าว**ไม่ถูกต้อง**

ก. $f^{(2023)}(0) = 2023$

ข. $f^{(2023)}(0) - f^{(2022)}(0) = 1$

ค. $f^{(2023)}(1) - f^{(2022)}(1) = e$

ง. $f^{(2023)}(x) = xe^x + 2023e^x$

จ. $f^{(2023)}(x) = e^x + 2023xe^x$

7. ข้อใดต่อไปนี้คือสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = \cos x(\sin x + 1)$ ที่ $x = 0$

   ก. $y = x - 1$

   ข. $y = x + 2$

   ค. $y = -x + 1$

   ง. $y = x + 1$

   จ. $y = -x - 1$

8. ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงซึ่งมีจุดวิกฤตคือ $x = 2, 3$ โดยที่

$$f''(2) = 3 \quad \text{และ} \quad f''(3) = -2$$

   ข้อใดกล่าว**ถูกต้อง**

   ก. $x = 2$ เป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์

   ข. $x = 2$ เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์

   ค. $x = 3$ เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์

   ง. $x = 2$ เป็นจุดต่ำสุดสัมบูรณ์

   จ. $x = 3$ เป็นจุดสูงสุดสัมบูรณ์

9. ให้ $f(x) = (x-1) + \dfrac{4}{x+1}$ ข้อใดกล่าว**ไม่ถูกต้อง**

   ก. f มีจุดวิกฤตคือ $x = -3, 1$

   ข. f ไม่มีจุดเปลี่ยนเว้า

   ค. f เป็นเป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(1, \infty)$

   ง. f เป็นเป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-3, 1)$

   จ. f เป็นมีความเว้าบน บนช่วง $(-1, \infty)$

10. ถังน้ำรูปทรงกระบอกรัศมี r ส่วนสูง h ถ้าเปิดน้ำใส่ถังด้วยอัตรา k ลูกบาศก์หน่วยต่อวินาที กำหนดให้ h คือความสูงของน้ำจากก้นถัง และ V คือปริมาตรของน้ำในถัง ขณะเวลา t ใด ๆ ข้อใดต่อไปนี้กล่าว**ไม่ถูกต้อง**

    ก. $\dfrac{dV}{dt} = k$

    ข. $V = \pi r^2 h$

    ค. $\dfrac{dV}{dt} = \pi \cdot 2r\dfrac{dr}{dt} \cdot h$

    ง. $\dfrac{dV}{dt} = \pi r^2 \dfrac{dh}{dt}$

    จ. $\dfrac{dh}{dt} = \dfrac{k}{\pi r^2}$

ตอนที่ 2 : (20 คะแนน) จงเติมคำตอบในช่องว่าง (ด้านซ้ายมือ) ให้ถูกต้อง ข้อละ 2 คะแนน

11. ______________________

จงหาค่าของลิมิต $\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x}{x+\tan x}$

12. ______________________

กำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 + a & \text{เมื่อ } x < -1 \\ bx + 3 & \text{เมื่อ } x \geq -1 \end{cases}$$

มีความต่อเนื่องบนจำนวนจริง จงหาค่าของ $a + b$

13. ____________________

กำหนดให้ $y = f(x)$ สำหรับ $x > 0$ โดยที่

$$\frac{d}{dx}(\ln y) = x^2 + 3$$

และ $f(2) = 3$ จงหา $f'(2)$

14. ____________________

จงหา**ความชัน**ของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = (\ln x)(\arctan x)$ ที่ $x = 1$

15. ________________________

จงหา**ความชัน**ของกราฟที่มีสมการคือ

$$ye^x + \sin(xy) = \cos x$$

ที่จุด $(0, 1)$

16. ________________________

กำหนดให้ $f(x) = ax^2 + bx + c$ โดยที่ $f(0) = 7$ และ f มีจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $(2, 3)$ จงหา $f'(66)$

17. ____________________________

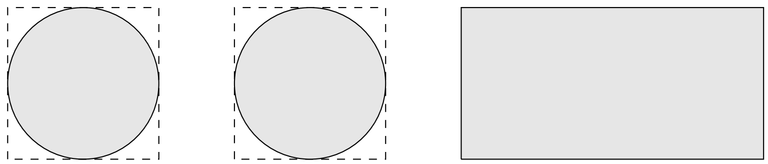
จงใช้ค่าเชิงอนุพันธ์ประมาณค่าของ $\dfrac{1}{\sqrt{0.99}}$ ตอบทศนิยม 3 ตำแหน่ง

18. ____________________________

จงหา**พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มากที่สุด**ที่บรรจุในสามเหลี่ยมมุมหน้าจั่วที่ความยาวสองด้านที่เท่ากันคือ 5 หน่วย และมีความสูง 3 หน่วย

19. ____________________________

ต้องผลิตกระป๋องรูปทรงกระบอกกลมตรงมีปริมาตร V ลูกบาศก์เซนติเมตร มีฝาปิดหัวท้าย ฝาปิดทำจากโลหะบางรูปสี่เหลี่ยมจตุรัส และผิวข้างทำจากโลหะบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าชนิดเดียวกันกับฝาปิด โดยใช้ปริมาณโลหะน้อยที่สุด จงหาอัตราส่วนของ**ความสูงต่อรัศมี**ของกระป๋องนี้ (ตอบในรูป จำนวนเต็ม : จำนวนเต็ม หรือ $x : y$)



20. ____________________________

แผ่นโลหะเมื่อได้รับความร้อนจะขยายตัว เส้นรอบวงยาวเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 2 เซนติเมตรต่อนาที **พื้นที่หน้าตัดของแผ่นโลหะจะเพิ่มขึ้นด้วยอัตราเท่าใด** ขณะที่เส้นรอบวงยาว 5 เซนติเมตร

