มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
คณะครุศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ข้อสอบกลางภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2564

ชื่อวิชา	แคลคูลัส ๑ Calculus 1
รหัสวิชา	MAC1302
วันเวลาสอบ	วันอาทิตย์ ที่ 5 กันยายน 2564 เวลา 9:00 - 12:00
สถานที่สอบ	ห้องเรียนออนไลน์ (โปรแกรม Zoom)
ผู้สอน	ผู้ช่วยศาสตรจารย์ ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย
คะแนน	105 คะแนน คิดเป็น 25%

ข้อสอบ SET A

1. (10 **คะแนน**) จงหาลิมิตต่อไปนี้ **(โดยไม่ใช้หลักเกณฑ์ลอปีตาล)** แสดงวิธีทำโดยละเอียด

   1.1 (5 **คะแนน**) $$\lim_{x\to 0} \frac{(x+\sqrt{2})^4-4}{(x-1)^3+1}$$

   1.2 (5 **คะแนน**) $$\lim_{x\to -2} \frac{\sqrt{\sqrt{2-x}+2}-2}{x+2}$$

2. (10 **คะแนน**) จงหาลิมิตต่อไปนี้ **(โดยไม่ใช้หลักเกณฑ์ลอปีตาล)** แสดงวิธีทำโดยละเอียด

   2.1 (5 **คะแนน**) $$\lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x-\cos x}{\sin^2 2x-x^2}$$

   2.2 (5 **คะแนน**) $$\lim_{x\to\infty} e^{-x}\sin(e^x)$$

3. (12 **คะแนน**) จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

   3.1 (6 **คะแนน**) จงหาลิมิตของ $$\lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2}-\sqrt{x^2+2x}\right)$$

   3.2 (6 **คะแนน**) ให้ a และ b เป็นค่าคงตัว กำหนดให้

   $$f(x)=\begin{cases} ax^2+3x & \text{เมื่อ } |x|\le 1 \\ x^2-bx & \text{เมื่อ } |x|>1 \end{cases}$$

   ถ้า f **หาอนุพันธ์ได้ที่** $x=1$ จงหาค่าของ a และ b

4. (10 **คะแนน**) จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

   4.1 (5 **คะแนน**) จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)=\sqrt[3]{x+1}$ โดยใช้**บทนิยาม**

   4.2 (5 **คะแนน**) ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ โดยที่

   $$f\left(1+xg(x)\right)=\frac{1}{(e+1)^{\arctan x}}$$

   จงหา $f'(1)$ เมื่อ $g(0)=1$

5. **(11 คะแนน)** จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

5.1 **(5 คะแนน)** กำหนดให้ $f(x) = xe^x$ จงหาค่าของ $f^{(2564)}(-2564)$

5.2 **(6 คะแนน)** ให้ $y = x(\arcsin x)^{\frac{1}{x}}$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ ขณะ $x = \dfrac{1}{2}$

6. **(7 คะแนน)** จงประมาณค่าของ $\dfrac{1}{\sqrt{3.99}}$ โดยใช้**ค่าเชิงอนุพันธ์**

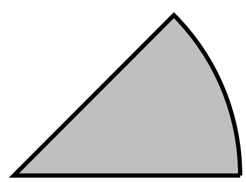
7. **(10 คะแนน)** จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

7.1 **(5 คะแนน)** จงหา**สมการเส้นสัมผัส**ของกราฟ

$$x^2 + xy\sqrt{1+xy} = x\sec^2 y$$

ที่จุด $(1,0)$

7.2 **(5 คะแนน)** นำลวดยาว 100 ฟุต ขดเป็นรูปเซกเตอร์ (sector) โดยมีพื้นที่มากสุด เมื่อรัศมีเท่าใด



8. **(10 คะแนน)** จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

8.1 **(5 คะแนน)** บ้านนาย ก อยู่ริมแม่น้ำ เมื่อนาย ก ยืนอยู่อีกฝากหนึ่งของแม่น้ำซึ่งตรงข้ามกับบ้านของเขาโดยมีระยะห่าง 12 เมตร เขาเดินตามแนวขนานกับแม่น้ำด้วยความเร็ว 10 เมตรต่อนาที จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของมุมเงยที่เขามองเห็นบ้านขณะเดินไปได้ 4 เมตร

8.2 **(5 คะแนน)** หากคุณกำลังเตรียมสอนเนื้อหาแคลคูลัสเบื้องต้นสำหรับนักเรียนชั้น ม.6 และได้อ่านตำราเกี่ยวกับบทนิยามของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f จากหนังสือ 2 เล่ม โดยที่
หนังสือเล่มที่ 1 นิยามว่า

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

หนังสือเล่มที่ 2 นิยามว่า

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

คุณคิดว่านิยามทั้งสองแตกต่างกันหรือไม่เพราะเหตุใด จงให้เหตุผลประกอบ

9. **(15 คะแนน)** จง**ร่างกราฟ** $f(x) = \dfrac{e^x}{x-1}$
และวิเคราะห์กราฟโดยเติมคำตอบลงในตารางให้ถูกต้อง (ถ้าช่องใดไม่มีองค์ประกอบดังกล่าวให้เติมคำว่า **ไม่มี**) จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

โดเมน	
จุดตัดแกน X และแกน Y	
สมการเส้นกำกับแนวยืน	
สมการเส้นกำกับแนวนอน	
สมการเส้นกำกับแนวเอียง	
จุดวิกฤต	
จุดเปลี่ยนเว้า	
จุดสูงสุดสัมพัทธ์	
จุดต่ำสุดสัมพัทธ์	
f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง	
f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง	
f มีความเว้าอยู่บน บนช่วง	
f มีความเว้าอยู่ล่าง บนช่วง	

10. **(10 คะแนน)** จงหาลิมิตต่อไปนี้

10.1 **(5 คะแนน)** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{x\tan x + x^2}$

10.2 **(5 คะแนน)** $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(e^{x^{-1}} - 1\right)^{x^{-1}}$

ข้อสอบ SET B

1. (10 **คะแนน**) จงหาลิมิตต่อไปนี้ **(โดยไม่ใช้หลักเกณฑ์ลอปีตาล)** แสดงวิธีทำโดยละเอียด

   1.1 (5 **คะแนน**) $\lim_{x \to 0} \dfrac{(x\sqrt{2}+1)^4 - 1}{(x-1)^3 + 1}$

   1.2 (5 **คะแนน**) $\lim_{x \to -3} \dfrac{\sqrt{\sqrt{1-x}+2} - 2}{x+3}$

2. (10 **คะแนน**) จงหาลิมิตต่อไปนี้ **(โดยไม่ใช้หลักเกณฑ์ลอปีตาล)** แสดงวิธีทำโดยละเอียด

   2.1 (5 **คะแนน**) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\cos x - \cos 2x}{\sin^2 x - 2x^2}$

   2.2 (5 **คะแนน**) $\lim_{x \to \infty} e^{-x} \cos(e^x)$

3. (12 **คะแนน**) จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

   3.1 6 **คะแนน**) จงหาลิมิตของ $\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 - 2x} - \sqrt{x^2} \right)$

   3.2 (6 **คะแนน**) ให้ a และ b เป็นค่าคงตัว กำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} ax^3 + 2x & \text{เมื่อ } |x| \leq 1 \\ x^3 - bx & \text{เมื่อ } |x| > 1 \end{cases}$$

   ถ้า f **หาอนุพันธ์ได้ที่** $x = 1$ จงหาค่าของ a และ b

4. (10 **คะแนน**) จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

   4.1 (5 **คะแนน**) จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ โดยใช้**บทนิยาม**

   4.2 (5 **คะแนน**) ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ โดยที่

$$f\left(1 - xg(x)\right) = \frac{1}{(e-1)^{\arctan x}}$$

   จงหา $f'(1)$ เมื่อ $g(0) = 1$

5. **(11 คะแนน)** จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

5.1 **(5 คะแนน)** กำหนดให้ $f(x) = xe^{-x}$ จงหาค่าของ $f^{(2021)}(2021)$

5.2 **(6 คะแนน)** ให้ $y = x(e^x + x)^x$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ ขณะ $x = 1$

6. **(7 คะแนน)** จงประมาณค่าของ $\dfrac{1}{\sqrt{4.01}}$ โดยใช้**ค่าเชิงอนุพันธ์**

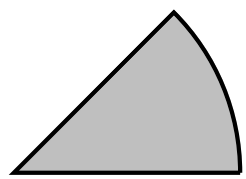
7. **(10 คะแนน)** จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

7.1 **(5 คะแนน)** จงหา**สมการเส้นสัมผัส**ของกราฟ

$$\ln x + x\sqrt{1+xy} = x\tan^2 y + x^3$$

ที่จุด $(1, 0)$

7.2 **(5 คะแนน)** นำลวดยาว 100 ฟุต ขดเป็นรูปเซกเตอร์ (sector) โดยมีพื้นที่มากสุด เมื่อมุมที่ศูนย์กลางมีค่ากี่เรเดียน



