คณิตศาสตร์

มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
คณะครุศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ข้อสอบกลางภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2565

รหัสวิชา	ชื่อวิชา	วันเวลาสอบ	คะแนนเต็ม
MAC1302	แคลคูลัส ๑	เวลา 9:00 - 12:00 วันศุกร์ ที่ 10 กุมภาพันธ์ 2566	105 คะแนน 25%

ชื่อ-สกุล.. **รหัสนักศึกษา**........................... **หมู่เรียน**.........

คำชี้แจง

1. ข้อสอบมีทั้งหมด **12 หน้า จำนวน 10 ข้อ**
2. เขียนชื่อ-สกุล รหัสนักศึกษา และตอนเรียนด้วย**ตัวบรรจงลงในข้อสอบทุกหน้า**
3. **ห้ามใช้** เครื่องคำนวณ และอุปกรณ์สื่อสารทุกชนิดในขณะสอบ
4. **ไม่อนุญาต**ให้นำเอกาสารการเรียน ตำราเรียนทุกชนิดเข้าห้องสอบ
5. **ห้าม** นำข้อสอบออกจากห้องสอบโดยเด็ดขาด
6. หากมี**การทุจริต**ในการสอบ จะได้รับการลงโทษตามระเบียบของมหาวิทยาลัย

ข้าพเจ้าจะปฏิบัติตามข้อตกลงอย่างเคร่งครัด
ลงชื่อผู้เข้าสอบ

....

อาจารย์ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย

ข้อที่	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	รวม
คะแนน											

1. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้โดยไม่ต้องแสดงวิธีทำ (ข้อละ 1 คะแนน)

1.1 ถ้า $\lim_{x\to 1} \dfrac{f(x)-3}{x-1}$ อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด แล้ว $f(1)$ ควรมีค่าเท่าใด ____________

1.2 ให้ $f(x) = \begin{cases} x|x| & \text{เมื่อ } |x| > 1 \\ x+|x| & \text{เมื่อ } |x| < 1 \end{cases}$ จงหาค่าของ $\lim_{x\to 1^+} f(x+1)$ ____________

1.3 จงหาค่าของ $\lim_{x\to\infty} \dfrac{(2x+1)^2}{2(x+1)^2}$ ____________

1.4 ให้ $f(1-\tan x) = \sin x$ จงหา $f'(0)$ ____________

1.5 ให้ $f(x) = \ln\left(\dfrac{2023}{x}\right)$ จงหา $f'(1)$ ____________

1.6 ให้ $f(x) = x^2 \cdot g(x)$ จงหา $f'(0)$ ____________

1.7 ถ้า $x = 2$ เป็นจุด**สูงสุดสัมพัทธ์**ของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ซึ่งมีจุดสูงสุดเพียงจุดเดียวเท่านั้น ____________
แล้วค่าใดต่อไปนี้**เป็นไปไม่ได้**
(ก) $f'(1) = 3$ หรือ (ข) $f'(2) = 0$ หรือ (ค) $f''(2) = 3$

1.8 ให้ $2x^2 + y^2 = 3xy$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ ที่จุด $(1,1)$ ____________

1.9 **จุดวิกฤต**ของ $f(x) = x\ln x$ มีค่าเท่าใด ____________

1.10 จงหา**จุดเปลี่ยนเว้า**ของฟังก์ชัน $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ ____________

ข้อ 2 ถึง 10 จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

2. **(10 คะแนน)** จงหาลิมิตต่อไปนี้ **(โดยไม่ใช้กฎของโลบิตาล)**

   2.1 **(5 คะแนน)** $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^4 - 3x^3 - x + 3}{x^2 - 9}$

   2.2 **(5 คะแนน)** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2} - 2}{x^2 - x - 2}$

3. **(10 คะแนน)** จงหาลิมิตต่อไปนี้ **(โดยไม่ใช้กฎของโลปิตาล)**

3.1 **(5 คะแนน)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan^2 x + x^2}{1-\cos x}$

3.2 **(5 คะแนน)** จงใช้ทฤษฎีบทการบีบ (the Squeeze theorem) หาลิมิตต่อไปนี้

$$\lim_{x\to 0} x^{2566} \cdot \sin\left(\frac{2023}{x}\right)$$

4. **(12 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

4.1 **(6 คะแนน)** จงหาลิมิตของ $\lim_{x \to -\infty} \left(x + \sqrt{x^2 + 2x} \right)$

4.2 **(6 คะแนน)** ให้ a และ b เป็นค่าคงตัวที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(x) = \begin{cases} |x+a| - a & \text{เมื่อ } x < 0 \\ 3x + 2 & \text{เมื่อ } 0 \le x < 1 \\ 3b + ax^2 & \text{เมื่อ } x \ge 1 \end{cases}$