ตอนที่ 3 : (60 คะแนน) จงแสดงวิธีโดยละเอียด ข้อละ 10 คะแนน

21. **(10 คะแนน)** จงหาลิมิตต่อไปนี้ **โดยไม่ใช้หลักเกณฑ์ลอปีตาล**

21.1 **(5 คะแนน)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}$

21.2 **(5 คะแนน)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(6x)+6x}{2\tan 3x}$

22. **(10 คะแนน)** จงหาลิมิตของ $\lim_{x \to -\infty} (x+2) + \sqrt{x^2+3}$

23. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

23.1 **(4 คะแนน)** ให้ $f(x) = x|x|$ และ $g(x) = 2x + 3$ จงหา $(f \circ g)'(-2)$

23.2 **(6 คะแนน)** กำหนดให้

$$y = \arctan x \text{ และ } x = te^t + 1 \text{ และ } t = \frac{2-u}{3-u}$$

จงหา $\dfrac{dy}{du}$ ขณะ $u = 2$

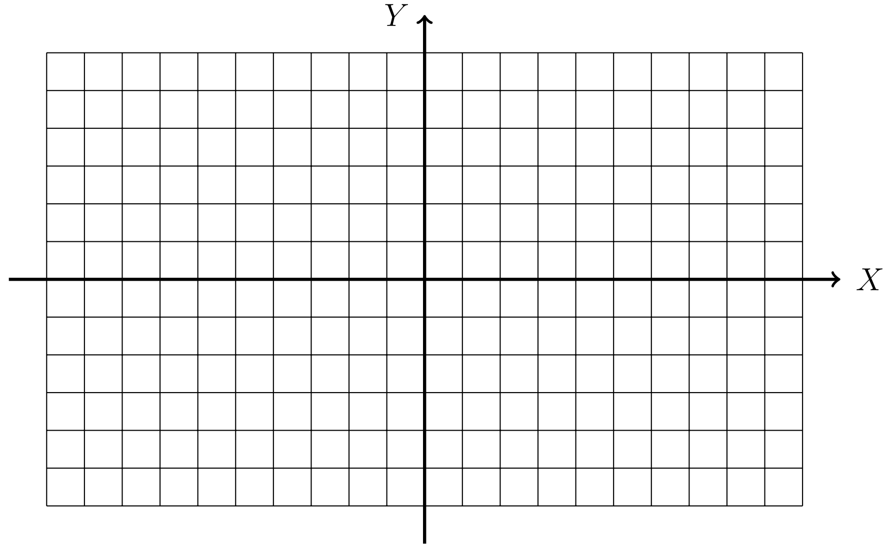
24. **(10 คะแนน)** จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

24.1 **(4 คะแนน)** $f(x) = \tan^2(3\ln x)$

24.2 **(6 คะแนน)** $f(x) = (\arcsin x)^x$

25. **(10 คะแนน)** จงร่างกราฟ $y = 1 - \dfrac{1}{x^2 + 3}$ พร้อมเติมคำตอบในช่องว่างให้สมบูรณ์ (ถ้าไม่มีคำตอบให้เขียนว่า *ไม่มี*)

โดเมน	
จุดตัดแกน X และแกน Y	
สมการเส้นกำกับแนวยืน	
สมการเส้นกำกับแนวนอน	
จุดวิกฤต	
จุดสูงสุดสัมพัทธ์ (ตอบเป็นคู่อันดับ)	
จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ (ตอบเป็นคู่อันดับ)	
f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง	
f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง	
จุดเปลี่ยนเว้า	
f มีความเว้าอยู่บน บนช่วง	
f มีความเว้าอยู่ล่าง บนช่วง	


Y
X

26. **(10 คะแนน)** จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้

26.1 **(5 คะแนน)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x + x^2}{1-\cos x}$

26.2 **(5 คะแนน)** $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
คณะครุศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์
เฉลยข้อสอบกลางภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2566

รหัสวิชา	ชื่อวิชา	วันเวลาสอบ	คะแนนเต็ม
MAI1302	แคลคูลัส ๑	เวลา 17:00 - 20:00 วันพฤหัสบดี ที่ 7 กันยายน 2566	100 คะแนน 25%

โดย ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย

ตอนที่ 1 : (20 คะแนน) จงกากบาททับข้อที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว ข้อละ 2 คะแนน

1. ให้ $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$ ข้อใดกล่าว**ถูกต้อง**

   ก. ถ้า x มีค่าใกล้ ๆ 2 แล้ว $f(x)$ มีค่าใกล้ ๆ 3 หรือเท่ากับ 3 Answer

   ข. ถ้า x มีค่าใกล้ ๆ 2 แล้ว $f(x)$ มีค่าใกล้ ๆ 3

   ค. ถ้า$f(x)$ มีค่าใกล้ ๆ 3 แล้ว x มีค่าใกล้ ๆ 2

   ง. f มีความต่อเนื่องที่ $x = 2$

   จ. $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ มีค่าเท่ากับ 3 หรือไม่ก็ได้

   ตอบข้อ ก. ความหมายของลิมิต

2. ลิมิตในข้อใดต่อไปนี้มีค่าเท่ากับ 1

   ก. $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x|x|}{x}$

   ข. $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x}{|x|}$

   ค. $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$

   ง. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2}{x}$

   จ. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2+x}{x}$ Answer

   ตอบข้อ จ.

