มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
คณะครุศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ข้อสอบกลางภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2564

ชื่อวิชา	แคลคูลัส ๒ Calculus 2
รหัสวิชา	MAC1303
วันเวลาสอบ	วันเสาร์ ที่ 29 มกราคม 2565 เวลา 8:30 - 12:30
สถานที่สอบ	ห้องเรียนออนไลน์ (โปรแกรม Zoom)
ผู้สอน	ผู้ช่วยศาสตรจารย์ ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย
คะแนน	105 คะแนน คิดเป็น 25%

- **ข้อ 1-15** แบบเติมคำตอบ/ตัวเลือก ข้อละ 1 คะแนน (รวม 15 คะแนน)
- **ข้อ 16-24** แบบแสดงวิธีทำ ข้อละ 10 คะแนน (รวม 90 คะแนน)

ข้อ 1

1. จงหาพจน์ที่ 10 ของลำดับ $1, 10, 19, 28, ...$
2. จงหาพจน์ที่ 10 ของลำดับ $2, 10, 18, 26, ...$
3. จงหาพจน์ที่ 20 ของลำดับ $1, -4, 9, -16, 25, -36, ...$
4. จงหาพจน์ที่ 100 ของลำดับ $1, -3, 5, -7, 9, -11, ...$

ข้อ 2

1. กำหนดให้ $\sum_{n=1}^{10}(an+1) = 780$ จงหาค่าของ a
2. กำหนดให้ $\sum_{n=1}^{10}(an+1) = 890$ จงหาค่าของ a
3. กำหนดให้ $\sum_{n=1}^{10}(an+2) = 570$ จงหาค่าของ a
4. กำหนดให้ $\sum_{n=1}^{10}(an+2) = 625$ จงหาค่าของ a

ข้อ 3

1. กำหนดให้ $A = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{60\cdot 61}$ จงหาค่าของ $61A$
2. กำหนดให้ $A = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{59\cdot 61}$ จงหาค่าของ $61A$
3. กำหนดให้ $A = \frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \cdots + \frac{1}{58\cdot 61}$ จงหาค่าของ $61A$
4. กำหนดให้ $A = \frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 9} + \frac{1}{9\cdot 13} + \cdots + \frac{1}{57\cdot 61}$ จงหาค่าของ $61A$

ข้อ 4

1. อนุกรมอนันต์ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3^n}$ มีค่าเท่าใด
2. อนุกรมอนันต์ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{5^{n-1}}$ มีค่าเท่าใด
3. อนุกรมอนันต์ $\sum_{n=0}^{\infty} 5 \cdot 2^{-n}$ มีค่าเท่าใด
4. อนุกรมอนันต์ $\sum_{n=0}^{\infty} 6 \cdot 3^{-n}$ มีค่าเท่าใด

ข้อ 5

1. กำหนดให้ $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 3$ จงหาค่าของ $60x$
2. กำหนดให้ $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 4$ จงหาค่าของ $60x$
3. กำหนดให้ $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 5$ จงหาค่าของ $60x$
4. กำหนดให้ $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 6$ จงหาค่าของ $60x$

ข้อ 6

1. จงหารัศมี (R) แห่งการลู่เข้าของอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{3^n}$
2. จงหารัศมี (R) แห่งการลู่เข้าของอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n}$
3. จงหารัศมี (R) แห่งการลู่เข้าของอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{4^n}$
4. จงหารัศมี (R) แห่งการลู่เข้าของอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} nx^{2n+1}$

ข้อ 7

1. ช่วงแห่งการลู่เข้าของอนุกรมกำลัง $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{n}$ ตรงกับข้อใด

   a. $(0,1)$ b. $(0,1]$ c. $[0,1)$ d. $[0,1]$

2. ช่วงแห่งการลู่เข้าของอนุกรมกำลัง $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x-1)^{2n}}{n}$ ตรงกับข้อใด

   a. $(0,1)$ b. $(0,1]$ c. $[0,1)$ d. $[0,1]$

ข้อ 8

1. ข้อใดคือพหุนามเทย์เลอร์ดีกรี 3 รอบจุด $x=1$ ของฟังก์ชัน $f(x)=\sqrt[3]{x}$

   a. $1+\frac{1}{3}(x-1)-\frac{1}{9}(x-1)^2+\frac{10}{27}(x-1)^3$
   b. $1+\frac{1}{3}(x-1)-\frac{2}{9}(x-1)^2+\frac{10}{27}(x-1)^3$
   c. $1+\frac{1}{3}(x-1)-\frac{2}{9}(x-1)^2+\frac{8}{81}(x-1)^3$
   d. $1+\frac{1}{3}(x-1)-\frac{1}{9}(x-1)^2+\frac{5}{81}(x-1)^3$

