มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
คณะครุศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ข้อสอบกลางภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2566

รหัสวิชา	ชื่อวิชา	วันเวลาสอบ	คะแนนเต็ม
MAC1303	แคลคูลัส ๒	เวลา 17:00 - 20:00 วันศุกร์ ที่ 8 กันยายน 2566	100 คะแนน 25%

ชื่อ-สกุล.. **รหัสนักศึกษา**............................... **หมู่เรียน**............

คำชี้แจง

1. ข้อสอบมี 26 ข้อ 14 หน้า แบ่งออกเป็น 3 ตอน ประกอบด้วย
   - **ตอนที่ 1** ข้อสอบแบบ 5 ตัวเลือกจำนวน 10 ข้อ (ข้อละ 2 คะแนน รวม 20 คะแนน)
   - **ตอนที่ 2** ข้อสอบแบบเติมคำตอบจำนวน 10 ข้อ (ข้อละ 2 คะแนน รวม 20 คะแนน)
   - **ตอนที่ 3** ข้อสอบแบบแสดงวิธีทำจำนวน 6 ข้อ (ข้อละ 10 คะแนน รวม 60 คะแนน)
2. เขียนรหัสนักศึกษา และหมู่เรียนด้วย**ตัวบรรจงลงในข้อสอบทุกหน้า**
3. ไม่อนุญาตให้ใช้เครื่องคำนวณและเครื่องมือสื่อสาร
4. **ห้าม**นำข้อสอบออกจากห้องสอบโดยเด็ดขาด
5. หากมี**การทุจริต**ในการสอบ จะได้รับการลงโทษตามระเบียบของมหาวิทยาลัย

ข้าพเจ้าจะปฏิบัติตามข้อตกลงอย่างเคร่งครัด
ลงชื่อผู้เข้าสอบ

....

อาจารย์ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย

ข้อ	ตอนที่ 1 1-10	ตอนที่ 2 11-20	ตอนที่ 3 21	ตอนที่ 3 22	ตอนที่ 3 23	ตอนที่ 3 24	ตอนที่ 3 25	ตอนที่ 3 26	รวม
คะแนน									

ตอนที่ 1 : (20 คะแนน) จงกากบาททับข้อที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว ข้อละ 2 คะแนน

1. ข้อใดต่อไปนี้คือพจน์ที่ 20 ของลำดับ 3, 10, 17, 24, ...

   ก. 136

   ข. 140

   ค. 163

   ง. 180

   จ. 216

2. ข้อใดต่อไปนี้เป็นลำดับลู่ออก (divergent)

   ก. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...$

   ข. $1, -1, 1, -1, ...$

   ค. $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, ...$

   ง. $2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-4}, ...$

   จ. $\frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \frac{8}{7}, \frac{9}{8}, ...$

3. ข้อใดกล่าว**ไม่ถูกต้อง**

   ก. เรียก $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ ว่าอนุกรมสลับ (alternating series)

   ข. ถ้า $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$ เป็นอนุกรมลู่เข้า $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ แล้ว เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์

   ค. ถ้า $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ ลู่เข้า แต่ $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$ ลู่ออก แล้ว $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข

   ง. ถ้า $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ แล้ว $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

   จ. ถ้า $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ แล้ว $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์

4. ข้อใดคือช่วงแห่งการลู่เข้าของอนุกรมกำลัง $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^{n+1}}$

ก. $(1, 3)$
ข. $[1, 3)$
ค. $(-1, 3]$
ง. $[-1, 3]$
จ. $(-1, 3)$

5. $f(x) = e^{2x}$ เป็นฟังก์ชันผลบวกของอนุกรมในข้อใดต่อไปนี้ เมื่อกำหนดให้ $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ เมื่อ $x \in \mathbb{R}$

ก. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^n}{n!}$
ข. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!}$
ค. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$
ง. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n!}$
จ. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n}}{n!}$

6. กำหนดให้ $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ เมื่อ $x \in \mathbb{R}$ แล้วข้อใดต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันผลบวกของ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

ก. $\sin x$

ข. $\cos \sqrt{x}$

ค. $-\sin x$

ง. $x \cos x$

จ. $-x \sin x$

7. กำหนดให้ $A = (1, 3, 2)$ และ $B = (1, 2, 3)$ ข้อใดกล่าว**ไม่ถูกต้อง**

ก. $\overrightarrow{AB}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย

ข. $\overrightarrow{AB}$ ตั้งฉากกับ $\vec{i}$

ค. $\overrightarrow{AB} = \langle 0, -1, 1 \rangle$

ง. $\overrightarrow{AB}$ ขนานกับ $\langle 0, 2, -2 \rangle$

จ. $\|\overrightarrow{AB}\| < 2$

8. ให้ $\vec{u} = \langle 0, 2, 3 \rangle$ และ $\vec{v} = \langle 0, 6, 3 \rangle$ ถ้า

$$\vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{v})(\vec{u} + \vec{v})$$