   ก. $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} |x| = 0$

   ข. $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x}{|x|} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x}{-x} = -1$

ค. $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x}{x}=-1$

ง. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}x=0$

จ. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2+x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x(x+1)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}(x+1)=1$

3. กำหนดให้

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{เมื่อ } x\leq 1\\ x|x|+1 & \text{เมื่อ } 1<x\leq 2\\ x+1 & \text{เมื่อ } x\geq 2\end{cases}$$

ข้อใดกล่าว**ไม่ถูกต้อง**

ก. f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=1$

ข. f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=2$ Answer

ค. $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$

ง. $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=f(2)$

จ. f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่บนช่วง $(2,\infty)$

ตอบข้อ ข. เนื่องจาก

$$\lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^+}(x+1)=3\neq 5=\lim_{x\to 2^-}x|x|+1=\lim_{x\to 2^-}f(x)$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ $x=2$

4. กำหนดให้ $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ ข้อใดกล่าว**ถูกต้อง**

ก. เราสามารถหาอัตราการเปลี่ยนเฉลี่ยของ f บนช่วงใด ๆ ได้เสมอ

ข. อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ f บนช่วง $[1,4]$ เท่ากับ $-\frac{1}{2}$

ค. อัตราการเปลี่ยนแปลงของ f ขณะ $x=1$ เท่ากับ $-\frac{1}{2}$ Answer

ง. สมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y=f(x)$ ที่ $x=1$ คือ $y=-\frac{1}{2}x$

จ. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{1}{2}$

ตอบข้อ ค. อัตราการเปลี่ยนแปลงของ f ขณะ $x=1$ เท่ากับ

$$f'(1)=-\frac{1}{2}\cdot 1^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{2}$$

5. ให้ f, g และ h เป็นฟังก์ชันค่าจริง ข้อใดกล่าว**ถูกต้อง**

ก. $\frac{d}{dx}[f(x)]^2 = 2f(x) \cdot f'(x)$ Answer

ข. $\frac{d}{dx}[\ln(x)]^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2$

ค. $\frac{d}{dx}\sqrt{x^2+1} = \sqrt{2x}$

ง. $(fgh)' = f'g'h'$

จ. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

ตอบข้อ ก. โดยกฎลูกโซ่

6. ให้ $f(x) = xe^x$ ข้อใดกล่าว**ไม่ถูกต้อง**

ก. $f^{(2023)}(0) = 2023$

ข. $f^{(2023)}(0) - f^{(2022)}(0) = 1$

ค. $f^{(2023)}(1) - f^{(2022)}(1) = e$

ง. $f^{(2023)}(x) = xe^x + 2023e^x$

จ. $f^{(2023)}(x) = e^x + 2023xe^x$ Answer

ตอบข้อ จ. พิจารณา

$$\begin{aligned}
f'(x) &= x(e^x)' + (x)'e^x = xe^x + e^x \\
f''(x) &= x(e^x)' + (x)'e^x + (e^x)' = xe^x + e^x + e^x = xe^x + 2e^x \\
f'''(x) &= x(e^x)' + (x)'e^x + (2e^x)' = xe^x + e^x + e^x = xe^x + 3e^x \\
&\vdots \\
f^{(2023)}(x) &= xe^x + 2023e^x
\end{aligned}$$

7. ข้อใดต่อไปนี้คือสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = \cos x(\sin x + 1)$ ที่ $x = 0$

ก. $y = x - 1$

ข. $y = x + 2$

ค. $y = -x + 1$

ง. $y = x + 1$ Answer

จ. $y = -x - 1$

ตอบข้อ ง. จะเห็นว่า $f(0) = 1$ และ

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \cos x(\sin x + 1)' + (\cos x)'(\sin x + 1) \\
&= \cos x(\cos x) + (-\sin x)(\sin x + 1) \\
f'(1) &= 1
\end{aligned}$$

สมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = \cos x(\sin x + 1)$ ที่จุด $(0, 1)$ มีความชันเท่ากับ 1 คือ

$$\begin{aligned}
y - 1 &= 1(x - 0) \\
y &= x + 1
\end{aligned}$$

8. ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงซึ่งมีจุดวิกฤตคือ $x = 2, 3$ โดยที่

$$f''(2) = 3 \quad \text{และ} \quad f''(3) = -2$$

ข้อใดกล่าว**ถูกต้อง**

ก. $x = 2$ เป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์

ข. $x = 2$ เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ Answer

ค. $x = 3$ เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์

ง. $x = 2$ เป็นจุดต่ำสุดสัมบูรณ์

จ. $x = 3$ เป็นจุดสูงสุดสัมบูรณ์

ตอบข้อ ข. โดยการทดสอบอนุพันธ์อันดับสอง จุดวิกฤตที่ $x = 2$ และ $f''(2) = 3 > 0$ ดังนั้น $x = 2$ เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์

9. ให้ $f(x) = (x-1) + \dfrac{4}{x+1}$ ข้อใดกล่าว**ไม่ถูกต้อง**

ก. f มีจุดวิกฤตคือ $x = -3, 1$

ข. f ไม่มีจุดเปลี่ยนเว้า

ค. f เป็นเป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(1, \infty)$

ง. f เป็นเป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-3, 1)$ Answer

จ. f เป็นมีความเว้าบน บนช่วง $(-1, \infty)$

ตอบข้อ ง. จะเห็นว่า $f(x) = (x-1) + 4(x+1)^{-1}$ พิจารณา

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + 4[-1(x+1)^{-2}] = 1 - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 4}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x^2 + 2x + 1 - 4}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2} = \frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2} \\ f''(x) &= \frac{8}{(x+1)^4} \end{aligned}$$