2. ข้อใดคือพหุนามเทย์เลอร์ดีกรี 3 รอบจุด $x=1$ ของฟังก์ชัน $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

   a. $1+\frac{1}{3}(x-1)-\frac{2}{9}(x-1)^2+\frac{14}{81}(x-1)^3$
   b. $1-\frac{1}{3}(x-1)+\frac{2}{9}(x-1)^2-\frac{28}{27}(x-1)^3$
   c. $1+\frac{1}{3}(x-1)-\frac{2}{9}(x-1)^2+\frac{28}{27}(x-1)^3$
   d. $1-\frac{1}{3}(x-1)+\frac{2}{9}(x-1)^2-\frac{14}{81}(x-1)^3$

ข้อ 9

1. ข้อใดคือ**เศษเหลือ** ของการประมาณ $\sqrt[3]{1.1}$ โดยใช้ฟังก์ชัน $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ด้วยพหุนามเทย์เลอร์ดีกรี 3 รอบจุด 1

   a. $\dfrac{f^{(3)}(c)}{3!}(0.1)^3$ เมื่อ $0 < c < 1$

   b. $\dfrac{f^{(4)}(c)}{4!}(0.1)^4$ เมื่อ $1 < c < 1.1$

   c. $\dfrac{f^{(4)}(c)}{4!}(0.1)^4$ เมื่อ $0 < c < 1$

   d. $\dfrac{f^{(3)}(c)}{3!}(0.1)^3$ เมื่อ $1 < c < 1$

2. ข้อใดคือ**เศษเหลือ** ของการประมาณ $\sqrt[3]{0.1}$ โดยใช้ฟังก์ชัน $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ด้วยพหุนามเทย์เลอร์ดีกรี 3 รอบจุด 1

   a. $\dfrac{f^{(4)}(c)}{4!}(0.9)^3$ เมื่อ $0.1 < c < 1$

   b. $\dfrac{f^{(3)}(c)}{3!}(0.1)^4$ เมื่อ $0.1 < c < 1$

   c. $\dfrac{f^{(3)}(c)}{3!}(0.9)^4$ เมื่อ $0.1 < c < 1$

   d. $\dfrac{f^{(4)}(c)}{4!}(0.1)^3$ เมื่อ $1 < c < 1.1$

ข้อ 10

1. ข้อใด**ไม่ถูกต้อง**
   (คำตอบมีหลายคำตอบต้องตอบให้ครบทุกคำตอบจึงจะได้คะแนนเต็ม 1 คะแนน)

   a. $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n-1)!}$

   b. ถ้า $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ แล้ว $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

   c. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+2)}{n^2+2}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

   d. $\cos(x^2) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n}}{(2n)!}$

   e. ถ้า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แล้ว $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

ข้อ 11

1. ให้ $\vec{u} = \langle 1, a, b \rangle$ และ $\vec{v} = \langle a, 1, 2 \rangle$ เมื่อ $a \neq 0$ ถ้า $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ตั้งฉากกัน จงหาค่าของ $\left(\dfrac{a-b}{a}\right)^2$
2. ให้ $\vec{u} = \langle a, b, 2 \rangle$ และ $\vec{v} = \langle 1, 1, -a \rangle$ เมื่อ $a \neq 0$ ถ้า $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ตั้งฉากกัน จงหาค่าของ $\left(\dfrac{a+2b}{a}\right)^2$
3. ให้ $\vec{u} = \langle 1, a, 2 \rangle$ ถ้าโคไซน์แสดงทิศทางของ $\vec{u}$ กับแกน X เท่ากับ $\frac{1}{3}$ จงหาค่าของ a
4. ให้ $\vec{u} = \langle a, 2, 2 \rangle$ ถ้าโคไซน์แสดงทิศทางของ $\vec{u}$ กับแกน Z เท่ากับ $\frac{2}{3}$ จงหาค่าของ a

ข้อ 12

1. ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกัน จงหาค่าของ $\|3\vec{u} + 4\vec{v}\|$
2. ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกัน จงหาค่าของ $\|5\vec{u} - 12\vec{v}\|$
3. ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกัน จงหาค่าของ $\|7\vec{u} + 24\vec{v}\|$
4. ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกัน จงหาค่าของ $\|8\vec{u} - 15\vec{v}\|$

ข้อ 13

1. ระยะทางระหว่างจุด $(1, 2, 3)$ กับระนาบ $6x + 2y - 3z + 6 = 0$ เท่ากับเท่าใด
2. ระยะทางระหว่างระนาบ $6x + 2y + 3z - 11 = 0$ กับระนาบ $6x + 2y + 3z + 10 = 0$ เท่ากับเท่าใด
3. ระยะทางระหว่างระนาบ $6x - 2y + 3z = 10$ กับระนาบ $6x - 2y + 3z + 18 = 0$ เท่ากับเท่าใด
4. ระยะทางระหว่างจุด $(1, 2, 3)$ กับระนาบ $6x + 2y + 3z - 5 = 0$ เท่ากับเท่าใด

ข้อ 14

1. จงหามุมระหว่างเส้นตรง $x = y, z = 1$ กับระนาบ $-y + z = 0$
2. จงหามุมระหว่างเส้นตรง $x = y = z$ กับระนาบ $x + y + z = 0$
3. จงหามุมระหว่างระนาบ $x + y = 5$ กับระนาบ $-y + z = 4$
4. จงหามุมระหว่างระนาบ $x + z = 5$ กับระนาบ $x + y = 4$