8. **(10 คะแนน)** จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

8.1 **(5 คะแนน)** บ้านนาย ก อยู่ริมแม่น้ำ เมื่อนาย ก ยืนอยู่อีกฝากหนึ่งของแม่น้ำซึ่งตรงข้ามกับบ้านของเขาโดยมีระยะห่าง 12 เมตร เขาเดินตามแนวขนานกับแม่น้ำด้วยความเร็ว 10 เมตรต่อนาที นาย ก เคลื่อนที่ออกจากบ้านด้วยอัตราเร็วเท่าใด ขณะเขาเดินไปได้ 16 เมตร

8.2 **(5 คะแนน)** หากคุณกำลังเตรียมสอนเนื้อหาแคลคูลัสเบื้องต้นสำหรับนักเรียนชั้น ม.6 และได้อ่านตำราเกี่ยวกับบทนิยามของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f จากหนังสือ 2 เล่ม โดยที่
หนังสือเล่มที่ 1 นิยามว่า

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

หนังสือเล่มที่ 2 นิยามว่า

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

คุณคิดว่านิยามทั้งสองแตกต่างกันหรือไม่เพราะเหตุใด จงให้เหตุผลประกอบ

9. **(15 คะแนน)** จง**ร่างกราฟ** $f(x) = \dfrac{e^x}{x+1}$
และวิเคราะห์กราฟโดยเติมคำตอบลงในตารางให้ถูกต้อง (ถ้าช่องใดไม่มีองค์ประกอบดังกล่าวให้เติมคำว่า **ไม่มี**) จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

โดเมน	
จุดตัดแกน X และแกน Y	
สมการเส้นกำกับแนวยืน	
สมการเส้นกำกับแนวนอน	
สมการเส้นกำกับแนวเอียง	
จุดวิกฤต	
จุดเปลี่ยนเว้า	
จุดสูงสุดสัมพัทธ์	
จุดต่ำสุดสัมพัทธ์	
f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง	
f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง	
f มีความเว้าอยู่บน บนช่วง	
f มีความเว้าอยู่ล่าง บนช่วง	

10. **(10 คะแนน)** จงหาลิมิตต่อไปนี้

10.1 **(5 คะแนน)** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x\tan x - x^3}$

10.2 **(5 คะแนน)** $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(e^{x^{-1}} - 1\right)^{2x^{-10}}$

มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
คณะครุศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์
เฉลยข้อสอบกลางภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2564

ชื่อวิชา	แคลคูลัส ๑ Calculus 1
รหัสวิชา	MAC1302
วันเวลาสอบ	วันอาทิตย์ ที่ 5 กันยายน 2564 เวลา 9:00 - 12:00
สถานที่สอบ	ห้องเรียนออนไลน์ (โปรแกรม Zoom)
ผู้สอน	ผู้ช่วยศาสตรจารย์ ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย
คะแนน	105 คะแนน คิดเป็น 25%

เฉลยข้อสอบ SET A

1. (10 **คะแนน**) จงหาลิมิตต่อไปนี้ **(โดยไม่ใช้หลักเกณฑ์ลอปีตาล)** แสดงวิธีทำโดยละเอียด

1.1 (5 **คะแนน**) $\lim_{x\to 0}\frac{(x+\sqrt{2})^4-4}{(x-1)^3+1}$

วิธีทำ ลิมิตอยู่ในรูป I.F. $\frac{0}{0}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{(x+\sqrt{2})^4-4}{(x-1)^3+1} &= \lim_{x\to 0}\frac{[(x+\sqrt{2})^2-2][(x+\sqrt{2})^2+2]}{[(x-1)+1][(x-1)^2-(x-1)1+1^2]} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{[(x^2+2x\sqrt{2}+2)-2][(x^2+2x\sqrt{2}+2)+2]}{x[(x^2-2x+1)-(x-1)+1]} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{[x^2+2x\sqrt{2}][x^2+2x\sqrt{2}+4]}{x[x^2-3x+3]} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x[x+2\sqrt{2}][x^2+2x\sqrt{2}+4]}{x[x^2-3x+3]} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{[x+2\sqrt{2}][x^2+2x\sqrt{2}+4]}{[x^2-3x+3]} \\
&= \frac{2\sqrt{2}(4)}{3} = \frac{8\sqrt{2}}{3} \quad \#
\end{aligned}$$

1.2 (5 **คะแนน**) $\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{\sqrt{2-x}+2}-2}{x+2}$

วิธีทำ ลิมิตอยู่ในรูป I.F. $\frac{0}{0}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{\sqrt{2-x}+2}-2}{x+2} &= \lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{\sqrt{2-x}+2}-2}{x+2}\cdot\frac{\sqrt{\sqrt{2-x}+2}+2}{\sqrt{\sqrt{2-x}+2}+2} \\
&= \lim_{x\to -2}\frac{(\sqrt{\sqrt{2-x}+2})^2-2^2}{(x+2)(\sqrt{\sqrt{2-x}+2}+2)} \\
&= \lim_{x\to -2}\frac{(\sqrt{2-x}+2)-4}{(x+2)(\sqrt{\sqrt{2-x}+2}+2)} \\
&= \lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{2-x}-2}{(x+2)(\sqrt{\sqrt{2-x}+2}+2)} \\
&= \lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{2-x}-2}{(x+2)(\sqrt{\sqrt{2-x}+2}+2)}\cdot\frac{\sqrt{2-x}+2}{\sqrt{2-x}+2} \\
&= \lim_{x\to -2}\frac{(\sqrt{2-x})^2-2^2}{(x+2)(\sqrt{\sqrt{2-x}+2}+2)(\sqrt{2-x}+2)} \\
&= \lim_{x\to -2}\frac{(2-x)-4}{(x+2)(\sqrt{\sqrt{2-x}+2}+2)(\sqrt{2-x}+2)} \\
&= \lim_{x\to -2}\frac{-(x+2)}{(x+2)(\sqrt{\sqrt{2-x}+2}+2)(\sqrt{2-x}+2)} \\
&= \lim_{x\to -2}\frac{-1}{(\sqrt{\sqrt{2-x}+2}+2)(\sqrt{2-x}+2)} \\
&= \frac{-1}{(2+2)(2+2)} = -\frac{1}{16} \quad \#
\end{aligned}$$

2. **(10 คะแนน)** จงหาลิมิตต่อไปนี้ **(โดยไม่ใช้หลักเกณฑ์ลอปีตาล)** แสดงวิธีทำโดยละเอียด

2.1 **(5 คะแนน)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos x}{\sin^2 2x-x^2}$

วิธีทำ ลิมิตอยู่ในรูป I.F. $\dfrac{0}{0}$ **วิธีที่ 1 เปลี่ยนผลบวกเป็นผลคูณ** จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos x}{\sin^2 2x-x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2\left(\frac{\sin^2 2x}{x^2}-1\right)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2\left(\frac{4\sin^2 2x}{4x^2}-1\right)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-2\cdot\frac{\sin\left(\frac{3x}{2}\right)}{x}\cdot\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x}}{4\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2-1}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-2\cdot\frac{\sin\left(\frac{3x}{2}\right)}{\frac{2}{3}\cdot\frac{3x}{2}}\cdot\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2\cdot\frac{x}{2}}}{4\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2-1}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-3\left(\frac{\sin\left(\frac{3x}{2}\right)}{\frac{3x}{2}}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)}{4\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2-1}\\
&= \frac{-3\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1}{4\cdot 1^2-1}=-\frac{1}{2}\qquad\#
\end{aligned}
$$

วิธีที่ 2 ใช้สังยุค จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos x}{\sin^2 2x-x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos x}{\sin^2 2x-x^2}\cdot\frac{\cos 2x+\cos x}{\cos 2x+\cos x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 2x-\cos^2 x}{(\sin^2 2x-x^2)(\cos 2x+\cos x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\sin^2 2x)-(1-\sin^2 x)}{(\sin^2 2x-x^2)(\cos 2x+\cos x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-\sin^2 2x}{(\sin^2 2x-x^2)(\cos 2x+\cos 2x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x^2(\frac{\sin^2 x}{x^2}-\frac{\sin^2 2x}{x^2})}{x^2(\frac{\sin^2 2x}{x^2}-1)(\cos 2x+\cos x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2-4\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2}{\left(\left(4\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2-1\right)(\cos 2x+\cos x)}\\
&= \frac{1^2-4\cdot 1^2}{(4\cdot 1^2-1)(1+1)}=-\frac{1}{2}\qquad\#
\end{aligned}
$$

2.2 **(5 คะแนน)** $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}\sin(e^x)$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$-1\le\sin\left(e^x\right)\le 1\qquad\text{ทุก ๆ } x\in\mathbb{R}$$

จะได้ว่า $e^{-x}>0$ เมื่อ $x\in\mathbb{R}$ ดังนั้น

$$-e^{-x}\le e^{-x}\sin\left(e^x\right)\le e^{-x}$$

เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to\infty}-e^{-x}=\lim\limits_{x\to\infty}-\dfrac{1}{e^x}=0$ และ $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$