จะได้ว่าจุดวิกฤตคือ $x = -3, 1$ และพิจารณาเครื่องหมาย f'

$+ \qquad - \qquad +$

$-3 \qquad 1$

f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-\infty, -3) \cup (1, \infty)$ และเป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(-3, 1)$ จะได้ว่าไม่มีจุดเปลี่ยนเว้า และพิจารณาเครื่องหมาย f''

$+ \qquad +$

-1

f มีความเว้าบน บนช่วง $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$

10. ถังน้ำรูปทรงกระบอกรัศมี r ส่วนสูง h ถ้าเปิดน้ำใส่ถังด้วยอัตรา k ลูกบาศก์หน่วยต่อวินาที กำหนดให้ h คือความสูงของน้ำจากก้นถัง และ V คือปริมาตรของน้ำในถัง ขณะเวลา t ใด ๆ ข้อใดต่อไปนี้กล่าว**ไม่ถูกต้อง**

    ก. $\dfrac{dV}{dt} = k$

    ข. $V = \pi r^2 h$

    ค. $\dfrac{dV}{dt} = \pi \cdot 2r\dfrac{dr}{dt} \cdot h$ Answer

    ง. $\dfrac{dV}{dt} = \pi r^2 \dfrac{dh}{dt}$

    จ. $\dfrac{dh}{dt} = \dfrac{k}{\pi r^2}$

ตอบข้อ ค. จะเห็นว่า $V = \pi r^2 h$ โดยที่ r เป็นค่าคงตัว ดังนั้น ค. ไม่ถูกต้อง

ตอนที่ 2 : (20 คะแนน) จงเติมคำตอบในช่องว่าง (ด้านซ้ายมือ) ให้ถูกต้อง ข้อละ 2 คะแนน

11. **ตอบ** $\frac{1}{2}$

จงหาค่าของลิมิต $\lim_{x\to 0} \dfrac{x\cos x}{x+\tan x}$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x}{x+\tan x} &= \lim_{x\to 0} \frac{x\cos x}{x+\frac{\sin x}{\cos x}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x\cos x}{x\left(1+\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1+\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}} \\
&= \frac{1}{1+1\cdot\frac{1}{1}} = \frac{1}{2} \quad \#
\end{aligned}$$

12. **ตอบ** 5

กำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3+a & \text{เมื่อ } x < -1 \\ bx+3 & \text{เมื่อ } x \ge -1 \end{cases}$$

มีความต่อเนื่องบนจำนวนจริง จงหาค่าของ $a+b$

แนวคำตอบ เนื่องจาก f ต่อเนื่องที่ $x=-1$ ฉะนั้น

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -1^-} f(x) &= \lim_{x\to -1^+} f(x) \\
\lim_{x\to -1^-} (2x^3+a) &= \lim_{x\to -1^+} (bx+3) \\
-2+a &= -b+3 \\
a+b &= 5 \quad \#
\end{aligned}$$

13. **ตอบ** 21

กำหนดให้ $y=f(x)$ สำหรับ $x>0$ โดยที่

$$\frac{d}{dx}(\ln y) = x^2+3$$

และ $f(2)=3$ จงหา $f'(2)$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\frac{1}{y}\cdot y' &= \frac{d}{dx}(\ln y) = x^2+3 \\
y' &= y(x^2+3) \\
f'(x) &= f(x)(x^2+3)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $f'(2) = f(2)(2^2+3) = 3(7) = 21 \quad \#$

14. **ตอบ** $\frac{\pi}{4}$

จงหา**ความชัน**ของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = (\ln x)(\arctan x)$ ที่ $x = 1$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\frac{dy}{dx} = (\ln x)(\arctan x)' + (\ln x)'(\arctan x) = (\ln x) \cdot \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{x} \cdot \arctan x$$

ดังนั้น **ความชัน**ของเส้นสัมผัสเส้นโค้งนี้ที่ $x = 1$ เท่ากับ

$$\ln 1 \cdot \frac{1}{1^2+1} + \frac{1}{1} \cdot \arctan 1 = 0 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \quad \#$$

15. **ตอบ** -2

จงหา**ความชัน**ของกราฟที่มีสมการคือ

$$ye^x + \sin(xy) = \cos x$$

ที่จุด $(0, 1)$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}
(ye^x + \sin(xy))' &= (\cos x)' \\
(ye^x)' + [\sin(xy)]' &= -\sin x \\
(y)(e^x)' + (y)'(e^x) + \cos(xy) \cdot (xy)' &= -\sin x \\
ye^x + y'e^x + \cos(xy)[xy' + x'y] &= -\sin x \\
ye^x + y'e^x + \cos(xy)[xy' + y] &= -\sin x
\end{aligned}$$

แทน $x = 0$ และ $y = 1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
1e^0 + y'e^0 + \cos(0)[0y' + 1] &= -\sin 0 \\
1 + y' + 1 &= 0 \\
y' &= -2
\end{aligned}$$

ดังนั้น ความชันของกราฟนี้ที่จุด $(0, 1)$ เท่ากับ -2 $\quad \#$

16. **ตอบ** 128

กำหนดให้ $f(x) = ax^2 + bx + c$ โดยที่ $f(0) = 7$ และ f มีจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $(2, 3)$ จงหา $f'(66)$