มีความต่อเนื่องบนจำนวนจริง จงหาค่าของ $f(a+b)$

5. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

5.1 **(5 คะแนน)** จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{2}{x+3}$ โดยใช้**บทนิยาม**

5.2 **(5 คะแนน)** ให้ f, g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ โดยที่

$$f\left(e^x \cdot g(x)\right) = g(e^x)$$

จงหา $g'(1)$ เมื่อกำหนดให้ $f(1) = f'(1) = g(0) = g'(0) = 1$

6. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

6.1 **(5 คะแนน)** กำหนดให้ $f(x) = x \ln x$ จงหาค่าของ $f^{(2023)}(1)$

6.2 **(5 คะแนน)** ให้ $y = (\sin x)^{e^x}$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

7. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

7.1 **(5 คะแนน)** จงหา**สมการเส้นสัมผัส**ของกราฟ

$$xe^y + ye^x = xy$$

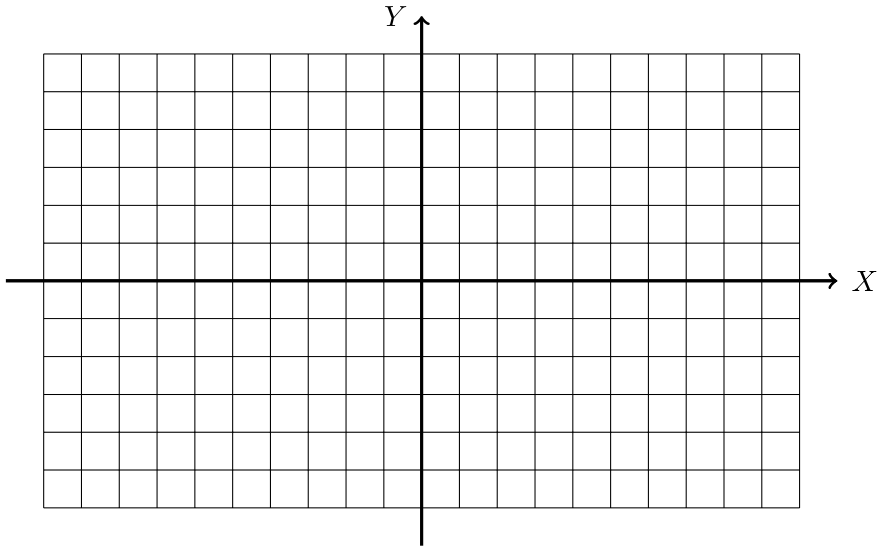
ที่จุด $(0, 0)$

7.2 **(5 คะแนน)** จงประมาณค่าของ $\dfrac{1}{\sqrt{0.99}}$ โดยใช้**ค่าเชิงอนุพันธ์**

8. **(5 คะแนน)** จงหาด้านของสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีพื้นที่มากที่สุดที่บรรจุลงในสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านประชิดมุมฉากทั้งสองด้านคือ 3 และ 4 หน่วย

9. **(15 คะแนน)** จงร่างกราฟ $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x^2+3}$
และวิเคราะห์กราฟโดยเติมคำตอบลงในตารางให้ถูกต้อง (ถ้าช่องใดไม่มีองค์ประกอบดังกล่าวให้เติมคำว่า **ไม่มี**)

โดเมน	
จุดตัดแกน X และแกน Y	
สมการเส้นกำกับแนวดิ่ง	
สมการเส้นกำกับแนวนอน	
จุดวิกฤต	
จุดเปลี่ยนเว้า	
จุดสูงสุดสัมพัทธ์	
จุดต่ำสุดสัมพัทธ์	
f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง	
f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง	
f มีความเว้าอยู่บน บนช่วง	
f มีความเว้าอยู่ล่าง บนช่วง	



Y
X

10. จงหาลิมิตต่อไปนี้

10.1 **(6 คะแนน)** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{xe^x - x^2 - \sin x}{\sin x - x}$

10.2 **(6 คะแนน)** $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$

คณิตศาสตร์

มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
คณะครุศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์
เฉลยข้อสอบกลางภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2565

รหัสวิชา	ชื่อวิชา	วันเวลาสอบ	คะแนนเต็ม
MAC1302	แคลคูลัส ๑	เวลา 9:00 - 12:00 วันศุกร์ ที่ 10 กุมภาพันธ์ 2566	105 คะแนน 25%

โดย ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย

---

1. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้โดยไม่ต้องแสดงวิธีทำ (ข้อละ 1 คะแนน)