โดยทฤษฎีบทประกบ (Squeez theorem) จะได้ว่า

$$\lim_{x\to\infty}e^{-x}\sin(e^x)=0$$

3. **(12 คะแนน)** จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

3.1 **(6 คะแนน)** จงหาลิมิตของ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2}-\sqrt{x^2+2x}\right)$

วิธีทำ ลิมิตอยู่ในรูป I.F. $\infty-\infty$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2}-\sqrt{x^2+2x}\right) &= \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2}-\sqrt{x^2+2x}\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2+2x}}{\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2+2x}} \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2})^2-(\sqrt{x^2+2x})^2}{\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2+2x}} \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-(x^2+2x)}{|x|+\sqrt{x^2(1+\frac{2}{x})}} \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{-2x}{-x+\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{2}{x}}} \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{-2x}{-x+|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}}} \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{-2x}{-x-x\sqrt{1+\frac{2}{x}}} \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{-2x}{-x\left(1+\sqrt{1+\frac{2}{x}}\right)} \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{1+\sqrt{1+\frac{2}{x}}} \\
&= \frac{2}{1+\sqrt{1+0}} = 1 \quad \#
\end{aligned}$$

3.2 **(6 คะแนน)** ให้ a และ b เป็นค่าคงตัว กำหนดให้

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+3x & \text{เมื่อ } |x|\le 1 \\ x^2-bx & \text{เมื่อ } |x|>1 \end{cases}$$

ถ้า f **หาอนุพันธ์ได้ที่** $x=1$ จงหาค่าของ a และ b

วิธีทำ เนื่องจาก f หาอนุพันธ์ได้ที่ $x=1$ จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=1$ นั่นคือ

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to1^+} f(x) &= \lim_{x\to1^-} f(x) \\
\lim_{x\to1^+}(x^2-bx) &= \lim_{x\to1^-}(ax^2+3x) \\
1-b &= a+3 \\
a+b &= -2 \qquad \text{...(1)}
\end{aligned}$$

จะเห็นว่า

$$f'(x)=\begin{cases} 2ax+3 & \text{เมื่อ } |x|\le 1 \\ 2x-b & \text{เมื่อ } |x|>1 \end{cases}$$

นั่นคือ $f'(1^+)=f'(1^-)$ หรือ

$$\begin{aligned}
2a(1)+3 &= 2(1)-b \\
2a+b &= -1 \qquad \text{...(2)}
\end{aligned}$$

จาก (1) และ (2) จะได้ว่า $a=1$ และ $b=-3$ $\quad \#$

4. (10 **คะแนน**) จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

4.1 (5 **คะแนน**) จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ โดยใช้**บทนิยาม**

วิธีทำ จากบทนิยาม จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+h+1}-\sqrt[3]{x+1}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+h+1}-\sqrt[3]{x+1}}{h} \cdot \frac{(\sqrt[3]{x+h+1})^2+\sqrt[3]{x+h+1}\sqrt[3]{x+1}+(\sqrt[3]{x+1})^2}{(\sqrt[3]{x+h+1})^2+\sqrt[3]{x+h+1}\sqrt[3]{x+1}+(\sqrt[3]{x+1})^2} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt[3]{x+h+1})^3-(\sqrt[3]{x+1})^3}{h\left[(\sqrt[3]{x+h+1})^2+\sqrt[3]{x+h+1}\sqrt[3]{x+1}+(\sqrt[3]{x+1})^2\right]} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h+1)-(x+1)}{h\left[(\sqrt[3]{x+h+1})^2+\sqrt[3]{x+h+1}\sqrt[3]{x+1}+(\sqrt[3]{x+1})^2\right]} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h\left[(\sqrt[3]{x+h+1})^2+\sqrt[3]{x+h+1}\sqrt[3]{x+1}+(\sqrt[3]{x+1})^2\right]} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{(\sqrt[3]{x+h+1})^2+\sqrt[3]{x+h+1}\sqrt[3]{x+1}+(\sqrt[3]{x+1})^2} \\
&= \frac{1}{(\sqrt[3]{x+1})^2+\sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{x+1}+(\sqrt[3]{x+1})^2} \\
&= \frac{1}{3(\sqrt[3]{x+1})^2} \qquad \#
\end{aligned}
$$

4.2 (5 **คะแนน**) ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ โดยที่

$$f\left(1+xg(x)\right) = \frac{1}{(e+1)^{\arctan x}}$$

จงหา $f'(1)$ เมื่อ $g(0)=1$

วิธีทำ พิจารณา

$$
\begin{aligned}
f\left(1+xg(x)\right) &= (e+1)^{-\arctan x} \\
\frac{d}{dx} f\left(1+xg(x)\right) &= \frac{d}{dx}(e+1)^{-\arctan x} \\
f'(1+xg(x)) \cdot \frac{d}{dx}(1+xg(x)) &= (e+1)^{-\arctan x}\ln(e+1)\cdot \frac{d}{dx}(-\arctan x) \\
f'(1+xg(x)) \cdot (g(x)+xg'(x)) &= (e+1)^{-\arctan x}\ln(e+1)\cdot \left(-\frac{1}{1+x^2}\right)
\end{aligned}
$$

เมื่อแทน $x=0$ และ $g(0)=1$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
f'(1+0)\cdot(g(0)+0) &= (e+1)^0\ln(e+1)\cdot\left(-\frac{1}{1+0}\right) \\
f'(1+0)\cdot(1) &= \ln(e+1)\cdot(-1) \\
f'(1) &= -\ln(e+1) \qquad \#
\end{aligned}
$$

5. **(11 คะแนน)** จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

5.1 **(5 คะแนน)** กำหนดให้ $f(x) = xe^x$ จงหาค่าของ $f^{(2564)}(-2564)$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}
f'(x) &= xe^x + e^x \\
f''(x) &= (xe^x + e^x) + e^x = xe^x + 2e^x \\
f'''(x) &= (xe^x + e^x) + 2e^x = xe^x + 3e^x \\
f^{(4)}(x) &= (xe^x + e^x) + 3e^x = xe^x + 4e^x \\
&\vdots \\
f^{(2564)}(x) &= xe^x + 2564e^x
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$f^{(2564)}(-2564) = -2564e^{-2564} + 2564e^{-2564} = 0 \quad \#$$

5.2 **(6 คะแนน)** ให้ $y = x(\arcsin x)^{\frac{1}{x}}$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ ขณะ $x = \frac{1}{2}$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\ln y &= \ln x(\arcsin x)^{\frac{1}{x}} \\
&= \ln x + \ln(\arcsin x)^{\frac{1}{x}} \\
&= \ln x + \frac{1}{x}\ln(\arcsin x) \\
&= \ln x + x^{-1}\cdot\ln(\arcsin x) \\
\frac{d}{dx}\ln y &= \frac{d}{dx}\ln x + \frac{d}{dx}x^{-1}\cdot\ln(\arcsin x) + x^{-1}\frac{d}{dx}\ln(\arcsin x) \\
\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{x} - x^{-2}\cdot\ln(\arcsin x) + x^{-1}\cdot\frac{1}{\arcsin x}\frac{d}{dx}\arcsin x \\
\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\cdot\ln(\arcsin x) + \frac{1}{x\arcsin x}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
\frac{dy}{dx} &= y\left[\frac{1}{x} - \frac{\ln(\arcsin x)}{x^2} + \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}\arcsin x}\right] \\
&= x(\arcsin x)^{\frac{1}{x}}\left[\frac{1}{x} - \frac{\ln(\arcsin x)}{x^2} + \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}\arcsin x}\right]
\end{aligned}$$

เมื่อแทน $x = \frac{1}{2}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2}(\arcsin\frac{1}{2})^2\left[2 - \frac{\ln(\arcsin\frac{1}{2})}{\frac{1}{4}} + \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{1}{4}}\arcsin\frac{1}{2}}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}\right)^2\left[2 - 4\ln(\frac{\pi}{6}) + \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{6}}\right] \\
&= \frac{\pi^2}{72}\left[2 - 4\ln(\frac{\pi}{6}) + \frac{24}{\pi\sqrt{3}}\right] \quad \#
\end{aligned}$$

6. **(7 คะแนน)** จงประมาณค่าของ $\dfrac{1}{\sqrt{3.99}}$ โดยใช้**ค่าเชิงอนุพันธ์**

วิธีทำ ให้ $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ จะได้ว่า $f'(x) = -\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$
พิจารณา $x = 4$ และ $\Delta x = -0.01$ จาก

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f(x)\Delta x$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{3.99}} &= f(3.99) \\
&\approx f(4) + f'(4) \cdot (-0.01) \\
&= \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{2}4^{-\frac{3}{2}} \cdot (-0.01) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 2^{-3} \cdot (0.01) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{0.01}{16} \\
&= \frac{801}{1600} \\
&= 0.500625 \quad \#
\end{aligned}$$