แนวคำตอบ จะเห็นว่า $7 = f(0) = c$ เนื่องจาก f มีจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $(2, 3)$ ฉะนั้น $f'(2) = 0$ และ $f(2) = 3$

$$\begin{array}{rcllrcl}
3 = f(2) & = & a(2)^2 + b(2) + 7 = 4a + 2b + 7 & \longrightarrow & 4a + 2b & = & -4 \\
f'(x) & = & 2ax + b & & & & \\
0 = f'(2) & = & 2a(2) + b & \longrightarrow & b & = & -4a \\
 & & & \longrightarrow & 4a + 2(-4a) & = & -4 \\
 & & & \longrightarrow & -4a & = & -4
\end{array}$$

จะได้ว่า $a = 1$ และ $b = -4(1) = -4$ นั่นคือ $f(x) = x^2 - 4x + 7$ ดังนั้น

$$f'(66) = 2(1)(66) - 4 = 128 \quad \#$$

17. **ตอบ** 1.005

จงใช้ค่าเชิงอนุพันธ์ประมาณค่าของ $\dfrac{1}{\sqrt{0.99}}$ ตอบทศนิยม 3 ตำแหน่ง

แนวคำตอบ ให้ $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ จะได้ว่า $f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\dfrac{1}{2\sqrt{x^3}}$
พิจารณา $x = 1$ และ $dx = -0.01$ จาก

$$f(x+dx) \approx f(x) + f(x)dx$$

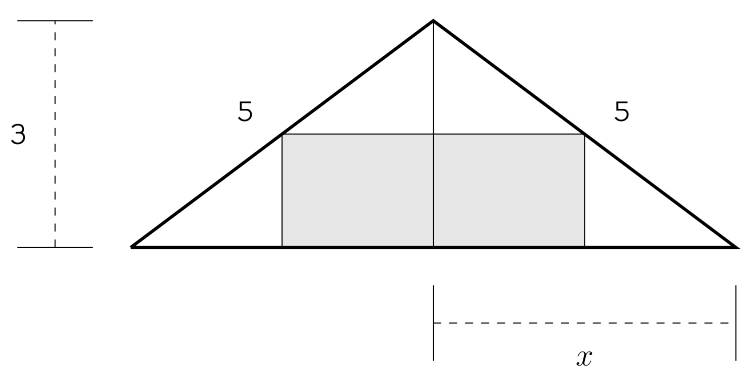
จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{0.99}} = f(0.99) &= f(1-0.01)\\ &\approx f(1) + f'(1)\cdot(-0.01)\\ &= \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{2\sqrt{1^3}}\cdot(-0.01)\\ &= 1 + \frac{0.01}{2}\\ &= 1 + 0.005 = 1.005 \quad \#\end{aligned}$$

18. **ตอบ** 6

จงหา**พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มากที่สุด**ที่บรรจุในสามเหลี่ยมมุมหน้าจั่วที่ความยาวสองด้านที่เท่ากันคือ 5 หน่วย และมีความสูง 3 หน่วย

แนวคำตอบ พิจารณารูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

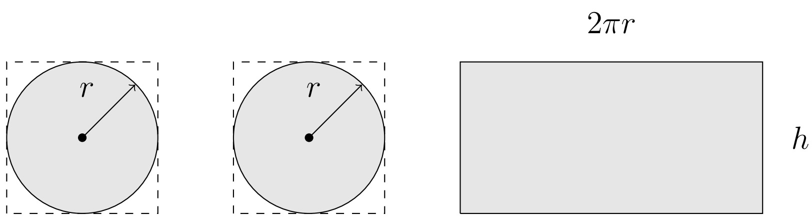


จะได้ว่า $x^2 = 5^2 - 3^2 = 16$ นั่นคือ $x = 4$ หน่วย จากการพิสูจน์ตัวอย่างในหนังสือ พบว่าพื้นสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่บรรจุในสามเหลี่ยมมุมฉากจะมีค่ามากสุดเมื่อความยาวและความกว้างแบ่งครึ่งด้านของด้านประกอบมุมฉากของสามเหลี่ยมมุมฉาก จากรูปดังกล่าวแบ่งการพิจารณาสามเหลี่ยมมุมฉากที่ละรูป (ทั้งสองเหมือนกัน) ดังนั้นพื้นที่มากสุดคือ

$$2\cdot\left(\frac{4}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right) = 6 \quad \#$$

19. **ตอบ** 2 : 1

ต้องผลิตกระป๋องรูปทรงกระบอกกลมตรงมีปริมาตร V ลูกบาศก์เซนติเมตร มีฝาปิดหัวท้าย ฝาปิดทำจากโลหะบางรูปสี่เหลี่ยมจตุรัส และผิวข้างทำจากโลหะบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าชนิดเดียวกันกับฝาปิด โดยใช้ปริมาณโลหะน้อยที่สุด จงหาอัตราส่วนของ**ความสูงต่อรัศมี**ของกระป๋องนี้ (ตอบในรูป จำนวนเต็ม : จำนวนเต็ม หรือ $x : y$)



แนวคำตอบ ให้ r แทนรัศมีของกระป๋อง และ h ความสูงของกระป๋อง ฉะนั้น $V = \pi r^2 h$ หรือ $h = \dfrac{V}{\pi r^2}$
ถ้า S แทนพื้นที่ผิวทั้งหมดของกระป๋อง จะได้ว่า

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$
$$S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{V}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$$
$$S'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 2V}{r^2} = 0$$