ข้อ 15

1. ข้อใด**ไม่ถูกต้อง**
   (คำตอบมีหลายคำตอบต้องตอบให้ครบทุกคำตอบจึงจะได้คะแนนเต็ม 1 คะแนน)

   a. ถ้า L_1 และ L_2 ตัดกัน แล้วเราจะไม่นิยามระยะทางระหว่างเส้นตรงทั้งสอง
   b. เวกเตอร์แนวฉากคู่ $(\vec{B})$ ไม่จำเป็นต้องมีขนาดหนึ่งหน่วยเสมอไป
   c. ถ้า L_1 และ L_2 ไม่ตัดกันและไม่ขนานกันด้วย เรากล่าวได้ว่า L_1 และ L_2 เป็นเส้นไขว้ต่างระนาบ
   d. เมื่อเราทราบอัตราเร่งขณะเวลา t เราย่อมหาเวกเตอร์ความเร่งที่เวลา t นั่นได้เสมอ
   e. ระยะห่างจากจุด B ไปยังจุดเชิงตั้งฉาก (M) บนเส้นตรงหนึ่ง คือระยะที่สั้นที่สุดของจุด B กับเส้นตรงนั้น ๆ

ข้อ 16

16.1 จงตรวจสอบว่าลำดับ $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}-n}\right\}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

16.1 จงตรวจสอบว่าลำดับ $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2n}-n}\right\}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

16.1 จงตรวจสอบว่าลำดับ $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3n}-n}\right\}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

16.1 จงตรวจสอบว่าลำดับ $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n^2+4n}-n}\right\}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

16.2 จงตรวจสอบว่าลำดับ $\{a_n\}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก เมื่อกำหนดให้

$$a_n = (-1)^n \cos(n\pi) \qquad \text{เมื่อ } n = 1, 2, 3, ...$$

16.2 จงตรวจสอบว่าลำดับ $\{a_n\}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก เมื่อกำหนดให้

$$a_n = (-1)^n \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right) \qquad \text{เมื่อ } n = 1, 2, 3, ...$$

16.3 จงตรวจสอบว่าลำดับ $\{a_n\}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก เมื่อกำหนดให้

$$a_n = (-1)^n \tan\left(\frac{(2n+1)\pi}{4}\right) \qquad \text{เมื่อ } n = 1, 2, 3, ...$$

ข้อ 17

17.1 กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับซึ่งสอดคล้องเงื่อนไข

$$a_1 = 2 \quad \text{และ } a_{n+1} = \frac{1+a_n}{1-a_n} \quad \text{เมื่อ } n = 1, 2, 3, ...$$

จงหาค่าของ $\displaystyle\sum_{n=1}^{2022} a_n$

17.1 กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับซึ่งสอดคล้องเงื่อนไข

$$a_1 = -3 \quad \text{และ } a_{n+1} = \frac{1+a_n}{1-a_n} \quad \text{เมื่อ } n = 1, 2, 3, ...$$

จงหาค่าของ $\displaystyle\sum_{n=1}^{2022} a_n$

17.1 กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับซึ่งสอดคล้องเงื่อนไข

$$a_1 = 2 \quad \text{และ } a_{n+1} = \frac{1+a_n}{1-a_n} \quad \text{เมื่อ } n = 1, 2, 3, ...$$

จงหาค่าของ $\displaystyle\sum_{n=1}^{2565} a_n$

17.1 กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับซึ่งสอดคล้องเงื่อนไข

$$a_1 = -3 \quad \text{และ } a_{n+1} = \frac{1+a_n}{1-a_n} \quad \text{เมื่อ } n = 1, 2, 3, ...$$

จงหาค่าของ $\displaystyle\sum_{n=1}^{2565} a_n$

17.2 จงตรวจสอบอนุกรมต่อไปนี้ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$

17.2 จงตรวจสอบอนุกรมต่อไปนี้ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\ln(n+2)}$

17.2 จงตรวจสอบอนุกรมต่อไปนี้ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)\ln(n+3)}$

17.2 จงตรวจสอบอนุกรมต่อไปนี้ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+4)\ln(n+4)}$

ข้อ 18

18.1 จงทดสอบอนุกรมต่อไปนี้ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2^n}{3^{n^2}}$

18.1 จงทดสอบอนุกรมต่อไปนี้ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3^n}{2^{n^2}}$

18.1 จงทดสอบอนุกรมต่อไปนี้ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4^n}{2^{n^2}}$

18.1 จงทดสอบอนุกรมต่อไปนี้ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4^n}{3^{n^2}}$

18.2 จงทดสอบอนุกรมต่อไปนี้ว่าลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ หรือลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข หรือลู่ออก

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!+(2n)!}$$

18.2 จงทดสอบอนุกรมต่อไปนี้ว่าลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ หรือลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข หรือลู่ออก

