มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
คณะครุศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ข้อสอบกลางภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2567

รหัสวิชา	**ชื่อวิชา**	**วันเวลาสอบ**	**คะแนนเต็ม**
MAI1302	แคลคูลัส ๑	เวลา 17:00 - 20:00 วันพฤหัส ที่ 29 สิงหาคม 2567	100 คะแนน 25%

ชื่อ-สกุล.. **รหัสนักศึกษา**....................................... **หมู่เรียน**.........................

คำชี้แจง

1. ข้อสอบมี 18 ข้อ 16 หน้า แบ่งออกเป็น 3 ตอน ประกอบด้วย
   - **ตอนที่ 1** ข้อสอบแบบ 5 ตัวเลือก จำนวน 5 ข้อ (ข้อละ 2 คะแนน รวม 10 คะแนน)
   - **ตอนที่ 2** ข้อสอบแบบเติมคำตอบ จำนวน 5 ข้อ (ข้อละ 2 คะแนน รวม 10 คะแนน)
   - **ตอนที่ 3** ข้อสอบแบบแสดงวิธีทำ จำนวน 8 ข้อ (ข้อละ 10 คะแนน รวม 80 คะแนน)
2. เขียนรหัสนักศึกษา และหมู่เรียนด้วย**ตัวบรรจงลงในข้อสอบทุกหน้า**
3. ไม่อนุญาตให้ใช้เครื่องคำนวณและเครื่องมือสื่อสาร
4. **ห้าม**นำข้อสอบออกจากห้องสอบโดยเด็ดขาด
5. หากมี**การทุจริต**ในการสอบ จะได้รับการลงโทษตามระเบียบของมหาวิทยาลัย

ข้าพเจ้าจะปฏิบัติตามข้อตกลงอย่างเคร่งครัด
ลงชื่อผู้เข้าสอบ

....

อาจารย์ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย

ตอนที่	1	2	3								**รวม**
ข้อ	1-5	6-10	11	12	13	14	15	16	17	18	
คะแนน											

ตอนที่ 1 : (10 คะแนน) จงกากบาททับข้อที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว ข้อละ 2 คะแนน

1. ประโยคใดต่อไปนี้มีความหมายใกล้เคียงกับคำว่า **เข้าใกล้ (approach)** ในเรื่องลิมิตมากที่สุด

   ก. อีกนานแค่ไหนถึงจะใกล้

   ข. ยิ่งใกล้ยิ่งเจ็บ

   ค. ใกล้เข้าไปอีกนิดชิดเข้าไปอีกหน่อย

   ง. ถึงจะใกล้แค่ไหนแต่ก็ไม่ใช่คน ๆ นั้นอยู่ดี

   จ. ห่างกันเพียงเอื้อมมือแต่ก็ไกลแสนไกล

2. ลิมิตในข้อใดต่อไปนี้**หาค่าไม่ได้**

   ก. $\lim\limits_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

   ข. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \sin x$

   ค. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} \sin x$

   ง. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

   จ. $\lim\limits_{x \to \infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

3. กำหนดให้ $f(x) = x^6 + 7$ แล้วข้อใดต่อไปนี้กล่าว**ถูกต้อง**

   ก. อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ f จาก -1 ถึง 1 เท่ากับ 0

   ข. อัตราการเปลี่ยนแปลงของ f ขณะ $x = 1$ เท่ากับ 8

   ค. ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่ $x = -1$ เท่ากับ 6

   ง. $f'(-x) = f'(x)$ ทุก ๆ $x \in \mathbb{R}$

   จ. $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(x) - f(x+h)}{h} = 6x^5$

4. กราฟของฟังก์ชันต่อไปนี้มี **เส้นกำกับแนวยืน (vertical asymptote)** มากกว่า 2 เส้น

   ก. $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

   ข. $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

   ค. $y = \dfrac{1}{x(x-1)^2}$

   ง. $y = \dfrac{1}{x^2(x+1)}$

   จ. $y = \dfrac{1}{x(x^2-1)}$

5. กำหนดให้ $f(x) = \sin x$ ข้อใดต่อไปนี้กล่าว**ถูกต้อง**

   ก. $f^{(64)}(x) = -f(x)$

   ข. $f^{(65)}(x) = f(x)$

   ค. $f^{(66)}(x) = -f(x)$

   ง. $f^{(67)}(x) = f(x)$

   จ. $f^{(68)}(x) = -f(x)$

ตอนที่ 2 : (10 คะแนน) จงเติมคำตอบในช่องว่าง (ด้านซ้ายมือ) ให้ถูกต้อง ข้อละ 2 คะแนน

6. ______________________

ลิมิต $\lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)^6(7x)^2}{(x^2-1)^2(x-1)^4}$ มีค่าเท่าใด

7. ______________________

กำหนดให้

$$f(6-7x) = (6+7x)^2 \qquad \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R}$$