1.1 ถ้า $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-3}{x-1}$ อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด แล้ว $f(1)$ ควรมีค่าเท่าใด 3

แนวคำตอบ รูปแบบไม่กำหนดคือ $\frac{0}{0}$ นั่นคือ $f(1)-3=0$ ดังนั้น $f(1)=3$ #

1.2 ให้ $f(x)=\begin{cases} x|x| & \text{เมื่อ } |x|>1 \\ x+|x| & \text{เมื่อ } |x|<1 \end{cases}$ จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x+1)$ 4

แนวคำตอบ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x+1) = f(2^+) = 2(2) = 4$ #

1.3 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+1)^2}{2(x+1)^2}$ 2

แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+1)^2}{2(x+1)^2} &= \lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+4x+1}{2(x^2+2x+1)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2(4+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2})}{2x^2(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2})} \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{(4+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2})}{2(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2})} = \frac{4+0+0}{2(1+0+0)} = 2 \quad \#\end{aligned}$$

1.4 ให้ $f(1-\tan x)=\sin x$ จงหา $f'(0)$ $-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f'(1-\tan x)\cdot(1-\tan x)' &= (\sin x)' \\ f'(1-\tan x)\cdot(-\sec^2 x) &= \cos x \end{aligned}$$

แทน $x=\frac{\pi}{4}$ จะได้ว่า $1-\tan\frac{\pi}{4}=0$, $\sec\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$ และ $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ นั่นคือ

$$\begin{aligned} f'(0)\cdot(-2) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ f'(0) &= -\frac{\sqrt{2}}{4} \quad \# \end{aligned}$$

1.5 ให้ $f(x) = \ln\left(\frac{2023}{x}\right)$ จงหา $f'(1)$ -1

แนวคำตอบ จะได้ว่า $f(x) = \ln 2023 - \ln x$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{x} \\ f'(1) &= -1 \quad \# \end{aligned}$$

1.6 ให้ $f(x) = x^2 \cdot g(x)$ จงหา $f'(0)$ 0

แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2)'g(x) + x^2g'(x) = 2xg(x) + x^2g'(x) \\ f'(0) &= 0 \quad \# \end{aligned}$$

1.7 ถ้า $x = 2$ เป็นจุด**สูงสุดสัมพัทธ์**ของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ซึ่งมีจุดสูงสุดเพียงจุดเดียวเท่านั้น แล้วค่าใดต่อไปนี้**เป็นไปไม่ได้** (ค)

(ก) $f'(1) = 3$ หรือ (ข) $f'(2) = 0$ หรือ (ค) $f''(2) = 3$

แนวคำตอบ จะได้ว่า $x = 2$ เป็นจุดวิกฤต $f'(2) = 0$ โดยที่ $f'(x) > 0$ เมื่อ $x < 2$ และมีความเว้าล่าง $f''(2) < 0$ ดังนั้น (ค) เป็นไปไม่ได้ #

1.8 ให้ $2x^2 + y^2 = 3xy$ จงหา $\frac{dy}{dx}$ ที่จุด $(1, 1)$ 1

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned} (2x^2 + y^2)' &= (3xy)' \\ 4x + 2yy' &= 3xy' + 3y \end{aligned}$$

แทน $x = 1$ และ $y = 1$ จะได้ว่า

$$4 + 2y' = 3y' + 3 \quad \longrightarrow \quad y' = 1 \quad \#$$

1.9 **จุดวิกฤต**ของ $f(x) = x \ln x$ มีค่าเท่าใด e^{-1}

แนวคำตอบ พิจารณา

$$f'(x) = x(\ln x)' + x' \ln x = x \cdot \frac{1}{x} + 1 \cdot \ln x = 1 + \ln x = 0$$

จะได้ว่า $\ln x = -1$ ดังนั้นจุดวิกฤตคือ $x = e^{-1}$ #

1.10 จงหา**จุดเปลี่ยนเว้า**ของฟังก์ชัน $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ $\frac{1}{2}$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 - 6x \\ f''(x) &= 12x - 6 = 0 \end{aligned}$$