7. (10 **คะแนน**) จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

7.1 (5 **คะแนน**) จงหา**สมการเส้นสัมผัส**ของกราฟ

$$x^2 + xy\sqrt{1+xy} = x\sec^2 y$$

ที่จุด $(1, 0)$

วิธีทำ หาความชันโดยพิจารณา

$$\begin{aligned}
(x^2 + xy\sqrt{1+xy})' &= (x\sec^2 y)' \\
(x^2)' + (xy)'\sqrt{1+xy} + xy(\sqrt{1+xy})' &= x(\sec^2 y)' + x'(\sec^2 y) \\
2x + (xy' + y)\sqrt{1+xy} + xy \cdot \frac{1}{2}(1+xy)^{-\frac{1}{2}})(1+xy)' &= x(2\sec y)\sec y \tan y \cdot y' + 1(\sec^2 y) \\
2x + (xy' + y)\sqrt{1+xy} + xy \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+xy}}(xy' + y) &= 2x\sec^2 y \tan y \cdot y' + \sec^2 y
\end{aligned}$$

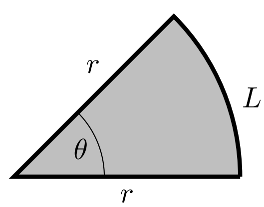
แทน $x = 1$ และ $y = 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
2 + (y' + 0)\sqrt{1} + 0 &= 0 + 1 \\
y' &= -1
\end{aligned}$$

ดังนั้นสมการเส้นสัมผัสที่จุด $(1, 0)$ มีความชันเท่ากับ -1 คือ $y - 0 = -1(x - 1)$ หรือ $y = -x + 1$ #

7.2 (5 **คะแนน**) นำลวดยาว 100 ฟุต ขดเป็นรูปเซกเตอร์ (sector) โดยมีพื้นที่มากสุด เมื่อรัศมีเท่าใด

วิธีทำ ให้ r เป็นรัศมีของวงกลม และ L เป็นส่วนความยาวของเส้นโค้งของรูปเซกเตอร์
และ θ เป็นมุมของรูปเซกเตอร์ในหน่วยเรเดียน ดังนั้น $L = r\theta$



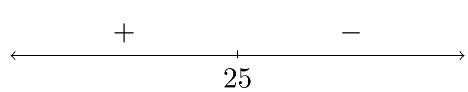
จากที่โจทย์กำหนดจะได้ว่า $2r + L = 2r + r\theta = 100$ นั่นคือ $r\theta = 100 - 2r$ ให้ A เป็นพื้นของรูปเซกเตอร์ ดังนั้น

$$A = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}r(r\theta) = \frac{1}{2}r(100 - 2r) = 50r - r^2$$

ฉะนั้น

$$A'(r) = 50 - 2r$$

ดังนั้น $r = 25$ เป็นจุดวิกฤต เมื่อพิจารณาเครื่องหมายอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

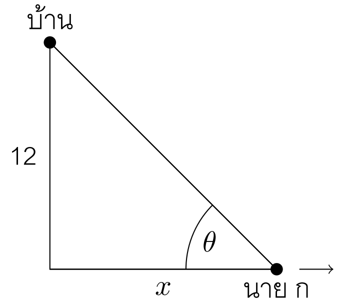


จะได้ว่า $r = 25$ เป็นจุดสูงสุดของฟังก์ชัน A
สรุปได้ว่ารูปเซกเตอร์นี้มีรัศมีเท่ากับ 25 ฟุต จะให้รูปเซกเตอร์มีพื้นที่มากสุด #

8. **(10 คะแนน)** จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

8.1 **(5 คะแนน)** บ้านนาย ก อยู่ริมแม่น้ำ เมื่อนาย ก ยืนอยู่อีกฝากหนึ่งของแม่น้ำซึ่งตรงข้ามกับบ้านของเขาโดยมีระยะห่าง 12 เมตร เขาเดินตามแนวขนานกับแม่น้ำด้วยความเร็ว 10 เมตรต่อนาที จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของมุมเงยที่เขามองเห็นบ้านขณะเดินไปได้ 4 เมตร

วิธีทำ ให้ x เป็นระยะทางที่เขาเดินตามแนวขนานกับแม่น้ำ และ θ เป็นมุมเงยที่เขามองเห็นบ้าน



จากรูป $\tan\theta = \dfrac{12}{x} = 12x^{-1}$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\tan\theta &= \frac{d}{dt}12x^{-1} \\
\sec^2\theta \cdot \frac{d\theta}{dt} &= 12(-x^{-2})\frac{dx}{dt} \\
\frac{d\theta}{dt} &= -\frac{12}{x^2\sec^2\theta}\frac{dx}{dt} = -\frac{12}{x^2(1+\tan^2\theta)}\frac{dx}{dt}
\end{aligned}$$

ขณะที่ $x = 4$ และ $\dfrac{dx}{dt} = 10$ จะได้ว่า $\tan\theta = \dfrac{12}{3} = 3$ และ

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{12}{4^2(1+3^2)}(10) = -\frac{3}{4} = -0.75$$

ดังนั้นขณะนาย ก เดินไปได้ 4 เมตร อัตราการเปลี่ยนแปลงของมุมเงยที่เขามองเห็นบ้านจะลดลงด้วยอัตรา 0.75 เรเดียนต่อนาที $\#$

8.2 **(5 คะแนน)** หากคุณกำลังเตรียมสอนเนื้อหาแคลคูลัสเบื้องต้นสำหรับนักเรียนชั้น ม.6 และได้อ่านตำราเกี่ยวกับบทนิยามของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f จากหนังสือ 2 เล่ม โดยที่

หนังสือเล่มที่ 1 นิยามว่า

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

หนังสือเล่มที่ 2 นิยามว่า

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x)-f(x-h)}{h}$$

คุณคิดว่านิยามทั้งสองแตกต่างกันหรือไม่เพราะเหตุใด จงให้เหตุผลประกอบ

วิธีทำ ไม่แตกต่างกัน พิจารณาโดยการแทนตัวแปร h ด้วย $-h$ในนิยาม 2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{-h\to 0}\frac{f(x)-f(x-(-h))}{-h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x)-f(x+h))}{-h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}
\end{aligned}$$

9. **(15 คะแนน)** **จงร่างกราฟ** $f(x) = \dfrac{e^x}{x-1}$
และวิเคราะห์กราฟโดยเติมคำตอบลงในตารางให้ถูกต้อง (ถ้าช่องใดไม่มีองค์ประกอบดังกล่าวให้เติมคำว่า **ไม่มี**) จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

โดเมน	$\mathbb{R} - \{1\}$
จุดตัดแกน X และแกน Y	$(0, -1)$
สมการเส้นกำกับแนวยืน	$x = 1$
สมการเส้นกำกับแนวนอน	$y = 0$
สมการเส้นกำกับแนวเอียง	ไม่มี
จุดวิกฤต	$(2, e^2)$
จุดเปลี่ยนเว้า	ไม่มี
จุดสูงสุดสัมพัทธ์	ไม่มี
จุดต่ำสุดสัมพัทธ์	$(2, e^2)$
f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง	$(2, \infty)$
f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง	$(-\infty, 1), (1, 2)$
f มีความเว้าอยู่บน บนช่วง	$(1, \infty)$
f มีความเว้าอยู่ล่าง บนช่วง	$(-\infty, 1)$

วิธีทำ 1. โดเมนของ f คือ $\mathbb{R} - \{1\}$ จะเห็นว่า $x = 1$ เป็นเส้นกำกับแนวยืน เนื่องจาก

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{e^x}{x-1} = \infty \quad \text{และ} \quad \lim_{x \to 1^-} \frac{e^x}{x-1} = -\infty$$

จาก

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x-1} = \infty \quad \text{และ} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x-1} = 0$$

จะได้ว่า $y = 0$ เป็นเส้นกำกับแนวนอน
2. จะเห็นว่า $y \neq 0$ ไม่มีจุดตัดแกน X สำหรับ $x = 0$ จะได้ว่า $y = -1$ นั่นคือ จุดตัดแกน Y คือ $(0, -1)$
3. พิจารณา

$$f'(x) = \frac{(x-1)e^x - e^x(1)}{(x-1)^2} = \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$$

ดังนั้น $x = 2$ เป็นจุดวิกฤต จะได้ $f(2) = e^2 \approx 7.4$ เมื่อพิจารณาเครื่องหมาย f' บนเส้นจำนวนจะได้ว่า

$$\begin{array}{ccccc} - & & - & & + \\ \hline & 1 & & 2 & \end{array}$$

และ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $(2, \infty)$ และเป็นฟังก์ชันลดบน $(-\infty, 1), (1, 2)$

4. พิจารณา

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{(x-1)^2[(x-2)e^x + e^x(1)] - (x-2)e^x 2(x-1)(1)}{(x-1)^4} \\
&= \frac{(x-1)^2 e^x (x-1) - 2e^x(x-2)(x-1)}{(x-1)^4} \\
&= \frac{e^x(x-1)[(x-1)^2 - 2(x-2)]}{(x-1)^4} \\
&= \frac{e^x[(x^2-2x+1) - 2x + 4]}{(x-1)^3} \\
&= \frac{e^x[(x^2-4x+4)+1]}{(x-1)^3} \\
&= \frac{e^x[(x-2)^2+1]}{(x-1)^3}
\end{aligned}
$$

เนื่องจาก $(x-2)^2 + 1 \neq 0$ ดังนั้นไม่มีเป็นจุดเปลี่ยนเว้า พิจารณาเครื่องหมาย f'' บนเส้นจำนวนจะได้ว่า