จงหาค่าของ $f'(-1)$

8. ____________________

กำหนดให้

$$f(x) = \arctan(ax)$$

โดยที่ $f'(0) = 6 + 7a$ จงหาค่าของ a

9. ____________________

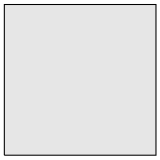
จงหา **ความชัน (slope)** ของกราฟที่มีสมการคือ

$$xy = 2x^2 - y^2$$

ที่จุด $(1, 1)$

10. ____________________________

แผ่นโลหะบางรูปสี่เหลี่ยมจตุรัสเมื่อได้รับความร้อนจะขยายตัวสม่ำเสมอโดยไม่เปลี่ยนรูปร่าง เส้นรอบรูปเพิ่มขึ้นด้วยอัตราเร็วคงที่ 2 เซนติเมตรต่อนาที **พื้นที่หน้าตัดของแผ่นโลหะจะเพิ่มขึ้นด้วยอัตรากี่ตารางเซนติเมตรต่อนาที** ขณะที่เส้นรอบวงยาว 8 เซนติเมตร



ตอนที่ 3 : (80 คะแนน) จงแสดงวิธีโดยละเอียด ข้อละ 10 คะแนน

11. **(10 คะแนน)** จงหาลิมิตต่อไปนี้ **โดยไม่ใช้หลักเกณฑ์ลอปิตาล**

11.1 **(5 คะแนน)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+6x-7}{7x^2-7}$

11.2 **(5 คะแนน)** $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+8}{\sqrt{-x}-\sqrt{2}}$

12. **(10 คะแนน)** จงหาลิมิตต่อไปนี้ **โดยไม่ใช้หลักเกณฑ์ลอปีตาล**

12.1 **(4 คะแนน)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \cos x + \sin x}{\tan x + x}$

12.2 **(6 คะแนน)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 - 7x} + x \right)$

13. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

13.1 **(5 คะแนน)** จงหาค่าของ a ที่ทำให้

$$f(x) = \begin{cases} a^2x + 1 & \text{เมื่อ } x \geq 1 \\ 3 - ax & \text{เมื่อ } x < 1 \end{cases}$$

เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนจำนวนจริง

13.2 **(5 คะแนน)** กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนจำนวนจริงโดยที่

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1} = 2, \qquad f(1) = 1 \qquad \text{และ} \qquad g(x) = xf(x)$$

จงหา $g'(1)$

14. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

14.1 **(5 คะแนน)** กำหนดให้

$$y = e^u + u^e, \quad u = x^2 + 2x \quad \text{และ} \quad x = \arctan t$$

จงหา $\dfrac{dy}{dt}$ เมื่อ $t = 0$

14.2 **(5 คะแนน)** จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = x^{\sqrt{x}}$ เมื่อ $x > 0$

15. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

15.1 **(5 คะแนน)** จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{\tan(\ln x)}{\ln(\tan x)}$

15.2 **(5 คะแนน)** จงหา y' ในรูป x, y เมื่อกำหนดให้

$$\sin(xy) = 2xy$$

16. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

16.1 **(5 คะแนน)** จงใช้ค่าเชิงอนุพันธ์ประมาณค่าของ $\sqrt[4]{1.04}$

16.2 **(5 คะแนน)** ให้ $x_1, x_2, ..., x_n$ เป็นข้อมูลที่เชิงปริมาณที่มี n จำนวน (ประชากร)
สำหรับ $x \in \mathbb{R}$ กำหนดให้

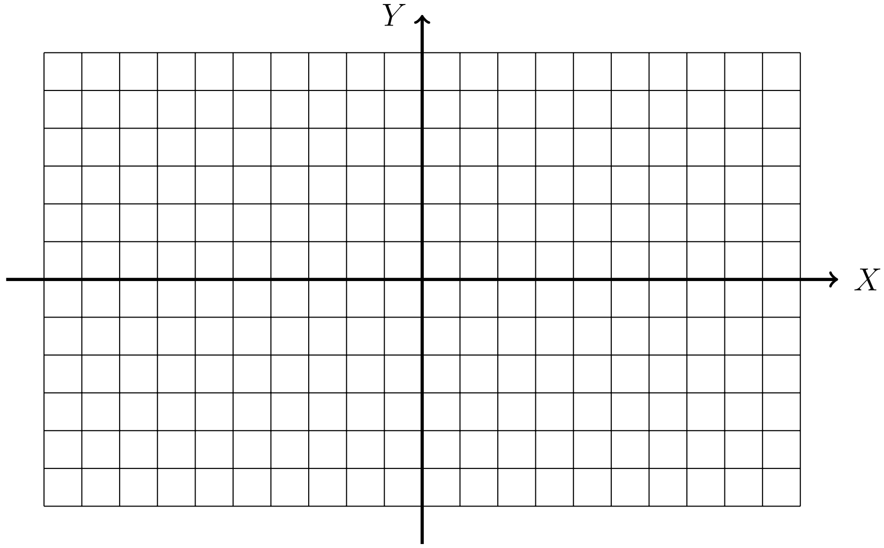
$$f(x) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x)^2 = (x_1 - x)^2 + (x_2 - x)^2 + \cdots + (x_n - x)^2$$

จงแสดงว่า f มี**ค่าต่ำสุด**ที่ $x = \mu$ เมื่อ $\mu = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n}$ (ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของประชากร)

ข้อเสนอแนะ : ใช้ความรู้เรื่องปัญหาค่าสุดขีด และมองว่า $x_1, x_2, ..., x_n$ เป็นค่าคงตัว