ดังนั้นจุดเปลี่ยนเว้าคือ $x = \frac{1}{2}$ #

ข้อ 2 ถึง 10 จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

2. **(10 คะแนน)** จงหาลิมิตต่อไปนี้ **(โดยไม่ใช้กฎของโลปิตาล)**

2.1 **(5 คะแนน)** $\lim_{x\to 3} \frac{x^4 - 3x^3 - x + 3}{x^2 - 9}$

แนวคำตอบ ลิมิตอยู่ในรูปแบบไม่กำหนด ทำโดยการแยกตัวประกอบ

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3} \frac{x^4 - 3x^3 - x + 3}{x^2 - 9} &= \lim_{x\to 3} \frac{x^3(x-3) - (x-3)}{(x-3)(x+3)} \\ &= \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x^3-1)}{(x-3)(x+3)} \\ &= \lim_{x\to 3} \frac{x^3-1}{x+3} \\ &= \frac{3^3-1}{3+3} = \frac{26}{6} = \frac{13}{3} \quad \#\end{aligned}$$

2.2 **(5 คะแนน)** $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x^2 - x - 2}$

แนวคำตอบ ลิมิตอยู่ในรูปแบบไม่กำหนด ทำโดยวิธีสังยุค

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x^2 - x - 2} &= \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x^2 - x - 2} \cdot \frac{\sqrt{x+2} + 2}{\sqrt{x+2} + 2} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{x+2})^2 - 2^2}{(x^2 - x - 2)(\sqrt{x+2} + 2)} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{(x+2) - 4}{(x-2)(x+1)(\sqrt{x+2} + 2)} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)}{(x-2)(x+1)(\sqrt{x+2} + 2)} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+2} + 2)} \\ &= \frac{1}{(3)(4)} = \frac{1}{12} \quad \#\end{aligned}$$

3. **(10 คะแนน)** จงหาลิมิตต่อไปนี้ **(โดยไม่ใช้กฎของโลปิตาล)**

3.1 **(5 คะแนน)** $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan^2 x + x^2}{1-\cos x}$

แนวคำตอบ ลิมิตอยู่ในรูปแบบไม่กำหนด ทำโดยการจัดรูปและใช้ $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\tan^2 x + x^2}{1-\cos x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\tan^2 x + x^2}{1-\cos x} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(\tan^2 x + x^2)(1+\cos x)}{1-\cos^2 x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(\tan^2 x + x^2)(1+\cos x)}{\sin^2 x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + x^2)(1+\cos x)}{\sin^2 x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x^2(\frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} + 1)(1+\cos x)}{\sin^2 x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{((\frac{\sin x}{x})^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} + 1)(1+\cos x)}{\frac{\sin^2 x}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{((\frac{\sin x}{x})^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} + 1)(1+\cos x)}{(\frac{\sin x}{x})^2} \\
&= \frac{(1^2 \cdot \frac{1}{1^2} + 1)(1+1)}{1^2} = 4 \quad \#
\end{aligned}$$

3.2 **(5 คะแนน)** จงใช้ทฤษฎีการบีบ (the Squeeze theorem) หาลิมิตต่อไปนี้

$$\lim_{x\to 0} x^{2566} \cdot \sin\left(\frac{2023}{x}\right)$$

แนวคำตอบ เนื่องจาก

$$-1 \le \sin\left(\frac{2566}{x}\right) \le 1 \qquad \text{ทุก ๆ } x \neq 0$$

จะได้ว่า $x^{2566} > 0$ เมื่อ $x \neq 0$ ดังนั้น

$$-x^{2566} \le x^{2566} \sin\left(\frac{2023}{x}\right) \le x^{2566}$$

เนื่องจาก $\lim_{x\to 0} -x^{2566} = 0 = \lim_{x\to 0} x^{2566}$ โดยทฤษฎีบทการบีบ (the Squeez theorem) จะได้ว่า

$$\lim_{x\to 0} x^{2566} \sin\left(\frac{2023}{x}\right) = 0 \quad \#$$

4. (12 คะแนน) จงตอบคำถามต่อไปนี้

4.1 (6 คะแนน) จงหาลิมิตของ $\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+2x}\right)$

แนวคำตอบ ลิมิตอยู่ในรูปแบบไม่กำหนด ทำโดยวิธีสังยุค

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+2x}\right) &= \lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+2x}\right)\cdot\frac{x-\sqrt{x^2+2x}}{x-\sqrt{x^2+2x}}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-(\sqrt{x^2+2x})^2}{x-\sqrt{x^2+2x}}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-(x^2+2x)}{x-\sqrt{x^2(1+\frac{2}{x})}}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{-2x}{x-\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{2}{x}}}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{-2x}{x-|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}}}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{-2x}{x+x\sqrt{1+\frac{2}{x}}}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{-2x}{x(1+\sqrt{1+\frac{2}{x}})}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{-2}{1+\sqrt{1+\frac{2}{x}}}\\
&= \frac{-2}{1+1} = -1 \quad \#
\end{aligned}$$