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!-(2n)!}$$

ข้อ 19

1. จงหารัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้าของอนุกรม $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (6-5x)^{2n}}{n \cdot 9^n}$
2. จงหารัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้าของอนุกรม $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (6x-5)^{2n}}{n \cdot 9^n}$
3. จงหารัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้าของอนุกรม $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (6x-5)^{2n+1}}{n \cdot 9^n}$
4. จงหารัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้าของอนุกรม $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (6-5x)^{2n+2}}{n \cdot 9^n}$

ข้อ 20

1. ให้ $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ จงประมาณค่าของ $\dfrac{1}{\sqrt[3]{1.1}}$ โดยใช้พหุนามเทย์เลอร์ 3 ของ f รอบจุด $x = 1$ พร้อมทั้งหาขอบเขตความผิดพลาด
2. ให้ $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ จงประมาณค่าของ $\dfrac{1}{\sqrt[3]{0.9}}$ โดยใช้พหุนามเทย์เลอร์ 3 ของ f รอบจุด $x = 1$ พร้อมทั้งหาขอบเขตความผิดพลาด

ข้อ 21

จงใช้ตารางเทย์เลอร์

21.1 จงหาฟังก์ชันผลบวกของอนุกรม $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{2^n(n-1)!}$

21.1 จงหาฟังก์ชันผลบวกของอนุกรม $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{3^n(n-1)!}$

21.2 จงหาอนุกรมกำลังซึ่งมีฟังก์ชันผลบวกต่อไปนี้ $f(x) = x\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2$

21.2 จงหาอนุกรมกำลังซึ่งมีฟังก์ชันผลบวกต่อไปนี้ $f(x) = x\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2$

ข้อ 22

22.1 ให้ $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$ เป็นเวกเตอร์ในสามมิติ ถ้า $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ โดยที่ $\|\vec{a}\|=1, \|\vec{b}\|=2$ และ $\|\vec{c}\|=3$ จงหาค่าของ $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

22.1 ให้ $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$ เป็นเวกเตอร์ในสามมิติ ถ้า $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ โดยที่ $\|\vec{a}\|=1, \|\vec{b}\|=3$ และ $\|\vec{c}\|=4$ จงหาค่าของ $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

22.1 ให้ $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$ เป็นเวกเตอร์ในสามมิติ ถ้า $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ โดยที่ $\|\vec{a}\|=2, \|\vec{b}\|=3$ และ $\|\vec{c}\|=5$ จงหาค่าของ $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

22.1 ให้ $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$ เป็นเวกเตอร์ในสามมิติ ถ้า $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ โดยที่ $\|\vec{a}\|=2, \|\vec{b}\|=1$ และ $\|\vec{c}\|=7$ จงหาค่าของ $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

21.2 ให้ L เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $(1,2,1)$ และตั้งฉากกับระนาบ M ที่มีสมการเป็น $2x+y-2z=20$ จงหาจุดตัดของเส้นตรง L กับระนาบ M

21.2 ให้ L เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $(1,-2,1)$ และตั้งฉากกับระนาบ M ที่มีสมการเป็น $2x+y-2z=-7$ จงหาจุดตัดของเส้นตรง L กับระนาบ M

21.2 ให้ L เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $(1,2,-1)$ และตั้งฉากกับระนาบ M ที่มีสมการเป็น $2x+y-2z=-12$
จงหาจุดตัดของเส้นตรง L กับระนาบ M

21.2 ให้ L เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-1,2,1)$ และตั้งฉากกับระนาบ M ที่มีสมการเป็น $2x+y-2z=25$ จงหาจุดตัดของเส้นตรง L กับระนาบ M

ข้อ 23

กำหนดให้ $L_1 : x = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{3}$ และ $L_2 : \dfrac{4-x}{2} = \dfrac{y-1}{4} = z-5$ เป็นเส้นตรงในสามมิติ

23.1 จงหาจุดตัดของเส้นตรง L_1 และ L_2

23.2 จงหาสมการระนาบที่ผ่านเส้นตรง L_1 และ L_2

กำหนดให้ $L_1 : x = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z}{2}$ และ $L_2 : \dfrac{4-x}{2} = \dfrac{y-1}{5} = z-3$ เป็นเส้นตรงในสามมิติ

23.1 จงหาจุดตัดของเส้นตรง L_1 และ L_2

23.2 จงหาสมการระนาบที่ผ่านเส้นตรง L_1 และ L_2

กำหนดให้ $L_1 : x = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z}{3}$ และ $L_2 : \dfrac{4-x}{2} = \dfrac{y-4}{5} = z-5$ เป็นเส้นตรงในสามมิติ

23.1 จงหาจุดตัดของเส้นตรง L_1 และ L_2

23.2 จงหาสมการระนาบที่ผ่านเส้นตรง L_1 และ L_2

กำหนดให้ $L_1 : x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+2}{4}$ และ $L_2 : \dfrac{4-x}{2} = \dfrac{y-1}{3} = z-5$ เป็นเส้นตรงในสามมิติ