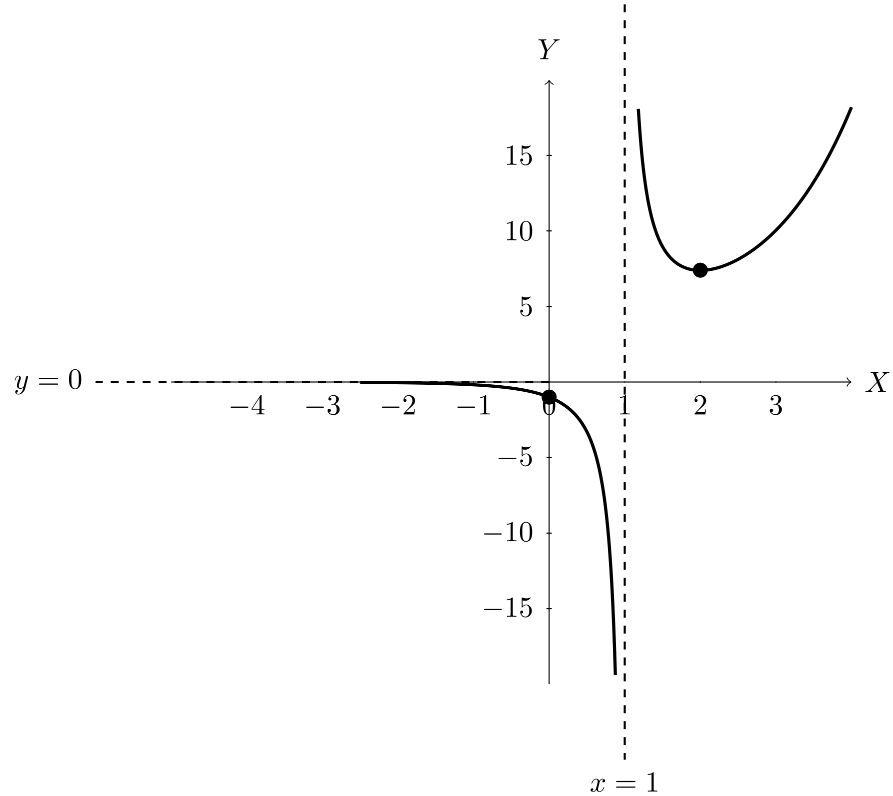
$-$		$+$
	1	

f มีความเว้าอยู่บนบน $(1, \infty)$ และความเว้าอยู่ล่างบน $(\infty, 1)$

5. นำข้อมูลที่ได้มาสรุปบนเส้นจำนวนได้ดังนี้

y'	$-$		$-$		$+$
y''	$-$		$+$		$+$
		1		2	
	ฟังก์ชันลด ความเว้าอยู่ล่าง		ฟังก์ชันลด ความเว้าอยู่บน		ฟังก์ชันเพิ่ม ความเว้าอยู่บน
		$x = 1$ เส้นกำกับแนวยืน		$f(2) = e^2$ จุดต่ำสุดสัมพัทธ์	

นำไปเขียนกราฟได้ดังนี้



10. **(10 คะแนน)** จงหาลิมิตต่อไปนี้

10.1 **(5 คะแนน)** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x - 1}{x\tan x + x^2}$

วิธีทำ ลิมิตอยู่ในรูปแบบ $\dfrac{0}{0}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x - 1}{x\tan x + x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{(\sec^2 x - 1)'}{(x\tan x + x^2)'} && \text{L'Hospital' Law}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2(\sec x)\sec x\tan x}{\tan x + x\sec^2 x + 2x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2\sec^2 x\tan x}{\tan x + x\sec^2 x + 2x} && I.F.\frac{0}{0}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(2\sec^2 x\tan x)'}{(\tan x + x\sec^2 x + 2x)'} && \text{L'Hospital' Law}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{4\sec x(\sec x\tan x)\tan x + 2\sec^2 x\sec^2 x}{\sec^2 x + \sec^2 x + 2x\sec x(\sec x\tan x) + 2}\\
&= \frac{0+2}{1+1+0+2} = \frac{1}{2} \quad \#
\end{aligned}$$

10.2 **(5 คะแนน)** $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(e^{x^{-1}} - 1\right)^{x^{-1}}$

วิธีทำ ลิมิตอยู่ในรูปแบบ $I.F.0^0$ ให้ $y = \left(e^{x^{-1}} - 1\right)^{x^{-1}}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\ln y &= x^{-1}\ln\left(e^{x^{-1}} - 1\right) = \frac{\ln\left(e^{x^{-1}} - 1\right)}{x}\\
\lim_{x\to\infty}\ln y &= \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(e^{x^{-1}} - 1\right)}{x} && I.F.\frac{\infty}{\infty}\\
\ln\left(\lim_{x\to\infty} y\right) &= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\ln\left(e^{x^{-1}} - 1\right)\right)'}{(x)'} && \text{L'Hospital' Law}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{e^{x^{-1}}-1}\cdot e^{x^{-1}}(x^{-1})'}{1}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{x^{-1}} - 1}\cdot e^{x^{-1}}(-x^{-2})\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{-x^{-2}e^{x^{-1}}}{e^{x^{-1}} - 1} && I.F.\frac{0}{0}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{(-x^{-2}e^{x^{-1}})'}{(e^{x^{-1}} - 1)'} && \text{L'Hospital' Law}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{2x^{-3}e^{x^{-1}} - x^{-2}e^{x^{-1}}\cdot(-x^{-2})}{e^{x^{-1}}(-x^{-2})}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x^{-2}e^{x^{-1}}[2x^{-1} + x^{-2}]}{-x^{-2}e^{x^{-1}}}\\
&= \lim_{x\to\infty} -[2x^{-1} + x^{-2}] = 0\\
\lim_{x\to\infty} y &= e^0 = 1
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\lim_{x\to\infty}\left(e^{x^{-1}} - 1\right)^{x^{-1}} = 1 \quad \#$$

เฉลยข้อสอบ SET B

1. (10 **คะแนน**) จงหาลิมิตต่อไปนี้ **(โดยไม่ใช้หลักเกณฑ์ลอปิตาล)** แสดงวิธีทำโดยละเอียด

1.1 (5 **คะแนน**) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x\sqrt{2}+1)^4-1}{(x-1)^3+1}$

วิธีทำ ลิมิตอยู่ในรูป I.F. $\dfrac{0}{0}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{(x\sqrt{2}+1)^4-1}{(x-1)^3+1} &= \lim_{x\to 0}\frac{[(x\sqrt{2}+1)^2-1][(x\sqrt{2}+1)^2+1]}{[(x-1)+1][(x-1)^2-(x-1)1+1^2]} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{[(2x^2+2x\sqrt{2}+1)-1][(2x^2+2x\sqrt{2}+1)+1]}{x[(x^2-2x+1)-(x-1)+1]} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{[2x^2+2x\sqrt{2}][2x^2+2x\sqrt{2}+2]}{x[x^2-3x+3]} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x[2x+2\sqrt{2}][2x^2+2x\sqrt{2}+2]}{x[x^2-3x+3]} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{[2x+2\sqrt{2}][2x^2+2x\sqrt{2}+2]}{[x^2-3x+3]} \\
&= \frac{2\sqrt{2}(2)}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{3} \qquad \#
\end{aligned}$$

1.2 (5 **คะแนน**) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{\sqrt{1-x}+2}-2}{x+3}$

วิธีทำ ลิมิตอยู่ในรูป I.F. $\dfrac{0}{0}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{\sqrt{1-x}+2}-2}{x+3} &= \lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{\sqrt{1-x}+2}-2}{x+3}\cdot\frac{\sqrt{\sqrt{1-x}+2}+2}{\sqrt{\sqrt{1-x}+2}+2} \\
&= \lim_{x\to -3}\frac{(\sqrt{\sqrt{1-x}+2})^2-2^2}{(x+3)(\sqrt{\sqrt{1-x}+2}+2)} \\
&= \lim_{x\to -3}\frac{(\sqrt{1-x}+2)-4}{(x+3)(\sqrt{\sqrt{1-x}+2}+2)} \\
&= \lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{1-x}-2}{(x+3)(\sqrt{\sqrt{1-x}+2}+2)} \\
&= \lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{1-x}-2}{(x+3)(\sqrt{\sqrt{1-x}+2}+2)}\cdot\frac{\sqrt{1-x}+2}{\sqrt{1-x}+2} \\
&= \lim_{x\to -3}\frac{(\sqrt{1-x})^2-2^2}{(x+3)(\sqrt{\sqrt{1-x}+2}+2)(\sqrt{1-x}+2)} \\
&= \lim_{x\to -3}\frac{(1-x)-4}{(x+3)(\sqrt{\sqrt{1-x}+2}+2)(\sqrt{1-x}+2)} \\
&= \lim_{x\to -3}\frac{-(x+3)}{(x+3)(\sqrt{\sqrt{1-x}+2}+2)(\sqrt{1-x}+2)} \\
&= \lim_{x\to -3}\frac{-1}{(\sqrt{\sqrt{1-x}+2}+2)(\sqrt{1-x}+2)} \\
&= \frac{-1}{(2+2)(2+2)} = -\frac{1}{16} \qquad \#
\end{aligned}$$