นั่นคือ $4\pi r^3 - 2V = 0$ ค่าวิกฤตคือ $r = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$ เป็นจุดที่เกิดค่าต่ำสุด จากสมการ $h = \dfrac{V}{\pi r^2}$ จะได้ว่า

$$\frac{h}{r} = \frac{V}{\pi r^3} = \frac{V}{\pi \cdot \frac{V}{2\pi}} = 2$$

ดังนั้นอัตราส่วนของความสูงต่อรัศมีของกระป๋องนี้คือ $2 : 1$

20. **ตอบ** 10

แผ่นโลหะเมื่อได้รับความร้อนจะขยายตัว เส้นรอบวงยาวเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 2 เซนติเมตรต่อนาที **พื้นที่หน้าตัดของแผ่นโลหะจะเพิ่มขึ้นด้วยอัตราเท่าใด** ขณะที่เส้นรอบวงยาว 5 เซนติเมตร

แนวคำตอบ ให้ C แทนเส้นรอบวงของแผ่นโลหะ และ r แทนรัศมีของแผ่นโลหะ และ A แทนพื้นที่หน้าตัดของแผ่นโลหะ จากโจทย์จะได้ว่า $\dfrac{dC}{dt} = 2$ เซนติเมตรต่อนาที จะเห็นว่า

$$C = 2\pi r \qquad \text{และ} \qquad A = \pi r^2$$

จะได้ว่า $2 = \dfrac{dC}{dt} = 2\pi\dfrac{dr}{dt}$ จะได้ว่า $\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{1}{\pi}$ พิจารณาขณะ $r = 5$

$$\frac{dA}{dt} = \pi 2r\frac{dr}{dt} = \pi 2(5)\frac{1}{\pi} = 10$$

ดังนั้นพื้นที่หน้าตัดของแผ่นโลหะจะเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 10 ตารางเซนติเมตรต่อนาที $\#$

ตอนที่ 3 : (60 คะแนน) จงแสดงวิธีโดยละเอียด ข้อละ 10 คะแนน

21. **(10 คะแนน)** จงหาลิมิตต่อไปนี้ **โดยไม่ใช้หลักเกณฑ์ลอปีตาล**

21.1 **(5 คะแนน)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1} &= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x+3}+2} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x+3})^2-2^2}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x+3}+2)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{(x+3)-4}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x+3}+2)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x+3}+2)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+3}+2)} \\
&= \frac{1}{(2)(4)} = \frac{1}{8} \quad \#
\end{aligned}$$

21.2 **(5 คะแนน)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(6x)+6x}{2\tan 3x}$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sin(6x)+6x}{2\tan 3x} &= \lim_{x\to 0} \frac{6x\left(\frac{\sin(6x)}{6x}+1\right)}{2\cdot\frac{\sin 3x}{\cos 3x}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{6x\left(\frac{\sin(6x)}{6x}+1\right)}{2\cdot 3x\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{1}{\cos 3x}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin(6x)}{6x}+1}{\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{1}{\cos 3x}} \\
&= \frac{1+1}{1\cdot\frac{1}{1}} = 2 \quad \#
\end{aligned}$$

22. **(10 คะแนน)** จงหาลิมิตของ $\lim_{x\to-\infty}(x+2)+\sqrt{x^2+3}$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}(x+2)+\sqrt{x^2+3} &= \lim_{x\to-\infty}[(x+2)+\sqrt{x^2+3}]\cdot\frac{(x+2)-\sqrt{x^2+3}}{(x+2)-\sqrt{x^2+3}} \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{(x+2)^2-(\sqrt{x^2+3})^2}{(x+2)-\sqrt{x^2+3}} \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2+4x+4)-(x^2+3)}{x(1+\frac{2}{x})-\sqrt{x^2(1+\frac{3}{x^2})}} \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{4x+1}{x(1+\frac{2}{x})-\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}} \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{x(4+\frac{1}{x})}{x(1+\frac{2}{x})-|x|\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}} \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{x(4+\frac{1}{x})}{x(1+\frac{2}{x})-(-x)\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}} \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{x(4+\frac{1}{x})}{x(1+\frac{2}{x})+x\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}} \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{x(4+\frac{1}{x})}{x\left[(1+\frac{2}{x})+\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}\right]} \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{4+\frac{1}{x}}{(1+\frac{2}{x})+\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}} \\
&= \frac{4+0}{(1+0)+\sqrt{1+0}} \\
&= \frac{4}{2}=2 \quad \#
\end{aligned}
$$

23. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

23.1 **(4 คะแนน)** ให้ $f(x) = x|x|$ และ $g(x) = 2x + 3$ จงหา $(f \circ g)'(-2)$
แนวคำตอบ จะเห็นว่า $g(-2) = 2(-2) + 3 = -1$ และ

$$(f \circ g)'(-2) = f'(g(-2)) \cdot g'(-2) = f'(-1) \cdot g'(-2)$$

พิจารณา $x < 0$ จะได้ว่า $f(x) = x(-x) = -x^2$ ฉะนั้น $f'(x) = -2x$ และ $g'(x) = 2$ ดังนั้น

$$(f \circ g)'(-2) = f'(-1) \cdot g'(-2) = -2(-1) \cdot 2 = 4 \quad \#$$

23.2 **(6 คะแนน)** กำหนดให้

$$y = \arctan x \text{ และ } x = te^t + 1 \text{ และ } t = \frac{2-u}{3-u}$$

จงหา $\dfrac{dy}{du}$ ขณะ $u = 2$
แนวคำตอบ จะเห็นว่า $y = y(x), x = x(t)$ และ $t = t(u)$ โดยกฎลูกโซ่จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{du} &= \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{du} \\
&= \frac{d}{dx}(\arctan x) \cdot \frac{d}{dt}(te^t + 1) \cdot \frac{d}{du}\left(\frac{2-u}{3-u}\right) \\
&= \frac{1}{x^2+1} \cdot (te^t + e^t) \cdot \left[\frac{(3-u)(2-u)' - (2-u)(3-u)'}{(3-u)^2}\right] \\
&= \frac{1}{x^2+1} \cdot (te^t + e^t) \cdot \left[\frac{(3-u)(-1) - (2-u)(-1)}{(3-u)^2}\right] \\
&= \frac{1}{x^2+1} \cdot (te^t + e^t) \cdot \frac{-1}{(3-u)^2}
\end{aligned}$$