23.1 จงหาจุดตัดของเส้นตรง L_1 และ L_2

23.1 จงหาสมการระนาบที่ผ่านเส้นตรง L_1 และ L_2

ข้อ 24

1. จงหาเวกเตอร์เส้นสัมผัสหน่วย $\vec{T}$ เวกเตอร์แนวฉากหน่วย $\vec{N}$ และเวกเตอร์แนวฉากคู่ $\vec{B}$ ของเส้นโค้ง

$$\vec{r}(t) = \langle 2\sin^2 t, \sin 2t, t\rangle \quad \text{ที่จุด} \quad (2, 0, \tfrac{\pi}{2})$$

2. จงหาเวกเตอร์เส้นสัมผัสหน่วย $\vec{T}$ เวกเตอร์แนวฉากหน่วย $\vec{N}$ และเวกเตอร์แนวฉากคู่ $\vec{B}$ ของเส้นโค้ง

$$\vec{r}(t) = \langle 2\sin^2 t, \sin 2t, t\rangle \quad \text{ที่จุด} \quad (2, 0, -\tfrac{\pi}{2})$$

3. จงหาเวกเตอร์เส้นสัมผัสหน่วย $\vec{T}$ เวกเตอร์แนวฉากหน่วย $\vec{N}$ และเวกเตอร์แนวฉากคู่ $\vec{B}$ ของเส้นโค้ง

$$\vec{r}(t) = \langle 2\cos^2 t, \sin 2t, t\rangle \quad \text{ที่จุด} \quad (0, 0, \tfrac{\pi}{2})$$

4. จงหาเวกเตอร์เส้นสัมผัสหน่วย $\vec{T}$ เวกเตอร์แนวฉากหน่วย $\vec{N}$ และเวกเตอร์แนวฉากคู่ $\vec{B}$ ของเส้นโค้ง

$$\vec{r}(t) = \langle 2\cos^2 t, \sin 2t, t\rangle \quad \text{ที่จุด} \quad (0, 0, -\tfrac{\pi}{2})$$

เฉลยข้อสอบกลางภาค

ข้อ 1

1. จงหาพจน์ที่ 10 ของลำดับ $1, 10, 19, 28, ...$
   วิธีทำ จะเห็นว่า $a_n = 9n - 8$ ดังนั้น $a_{10} = 82$ #

2. จงหาพจน์ที่ 10 ของลำดับ $2, 10, 18, 26, ...$
   วิธีทำ จะเห็นว่า $a_n = 8n - 6$ ดังนั้น $a_{10} = 74$ #

3. จงหาพจน์ที่ 20 ของลำดับ $1, -4, 9, -16, 25, -36, ...$
   วิธีทำ จะเห็นว่า $a_n = (-1)^{n-1}n^2$ ดังนั้น $a_{20} = -400$ #

4. จงหาพจน์ที่ 100 ของลำดับ $1, -3, 5, -7, 9, -11, ...$
   วิธีทำ จะเห็นว่า $a_n = (-1)^{n-1}(2n-1)$ ดังนั้น $a_{100} = -199$ #

ข้อ 2

1. กำหนดให้ $\sum_{n=1}^{10}(an+1) = 780$ จงหาค่าของ a
   วิธีทำ จะเห็นว่า $a\sum_{n=1}^{10} n + 10 = a(55) + 10 = 780$ ดังนั้น $a = 14$ #

2. กำหนดให้ $\sum_{n=1}^{10}(an+1) = 890$ จงหาค่าของ a
   วิธีทำ จะเห็นว่า $a\sum_{n=1}^{10} n + 10 = a(55) + 10 = 890$ ดังนั้น $a = 16$ #

3. กำหนดให้ $\sum_{n=1}^{10}(an+2) = 570$ จงหาค่าของ a
   วิธีทำ จะเห็นว่า $a\sum_{n=1}^{10} n + 20 = a(55) + 20 = 570$ ดังนั้น $a = 10$ #

4. กำหนดให้ $\sum_{n=1}^{10}(an+2) = 625$ จงหาค่าของ a
   วิธีทำ จะเห็นว่า $a\sum_{n=1}^{10} n + 20 = a(55) + 20 = 625$ ดังนั้น $a = 11$ #

ข้อ 3

1. กำหนดให้ $A = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{60\cdot 61}$ จงหาค่าของ $61A$

วิธีทำ พิจารณา telescoping seires จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 61A &= 61\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{60} - \frac{1}{61}\right) \\ &= 61\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{61}\right) = 61 \cdot \frac{60}{61} = 60 \quad \# \end{aligned}$$

2. กำหนดให้ $A = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{59\cdot 61}$ จงหาค่าของ $61A$

วิธีทำ พิจารณา telescoping seires จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 61A &= 61 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{59} - \frac{1}{61}\right) \\ &= 61 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{61}\right) = 61 \cdot \frac{30}{61} = 30 \quad \# \end{aligned}$$