ข้อใดคือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศเดียวกับ $\vec{w}$

ก. $\left\langle \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0 \right\rangle$

ข. $\left\langle 0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right\rangle$

ค. $\left\langle \frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5} \right\rangle$

ง. $\left\langle 0, \frac{4}{5}, \frac{3}{5} \right\rangle$

จ. $\left\langle \frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5} \right\rangle$

9. เวกเตอร์ในข้อใดต่อไปนี้อยู่บนระนาบเดียวกันกับ $\vec{u} = \langle 1, 0, 1 \rangle$ และ $\vec{v} = \langle 0, 1, 1 \rangle$

   ก. $\langle 2, 3, 1 \rangle$
   ข. $\langle 1, 3, 2 \rangle$
   ค. $\langle 1, 2, 3 \rangle$
   ง. $\langle 1, 1, 1 \rangle$
   จ. $\langle 1, 1, 0 \rangle$

10. เวกเตอร์ในข้อใดต่อไปนี้ตั้งฉากกับ $\langle 2, 5, 2 \rangle$ และ $\langle -1, 0, -1 \rangle$

   ก. $\langle 5, 5, -5 \rangle$
   ข. $\langle 5, 5, 5 \rangle$
   ค. $\langle 5, -5, 0 \rangle$
   ง. $\langle 5, 0, 5 \rangle$
   จ. $\langle -5, 0, 5 \rangle$

ตอนที่ 2 : (20 คะแนน) จงเติมคำตอบในช่องว่าง (ด้านซ้ายบน) ให้ถูกต้อง ข้อละ 2 คะแนน

11. ____________________

ถ้า $\displaystyle\sum_{k=1}^{20}(ak+1) = 1070$ แล้ว a มีค่าเท่าใด

12. ____________________

ผลบวกของอนุกรมอนันต์ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n-1}{3^n}$ มีค่าเท่าใด

13. ____________________

รัศมีแห่งการลู่เข้าของอนุกรมกำลัง $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+3)^n}{n\cdot 6^n}$ มีค่าเท่าใด

14. ____________________

ให้ $f(x)=\sqrt{x+4}$ จงประมาณค่าของ $\sqrt{4.4}$ โดยใช้พหุนามแมคลอรินดีกรี 2 ของ f
(ตอบในรูปทศนิยม 4 ตำแหน่ง)

15. ____________________

ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกัน จงหา $\|8\vec{u} + 15\vec{v}\|$

16. ____________________

กำหนดให้ $\vec{u} = \langle -1, 2, 3\rangle$, $\vec{v} = \langle 3, 0, 1\rangle$ และ $\vec{u} = \langle 1, 2, 0\rangle$ จงหาผลคูณของสามเวกเตอร์ $\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w}$

17. ____________________

จงหาระยะทางที่สั้นที่สุดจาก $B(-1, 2, 1)$ ไปยังเส้นตรง $\begin{cases} x & = 1 + t \\ y & = 2 - 2t \\ z & = 3 + 2t \end{cases}$

18. ____________________

จงหามุม (ในหน่วยองศา) ระหว่างเส้นตรง $x - 1 = \dfrac{2-y}{2}, z = 3$ กับระนาบ $x + 3y = 23$

19. ____________________

กำหนดให้เวกเตอร์การเคลื่อนที่คือ $\vec{r}(t) = \langle t^2 + 1, e^t + 1, 2t \rangle$ จงหาอัตราเร่งขณะ $t = 0$

20. ____________________

กำหนดให้ $\vec{F}(t) = \langle \cos t, \sin t, 2 \rangle$ และ $\vec{S}(t) = \langle -\sin t, \cos t, t \rangle$ จงหา

$$\int_0^1 \vec{F}(t) \cdot \vec{S}(t)\, dt$$

ตอนที่ 3 : (60 คะแนน) จงแสดงวิธีโดยละเอียด ข้อละ 10 คะแนน

21. **(10 คะแนน)** กำหนดให้

$$A = \sum_{k=0}^{23} (k+1)^2, \qquad B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{21^n + 22^n}{23^n} \qquad \text{และ} \qquad C = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+2)(k+3)}$$