แทน $u = 2$ จะได้ว่า $t = \dfrac{2-2}{3-2} = 0$ และ $x = 0e^0 + 1 = 1$ ดังนั้น

$$\left.\frac{dy}{du}\right|_{u=2} = \frac{1}{1^2+1} \cdot (0e^0 + e^0) \cdot \frac{-1}{(3-2)^2} = -\frac{1}{2} \quad \#$$

24. **(10 คะแนน)** จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

24.1 **(4 คะแนน)** $f(x) = \tan^2(3\ln x)$

แนวคำตอบ เนื่องจาก $f(x) = [\tan(3\ln x)]^2$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2[\tan(3\ln x)]^{2-1} \cdot [\tan(3\ln x)]' \\ &= 2\tan(3\ln x) \cdot \sec^2(3\ln x) \cdot (3\ln x)' \\ &= 2\tan(3\ln x) \cdot \sec^2(3\ln x) \cdot 3 \cdot \frac{1}{x} \\ &= \frac{6}{x}\tan(3\ln x) \cdot \sec^2(3\ln x) \quad \# \end{aligned}$$

24.2 **(6 คะแนน)** $f(x) = (\arcsin x)^x$

แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \ln f(x) &= \ln(\arcsin x)^x = x \cdot \ln(\arcsin x) \\ \frac{d}{dx}(\ln f(x)) &= \frac{d}{dx}(x) \cdot \ln(\arcsin x) + x \cdot \frac{d}{dx}\ln(\arcsin x) \\ \frac{1}{f(x)} \cdot \frac{df(x)}{dx} &= 1 \cdot \ln(\arcsin x) + x \cdot \frac{1}{\arcsin x} \cdot (\arcsin x)' \\ &= 1 \cdot \ln(\arcsin x) + x \cdot \frac{1}{\arcsin x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ f'(x) &= f(x)\left[\ln(\arcsin x) + \frac{x}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}\right] \\ f'(x) &= (\arcsin x)^x\left[\ln(\arcsin x) + \frac{x}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}\right] \quad \# \end{aligned}$$

25. **(10 คะแนน)** จงร่างกราฟ $y = 1 - \dfrac{1}{x^2+3}$ พร้อมเติมคำตอบในช่องว่างให้สมบูรณ์ (ถ้าไม่มีคำตอบให้เขียนว่า *ไม่มี*)

แนวคำตอบ

โดเมน	$\mathbb{R}$
จุดตัดแกน X และแกน Y	ไม่มี/$(0, \frac{2}{3})$
สมการเส้นกำกับแนวยืน	ไม่มี
สมการเส้นกำกับแนวนอน	$y = 1$
จุดวิกฤต	$x = 0$
จุดสูงสุดสัมพัทธ์ (ตอบเป็นคู่อันดับ)	ไม่มี
จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ (ตอบเป็นคู่อันดับ)	$(0, \frac{2}{3})$
f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง	$(0, \infty)$
f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง	$(-\infty, 0)$
จุดเปลี่ยนเว้า	$x = -1, 1$
f มีความเว้าอยู่บน บนช่วง	$(-1, 1)$
f มีความเว้าอยู่ล่าง บนช่วง	$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

1. เห็นได้ชัดว่าโดเมนของ f คือ $\mathbb{R}$ ดังนั้นไม่มีเส้นกำหับแนวยืน เนื่องจาก

$$\lim_{x\to\infty} 1 - \frac{1}{x^2+3} = 1 \qquad \text{และ} \qquad \lim_{x\to-\infty} 1 - \frac{1}{x^2+3} = 1$$

จะได้ว่า $y = 1$ เป็นเส้นกำกับแนวนอน

2. ถ้า $x = 0$ จะได้ $y = \frac{2}{3}$ และพิจารณากรณี $y = 0$ จะได้ว่า $0 = 2 - \dfrac{3}{x^2+3}$ แล้ว $2(x^2+3) = 3$ หรือ $2x^2 = -3$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ ดังนั้นมีเพียงจุดตัดแกน Y คือ $(0, \frac{2}{3})$

3. พิจารณา

$$f'(x) = 0 - (-1)(x^2+3)^{-2}(2x) = \frac{2x}{(x^2+3)^2}$$

ดังนั้น $x = 0$ เป็นจุดวิกฤต จะได้ $f(0) = 1$ เมื่อพิจารณาเครื่องหมาย f' บนเส้นจำนวนจะได้ว่า

$$\begin{array}{cc} - & + \\ \hline \multicolumn{2}{c}{0} \end{array}$$

และ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $(0, \infty)$ และเป็นฟังก์ชันลดบน $(-\infty, 0)$

4. พิจารณา

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{(x^2+3)^2(2x)' - 2x[(x^2+3)^2]'}{(x^2+3)^4} \\
&= \frac{(x^2+3)^2(2) - 2x[2(x^2+3)\cdot 2x)]}{(x^2+3)^4} \\
&= \frac{(x^2+3)[(x^2+3)(2) - 8x^2]}{(x^2+3)^4} \\
&= \frac{2x^2+6-8x^2}{(x^2+3)^3} \\
&= \frac{6-6x^2}{(x^2+3)^3} \\
&= \frac{6(1-x^2)}{(x^2+3)^3} \\
&= \frac{6(1-x)(1+x)}{(x^2+3)^3}
\end{aligned}
$$