2. **(10 คะแนน)** จงหาลิมิตต่อไปนี้ **(โดยไม่ใช้หลักเกณฑ์ลอปีตาล)** แสดงวิธีทำโดยละเอียด

2.1 **(5 คะแนน)** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 2x}{\sin^2 x-2x^2}$

วิธีทำ ลิมิตอยู่ในรูป I.F. $\dfrac{0}{0}$ **วิธีที่ 1 เปลี่ยนผลบวกเป็นผลคูณ** จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 2x}{\sin^2 x-2x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\sin\left(-\frac{x}{2}\right)}{x^2\left(\frac{\sin^2 x}{x^2}-2\right)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2\left(\frac{\sin^2 x}{x^2}-2\right)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\frac{\sin\left(\frac{3x}{2}\right)}{x}\cdot\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x}}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2-2}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\frac{\sin\left(\frac{3x}{2}\right)}{\frac{2}{3}\cdot\frac{3x}{2}}\cdot\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2\cdot\frac{x}{2}}}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2-2}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{3\left(\frac{\sin\left(\frac{3x}{2}\right)}{\frac{3x}{2}}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2-2}\\
&= \frac{3\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1}{1^2-2}=-\frac{3}{2}\quad \#
\end{aligned}$$

วิธีที่ 2 ใช้สังยุค จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 2x}{\sin^2 x-2x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 2x}{\sin^2 x-2x^2}\cdot\frac{\cos x+\cos 2x}{\cos x+\cos 2x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-\cos^2 2x}{(\sin^2 x-2x^2)(\cos x+\cos 2x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\sin^2 x)-(1-\sin^2 2x)}{(\sin^2 x-2x^2)(\cos x+\cos 2x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x-\sin^2 x}{(\sin^2 x-2x^2)(\cos x+\cos 2x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(\frac{\sin^2 2x}{x^2}-\frac{\sin^2 x}{x^2}\right)}{x^2\left(\frac{\sin^2 x}{x^2}-2\right)(\cos x+\cos 2x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{4\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2-\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}{\left(\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2-2\right)(\cos x+\cos 2x)}\\
&= \frac{4\cdot 1^2-1^2}{(1^2-2)(1+1)}=-\frac{3}{2}\quad \#
\end{aligned}$$

2.2 **(5 คะแนน)** $\displaystyle\lim_{x\to\infty}e^{-x}\cos(e^x)$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$-1\le\cos\left(e^x\right)\le 1\qquad \text{ทุก ๆ } x\in\mathbb{R}$$

จะได้ว่า $e^{-x}>0$ เมื่อ $x\in\mathbb{R}$ ดังนั้น

$$-e^{-x}\le e^{-x}\cos\left(e^x\right)\le e^{-x}$$

เนื่องจาก $\displaystyle\lim_{x\to\infty}-e^{-x}=\lim_{x\to\infty}-\frac{1}{e^x}=0$ และ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}e^{-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=0$
โดยทฤษฎีบทประกบ (Squeez theorem) จะได้ว่า

$$\lim_{x\to\infty}e^{-x}\cos(e^x)=0$$

3. **(12 คะแนน)** จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

3.1 **(6 คะแนน)** จงหาลิมิตของ $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{x^2}\right)$

วิธีทำ ลิมิตอยู่ในรูป I.F. $\infty-\infty$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{x^2}\right) &= \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{x^2}\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{x^2}} \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2-2x})^2-(\sqrt{x^2})^2}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2}} \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2-2x)-x^2}{\sqrt{x^2(1-\frac{2}{x})}+|x|} \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{-2x}{\sqrt{x^2}\sqrt{1-\frac{2}{x}}-x} \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{-2x}{|x|\sqrt{1-\frac{2}{x}}-x} \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{-2x}{-x\sqrt{1-\frac{2}{x}}-x} \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{-2x}{-x\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)+1} \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}+1} \\
&= \frac{2}{\sqrt{1+0}+1}=1 \quad \#
\end{aligned}$$

3.2 **(6 คะแนน)** ให้ a และ b เป็นค่าคงตัว กำหนดให้

$$f(x)=\begin{cases} ax^3+2x & \text{เมื่อ } |x|\le 1 \\ x^3-bx & \text{เมื่อ } |x|>1 \end{cases}$$

ถ้า f **หาอนุพันธ์ได้ที่** $x=1$ จงหาค่าของ a และ b

วิธีทำ เนื่องจาก f หาอนุพันธ์ได้ที่ $x=1$ จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=1$ นั่นคือ

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to1^+}f(x) &= \lim_{x\to1^-}f(x) \\
\lim_{x\to1^+}(x^3-bx) &= \lim_{x\to1^-}(ax^3+2x) \\
1-b &= a+2 \\
a+b &= -1 \qquad ...(1)
\end{aligned}$$

จะเห็นว่า

$$f'(x)=\begin{cases} 3ax^2+2 & \text{เมื่อ } |x|\le 1 \\ 3x^2-b & \text{เมื่อ } |x|>1 \end{cases}$$

นั่นคือ $f'(1^+)=f'(1^-)$ หรือ

$$\begin{aligned}
3a(1)^2+2 &= 3(1)^2-b \\
3a+b &= 1 \qquad ...(2)
\end{aligned}$$

จาก (1) และ (2) จะได้ว่า $a=1$ และ $b=-2$ #

4. (10 **คะแนน**) จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

4.1 (5 **คะแนน**) จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ โดยใช้**บทนิยาม**

วิธีทำ จากบทนิยาม จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+h-1}-\sqrt[3]{x-1}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+h-1}-\sqrt[3]{x-1}}{h} \cdot \frac{(\sqrt[3]{x+h-1})^2+\sqrt[3]{x+h-1}\sqrt[3]{x-1}+(\sqrt[3]{x-1})^2}{(\sqrt[3]{x+h-1})^2+\sqrt[3]{x+h-1}\sqrt[3]{x-1}+(\sqrt[3]{x-1})^2} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt[3]{x+h-1})^3-(\sqrt[3]{x-1})^3}{h\left[(\sqrt[3]{x+h-1})^2+\sqrt[3]{x+h-1}\sqrt[3]{x-1}+(\sqrt[3]{x-1})^2\right]} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h-1)-(x-1)}{h\left[(\sqrt[3]{x+h-1})^2+\sqrt[3]{x+h-1}\sqrt[3]{x-1}+(\sqrt[3]{x-1})^2\right]} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h\left[(\sqrt[3]{x+h-1})^2+\sqrt[3]{x+h-1}\sqrt[3]{x-1}+(\sqrt[3]{x-1})^2\right]} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{(\sqrt[3]{x+h-1})^2+\sqrt[3]{x+h-1}\sqrt[3]{x-1}+(\sqrt[3]{x-1})^2} \\
&= \frac{1}{(\sqrt[3]{x-1})^2+\sqrt[3]{x-1}\sqrt[3]{x-1}+(\sqrt[3]{x-1})^2} \\
&= \frac{1}{3(\sqrt[3]{x-1})^2} \qquad \#
\end{aligned}$$

4.2 (5 **คะแนน**) ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ โดยที่

$$f\left(1-xg(x)\right) = \frac{1}{(e-1)^{\arctan x}}$$

จงหา $f'(1)$ เมื่อ $g(0)=1$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}
f\left(1-xg(x)\right) &= (e-1)^{-\arctan x} \\
\frac{d}{dx} f\left(1-xg(x)\right) &= \frac{d}{dx}(e-1)^{-\arctan x} \\
f'(1-xg(x)) \cdot \frac{d}{dx}(1-xg(x)) &= (e-1)^{-\arctan x}\ln(e-1)\cdot \frac{d}{dx}(-\arctan x) \\
f'(1-xg(x)) \cdot (-g(x)-xg'(x)) &= (e-1)^{-\arctan x}\ln(e-1)\cdot \left(-\frac{1}{1+x^2}\right)
\end{aligned}$$

เมื่อแทน $x=0$ และ $g(0)=1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
f'(1-0)\cdot(-g(0)-0) &= (e-1)^0 \ln(e-1)\cdot\left(-\frac{1}{1+0}\right) \\
f'(1+0)\cdot(-1) &= \ln(e+1)\cdot(-1) \\
f'(1) &= \ln(e-1) \qquad \#
\end{aligned}$$

5. **(11 คะแนน)** จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

5.1 **(5 คะแนน)** กำหนดให้ $f(x) = xe^{-x}$ จงหาค่าของ $f^{(2021)}(2021)$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -xe^{-x} + e^{-x} \\
f''(x) &= -(-xe^{-x} + e^{-x}) - e^{-x} = xe^{-x} - 2e^{-x} \\
f'''(x) &= (-xe^{-x} + e^{-x}) + 2e^{-x} = -xe^{-x} + 3e^{x} \\
f^{(4)}(x) &= -(-xe^{-x} + e^{-x}) - 3e^{-x} = xe^{-x} - 4e^{-x} \\
&\vdots \\
f^{(2021)}(x) &= -xe^{-x} + 2021e^{-x}
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$f^{(2021)}(2021) = -2021e^{-2021} + 2021e^{-2021} = 0 \quad \#$$