3. กำหนดให้ $A = \frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \cdots + \frac{1}{58\cdot 61}$ จงหาค่าของ $61A$

วิธีทำ พิจารณา telescoping seires จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 61A &= 61 \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{58} - \frac{1}{61}\right) \\ &= 61 \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{61}\right) = 61 \cdot \frac{20}{61} = 20 \quad \# \end{aligned}$$

4. กำหนดให้ $A = \frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 9} + \frac{1}{9\cdot 13} + \cdots + \frac{1}{57\cdot 61}$ จงหาค่าของ $61A$

วิธีทำ พิจารณา telescoping seires จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 61A &= 61 \cdot \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{57} - \frac{1}{61}\right) \\ &= 61 \cdot \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{61}\right) = 61 \cdot \frac{15}{61} = 15 \quad \# \end{aligned}$$

ข้อ 4

1. อนุกรมอนันต์ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3^n}$ มีค่าเท่าใด

   วิธีทำ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{2}{1-\frac{1}{3}} = 3 \quad \#$

2. อนุกรมอนันต์ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{5^{n-1}}$ มีค่าเท่าใด

   วิธีทำ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{5^{n-1}} = \frac{4}{1-\frac{1}{5}} = 5 \quad \#$

3. อนุกรมอนันต์ $\sum_{n=0}^{\infty} 5 \cdot 2^{-n}$ มีค่าเท่าใด

   วิธีทำ $\sum_{n=0}^{\infty} 5 \cdot 2^{-n} = \frac{5}{1-\frac{1}{2}} = 10 \quad \#$

4. อนุกรมอนันต์ $\sum_{n=0}^{\infty} 6 \cdot 3^{-n}$ มีค่าเท่าใด

   วิธีทำ $\sum_{n=0}^{\infty} 6 \cdot 3^{-n} = \frac{6}{1-\frac{1}{3}} = 9 \quad \#$

ข้อ 5

1. กำหนดให้ $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 3$ จงหาค่าของ $60x$

   วิธีทำ เนื่องจาก $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} = 3$ จะได้ว่า $x = \frac{2}{3}$ ดังนั้น $60x = 40 \quad \#$

2. กำหนดให้ $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 4$ จงหาค่าของ $60x$

   วิธีทำ เนื่องจาก $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} = 4$ จะได้ว่า $x = \frac{3}{4}$ ดังนั้น $60x = 45 \quad \#$

3. กำหนดให้ $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 5$ จงหาค่าของ $60x$

   วิธีทำ เนื่องจาก $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} = 5$ จะได้ว่า $x = \frac{4}{5}$ ดังนั้น $60x = 48 \quad \#$

4. กำหนดให้ $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 6$ จงหาค่าของ $60x$

   วิธีทำ เนื่องจาก $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} = 6$ จะได้ว่า $x = \frac{5}{6}$ ดังนั้น $60x = 50 \quad \#$

ข้อ 6

1. จงหารัศมี (R) แห่งการลู่เข้าของอนุกรมกำลัง $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{3^n}$

   วิธีทำ

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} \cdot 3^{n+1} = 3 \quad \#$$

2. จงหารัศมี (R) แห่งการลู่เข้าของอนุกรมกำลัง $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n}$

   วิธีทำ

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \cdot 2^{n+1} = 2 \quad \#$$

3. จงหารัศมี (R) แห่งการลู่เข้าของอนุกรมกำลัง $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{4^n}$

   วิธีทำ

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4^n} \cdot 4^{n+1} = 4 \quad \#$$

4. จงหารัศมี (R) แห่งการลู่เข้าของอนุกรมกำลัง $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$

   วิธีทำ

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1 \quad \#$$

ข้อ 7

1. ช่วงแห่งการลู่เข้าของอนุกรมกำลัง $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x-1)^n}{n}$ ตรงกับข้อใด

   a. $(0,1)$ b. $(0,1]$ c. $[0,1)$ d. $[0,1]$

   วิธีทำ พิจารณา

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2x-1)^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{(2x-1)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}|2x-1|\cdot\frac{n}{n+1} = |2x-1| < 1$$

   จะได้ว่า

$$\begin{aligned}|2x-1| &< 1\\ -1 < 2x-1 &< 1\\ 0 < 2x &< 2\\ 0 < x &< 1\end{aligned}$$

   พิจารณา
   กรณี $x=0$ จะได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า (อนุกรมสลับ)
   กรณี $x=1$ จะได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ เป็นอนุกรมลู่ออก $(p=1)$
   สรุปได้ว่าช่วงแห่งการลู่เข้าคือ $[0,1)$ #

2. ช่วงแห่งการลู่เข้าของอนุกรมกำลัง $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x-1)^{2n}}{n}$ ตรงกับข้อใด

   a. $(0,1)$ b. $(0,1]$ c. $[0,1)$ d. $[0,1]$

   วิธีทำ พิจารณา

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2x-1)^{2n+2}}{n+1}\cdot\frac{n}{(2x-1)^{2n}}\right| = \lim_{n\to\infty}|2x-1|^2\cdot\frac{n}{n+1} = |2x-1|^2 < 1$$