17. **(10 คะแนน)** จงร่างกราฟ $y = x + \dfrac{1}{x}$ พร้อมเติมคำตอบในช่องว่างให้สมบูรณ์ (ถ้าไม่มีคำตอบให้เขียนว่า *ไม่มี*)

โดเมน	
จุดตัดแกน X และแกน Y	
สมการเส้นกำกับแนวยืน	
สมการเส้นกำกับแนวนอน	
สมการเส้นกำกับแนวเอียง	
จุดวิกฤต	
จุดสูงสุดสัมพัทธ์ (ตอบเป็นคู่อันดับ)	
จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ (ตอบเป็นคู่อันดับ)	
f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง	
f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง	
จุดเปลี่ยนเว้า	
f มีความเว้าอยู่บน บนช่วง	
f มีความเว้าอยู่ล่าง บนช่วง	


Y
X

18. **(10 คะแนน)** จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้

18.1 **(5 คะแนน)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{\tan x - x}$

18.2 **(5 คะแนน)** $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{e^x}\right)^x$

มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
คณะครุศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์
เฉลยข้อสอบกลางภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2567

รหัสวิชา	ชื่อวิชา	วันเวลาสอบ	คะแนนเต็ม
MAI1302	แคลคูลัส ๑	เวลา 17:00 - 20:00 วันพฤหัสบดี ที่ 29 สิงหาคม 2567	100 คะแนน 25%

โดย ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย

ตอนที่ 1 : (20 คะแนน) จงกากบาททับข้อที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว ข้อละ 2 คะแนน

1. ประโยคใดต่อไปนี้มีความหมายใกล้เคียงกับคำว่า **เข้าใกล้ (approach)** ในเรื่องลิมิตมากที่สุด

   ก. อีกนานแค่ไหนถึงจะใกล้

   ข. ยิ่งใกล้ยิ่งเจ็บ

   ค. ใกล้เข้าไปอีกนิดชิดเข้าไปอีกหน่อย

   ง. ถึงจะใกล้แค่ไหนแต่ก็ไม่ใช่คน ๆ นั้นอยู่ดี Answer

   จ. ห่างกันเพียงเอื้อมมือแต่ก็ไกลแสนไกล

   ตอบข้อ ง. ความหมายของการเข้าใกล้สำหรับลิมิต

2. ลิมิตในข้อใดต่อไปนี้**หาค่าไม่ได้**

ก. $\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

ข. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\sin x$ Answer

ค. $\lim_{x\to \infty} \frac{1}{x^2}\sin x$

ง. $\lim_{x\to \infty} \frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

จ. $\lim_{x\to \infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

ตอบข้อ ข.

ก. $\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ โดยทฤษฎีบทการบีบ

ข. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\sin x = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \pm\infty \cdot 1 = \pm\infty$

ค. $\lim_{x\to \infty} \frac{1}{x^2}\sin x = 0$ โดยทฤษฎีบทการบีบ

ง. $\lim_{x\to \infty} \frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ โดยทฤษฎีบทการบีบ

จ. $\lim_{x\to \infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1$

3. กำหนดให้ $f(x) = x^6 + 7$ แล้วข้อใดต่อไปนี้กล่าว**ถูกต้อง**

   ก. อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ f จาก -1 ถึง 1 เท่ากับ 0 Answer

   ข. อัตราการเปลี่ยนแปลงของ f ขณะ $x = 1$ เท่ากับ 8

   ค. ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่ $x = -1$ เท่ากับ 6

   ง. $f'(-x) = f'(x)$ ทุก ๆ $x \in \mathbb{R}$

   จ. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x) - f(x+h)}{h} = 6x^5$

ตอบข้อ ก. พิจารณา $f'(x) = 6x^5$

ก. อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ f จาก -1 ถึง 1 เท่ากับ

$$\frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{8 - 8}{2} = 0$$

ข. อัตราการเปลี่ยนแปลงของ f ขณะ $x = 1$ เท่ากับ

$$f'(1) = 6(1)^5 = 6$$

ค. ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่ $x = -1$ เท่ากับ

$$f'(-1) = 6(-1)^5 = -6$$

ง. $f'(-x) = f'(x)$ ทุก ๆ $x \in \mathbb{R}$

$$f'(-x) = 6(-x)^5 = -6x^5 = -f'(x)$$

จ. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x) - f(x+h)}{h} = -\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = -f'(x) = -6x^5$

4. กราฟของฟังก์ชันต่อไปนี้มี **เส้นกำกับแนวยืน (vertical asymptote)** มากกว่า 2 เส้น

ก. $y = \dfrac{1}{x^2+1}$

ข. $y = \dfrac{1}{x^2-1}$

ค. $y = \dfrac{1}{x(x-1)^2}$

ง. $y = \dfrac{1}{x^2(x+1)}$

จ. $y = \dfrac{1}{x(x^2-1)}$ Answer

ตอบข้อ จ.