4.2 (6 คะแนน) ให้ a และ b เป็นค่าคงตัวที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(x)=\begin{cases}|x+a|-a & \text{เมื่อ } x<0\\ 3x+2 & \text{เมื่อ } 0\le x<1\\ 3b+ax^2 & \text{เมื่อ } x\ge 1\end{cases}$

มีความต่อเนื่องบนจำนวนจริง จงหาค่าของ $f(a+b)$

แนวคำตอบ เนื่องจาก f ต่อเนื่องที่ $x=0$ จะได้ว่า $\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^+}f(x)$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to0^-}|x+a|-a &= \lim_{x\to0^+}3x+2\\
|a|-a &= 2
\end{aligned}$$

ถ้า $a>0$ จะได้ว่า $0=a-a=|a|-a=2$ ซึ่งเป็นไม่ได้ ดังนั้น $a<0$ นั่นคือ

$$-2a=-a-a=|a|-a=2$$

ฉะนั้น $a=-1$

เนื่องจาก f ต่อเนื่องที่ $x=1$ จะได้ว่า $\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^+}f(x)$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to1^-}3x+2 &= \lim_{x\to1^+}3b+ax^2\\
5 &= 3b+a\\
5 &= 3b-1 \therefore \quad b=2
\end{aligned}$$

สรุปได้ว่า $f(a+b)=f(-1+2)=f(1)=3b+a(1^2)=3(2)-1=5 \quad \#$

5. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

5.1 **(5 คะแนน)** จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{2}{x+3}$ โดยใช้**บทนิยาม**

แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{2}{x+h+3}-\dfrac{2}{x+3}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{2(x+3)-2(x+h+3)}{(x+h+3)(x+3)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(2x+6)-(2x+2h+6)}{(x+h+3)(x+3)h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-2h}{(x+h+3)(x+3)h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-2}{(x+h+3)(x+3)} \\
&= -\frac{2}{(x+3)^2} \qquad \#
\end{aligned}$$

5.2 **(5 คะแนน)** ให้ f, g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ โดยที่

$$f\left(e^x \cdot g(x)\right) = g(e^x)$$

จงหา $g'(1)$ เมื่อกำหนดให้ $f(1) = f'(1) = g(0) = g'(0) = 1$

แนวคำตอบ โดยกฎลูกโซ่

$$\begin{aligned}
[f\left(e^x \cdot g(x)\right)]' &= [g(e^x)]' \\
f'\left(e^x \cdot g(x)\right) \cdot (e^x \cdot g(x))' &= g'(e^x) \cdot (e^x)' \\
f'\left(e^x \cdot g(x)\right) \cdot (e^x \cdot g'(x) + (e^x)' g(x)) &= g'(e^x) \cdot e^x \\
f'\left(e^x \cdot g(x)\right) \cdot (e^x g'(x) + e^x g(x)) &= g'(e^x) \cdot e^x
\end{aligned}$$

แทน $x = 0$ และใช้ $f(1) = f'(1) = g(0) = g'(0) = 1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
f'\left(g(0)\right) \cdot (g'(0) + g(0)) &= g'(1) \\
f'\left(1\right) \cdot (1 + 1) &= g'(1) \\
1 \cdot 2 &= g'(1)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $g'(1) = 2 \quad \#$

6. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

6.1 **(5 คะแนน)** กำหนดให้ $f(x) = x \ln x$ จงหาค่าของ $f^{(2023)}(1)$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}
f'(x) &= x(\ln x)' + x'(\ln x) = x \cdot \frac{1}{x} + 1 \ln x = 1 + \ln x \\
f''(x) &= -\frac{1}{x} \\
f'''(x) &= \frac{1}{x^2} \\
f^{(4)}(x) &= \frac{-1 \cdot 2}{x^3} = \frac{-2!}{x^3} \\
f^{(5)}(x) &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{x^4} = \frac{3!}{x^4} \\
&\vdots \\
f^{(2023)}(x) &= \frac{2021!}{x^{2022}}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $f^{(2023)}(1) = 2021!$ #

6.2 **(5 คะแนน)** ให้ $y = (\sin x)^{e^x}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

แนวคำตอบ จะได้ว่า $\ln y = e^x \ln(\sin x)$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
(\ln y)' &= (e^x)(\ln(\sin x))' + (e^x)'(\ln(\sin x)) \\
\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} &= e^x \cdot \frac{1}{\sin x}(\sin x)' + e^x \ln(\arctan x) \\
\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} &= e^x \cdot \frac{1}{\sin x}(\cos x) + e^x \ln(\arctan x) \\
\frac{dy}{dx} &= y\left[e^x \cot x + e^x \ln(\sin x)\right] \\
&= (\sin x)^{e^x}\left[e^x \cot x + e^x \ln(\sin x)\right] \quad \#
\end{aligned}$$

7. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

7.1 **(5 คะแนน)** จงหา**สมการเส้นสัมผัส**ของกราฟ

$$xe^y + ye^x = xy$$

ที่จุด $(0,0)$

แนวคำตอบ หาความชันของเส้นสัมผัสกราฟ โดยการหาอนุพันธ์โดยปริยาย

$$\begin{aligned}(xe^y + ye^x)' &= (xy)' \\ (xe^y)' + (ye^x)' &= xy' + x'y \\ (x)(e^y)' + (x)'(e^y) + (y)(e^x)' + (y)'(e^x) &= xy' + 1y \\ (x)(e^y y') + (1)(e^y) + (y)(e^x) + y'(e^x) &= xy' + 1y \\ xe^y y' + e^y + ye^x + y'e^x &= xy' + y\end{aligned}$$

แทน $x = 0$ และ $y = 0$ จะได้

$$\begin{aligned}0 + 1 + 0 + y' &= 0 + 0 \\ y' &= -1\end{aligned}$$

ดังนั้นสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้งนี้ที่จุด $(0,0)$ มีความชัน -1 มีสมการเป็น

$$\begin{aligned}y - 0 &= -1(x - 0) \\ y &= -x \quad \#\end{aligned}$$

7.2 **(5 คะแนน)** จงประมาณค่าของ $\dfrac{1}{\sqrt{0.99}}$ โดยใช้**ค่าเชิงอนุพันธ์**

แนวคำตอบ ให้ $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$ แล้ว $f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$ จากการประมาณค่าเชิงเส้น

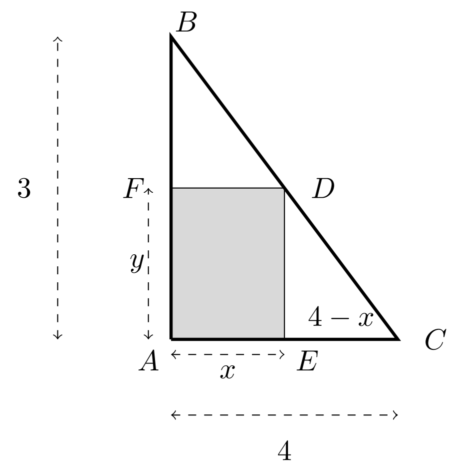
$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$$

ให้ $x = 1$ และ $\Delta x = -0.01$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}f(1 - 0.01) &\approx f(1) + f'(1) \cdot (-0.01) \\ f(0.99) &\approx 1^{-\frac{1}{2}} + \left(-\frac{1}{2} \cdot 1^{-\frac{3}{2}}\right) \cdot (-0.01) \\ \frac{1}{\sqrt{0.99}} &\approx 1 + \frac{0.01}{2} \\ &= 1 + 0.005 \\ &= 1.005 \quad \#\end{aligned}$$

8. **(5 คะแนน)** จงหาด้านของสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีพื้นที่มากที่สุดที่บรรจุลงในสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านประชิดมุมฉากทั้งสองด้านคือ 3 และ 4 หน่วย

แนวคำตอบ สามเหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านประชิดมุมฉากทั้งสองด้านคือ 3 และ 4 หน่วย แสดงได้ดังรูป



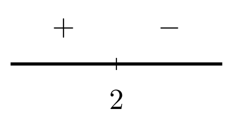
จากรูปให้ x แทนความกว้างของพื้นที่ AFDE และ y แทนความยาวของพื้นที่ AFDE
เนื่องจาก ΔABC คล้ายกับ ΔEDC จะได้ว่า $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{ED}{EC}$ ดังนั้น $\dfrac{3}{4} = \dfrac{y}{4-x}$ นั่นคือ

$$y = \frac{3}{4}(4-x)$$

ให้ A แทนฟังก์ชันของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมพื้นผ้า AFDE จะได้ว่า

$$A(x) = xy = x \cdot \frac{3}{4}(4-x) = \frac{3}{4}(4x - x^2)$$

พิจารณา $A'(x) = \dfrac{3}{4}(4-2x) = 0$ ดังนั้น $x = 2$ เป็นจุดวิกฤตของ A
พิจารณาเครื่องหมาย A' ได้ดังนี้



จะได้ว่า $A(2)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือเป็นค่าสูงสุด
เมื่อ $x = 2$ และ $y = \frac{3}{2}$ ดังนั้นด้านของรูปสี่เหลี่ยมพื้นผ้าที่มีพื้นที่มากที่สุดที่บรรจุลงในสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านประชิดมุมฉากทั้งสองด้านคือ $\frac{3}{2}$ และ 2 #