จงหาค่าของ $A + 2B + 3C$

22. **(10 คะแนน)** จงตรวจสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้ลู่เข้าหรือลู่ออก

22.1 **(5 คะแนน)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(3n+1)}{\sqrt{n^4+1}}$

22.2 **(5 คะแนน)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2^n)}{3^n}$

23. **(10 คะแนน)** จงหารัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้าของอนุกรมกำลัง

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(3x+6)^n}{n \cdot 6^n}$$

24. **(10 คะแนน)** จงหาอนุกรมเทย์เลอร์ของ

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \qquad \text{รอบจุด } 1$$

25. **(10 คะแนน)** จงหาสมการเส้นตรงที่เกิดจากการตัดกันของระนาบ $x + 2y - 3z = 2$ และ $2x + 3y + 2z = 3$

26. **(10 คะแนน)** จงหา เวกเตอร์สัมผัสหน่วย $(\vec{T})$ เวกเตอร์ฉากหน่วย $(\vec{N})$ และเวกเตอร์แนวฉากคู่ $(\vec{B})$ ของเส้นโค้ง

$$\vec{r}(t) = \langle 5\sin t, 5\cos t, 12t \rangle \quad \text{เมื่อ} \quad t = 0$$

คณิตศาสตร์

มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
คณะครุศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์
เฉลยข้อสอบกลางภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2566

รหัสวิชา	ชื่อวิชา	วันเวลาสอบ	คะแนนเต็ม
MAC1303	แคลคูลัส ๒	เวลา 17:00 - 20:00 วันพุธ ที่ 30 สิงหาคม 2566	100 คะแนน 25%

โดย ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย

ตอนที่ 1 : (20 คะแนน) จงกากบาททับข้อที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว ข้อละ 2 คะแนน

1. ข้อใดต่อไปนี้คือพจน์ที่ 20 ของลำดับ 3, 10, 17, 24, ...

   ก. 136 Answer

   ข. 140

   ค. 163

   ง. 180

   จ. 216

   ตอบข้อ ก. ลำดับดังกล่าวเป็นลำดับเลขคณิตที่มีพจน์ทั่วไปคือ $a_n = 7n - 4$ ดังนั้น $a_{20} = 7(20) - 4 = 136$

2. ข้อใดต่อไปนี้เป็นลำดับลู่ออก (divergent)

   ก. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

   ข. $1, -1, 1, -1, \ldots$ Answer

   ค. $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots$

   ง. $2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-4}, \ldots$

   จ. $\frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \frac{8}{7}, \frac{9}{8}, \ldots$

   ตอบข้อ ข. ลำดับ $1, -1, 1, -1, \ldots$ มีลำดับย่อย $a_{2k} = -1$ และ $a_{2k-1} = 1$ ซึ่งลู่เข้าค่า 1 และ -1 จึงสรุปได้ว่า เป็นลำดับลู่ออก

3. ข้อใดกล่าว**ไม่ถูกต้อง**

ก. เรียก $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ ว่าอนุกรมสลับ (alternating series)

ข. ถ้า $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$ เป็นอนุกรมลู่เข้า $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ แล้ว เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์

ค. ถ้า $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ ลู่เข้า แต่ $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$ ลู่ออก แล้ว $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข

ง. ถ้า $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ แล้ว $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า Answer

จ. ถ้า $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ แล้ว $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์

ตอบข้อ ง. ไม่สอดคล้องกับการทดสอบการลู่ออกที่กล่าวว่า ถ้า $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ หรือไม่มีค่า แล้ว $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก ตัวอย่างเช่น $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ เป็นอนุกรมลู่ออก แต่ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

4. ข้อใดคือช่วงแห่งการลู่เข้าของอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^{n+1}}$

ก. $(1,3)$

ข. $[1,3)$

ค. $(-1,3]$

ง. $[-1,3]$

จ. $(-1,3)$ Answer

ตอบข้อ จ. จะเห็นว่าอนุกรมกำลังมีศูนย์กลางอยู่ที่ $-\frac{1}{2}$ แล้ว

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-1)^{n+1}}{2^{n+2}}\cdot\frac{2^{n+1}\cdot}{(x-1)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}|x-1| = \frac{1}{2}|x-1| < 1$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |x-1| &< 2 \\ -2 < x-1 &< 2 \\ -1 < x &< 3 \end{aligned}$$

พิจารณา

กรณี $x=-1$ จะได้ว่า $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2}$ เป็นอนุกรมลู่ออก โดยการทดสอบการลู่ออก

กรณี $x=3$ จะได้ว่า $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}$ เป็นอนุกรมลู่ออก โดยการทดสอบการลู่ออก