   จะได้ว่า

$$\begin{aligned}|2x-1| &< 1\\ -1 < 2x-1 &< 1\\ 0 < 2x &< 2\\ 0 < x &< 1\end{aligned}$$

   พิจารณา $x=0,1$ จะได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x-1)^{2n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ เป็นอนุกรมลู่ออก $(p=1)$
   สรุปได้ว่าช่วงแห่งการลู่เข้าคือ $(0,1)$ #

ข้อ 8

1. ข้อใดคือพหุนามเทย์เลอร์ดีกรี 3 รอบจุด $x = 1$ ของฟังก์ชัน $f(x) = \sqrt[3]{x}$

   a. $1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{9}(x-1)^2 + \frac{10}{27}(x-1)^3$
   b. $1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{2}{9}(x-1)^2 + \frac{10}{27}(x-1)^3$
   c. $1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{2}{9}(x-1)^2 + \frac{8}{81}(x-1)^3$
   d. $1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{9}(x-1)^2 + \frac{5}{81}(x-1)^3$

   วิธีทำ พิจารณา

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt[3]{x} & f(1) &= 1 \\
f'(x) &= \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} & f'(1) &= \frac{1}{3} \\
f''(x) &= -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} & f'(1) &= -\frac{2}{9} \\
f'''(x) &= \frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}} & f'(1) &= \frac{10}{27}
\end{aligned}
$$

   จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
T_3(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 \\
&= 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{9}(x-1)^2 + \frac{5}{81}(x-1)^3 \quad \#
\end{aligned}
$$

2. ข้อใดคือพหุนามเทย์เลอร์ดีกรี 3 รอบจุด $x = 1$ ของฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

   a. $1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{2}{9}(x-1)^2 + \frac{14}{81}(x-1)^3$
   b. $1 - \frac{1}{3}(x-1) + \frac{2}{9}(x-1)^2 - \frac{28}{27}(x-1)^3$
   c. $1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{2}{9}(x-1)^2 + \frac{28}{27}(x-1)^3$
   d. $1 - \frac{1}{3}(x-1) + \frac{2}{9}(x-1)^2 - \frac{14}{81}(x-1)^3$

   วิธีทำ พิจารณา

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^{-\frac{1}{3}} & f(1) &= 1 \\
f'(x) &= -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} & f'(1) &= -\frac{1}{3} \\
f''(x) &= \frac{4}{9}x^{-\frac{7}{3}} & f'(1) &= \frac{4}{9} \\
f'''(x) &= -\frac{28}{27}x^{-\frac{10}{3}} & f'(1) &= -\frac{28}{27}
\end{aligned}
$$

   จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
T_3(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 \\
&= 1 - \frac{1}{3}(x-1) + \frac{2}{9}(x-1)^2 - \frac{14}{81}(x-1)^3 \quad \#
\end{aligned}
$$

ข้อ 9

1. ข้อใดคือ**เศษเหลือ** ของการประมาณ $\sqrt[3]{1.1}$ โดยใช้ฟังก์ชัน $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ด้วยพหุนามเทย์เลอร์ดีกรี 3 รอบจุด 1

   a. $\dfrac{f^{(3)}(c)}{3!}(0.1)^3$ เมื่อ $0 < c < 1$

   b. $\dfrac{f^{(4)}(c)}{4!}(0.1)^4$ เมื่อ $1 < c < 1.1$

   c. $\dfrac{f^{(4)}(c)}{4!}(0.1)^4$ เมื่อ $0 < c < 1$

   d. $\dfrac{f^{(3)}(c)}{3!}(0.1)^3$ เมื่อ $1 < c < 1$

   วิธีทำ เศษเหลือเท่ากับ $R_3(1.1)$ เมื่อ $1 < c < 1.1$ นั่นคือ

$$R_3(1.1) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}(1.1-1)^4 = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}(0.1)^4$$

2. ข้อใดคือ**เศษเหลือ** ของการประมาณ $\sqrt[3]{0.1}$ โดยใช้ฟังก์ชัน $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ด้วยพหุนามเทย์เลอร์ดีกรี 3 รอบจุด 1

   a. $\dfrac{f^{(4)}(c)}{4!}(0.9)^3$ เมื่อ $0.1 < c < 1$

   b. $\dfrac{f^{(3)}(c)}{3!}(0.1)^4$ เมื่อ $0.1 < c < 1$

   c. $\dfrac{f^{(3)}(c)}{3!}(0.9)^4$ เมื่อ $0.1 < c < 1$

   d. $\dfrac{f^{(4)}(c)}{4!}(0.1)^3$ เมื่อ $1 < c < 1.1$

   วิธีทำ เศษเหลือเท่ากับ $R_3(0.1)$ เมื่อ $0.1 < c < 1$ นั่นคือ

$$R_3(0.1) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}(0.1-1)^4 = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}(0.9)^4$$