5.2 **(6 คะแนน)** ให้ $y = x(e^x + x)^x$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ ขณะ $x = 1$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\ln y &= \ln x(e^x + x)^x \\
&= \ln x + \ln(e^x + x)^x \\
&= \ln x + x\ln(e^x + x) \\
\frac{d}{dx}\ln y &= \frac{d}{dx}\ln x + \frac{d}{dx}x \cdot \ln(e^x + x) + x\frac{d}{dx}\ln(e^x + x) \\
\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{x} + 1 \cdot \ln(e^x + x) + x \cdot \frac{1}{e^x + x}\frac{d}{dx}(e^x + x) \\
\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{x} + \ln(e^x + x) + \frac{x}{(e^x + x)} \cdot (e^x + 1) \\
\frac{dy}{dx} &= y\left[\frac{1}{x} + \ln(e^x + x) + \frac{xe^x + x}{(e^x + x)}\right] \\
&= x(e^x + x)^x\left[\frac{1}{x} + \ln(e^x + x) + \frac{xe^x + x}{(e^x + x)}\right]
\end{aligned}$$

เมื่อแทน $x = 1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= (e + 1)\left[1 + \ln(e + 1) + \frac{e + 1}{(e + 1)}\right] \\
&= (e + 1)\left[1 + \ln(e + 1) + 1\right] \\
&= (e + 1)\left[2 + \ln(e + 1)\right] \quad \#
\end{aligned}$$

6. **(7 คะแนน)** จงประมาณค่าของ $\dfrac{1}{\sqrt{4.01}}$ โดยใช้**ค่าเชิงอนุพันธ์**

วิธีทำ ให้ $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ จะได้ว่า $f'(x) = -\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$
พิจารณา $x = 4$ และ $\Delta x = 0.01$ จาก

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f(x)\Delta x$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{4.01}} &= f(4.01) \\
&\approx f(4) + f'(4) \cdot (0.01) \\
&= \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{2}4^{-\frac{3}{2}} \cdot 0.01 \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 2^{-3} \cdot 0.01 \\
&= \frac{1}{2} - \frac{0.01}{16} \\
&= \frac{799}{1600} \\
&= 0.499375 \quad \#
\end{aligned}$$

7. (10 **คะแนน**) จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

7.1 (5 **คะแนน**) จงหา**สมการเส้นสัมผัส**ของกราฟ

$$\ln x + x\sqrt{1+xy} = x\tan^2 y + x^3$$

ที่จุด $(1, 0)$

วิธีทำ หาความชันโดยพิจารณา

$$\begin{aligned}
(\ln x + x\sqrt{1+xy})' &= (x\tan^2 y + x^3)' \\
(\ln x)' + x'\sqrt{1+xy} + x(\sqrt{1+xy})' &= x'(\tan^2 y) + x(\tan^2 y)' + (x^3)' \\
\frac{1}{x} + 1\sqrt{1+xy} + x\cdot\frac{1}{2}(1+xy)^{-\frac{1}{2}})(1+xy)' &= 1(\tan^2 y) + x(2\tan y)\sec^2 y\cdot y' + 3x^2 \\
\frac{1}{x} + \sqrt{1+xy} + x\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+xy}}(xy'+y) &= \tan^2 y + 2x\tan y\sec^2 y\cdot y' + 3x^2
\end{aligned}$$

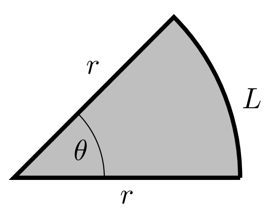
แทน $x = 1$ และ $y = 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
1 + 1 + 1\cdot\frac{1}{2}(y'+0) &= 0 + 0 + 3 \\
y' &= 2
\end{aligned}$$

ดังนั้นสมการเส้นสัมผัสที่จุด $(1, 0)$ มีความชั้นเท่ากับ 2 คือ $y - 0 = 2(x-1)$ หรือ $y = 2x - 2$ #

7.2 (5 **คะแนน**) นำลวดยาว 100 ฟุต ขดเป็นรูปเซกเตอร์ (sector) โดยมีพื้นที่มากสุด เมื่อมุมที่ศูนย์กลางมีค่ากี่เรเดียน

วิธีทำ ให้ r เป็นรัศมีของวงกลม และ L เป็นส่วนความยาวของเส้นโค้งของรูปเซกเตอร์
และ θ เป็นมุมของรูปเซกเตอร์ในหน่วยเรเดียน ดังนั้น $L = r\theta$



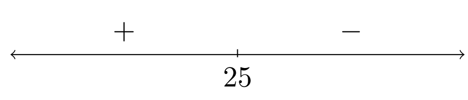
จากที่โจทย์กำหนดจะได้ว่า $2r + L = 2r + r\theta = 100$ นั่นคือ $r\theta = 100 - 2r$ ให้ A เป็นพื้นของรูปเซกเตอร์ ดังนั้น

$$A = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}r(r\theta) = \frac{1}{2}r(100-2r) = 50r - r^2$$

ฉะนั้น

$$A'(r) = 50 - 2r$$

ดังนั้น $r = 25$ เป็นจุดวิกฤต เมื่อพิจารณาเครื่องหมายอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

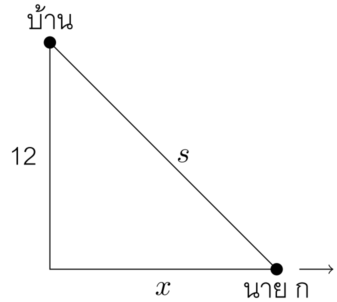


จะได้ว่า $r = 25$ เป็นจุดสูงสุดของฟังก์ชัน A ซึ่งจะได้ว่า $\theta = \frac{100-2(25)}{25} = 2$
สรุปได้ว่ามุมของรูปเซกเตอร์นี้เท่ากับ 2 เรเดียน จะให้รูปเซกเตอร์มีพื้นที่มากสุด #

8. **(10 คะแนน)** จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

8.1 **(5 คะแนน)** บ้านนาย ก อยู่ริมแม่น้ำ เมื่อนาย ก ยืนอยู่อีกฝากหนึ่งของแม่น้ำซึ่งตรงข้ามกับบ้านของเขาโดยมีระยะห่าง 12 เมตร เขาเดินตามแนวขนานกับแม่น้ำด้วยความเร็ว 10 เมตรต่อนาที นาย ก เคลื่อนที่ออกจากบ้านด้วยอัตราเร็วเท่าใดขณะเขาเดินไปได้ 16 เมตร

วิธีทำ ให้ x เป็นระยะทางที่เขาเดินตามแนวขนานกับแม่น้ำ และ s เป็นระยะทางที่เขาอยู่ห่างจากบ้าน



จากรูป $s = \sqrt{12^2 + x^2}$

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= \frac{d}{dt}\sqrt{12^2 + x^2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{12^2 + x^2}}(2x)\frac{dx}{dt} \\ &= \frac{x}{\sqrt{12^2 + x^2}}\frac{dx}{dt}\end{aligned}$$

ขณะที่ $x = 16$ และ $\dfrac{dx}{dt} = 10$ จะได้ว่า

$$\frac{ds}{dt} = \frac{16}{\sqrt{12^2 + 16^2}}(10) = \frac{16}{20}(10) = 8$$

ดังนั้นขณะเขาเดินไปได้ 16 เมตร นาย ก เคลื่อนที่ออกจากบ้านด้วยอัตราเร็ว 8 เมตรต่อนาที #

8.2 **(5 คะแนน)** หากคุณกำลังเตรียมสอนเนื้อหาแคลคูลัสเบื้องต้นสำหรับนักเรียนชั้น ม.6 และได้อ่านตำราเกี่ยวกับบทนิยามของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f จากหนังสือ 2 เล่ม โดยที่

หนังสือเล่มที่ 1 นิยามว่า

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

หนังสือเล่มที่ 2 นิยามว่า

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

คุณคิดว่านิยามทั้งสองแตกต่างกันหรือไม่เพราะเหตุใด จงให้เหตุผลประกอบ

วิธีทำ ไม่แตกต่างกัน พิจารณาโดยการแทนตัวแปร h ด้วย $-h$ในนิยาม 2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{-h \to 0} \frac{f(x) - f(x - (-h))}{-h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x) - f(x+h))}{-h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\end{aligned}$$

9. **(15 คะแนน)** **จงร่างกราฟ** $f(x) = \dfrac{e^x}{x+1}$
และวิเคราะห์กราฟโดยเติมคำตอบลงในตารางให้ถูกต้อง (ถ้าช่องใดไม่มีองค์ประกอบดังกล่าวให้เติมคำว่า **ไม่มี**) จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