สรุปได้ว่า ช่วงแห่งการลู่เข้าคือ $(-1,3)$

5. $f(x) = e^{2x}$ เป็นฟังก์ชันผลบวกของอนุกรมในข้อใดต่อไปนี้ เมื่อกำหนดให้ $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ เมื่อ $x \in \mathbb{R}$

ก. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^n}{n!}$

ข. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!}$ Answer

ค. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$

ง. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n!}$

จ. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n}}{n!}$

ตอบข้อ ข. จากที่โจทย์กำหนด แทน x ด้วย $2x$ จะได้ว่า

$$f(x) = e^{2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!}$$

6. กำหนดให้ $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ เมื่อ $x \in \mathbb{R}$ แล้วข้อใดต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันผลบวกของ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

ก. $\sin x$

ข. $\cos \sqrt{x}$

ค. $-\sin x$ Answer

ง. $x \cos x$

จ. $-x \sin x$

ตอบข้อ ค. หาอนุพันธ์จากสมการที่โจทย์กำหนด จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \cos x &= \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \\ -\sin x &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n) x^{2n-1}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!} \end{aligned}$$

7. กำหนดให้ $A = (1,3,2)$ และ $B = (1,2,3)$ ข้อใดกล่าว**ไม่ถูกต้อง**

   ก. $\overrightarrow{AB}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย Answer

   ข. $\overrightarrow{AB}$ ตั้งฉากกับ $\vec{i}$

   ค. $\overrightarrow{AB} = \langle 0,-1,1\rangle$

   ง. $\overrightarrow{AB}$ ขนานกับ $\langle 0,2,-2\rangle$

   จ. $\|\overrightarrow{AB}\| < 2$

   ตอบข้อ ก. จะเห็นว่า $\overrightarrow{AB} = \langle 1-1, 2-3, 3-2\rangle = \langle 0,-1,1\rangle$ ซึ่ง $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{2}$ ดังนั้น $\overrightarrow{AB}$ ไม่เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย

8. ให้ $\vec{u} = \langle 0,2,3\rangle$ และ $\vec{v} = \langle 0,6,3\rangle$ ถ้า

$$\vec{w} = (\vec{u}\cdot\vec{v})(\vec{u}+\vec{v})$$

   ข้อใดคือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศเดียวกับ $\vec{w}$

   ก. $\left\langle \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0\right\rangle$

   ข. $\left\langle 0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right\rangle$

   ค. $\left\langle \frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right\rangle$

   ง. $\left\langle 0, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right\rangle$ Answer

   จ. $\left\langle \frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right\rangle$

   ตอบข้อ จ. พิจารณา

$$\begin{aligned}\vec{w} &= (0+12+9)\langle 0,8,6\rangle = 21\langle 0,8,6\rangle = 42\langle 0,4,3\rangle\\ \|\vec{w}\| &= 42\sqrt{0+16+9} = 42\cdot 5\end{aligned}$$

   ดังนั้นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศเดียวกับ $\vec{w}$ คือ

$$\frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|} = \frac{1}{42\cdot 5}\cdot 42\langle 0,4,3\rangle = \left\langle 0, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right\rangle$$

9. เวกเตอร์ในข้อใดต่อไปนี้อยู่บนระนาบเดียวกันกับ $\vec{u} = \langle 1, 0, 1\rangle$ และ $\vec{v} = \langle 0, 1, 1\rangle$

   ก. $\langle 2, 3, 1\rangle$

   ข. $\langle 1, 3, 2\rangle$

   ค. $\langle 1, 2, 3\rangle$ Answer

   ง. $\langle 1, 1, 1\rangle$

   จ. $\langle 1, 1, 0\rangle$

   ตอบข้อ ค. หาเวกเตอร์ที่ผลคูณสามเวกเตอร์ (triple product) เท่ากับ 0 จะเห็นว่า $\langle 1, 2, 3\rangle$ และ $\vec{u}, \vec{v}$ มีผลคูณสามเวกเตอร์คือ

$$\begin{aligned}\langle 1,2,3\rangle \cdot \vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1(-1) - 2(1) + 3(1) = 0\end{aligned}$$

10. เวกเตอร์ในข้อใดต่อไปนี้ตั้งฉากกับ $\langle 2, 5, 2\rangle$ และ $\langle -1, 0, -1\rangle$