ก. $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ ไม่มีเส้นกำกับแนวยืน เนื่องจาก $x^2+1 \neq 0$

ข. $y = \dfrac{1}{x^2-1} = \dfrac{1}{(x-1)(x+1)}$ มีเส้นกำกับแนวยืน 2 เส้นคือ $x=1$ และ $x=-1$

ค. $y = \dfrac{1}{x(x-1)^2}$ มีเส้นกำกับแนวยืน 2 เส้นคือ $x=0$ และ $x=1$

ง. $y = \dfrac{1}{x^2(x+1)}$ มีเส้นกำกับแนวยืน 2 เส้นคือ $x=0$ และ $x=-1$

จ. $y = \dfrac{1}{x(x^2-1)} = \dfrac{1}{x(x-1)(x+1)}$ มีเส้นกำกับแนวยืน 3 เส้นคือ $x=0$, $x=1$ และ $x=-1$

5. กำหนดให้ $f(x) = \sin x$ ข้อใดต่อไปนี้กล่าว**ถูกต้อง**

   ก. $f^{(64)}(x) = -f(x)$

   ข. $f^{(65)}(x) = f(x)$

   ค. $f^{(66)}(x) = -f(x)$ Answer

   ง. $f^{(67)}(x) = f(x)$

   จ. $f^{(68)}(x) = -f(x)$

ตอบข้อ ค. พิจารณา

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x \\ f''(x) &= -\sin x = -f(x) \\ f'''(x) &= -\cos x \\ f^{(4)}(x) &= \sin x = f(x) \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \cos x & 4 \text{ หาร } n \text{ เหลือเศษ } 1 \\ -f(x) & 4 \text{ หาร } n \text{ เหลือเศษ } 2 \\ -\cos x & 4 \text{ หาร } n \text{ เหลือเศษ } 3 \\ f(x) & 4 \text{ หาร } n \text{ เหลือเศษ } 0 \end{cases}$$

จะเห็นว่า 4 หาร 66 เหลือเศษ 2 จะได้ว่า $f^{(66)}(x) = -f(x)$

ตอนที่ 2 : (10 คะแนน) จงเติมคำตอบในช่องว่าง (ด้านซ้ายมือ) ให้ถูกต้อง ข้อละ 2 คะแนน

6. **ตอบ** 49

ลิมิต $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+1)^6(7x)^2}{(x^2-1)^2(x-1)^4}$ มีค่าเท่าใด

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)^6(7x)^2}{(x^2-1)^2(x-1)^4} &= \lim_{x\to\infty} \frac{[x(1+\frac{1}{x})]^6(49x^2)}{[x^2(1-\frac{1}{x^2})]^2[x(1-\frac{1}{x})]^4} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x^6(1+\frac{1}{x})^6(49x^2)}{x^4(1-\frac{1}{x^2})^2x^4(1-\frac{1}{x})^4} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{49x^8(1+\frac{1}{x})^6}{x^8(1-\frac{1}{x^2})^2(1-\frac{1}{x})^4} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{49(1+\frac{1}{x})^6}{(1-\frac{1}{x^2})^2(1-\frac{1}{x})^4} \\
&= \frac{49(1+0)^6}{(1-0)^2(1-0)^4} = 49 \quad \#
\end{aligned}$$

7. **ตอบ** -26

กำหนดให้

$$f(6-7x) = (6+7x)^2 \qquad \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R}$$

จงหาค่าของ $f'(-1)$

แนวคำตอบ โดยกฎลูกโซ่จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
[f(6-7x)]' &= [(6+7x)^2]' \\
f'(6-7x)\cdot(6-7x)' &= 2(6+7x)\cdot(6+7x)' \\
f'(6-7x)\cdot(-7) &= 2(6+7x)\cdot(7) \\
f'(6-7x) &= -2(6+7x)
\end{aligned}$$

แทน $x=1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
f'(6-7) &= -2(6+7) \\
f'(-1) &= -2(13) = -26 \quad \#
\end{aligned}$$

8. **ตอบ** -1

กำหนดให้

$$f(x) = \arctan(ax)$$

โดยที่ $f'(0) = 6 + 7a$ จงหาค่าของ a

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+(ax)^2} \cdot (ax)' = \frac{1}{1+a^2x^2} \cdot a \\ f'(0) &= \frac{1}{1+0} \cdot a \\ 6 + 7a &= a \\ 6 &= -6a \end{aligned}$$

ดังนั้น $a = -1 \quad \#$

9. **ตอบ** 1

จงหา **ความชัน (slope)** ของกราฟที่มีสมการคือ

$$xy = 2x^2 - y^2$$

ที่จุด $(1, 1)$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned} (xy)' &= (2x^2 - y^2)' \\ xy' + 1 \cdot y &= 4x - 2yy' \end{aligned}$$

แทน $x = 1, y = 1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 1 \cdot y' + 1 \cdot 1 &= 4(1) - 2(1)y' \\ y' + 1 &= 4 - 2y' \\ 3y' &= 3 \\ y' &= 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น **ความชัน**ของเส้นสัมผัสเส้นโค้งนี้ที่จุด $(1, 1)$ เท่ากับ $1 \quad \#$