โดเมน	$\mathbb{R} - \{-1\}$
จุดตัดแกน X และแกน Y	$(0, 1)$
สมการเส้นกำกับแนวยืน	$x = -1$
สมการเส้นกำกับแนวนอน	$y = 0$
สมการเส้นกำกับแนวเอียง	ไม่มี
จุดวิกฤต	$(0, 1)$
จุดเปลี่ยนเว้า	ไม่มี
จุดสูงสุดสัมพัทธ์	ไม่มี
จุดต่ำสุดสัมพัทธ์	$(0, 1)$
f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง	$(0, \infty)$
f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง	$(-\infty, -1), (-1, 0)$
f มีความเว้าอยู่บน บนช่วง	$(-1, \infty)$
f มีความเว้าอยู่ล่าง บนช่วง	$(-\infty, -1)$

วิธีทำ 1. โดเมนของ f คือ $\mathbb{R} - \{-1\}$ จะเห็นว่า $x = -1$ เป็นเส้นกำกับแนวยืน เนื่องจาก

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{e^x}{x+1} = \infty \quad \text{และ} \quad \lim_{x \to -1^-} \frac{e^x}{x+1} = -\infty$$

จาก

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x+1} = \infty \quad \text{และ} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x+1} = 0$$

จะได้ว่า $y = 0$ เป็นเส้นกำกับแนวนอน
2. จะเห็นว่า $y \neq 0$ ไม่มีจุดตัดแกน X สำหรับ $x = 0$ จะได้ว่า $y = 1$ นั่นคือ จุดตัดแกน Y คือ $(0, 1)$
3. พิจารณา

$$f'(x) = \frac{(x+1)e^x - e^x(1)}{(x+1)^2} = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$$

ดังนั้น $x = 0$ เป็นจุดวิกฤต จะได้ $f(0) = 1$ เมื่อพิจารณาเครื่องหมาย f' บนเส้นจำนวนจะได้ว่า

$$\begin{array}{ccccc} - & & - & & + \\ \hline & -1 & & 0 & \end{array}$$

และ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $(0, \infty)$ และเป็นฟังก์ชันลดบน $(-\infty, -1), (-1, 0)$

4. พิจารณา

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{(x+1)^2(xe^x + e^x) - xe^x 2(x+1)(1)}{(x+1)^4} \\
&= \frac{(x+1)^2 e^x (x+1) - 2xe^x(x+1)}{(x+1)^4} \\
&= \frac{e^x(x+1)[(x+1)^2 - 2x]}{(x+1)^4} \\
&= \frac{e^x[(x^2+2x+1) - 2x]}{(x+1)^3} \\
&= \frac{e^x(x^2+1)}{(x+1)^3}
\end{aligned}
$$

เนื่องจาก $x^2 + 1 \neq 0$ ดังนั้นไม่มีเป็นจุดเปลี่ยนเว้า พิจารณาเครื่องหมาย f'' บนเส้นจำนวนจะได้ว่า

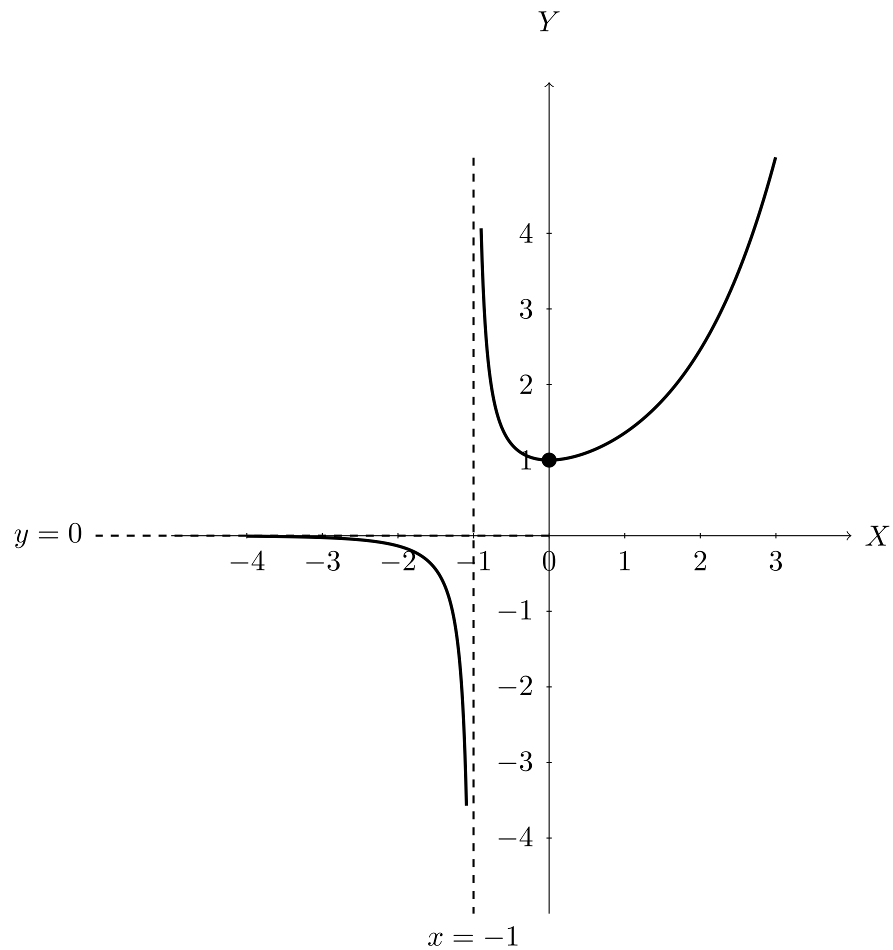
	-1	
$-$		$+$

f มีความเว้าอยู่บนบน $(-1, \infty)$ และความเว้าอยู่ล่างบน $(-\infty, -1)$

5. นำข้อมูลที่ได้มาสรุปบนเส้นจำนวนได้ดังนี้

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, \infty)$
y'	$-$		$-$		$+$
y''	$-$		$+$		$+$
	ฟังก์ชันลด ความเว้าอยู่ล่าง	$x = -1$ เส้นกำกับแนวยืน	ฟังก์ชันลด ความเว้าอยู่บน	$f(0) = 1$ จุดต่ำสุดสัมพัทธ์	ฟังก์ชันเพิ่ม ความเว้าอยู่บน

นำไปเขียนกราฟได้ดังนี้



10. **(10 คะแนน)** จงหาลิมิตต่อไปนี้

10.1 **(5 คะแนน)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos^2 x - 1}{x\tan x - x^3}$

วิธีทำ ลิมิตอยู่ในรูปแบบ $\dfrac{0}{0}$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x\tan x - x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{(\cos^2 x - 1)'}{(x\tan x - x^3)'} && \text{L'Hospital' Law}\\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2(\cos x)(-\sin x)}{\tan x + x\sec^2 x - 3x^2}\\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin 2x}{\tan x + x\sec^2 x - 2x} && I.F.\frac{0}{0}\\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(-\sin 2x)'}{(\tan x + x\sec^2 x - 3x^2)'} && \text{L'Hospital' Law}\\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-2\cos 2x}{\sec^2 x + \sec^2 x + 2x\sec x(\sec x\tan x) - 6x}\\
&= \frac{-2}{1+1+0+0} = -1 \quad \#
\end{aligned}
$$

10.2 **(5 คะแนน)** $\lim\limits_{x\to\infty} \left(e^{x^{-1}} - 1\right)^{2x^{-1}}$

วิธีทำ ลิมิตอยู่ในรูปแบบ $I.F.0^0$ ให้ $y = \left(e^{x^{-1}} - 1\right)^{2x^{-1}}$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\ln y &= 2x^{-1}\ln\left(e^{x^{-1}} - 1\right) = \frac{2\ln\left(e^{x^{-1}} - 1\right)}{x}\\
\lim_{x\to\infty} \ln y &= \lim_{x\to\infty} \frac{2\ln\left(e^{x^{-1}} - 1\right)}{x} && I.F.\frac{\infty}{\infty}\\
\ln\left(\lim_{x\to\infty} y\right) &= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(2\ln\left(e^{x^{-1}} - 1\right)\right)'}{(x)'} && \text{L'Hospital' Law}\\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{e^{x^{-1}}-1}\cdot e^{x^{-1}}(x^{-1})'}{1}\\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^{x^{-1}}-1}\cdot e^{x^{-1}}(-x^{-2})\\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-2x^{-2}e^{x^{-1}}}{e^{x^{-1}}-1} && I.F.\frac{0}{0}\\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{(-2x^{-2}e^{x^{-1}})'}{(e^{x^{-1}}-1)'} && \text{L'Hospital' Law}\\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{4x^{-3}e^{x^{-1}} - 2x^{-2}e^{x^{-1}}\cdot(-x^{-2})}{e^{x^{-1}}(-x^{-2})}\\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x^{-2}e^{x^{-1}}[4x^{-1} + 2x^{-2}]}{-x^{-2}e^{x^{-1}}}\\
&= \lim_{x\to\infty} -[4x^{-1} + 2x^{-2}] = 0\\
\lim_{x\to\infty} y &= e^0 = 1
\end{aligned}
$$

ดังนั้น

$$\lim_{x\to\infty} \left(e^{x^{-1}} - 1\right)^{2x^{-1}} = 1 \quad \#$$