   ก. $\langle 5, 5, -5\rangle$

   ข. $\langle 5, 5, 5\rangle$

   ค. $\langle 5, -5, 0\rangle$

   ง. $\langle 5, 0, 5\rangle$

   จ. $\langle -5, 0, 5\rangle$ Answer

   ตอบข้อ จ.
   วิธีที่ 1. เวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับ $\langle 2, 5, 2\rangle$ และ $\langle -1, 0, -1\rangle$ คือเวกเตอร์ที่ขนานกับผลคูณเชิงเวกเตอร์ทั้งสอง นั่นคือ

$$\begin{aligned}\langle 2,5,2\rangle \times \langle -1,0,-1\rangle &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\ &= \vec{i}\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \langle -5, 0, 5\rangle\end{aligned}$$

   วิธีที่ 2. ตรวจสอบจากการหาผลคูณเชิงสเกลาร์

$$\langle -5,0,5\rangle \cdot \langle 2,5,2\rangle = 0 \text{ และ } \langle -5,0,5\rangle \cdot \langle -1,0,-1\rangle = 0$$

   ดังนั้น $\langle -5, 0, 5\rangle$ ตั้งฉากกับ $\langle 2, 5, 2\rangle$ และ $\langle -1, 0, -1\rangle$

ตอนที่ 2 : (20 คะแนน) จงเติมคำตอบในช่องว่าง (ด้านซ้ายบน) ให้ถูกต้อง ข้อละ 2 คะแนน

11. ตอบ 5

ถ้า $\displaystyle\sum_{k=1}^{20}(ak+1) = 1070$ แล้ว a มีค่าเท่าใด

แนวคำตอบ พิจารณา

$$1070 = a\sum_{k=1}^{20} k + \sum_{k=1}^{20} 1 = a \cdot \frac{20 \cdot 21}{2} + 1 \cdot 20 = 210a + 20$$

ดังนั้น $a = \dfrac{1070 - 20}{210} = 5 \quad \#$

12. ตอบ $\dfrac{3}{2}$

ผลบวกของอนุกรมอนันต์ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n - 1}{3^n}$ มีค่าเท่าใด

แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n - 1}{3^n} &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2^n}{3^n} - \frac{1}{3^n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{3^n} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n} \\ &= \frac{1}{1-\frac{2}{3}} - \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \quad \#\end{aligned}$$

13. ตอบ 3

รัศมีแห่งการลู่เข้าของอนุกรมกำลัง $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+3)^n}{n \cdot 6^n}$ มีค่าเท่าใด

แนวคำตอบ จะเห็นว่าอนุกรมกำลังมีศูนย์กลางอยู่ที่ $-\dfrac{3}{2}$ แล้ว

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2x+3)^{n+1}}{(n+1)6^{n+1}} \cdot \frac{n \cdot 6^n}{(2x+3)^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}|2x+3| \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{1}{6}|2x+3| \cdot 1 < 1$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{1}{6}\cdot 2\left|x+\frac{3}{2}\right| &< 1 \\ \frac{1}{3}\left|x+\frac{3}{2}\right| &< 1 \\ \left|x+\frac{3}{2}\right| &< 3\end{aligned}$$

ดังนั้นรัศมีแห่งการลู่เข้าคือ $r = 3 \quad \#$

14. ตอบ 2.0975

ให้ $f(x) = \sqrt{x+4}$ จงประมาณค่าของ $\sqrt{4.4}$ โดยใช้พหุนามแมคลอรินดีกรี 2 ของ f (ตอบในรูปทศนิยม 4 ตำแหน่ง)

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x+4} & f(0) &= 2 \\ f'(x) &= \frac{1}{2}(x+4)^{-\frac{1}{2}} & f'(0) &= \frac{1}{4} \\ f''(x) &= -\frac{1}{4}(x+4)^{-\frac{3}{2}} & f''(0) &= -\frac{1}{32} \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = 2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{64}x^2$$

ประมาณค่า $\sqrt{4.4}$ โดยแทน $x = 0.4$ ใน $T_2(x)$ จะได้

$$\begin{aligned} \sqrt{4.4} &= f(0.4) \\ &\approx T_2(0.4) = 2 + \frac{1}{4}(0.4) - \frac{1}{64}(0.4)^2 \\ &= 2 + 0.1 - 0.0025 \\ &= 2.0975 \end{aligned}$$

15. ตอบ 17

ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกัน จงหา $\|8\vec{u} + 15\vec{v}\|$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned} \|8\vec{u} + 15\vec{v}\|^2 &= \|8\vec{u}\|^2 + 2(8\vec{u}) \cdot (15\vec{v}) + \|15\vec{v}\|^2 \\ &= 8^2\|\vec{u}\|^2 + 240\vec{u} \cdot \vec{v} + 15^2\|\vec{v}\|^2 \\ &= 8^2(1^2) + 240 \cdot 0 + 15^2(1^2) = 64 + 0 + 225 = 289 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\|8\vec{u} + 15\vec{v}\| = \sqrt{289} = 17 \quad \#$