10. **ตอบ** 2

แผ่นโลหะบางรูปสี่เหลี่ยมจตุรัสเมื่อได้รับความร้อนจะขยายตัวสม่ำเสมอโดยไม่เปลี่ยนรูปร่าง เส้นรอบรูปเพิ่มขึ้นด้วยอัตราเร็วคงที่ 2 เซนติเมตรต่อนาที **พื้นที่หน้าตัดของแผ่นโลหะจะเพิ่มขึ้นด้วยอัตรากี่ตารางเซนติเมตรต่อนาที** ขณะที่เส้นรอบวงยาว 8 เซนติเมตร

แนวคำตอบ ให้ x แทนความด้านของรูปสี่เหลี่ยมจตุรัส ฉะนั้น

ความยาวเส้นรอบรูป $D = 4x$ และ พื้นที่ $A = x^2$

จากที่โจทย์กำหนด $\dfrac{dD}{dt} = 2$ เซนติเมตรต่อนาที จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{dD}{dt} &= 4\frac{dx}{dt} \\ 2 &= 4 \cdot \frac{dx}{dt} \\ \frac{1}{2} &= \frac{dx}{dt} \end{aligned}$$

พิจารณา

$$\frac{dA}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}$$

ขณะที่เส้นรอบรูปยาว $4x = 8$ นั่นคือ $x = 2$ จะได้

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= 2x\frac{dx}{dt} \\ &= 2(2) \cdot \frac{1}{2} = 2 \end{aligned}$$

ดังนั้นพื้นที่หน้าตัดของแผ่นโลหะจะเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 2 ตารางเซนติเมตรต่อนาที $\#$

ตอนที่ 3 : (80 คะแนน) จงแสดงวิธีโดยละเอียด ข้อละ 10 คะแนน

11. **(10 คะแนน)** จงหาลิมิตต่อไปนี้ **โดยไม่ใช้หลักเกณฑ์ลอปีตาล**

11.1 **(5 คะแนน)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+6x-7}{7x^2-7}$

แนวคำตอบ เนื่องจากลิมิตอยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $I.F.\frac{0}{0}$ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{x^2+6x-7}{7x^2-7} &= \lim_{x\to 1} \frac{(x+7)(x-1)}{7(x^2-1)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{(x+7)(x-1)}{7(x-1)(x+1)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{x+7}{7(x+1)} \\
&= \frac{8}{7(2)} = \frac{4}{7} \quad \#
\end{aligned}$$

11.2 **(5 คะแนน)** $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+8}{\sqrt{-x}-\sqrt{2}}$

แนวคำตอบ เนื่องจากลิมิตอยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $I.F.\frac{0}{0}$ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{\sqrt{-x}-\sqrt{2}} &= \lim_{x\to -2} \frac{x^3+2^3}{\sqrt{-x}-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{-x}+\sqrt{2}}{\sqrt{-x}+\sqrt{2}} \\
&= \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(x^2-2x+2^2)(\sqrt{-x}+\sqrt{2})}{(\sqrt{-x})^2-(\sqrt{2})^2} \\
&= \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(x^2-2x+4)(\sqrt{-x}+\sqrt{2})}{-x-2} \\
&= \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(x^2-2x+4)(\sqrt{-x}+\sqrt{2})}{-(x+2)} \\
&= \lim_{x\to -2} \frac{(x^2-2x+4)(\sqrt{-x}+\sqrt{2})}{-1} \\
&= \frac{(4+4+4)(2\sqrt{2})}{-1} = -24\sqrt{2} \quad \#
\end{aligned}$$

12. **(10 คะแนน)** จงหาลิมิตต่อไปนี้ **โดยไม่ใช้หลักเกณฑ์ลอปิตาล**

12.1 **(4 คะแนน)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cos x + \sin x}{\tan x + x}$

แนวคำตอบ เนื่องจากลิมิตอยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $I.F.\frac{0}{0}$ พิจารณาลิมิตโดยใช้กฎ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x + \sin x}{\tan x + x} &= \lim_{x\to 0} \frac{x(\cos x + \frac{\sin x}{x})}{x(\frac{\tan x}{x} + 1)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x + \frac{\sin x}{x}}{\frac{\tan x}{x} + 1} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x + \frac{\sin x}{x}}{\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} + 1} \\
&= \frac{1+1}{1 \cdot \frac{1}{1} + 1} = 1 \quad \#
\end{aligned}$$

12.2 **(6 คะแนน)** $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2 - 7x} + x\right)$

แนวคำตอบ เนื่องจากลิมิตอยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $I.F.\infty - \infty$ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2 - 7x} + x\right) &= \lim_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2 - 7x} + x\right) \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 7x} - x}{\sqrt{x^2 - 7x} - x} \\
&= \lim_{x\to -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 7x})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 - 7x} - x} \\
&= \lim_{x\to -\infty} \frac{(x^2 - 7x) - x^2}{\sqrt{x^2(1 - \frac{7}{x})} - x} \\
&= \lim_{x\to -\infty} \frac{-7x}{\sqrt{x^2}\sqrt{1 - \frac{7}{x}} - x} \\
&= \lim_{x\to -\infty} \frac{-7x}{|x|\sqrt{1 - \frac{7}{x}} - x} \\
&= \lim_{x\to -\infty} \frac{-7x}{-x\sqrt{1 - \frac{7}{x}} - x} \\
&= \lim_{x\to -\infty} \frac{7}{\sqrt{1 - \frac{7}{x}} + 1} \\
&= \frac{7}{\sqrt{1 - 0} + 1} = \frac{7}{2} = 2 \quad \#
\end{aligned}$$

13. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

13.1 **(5 คะแนน)** จงหาค่าของ a ที่ทำให้

$$f(x) = \begin{cases} a^2x+1 & \text{เมื่อ } x \geq 1 \\ 3-ax & \text{เมื่อ } x < 1 \end{cases}$$

เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนจำนวนจริง

แนวคำตอบ เนื่องจาก f ต่อเนื่องที่ $x = 1$ ฉะนั้น

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^+} f(x) \\ \lim_{x\to 1^-} (3-ax) &= \lim_{x\to 1^+} (a^2x+1) \\ 3-a &= a^2+1 \\ 0 &= a^2+a-2 = (a+2)(a-1) \end{aligned}$$

ดังนั้น $a = 1, -2 \quad \#$

13.2 **(5 คะแนน)** กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนจำนวนจริงโดยที่

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-1}{x-1} = 2, \qquad f(1) = 1 \qquad \text{และ} \qquad g(x) = xf(x)$$

จงหา $g'(1)$

แนวคำตอบ จะเห็นว่า

$$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-1}{x-1} = 2$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} g'(x) &= [xf(x)]' = xf'(x) + 1 \cdot f(x) \\ g'(1) &= 1 \cdot f'(1) + 1 \cdot f(1) \\ &= 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ &= 2 + 1 = 3 \quad \# \end{aligned}$$

14. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

14.1 **(5 คะแนน)** กำหนดให้

$$y = e^u + u^e, \qquad u = x^2 + 2x \qquad \text{และ} \qquad x = \arctan t$$

จงหา $\dfrac{dy}{dt}$ เมื่อ $t = 0$

แนวคำตอบ จะเห็นว่า $y = y(u), u = u(x)$ และ $x = x(t)$ โดยกฎลูกโซ่จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \\ &= \frac{d}{du}(e^u + u^e) \cdot \frac{d}{dx}(x^2 + 2x) \cdot \frac{d}{dt}(\arctan t) \\ &= (e^u + eu^{e-1}) \cdot (2x + 2) \cdot \frac{1}{1 + t^2}\end{aligned}$$

แทน $t = 0$ จะได้ว่า $x = \arctan 0 = 0$ และ $u = 0^2 + 2 \cdot 0 = 0$ ดังนั้น

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = (e^0 + e \cdot 0^{e-1}) \cdot (2 \cdot 0 + 2) \cdot \frac{1}{1 + 0^2} = 1(2)(1) = 2 \qquad \#$$

14.2 **(5 คะแนน)** จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = x^{\sqrt{x}}$ เมื่อ $x > 0$

แนวคำตอบ พิจารณา $x > 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\ln y &= \ln x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x} \cdot \ln x \\ \frac{d}{dx}(\ln y) &= \frac{d}{dx}\sqrt{x} \cdot \ln x \\ \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} &= (\sqrt{x})' \cdot \ln x + \sqrt{x} \cdot (\ln x)' \\ \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln x + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} \\ \frac{dy}{dx} &= y\left[\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right] \\ &= x^{\sqrt{x}}\left[\frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}\right] \qquad \#\end{aligned}$$

15. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

15.1 **(5 คะแนน)** จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{\tan(\ln x)}{\ln(\tan x)}$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\ln(\tan x)[\tan(\ln x)]' - \tan(\ln x)[\ln(\tan x)]'}{[\ln(\tan x)]^2} \\
&= \frac{\ln(\tan x) \cdot \sec^2(\ln x) \cdot (\ln x)' - \tan(\ln x) \cdot \frac{1}{\tan x} \cdot (\tan x)'}{\ln^2(\tan x)} \\
&= \frac{\ln(\tan x) \cdot \sec^2(\ln x) \cdot \frac{1}{x} - \tan(\ln x) \cdot \cot x \cdot \sec^2 x}{\ln^2(\tan x)}
\end{aligned}
$$

15.2 **(5 คะแนน)** จงหา y' ในรูป x, y เมื่อกำหนดให้

$$\sin(xy) = 2xy$$

แนวคำตอบ

__วิธีที่ 1__ พิจารณา

$$
\begin{aligned}
[\sin(xy)]' &= [2xy]' \\
\cos(xy) \cdot (xy)' &= 2(xy' + 1 \cdot y) \\
\cos(xy) \cdot (xy' + 1 \cdot y) &= 2(xy' + y) \\
\cos(xy) \cdot (xy' + y) - 2(xy' + y) &= 0 \\
\cos(xy) \cdot (xy' + y) - 2(xy' + y) &= 0 \\
(xy' + y)[\cos(xy) - 2] &= 0
\end{aligned}
$$

เนื่องจาก $-1 \leq \cos(xy) \leq 1$ ฉะนั้น $\cos(xy) - 2 \neq 0$ ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
xy' + y &= 0 \\
y' &= -\frac{y}{x} \quad \#
\end{aligned}
$$