เนื่องจาก $x = -1, 1$ ดังนั้นไม่มีเป็นจุดเปลี่ยนเว้า พิจารณาเครื่องหมาย f'' บนเส้นจำนวนจะได้ว่า

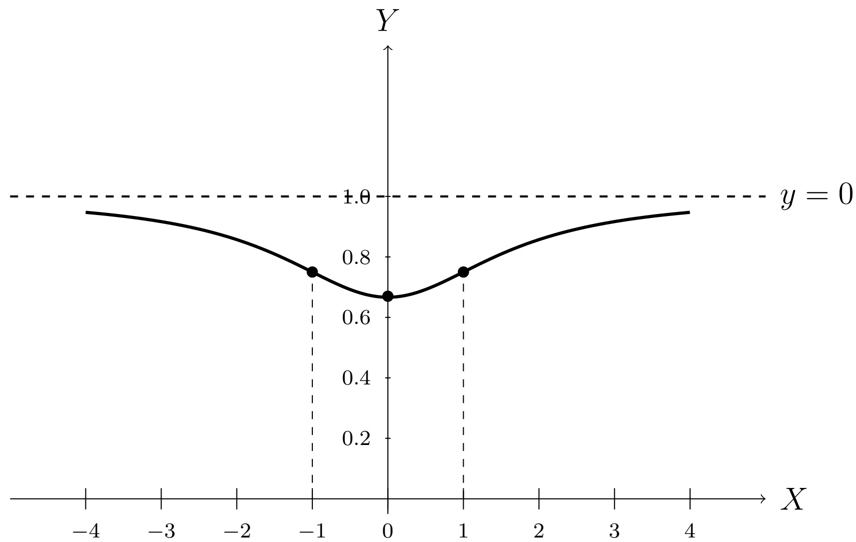
$-$		$+$		$-$
	-1		1	

f มีความเว้าอยู่บนบน $(-1, 1)$ และความเว้าอยู่ล่างบน $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

5. นำข้อมูลที่ได้มาสรุปบนเส้นจำนวนได้ดังนี้

f'	$-$		$-$		$+$		$+$
f''	$-$		$+$		$+$		$-$
		-1		0		1	
	ฟังก์ชันลด ความเว้าล่าง		ฟังก์ชันลด ความเว้าบน		ฟังก์ชันเพิ่ม ความเว้าบน		ฟังก์ชันเพิ่ม ความเว้าล่าง
		$f(-1) = \frac{3}{4}$ จุดเปลี่ยนเว้า		$f(0) = \frac{2}{3}$ จุดต่ำสุดสัมพัทธ์		$f(1) = \frac{3}{4}$ จุดเปลี่ยนเว้า	

นำไปเขียนกราฟได้ดังนี้



Y
X
y = 0
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4

26. **(10 คะแนน)** จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้

26.1 **(5 คะแนน)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x + x^2}{1-\cos x}$

แนวคำตอบ ลิมิตอยู่ในรูปแบบ I.F.$\frac{0}{0}$

วิธีที่ 1 จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x + x^2}{1-\cos x} &= \lim_{x\to 0}\frac{(\sin^2 x + x^2)'}{(1-\cos x)'} && (\text{ L'Hospital's law})\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x + 2x}{\sin x} && (\text{I.F.}\frac{0}{0})\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(2\sin x\cos x + 2x)'}{(\sin x)'} && (\text{ L'Hospital's law})\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(\sin 2x + 2x)'}{\cos x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x + 2}{\cos x}\\
&= \frac{2\cdot 1 + 2}{1} = 4 \quad \#
\end{aligned}
$$

วิธีที่ 2 จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x + x^2}{1-\cos x} &= \lim_{x\to 0}\frac{(\sin^2 x + x^2)'}{(1-\cos x)'} && (\text{ L'Hospital's law})\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x + 2x}{\sin x} && (\text{I.F.}\frac{0}{0})\\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{2\sin x\cos x}{\sin x} + \frac{2x}{\sin x}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\left(2\cos x + 2\cdot\frac{x}{\sin x}\right)\\
&= 2\cdot 1 + 2\cdot 1 = 4 \quad \#
\end{aligned}
$$

วิธีที่ 3 จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x + x^2}{1-\cos x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x + x^2}{1-\cos x}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(\sin^2 x + x^2)(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(\sin^2 x + x^2)(1+\cos x)}{\sin^2 x}\\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} + \frac{x^2}{\sin^2 x}\right)(1+\cos x)\\
&= \lim_{x\to 0}\left(1 + \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\right)(1+\cos x)\\
&= (1+1^2)(1+1) = 4 \quad \#
\end{aligned}
$$

26.2 **(5 คะแนน)** $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

แนวคำตอบ ลิมิตอยู่ในรูปแบบ 1^∞ ให้ $y = (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ จะได้ว่า

$$\ln y = \ln(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{x^2}\cdot\ln(\cos x) = \frac{\ln(\cos x)}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\ln y = \frac{\ln(\cos x)}{x^2} \qquad (\text{I.F.}\frac{0}{0})$$

$$\ln\left(\lim_{x\to 0} y\right) = \lim_{x\to 0}\frac{[\ln(\cos x)]'}{(x^2)'} \qquad (\text{ L'Hospital' Law})$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x}\cdot(\cos x)'}{2x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)}{2x}$$

$$= \lim_{x\to 0} -\frac{1}{2\cos x}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$= -\frac{1}{2(1)}\cdot 1 = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} y = = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

ดังนั้น

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \qquad \#$$