9. **(15 คะแนน)** จงร่างกราฟ $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x^2+3}$
และวิเคราะห์กราฟโดยเติมคำตอบลงในตารางให้ถูกต้อง (ถ้าช่องใดไม่มีองค์ประกอบดังกล่าวให้เติมคำว่า **ไม่มี**)

โดเมน	$\mathbb{R}$
จุดตัดแกน X และแกน Y	ไม่มี
สมการเส้นกำกับแนวดิ่ง	ไม่มี
สมการเส้นกำกับแนวนอน	$y = 1$
จุดวิกฤต	$x = 0$
จุดเปลี่ยนเว้า	$x = -1, 1$
จุดสูงสุดสัมพัทธ์	ไม่มี
จุดต่ำสุดสัมพัทธ์	$(0, \frac{2}{3})$
f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง	$(0, \infty)$
f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง	$(-\infty, 0)$
f มีความเว้าอยู่บน บนช่วง	$(-1, 1)$
f มีความเว้าอยู่ล่าง บนช่วง	$(-\infty, -1)$ และ $(1, \infty)$

แนวคำตอบ เนื่องจาก $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x^2+3} = \dfrac{(x^2+3)-1}{x^2+3} = \dfrac{x^2+3}{x^2+3} - \dfrac{1}{x^2+3} = 1 - \dfrac{1}{x^2+3}$
เนื่องจาก $x^2+3 \neq 0$ จะเห็นว่าไม่มีเส้นกำกับแนวดิง และโดเมนคือ $\mathbb{R}$ พิจารณา

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2+3}\right) = 1$$

ดังนั้น $y = 1$ เป็นเส้นกำกับแนวนอน เนื่องจาก $x^2+2 \neq 0$ ดังนั้นไม่มีจุดตัดแกน X และแกน Y จะเห็นว่า

$$f'(x) = -(-1)(x^2+3)^{-2}(2x) = \frac{2x}{(x^2+3)^2}$$

ถ้า $f'(x) = 0$ จะได้ว่า $x = 0$ นั่นคือเป็นจุดวิกฤต พิจารณาเคื่องหมาย f' ได้ดังนี้

$-$ $+$

0

พิจารณา

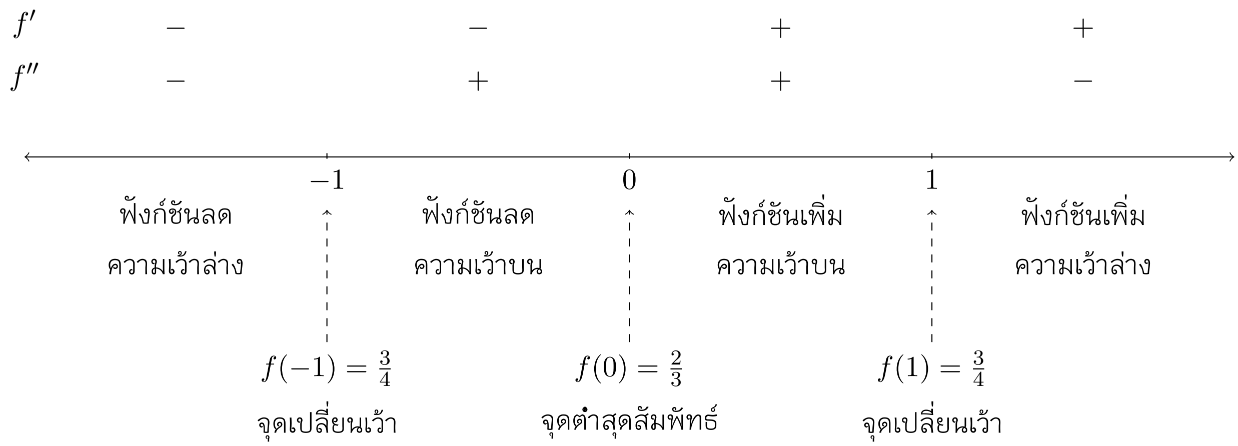
$$f''(x) = \frac{(x^2+3)^2(2) - (2x)2(x^2+3)(2x)}{(x^2+3)^4} = \frac{(x^2+3)[(x^2+3)(2) - 8x^2}{(x^2+3)^4}$$
$$= \frac{6-6x^2}{(x^2+3)^3} = \frac{6(1-x^2)}{(x^2+3)^3} = \frac{6(1-x)(1+x)}{(x^2+3)^3}$$

ถ้า $f'(x) = 0$ จะได้ว่า $x = -1, 1$ นั่นคือเป็นจุดเปลี่ยนเว้า พิจารณาเคื่องหมาย f'' ได้ดังนี้