__วิธีที่ 2__ พิจารณา

$$
\begin{aligned}
[\sin(xy)]' &= [2xy]' \\
\cos(xy) \cdot (xy)' &= 2(xy' + 1 \cdot y) \\
\cos(xy) \cdot (xy' + 1 \cdot y) &= 2xy' + 2y \\
xy' \cos(xy) + y\cos(xy) &= 2xy' + 2y \\
xy' \cos(xy) - 2xy' &= 2y - y\cos(xy) \\
[x\cos(xy) - 2x]y' &= 2y - y\cos(xy) \\
y' &= \frac{2y - y\cos(xy)}{x\cos(xy) - 2x} = \frac{y[2 - \cos(xy)]}{-x[2 - \cos(xy)]} = -\frac{y}{x} \quad \#
\end{aligned}
$$

เนื่องจาก $-1 \leq \cos(xy) \leq 1$ ฉะนั้น $\cos(xy) - 2 \neq 0$

16. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

16.1 **(5 คะแนน)** จงใช้ค่าเชิงอนุพันธ์ประมาณค่าของ $\sqrt[4]{1.04}$

แนวคำตอบ พิจารณา ให้ $f(x) = \sqrt[4]{x}$ จะได้ว่า $f'(x) = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} = -\dfrac{1}{2\sqrt{x^3}}$

พิจารณา $x = 1$ และ $dx = 0.04$ จาก

$$f(x + dx) \approx f(x) + f(x)dx$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{1.04} = f(1.04) &= f(1 + 0.04)\\ &\approx f(1) + f'(1) \cdot (0.04)\\ &= \sqrt[4]{1} + \frac{1}{4} \cdot (1)^{-\frac{3}{4}} \cdot 0.04\\ &= 1 + 0.01\\ &= 1.01 \quad \#\end{aligned}$$

16.2 **(5 คะแนน)** ให้ $x_1, x_2, ..., x_n$ เป็นข้อมูลที่เชิงปริมาณที่มี n จำนวน (ประชากร) สำหรับ $x \in \mathbb{R}$ กำหนดให้

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x)^2 = (x_1 - x)^2 + (x_2 - x)^2 + \cdots + (x_n - x)^2$$

จงแสดงว่า f มี**ค่าต่ำสุด**ที่ $x = \mu$ เมื่อ $\mu = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ (ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของประชากร)

ข้อเสนอแนะ : ใช้ความรู้เรื่องปัญหาค่าสุดขีด และมองว่า $x_1, x_2, ..., x_n$ เป็นค่าคงตัว

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}f'(x) &= 2(x_1 - x)(-1) + 2(x_2 - x)(-1) + \cdots + 2(x_n - x)(-1)\\ 0 &= \sum_{i=1}^{n} 2(x_i - x)(-1) = 2\sum_{i=1}^{n}(x - x_i)\\ 0 &= \sum_{i=1}^{n}(x - x_i)\\ 0 &= \sum_{i=1}^{n} x - \sum_{i=1}^{n} x_i = nx - n\mu = n(x - \mu)\end{aligned}$$

ดังนั้น $x = \mu$ เป็นจุดวิกฤตของ f เนื่องจาก

$$f''(x) = 2(-1)(-1) + 2(-1)(-1) + \cdots + 2(-1)(-1) = 2 + 2 + \cdots + 2 = 2n > 0$$

จะได้ว่า $f''(\mu) = 2n > 0$ ดังนั้น f มีค่าต่ำสุดที่ $x = \mu$ $\quad \#$

17. **(10 คะแนน)** จงร่างกราฟ $y = x + \frac{1}{x}$ พร้อมเติมคำตอบในช่องว่างให้สมบูรณ์ (ถ้าไม่มีคำตอบให้เขียนว่า *ไม่มี*)

แนวคำตอบ

โดเมน	$\mathbb{R} - \{0\}$
จุดตัดแกน X และแกน Y	ไม่มี
สมการเส้นกำกับแนวยืน	$x = 0$
สมการเส้นกำกับแนวนอน	ไม่มี
สมการเส้นกำกับแนวเอียง	$y = x$
จุดวิกฤต	$x = -1, 1$
จุดสูงสุดสัมพัทธ์ (ตอบเป็นคู่อันดับ)	$(-1, -2)$
จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ (ตอบเป็นคู่อันดับ)	$(1, 2)$
f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง	$(-\infty, -1), (1, \infty)$
f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง	$(-1, 0), (0, 1)$
จุดเปลี่ยนเว้า	ไม่มี
f มีความเว้าอยู่บน บนช่วง	$(0, \infty)$
f มีความเว้าอยู่ล่าง บนช่วง	$(-\infty, 0)$

1. พิจารณา $y = x + \frac{1}{x}$ โดเมนของ f คือ $\mathbb{R} - \{0\}$ เนื่องจาก

$$\lim_{x \to 0} \left(x + \frac{1}{x} \right) = \pm\infty$$

จะได้ว่า $x = 0$ เป็นเส้นกำกับแนวยืน และ $y = x$ เป็นเส้นกำกับแนวเอียง

2. ถ้า $y = 0$ จะได้ $0 = x + \frac{1}{x}$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ ดังนั้นไม่มีจุดตัดแกน
3. พิจารณา

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} = \frac{(x+1)(x-1)}{x^2}$$