16. ตอบ 22

กำหนดให้ $\vec{u} = \langle -1, 2, 3 \rangle$, $\vec{v} = \langle 3, 0, 1 \rangle$ และ $\vec{u} = \langle 1, 2, 0 \rangle$ จงหาผลคูณของสามเวกเตอร์ $\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w}$

แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w} &= \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -3(-6) + 0 - 1(-4) = 22 \quad \# \end{aligned}$$

17. ตอบ 12

จงหาระยะทางที่สั้นที่สุดจาก $B(-1,2,1)$ ไปยังเส้นตรง $\begin{cases} x &= 1+t \\ y &= 2-2t \\ z &= 3+2t \end{cases}$

แนวคำตอบ จะได้ว่า $P_0 = (1,2,3)$ และ $\vec{A} = \langle 1,-2,2\rangle$ แล้ว $\overrightarrow{P_0B} = \langle -2,0,-2\rangle$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_0B} \times \vec{A} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \vec{i}\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ &= \langle -4,2,4\rangle \end{aligned}$$

ระยะทางที่สั้นที่สุดจาก $B(-1,2,1)$ ไปยังเส้นตรงนี้เท่ากับ

$$\frac{\|\overrightarrow{P_0B} \times \vec{A}\|}{\|\vec{A}\|} = \frac{\sqrt{16+4+16}}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{9}} = \frac{6}{3} = 2 \qquad \#$$

18. ตอบ 45

จงหามุม (ในหน่วยองศา) ระหว่างเส้นตรง $x-1 = \dfrac{2-y}{2}, z=3$ กับระนาบ $x+3y=23$

แนวคำตอบ จะได้ว่า $\vec{A} = \langle 1,-2,0\rangle$ และ $\vec{N} = \langle 1,3,0\rangle$ แล้ว

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{\vec{A}\cdot\vec{N}}{\|\vec{A}\|\|\vec{N}\|} \\ &= \frac{1-6+0}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = \frac{-5}{5\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \theta &= 135^\circ \end{aligned}$$

ดังนั้นมุมระหว่างเส้นตรง $x-1 = \dfrac{2-y}{2}, z=3$ กับระนาบ $x+3y=23$ เท่ากับ $|90^\circ - 135^\circ| = 45^\circ \qquad \#$

19. ตอบ $\sqrt{5}$

กำหนดให้เวกเตอร์การเคลื่อนที่คือ $\vec{r}(t) = \langle t^2 + 1, e^t + 1, 2t \rangle$ จงหาอัตราเร่งขณะ $t = 0$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) = \vec{r}'(t) &= \langle 2t, e^t, 2 \rangle \\ \vec{a}(t) = \vec{r}''(t) &= \langle 2, e^t, 0 \rangle \\ \vec{a}(0) &= \langle 2, 1, 0 \rangle \end{aligned}$$

ดังนั้นอัตราเร่งขณะ $t = 0$ เท่ากับ $\|\vec{a}(0)\| = \sqrt{4+1+0} = \sqrt{5} \quad \#$

20. ตอบ 1

กำหนดให้ $\vec{F}(t) = \langle \cos t, \sin t, 2 \rangle$ และ $\vec{S}(t) = \langle -\sin t, \cos t, t \rangle$ จงหา

$$\int_0^1 \vec{F}(t) \cdot \vec{S}(t)\, dt$$

แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \int_0^1 \vec{F}(t) \cdot \vec{S}(t)\, dt &= \int_0^1 -\cos t \sin t + \sin t \cos t + 2t\, dt \\ &= \int_0^1 2tdt = [t^2]_0^1 = 1 - 0 = 1 \quad \# \end{aligned}$$

ตอนที่ 3 : (60 คะแนน) จงแสดงวิธีโดยละเอียด ข้อละ 10 คะแนน

21. **(10 คะแนน)** กำหนดให้

$$A = \sum_{k=0}^{23}(k+1)^2, \qquad B = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{21^n + 22^n}{23^n} \qquad \text{และ} \qquad C = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+2)(k+3)}$$