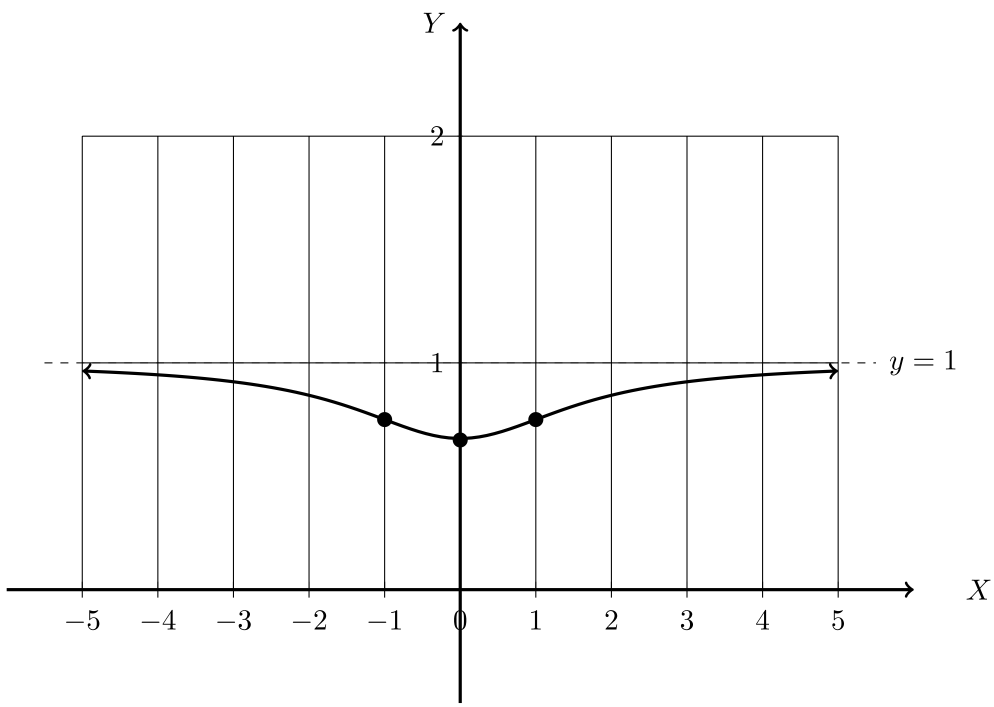
$-$ $+$ $-$

-1 1

พิจารณาเครื่องหมาย f' และ f'' ดังแสดงต่อไปนี้



สรุปเป็นกราฟได้ดังนี้



10. จงหาลิมิตต่อไปนี้

10.1 (6 คะแนน) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^x - x^2 - \sin x}{\sin x - x}$

แนวคำตอบ ลิมิตอยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $I.F.\frac{0}{0}$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{xe^x - x^2 - \sin x}{\sin x - x} &= \lim_{x\to 0}\frac{(xe^x - x^2 - \sin x)'}{(\sin x - x)'} && \text{(L'Hospital'Law)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{xe^x + e^x - 2x - \cos x}{\cos x - 1\cos x} && (I.F.\frac{0}{0})\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(xe^x + e^x - 2x - \cos x)'}{(\cos x - 1)'} && \text{(L'Hospital'Law)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{xe^x + e^x + e^x - 2 + \sin x}{-\sin x} && (I.F.\frac{0}{0})\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(xe^x + 2e^x - 2 + \sin x)'}{(-\sin x)'} && \text{(L'Hospital'Law)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{xe^x + e^x + 2e^x + \cos x}{-\cos x}\\
&= \frac{0+1+2+1}{-1} = -4 \quad \#
\end{aligned}
$$

10.2 (6 คะแนน) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$

แนวคำตอบ จะเห็นว่า $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$ เป็น $I.F.1^{\infty}$

ให้ $y = (1+\frac{1}{x})^{x^2}$ ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
\ln y &= x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\\
\lim_{x\to-\infty}(\ln y) &= \lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^{-2}} && (I.F.\frac{0}{0})\\
\ln\left(\lim_{x\to-\infty} y\right) &= \lim_{x\to-\infty}\frac{(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right))'}{(x^{-2})'} && \text{(L'Hospital'Law)}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot(-x^{-2})}{-x^{-3}}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot x\\
&= \frac{1}{1+0}\cdot(-\infty) = -\infty\\
\therefore \quad \lim_{x\to\infty} y &= e^{-\infty} = 0
\end{aligned}
$$

ดังนั้น

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2} = 0 \quad \#$$