ดังนั้น $x = -1, 1$ เป็นจุดวิกฤต จะได้ $f(1) = 2$ และ $f(-1) = -2$

เมื่อพิจารณาเครื่องหมาย f' บนเส้นจำนวนจะได้ว่า

$+$		$-$		$+$
	-1		1	

และ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $(-1, 0), (0, 1)$ และเป็นฟังก์ชันลดบน $(-\infty, -1), (1, \infty)$

4. พิจารณา

$$f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

ดังนั้นไม่มีเป็นจุดเปลี่ยนเว้า พิจารณาเครื่องหมาย f'' บนเส้นจำนวนจะได้ว่า

$$-\qquad +$$

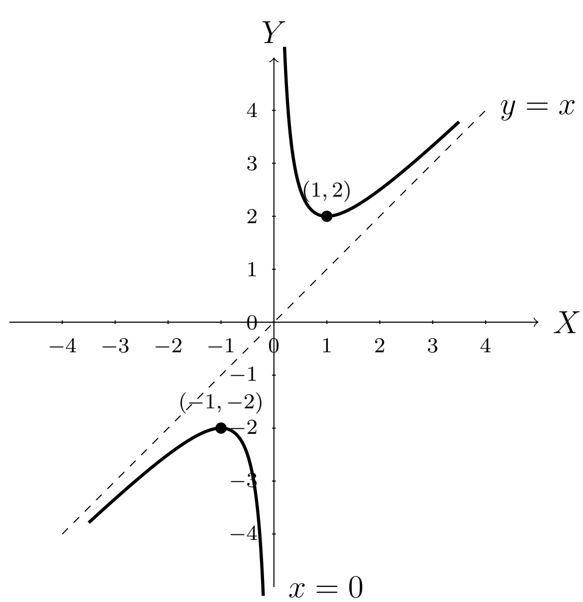
$$0$$

f มีความเว้าอยู่บนบน $(-1, 1)$ และความเว้าอยู่ล่างบน $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

5. นำข้อมูลที่ได้มาสรุปบนเส้นจำนวนได้ดังนี้

f'	$+$		$-$		$-$		$+$
f''	$-$		$-$		$+$		$+$
		-1		0		1	
	ฟังก์ชันเพิ่ม เว้าล่าง		ฟังก์ชันลด เว้าล่าง		ฟังก์ชันลด เว้าบน		ฟังก์ชันเพิ่ม เว้าบน
		$f(-1) = -2$ จุดสูงสุดสัมพัทธ์		$x = 0$ เส้นกำกับแนวยืน		$f(1) = 2$ จุดต่ำสุดสัมพัทธ์	

นำไปเขียนกราฟได้ดังนี้



18. **(10 คะแนน)** จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้

18.1 **(5 คะแนน)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x}{\tan x - x}$

แนวคำตอบ ลิมิตอยู่ในรูปแบบ I.F.$\frac{0}{0}$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{\tan x - x} &= \lim_{x\to 0}\frac{(\sin x - x)'}{(\tan x - x)'} && \text{(L'Hospital's law)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{\sec^2 x - 1} && (\text{I.F.}\frac{0}{0})\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(\cos x - 1)'}{(\sec^2 x - 1)'} && \text{(L'Hospital's law)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2\sec x\cdot \sec x\tan x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2\sec^2 x\cdot \frac{\sin x}{\cos x}}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x\cos x}{2\sec^2 x\cdot \sin x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{2\sec^2 x}\\
&= \frac{-1}{2\cdot 1^2} = -\frac{1}{2} \quad \#
\end{aligned}
$$

18.2 **(5 คะแนน)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{e^x}\right)^x$

แนวคำตอบ ลิมิตอยู่ในรูปแบบ 1^∞ ให้ $y=\left(1-\dfrac{1}{e^x}\right)^x$ จะได้ว่า

$$\ln y=\ln\left(1-\frac{1}{e^x}\right)^x=x\cdot\ln\left(1-\frac{1}{e^x}\right)=\frac{\ln\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}{\frac{1}{x}} \qquad (\text{I.F.}\frac{0}{0})$$

$$\ln\left(\lim_{x\to\infty}y\right)=\frac{[\ln\left(1-\frac{1}{e^x}\right)]'}{(\frac{1}{x})'} \qquad (\text{ L'Hospital' Law})$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1-\frac{1}{e^x}}\cdot(1-\frac{1}{e^x})'}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1-\frac{1}{e^x}}\cdot e^{-x}\cdot(-1)}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{e^x}}\cdot e^{-x}\cdot(-1)\cdot(-x^2)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{e^x}}\cdot\frac{1}{e^x}\cdot x^2=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x(1-\frac{1}{e^x})}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x-1} \qquad (\text{I.F.}\frac{\infty}{\infty})$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2)'}{(e^x-1)'} \qquad (\text{ L'Hospital' Law})$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x} \qquad (\text{I.F.}\frac{\infty}{\infty})$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x)'}{(e^x)'} \qquad (\text{ L'Hospital' Law})$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x}=0$$

$$\ln\left(\lim_{x\to\infty}y\right)=0$$

$$\lim_{x\to\infty}y=e^0=1$$

ดังนั้น

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{e^x}\right)^x=1 \quad \#$$