จงหาค่าของ $A + 2B + 3C$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}
A &= \sum_{k=0}^{23}(k+1)^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 24^2 \\
&= \frac{24(24+1)(24\cdot 2+1)}{6} = \frac{24(25)(49)}{6} \\
&= 4\cdot 25\cdot 49 = 4900 \\
B &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{21^n}{23^n} + \frac{22^n}{23^n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{21^n}{23^n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{22^n}{23^n} \\
&= \frac{1}{1-\frac{21}{23}} + \frac{1}{1-\frac{22}{23}} \\
&= \frac{23}{2} + 23 = \frac{69}{2} \\
C &= \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3}\right] \\
&= \frac{1}{1+2} - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+3} = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$A + 2B + 3C = 4900 + 2\cdot\frac{69}{2} + 3\cdot\frac{1}{3} = 4900 + 69 + 1 = 4970 \qquad \#$$

22. **(10 คะแนน)** จงตรวจสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้ลู่เข้าหรือลู่ออก

22.1 **(5 คะแนน)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(3n+1)}{\sqrt{n^4+1}}$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{2n(3n+1)}{\sqrt{n^4+1}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2(3+\frac{1}{n})}{\sqrt{n^4(1+\frac{1}{n^4})}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2(3+\frac{1}{n})}{\sqrt{n^4}\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2(3+\frac{1}{n})}{n^2\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2(3+\frac{1}{n})}{\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}} \\ &= \frac{2(3+0)}{\sqrt{1+0}} = 6 \neq 0\end{aligned}$$

โดยการทดสอบการลู่ออก (Divergent Test) สรุปได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(3n+1)}{\sqrt{n^4+1}}$ เป็นอนุกรมลู่ออก #

22.2 **(5 คะแนน)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2^n)}{3^n}$

แนวคำตอบ สำหรับ $n \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า

$$0 \le |\cos(2^n)| \le 1$$

ฉะนั้น

$$0 \le \frac{|\cos(2^n)|}{3^n} \le \frac{1}{3^n}$$

เนื่องจาก $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ ลู่เข้า (อนุกรมเรขาคณิต $r = \frac{1}{3}$) โดยการเปรียบเทียบจะได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\cos(2^n)}{3^n}\right|$ ลู่เข้า

สรุปได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2^n)}{3^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า #

23. **(10 คะแนน)** จงหารัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้าของอนุกรมกำลัง

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(3x+6)^n}{n \cdot 6^n}$$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left| \frac{2(3x+6)^{n+1}}{(n+1)6^{n+1}} \cdot \frac{n \cdot 6^n}{2(3x+6)^n} \right| &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}|6x+2| \cdot \frac{n}{n+1} \\
&= \frac{1}{6}|3x+6| \cdot 1 \\
&= \frac{1}{6} \cdot 3\,|x+2| \\
&= \frac{1}{2}\,|x+2| < 1
\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$|x+2| < 2$$

ดังนั้นอนุกรมนี้มีศูนย์กลางอยู่ที่ -2 และรัศมีแห่งการลู่เข้าคือ 2 พิจารณา

$$\begin{aligned}
-2 < x+2 < 2 \\
-4 < x < 0
\end{aligned}$$

พิจารณา

กรณี $x = -4$ จะได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(3x+6)^n}{n \cdot 6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า เพราะว่าเป็นอนุกรมสลับที่ $\{\frac{2(-1)^n}{n}\}$ เป็นลำดับลด และ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2(-1)^n}{n} = 0$

กรณี $x = 0$ จะได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(3x+6)^n}{n \cdot 6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}$ เป็นอนุกรมลู่ออก เพราะเป็นอนุกรมพี $p = 1$

สรุปได้ว่า รัศมีแห่งการลู่เข้าคือ 2 ช่วงแห่งการลู่เข้าคือ $[-4, 0)$ #

24. **(10 คะแนน)** จงหาอนุกรมเทย์เลอร์ของ

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \qquad \text{รอบจุด } 1$$

แนวคำตอบ **แนวคำตอบ** พิจารณา

$$\begin{array}{rcllcllcr}
f(x) &=& x^{-2} & \longrightarrow & f(1) &=& 1 &=& 1! \\
f'(x) &=& (-2)x^{-3} & \longrightarrow & f'(1) &=& (-2) &=& -2! \\
f''(x) &=& (-2)(-3)x^{-4} & \longrightarrow & f''(1) &=& (-2)(-3) &=& 3! \\
f'''(x) &=& (-2)(-3)(-4)x^{-5} & \longrightarrow & f''(1) &=& (-2)(-3)(-4) &=& -4! \\
\vdots & & & & \vdots & & & & \vdots \\
f^{(n)}(x) &=& (-2)...(-n-1)x^{-n-2} & \longrightarrow & f''(1) &=& (-2)...(-n-1) &=& (-1)^n(n+1)!
\end{array}$$

จะได้ว่าอนุกรม จงหาอนุกรมเทย์เลอร์ของ f รอบจุด 1 คือ

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)(x-1)^n}{n!} &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \cdots \\
&= 1 - 2!(x-1) + \frac{3!}{2!}(x-1)^2 - \frac{4!}{3!}(x-1)^3 + \cdots \\
&= 1 - 2(x-1) + 3(x-1)^2 - 4(x-1)^3 + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(x-1)^n \quad \#
\end{aligned}$$

25. จงหาสมการเส้นตรงที่เกิดจากการตัดกันของระนาบ $x + 2y - 3z = 2$ และ $2x + 3y + 2z = 3$

แนวคำตอบ เลือก $x = 0$ จะได้ว่า

$$\begin{array}{rclcrcl}
2y - 3z &=& 2 & \longrightarrow & 74y - 6z &=& 4 \\
3y + 2z &=& 3 & \longrightarrow & 9y + 6z &=& 9 \\
 & & & \longrightarrow & 13y &=& 13
\end{array}$$

จะได้ $y = 1, z = 0$ ดังนั้น $(0, 1, 0)$ เป็นจุดบนระนาบทั้งสอง

เวกเตอร์แนวฉากของ $x + 2y - 3z = 2$ และ $2x + 3y + 2z = 3$ คือ $\vec{N}_1 = \langle 1, 2, -3\rangle$ และ $\vec{N}_2 = \langle 2, 3, 2\rangle$ ตามลำดับ

ดังนั้น $\vec{N}_1 \times \vec{N}_2$ เป็นเวกเตอร์แสดงทิศทางของเส้นตรงนี้ นั่นคือ

$$\begin{aligned}
\vec{A} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{i} & \vec{i} \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} &= \vec{i}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\
&= \langle 13, -8, -1\rangle
\end{aligned}$$

ดังนั้นสมการของเส้นตรงนี้คือ $x = 13t, y = 1 - 8t, z = -t \qquad \#$

26. **(10 คะแนน)** จงหา เวกเตอร์สัมผัสหน่วย $(\vec{T})$ เวกเตอร์ฉากหน่วย $(\vec{N})$ และเวกเตอร์แนวฉากคู่ $(\vec{B})$ ของเส้นโค้ง

$$\vec{r}(t) = \langle 5\sin t, 5\cos t, 12t\rangle \quad \text{เมื่อ} \quad t = 0$$

แนวคำตอบ

เวกเตอร์สัมผัสหน่วย เมื่อ $t = 0$

$$\begin{aligned}
\vec{r}'(t) &= \langle 5\cos t, -5\sin t, 12\rangle \\
\|\vec{r}'(t)\| &= \sqrt{25\cos^2 t + 25\sin^2 t + 144} \\
&= \sqrt{25(\cos^2 t + \sin^2 t) + 144} \\
&= \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13 \\
\vec{T}(t) &= \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} = \frac{1}{13}\langle 5\cos t, -5\sin t, 12\rangle \\
\vec{T}(0) &= \left\langle \frac{5}{13}, 0, \frac{12}{13} \right\rangle \qquad \#
\end{aligned}$$

เวกเตอร์แนวฉากหน่วย เมื่อ $t = 0$

$$\begin{aligned}
\vec{T}'(t) &= \frac{1}{13}\langle -5\sin t, -5\cos t, 0\rangle \\
\|\vec{T}'(t)\| &= \frac{1}{13}\sqrt{25\sin^2 t + 25\cos^2 t + 0} \\
&= \frac{1}{13}\sqrt{25(\sin^2 t + \cos^2 t)} = \frac{1}{13}\sqrt{25} = \frac{5}{13} \\
\vec{N}(t) &= \frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{T}'(t)\|} = \frac{1}{5}\langle -5\sin t, -5\cos t, 0\rangle \\
\vec{N}(\pi) &= \langle 0, -1, 0\rangle \qquad \#
\end{aligned}$$

เวกเตอร์แนวฉากคู่ เมื่อ $t = 0$ คือ

$$\begin{aligned}
\vec{B}(0) &= \vec{T}(0) \times \vec{N}(0) \\
&= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{5}{13} & 0 & \frac{12}{13} \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= \vec{i}\begin{vmatrix} 0 & \frac{12}{13} \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} \frac{5}{13} & \frac{12}{13} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} \frac{5}{13} & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\
&= \left\langle \frac{12}{13}, 0, -\frac{5}{13} \right\rangle \qquad \#
\end{aligned}$$