ข้อ 10

1. ข้อใด**ไม่ถูกต้อง**
   (คำตอบมีหลายคำตอบต้องตอบให้ครบทุกคำตอบจึงจะได้คะแนนเต็ม 1 คะแนน)

   a. ไม่ถูกต้อง $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n-1)!}$

   b. ไม่ถูกต้อง ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ แล้ว $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

   c. ถูกต้อง $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+2)}{n^2+2}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

   d. ถูกต้อง $\cos(x^2) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n}}{(2n)!}$

   e. ไม่ถูกต้อง ถ้า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แล้ว $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

ข้อ 11

1. ให้ $\vec{u} = \langle 1, a, b \rangle$ และ $\vec{v} = \langle a, 1, 2 \rangle$ เมื่อ $a \neq 0$ ถ้า $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ตั้งฉากกัน จงหาค่าของ $\left(\dfrac{a-b}{a}\right)^2$

   วิธีทำ เนื่องจาก $0 = \vec{u} \cdot \vec{v} = a + a + 2b = 2a + 2b$ นั่นคือ $a = -b$
   ดังนั้น $(\frac{a-b}{a})^2 = (\frac{-b-b}{-b})^2 = (\frac{-2b}{-b})^2 = 2^2 = 4 \quad \#$

2. ให้ $\vec{u} = \langle a, b, 2 \rangle$ และ $\vec{v} = \langle 1, 1, -a \rangle$ เมื่อ $a \neq 0$ ถ้า $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ตั้งฉากกัน จงหาค่าของ $\left(\dfrac{a+2b}{a}\right)^2$

   วิธีทำ เนื่องจาก $0 = \vec{u} \cdot \vec{v} = a + b - 2a = b - a$ นั่นคือ $a = b$
   ดังนั้น $(\frac{a+2b}{a})^2 = (\frac{a+2a}{a})^2 = (\frac{3a}{a})^2 = 3^2 = 9 \quad \#$

3. ให้ $\vec{u} = \langle 1, a, 2 \rangle$ ถ้าโคไซน์แสดงทิศทางของ $\vec{u}$ กับแกน X เท่ากับ $\frac{1}{3}$ จงหาค่าของ a

   วิธีทำ จะเห็นว่าโคไซน์แสดงทิศทางของ $\vec{u}$ กับแกน X เท่ากับ

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\|\vec{u}\|} &= \frac{1}{3} \\
\frac{1}{\sqrt{1 + a^2 + 2^2}} &= \frac{1}{3} \\
a^2 + 5 &= 9 \\
a^2 &= 4 \qquad \therefore a = \pm 2 \quad \#
\end{aligned}$$

4. ให้ $\vec{u} = \langle a, 2, 2 \rangle$ ถ้าโคไซน์แสดงทิศทางของ $\vec{u}$ กับแกน Z เท่ากับ $\frac{2}{3}$ จงหาค่าของ a

   วิธีทำ จะเห็นว่าโคไซน์แสดงทิศทางของ $\vec{u}$ กับแกน Z เท่ากับ

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\|\vec{u}\|} &= \frac{2}{3} \\
\frac{2}{\sqrt{a^2 + 2^2 + 2^2}} &= \frac{2}{3} \\
a^2 + 8 &= 9 \\
a^2 &= 1 \qquad \therefore a = \pm 1 \quad \#
\end{aligned}$$

ข้อ 12

1. ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกัน จงหาค่าของ $\|3\vec{u}+4\vec{v}\|$

   วิธีทำ จะได้ว่า

$$\|3\vec{u}+4\vec{v}\|^2 = 9\|\vec{u}\|^2 + 24\vec{u}\cdot\vec{v} + 16\|\vec{v}\|^2 = 9(1^2)+24(0)+16(1^2) = 25$$
$$\|3\vec{u}+4\vec{v}\| = 5 \quad \#$$

2. ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกัน จงหาค่าของ $\|5\vec{u}-12\vec{v}\|$

   วิธีทำ จะได้ว่า

$$\|5\vec{u}-12\vec{v}\|^2 = 25\|\vec{u}\|^2 - 120\vec{u}\cdot\vec{v} + 144\|\vec{v}\|^2 = 25(1^2)-120(0)+144(1^2) = 169$$
$$\|5\vec{u}-12\vec{v}\| = 13 \quad \#$$

3. ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกัน จงหาค่าของ $\|7\vec{u}+24\vec{v}\|$

   วิธีทำ จะได้ว่า

$$\|7\vec{u}+24\vec{v}\|^2 = 49\|\vec{u}\|^2 + 336\vec{u}\cdot\vec{v} + 576\|\vec{v}\|^2 = 49(1^2)+336(0)+576(1^2) = 625$$
$$\|7\vec{u}+24\vec{v}\| = 25 \quad \#$$

4. ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกัน จงหาค่าของ $\|8\vec{u}-15\vec{v}\|$

   วิธีทำ จะได้ว่า

$$\|8\vec{u}-15\vec{v}\|^2 = 64\|\vec{u}\|^2 - 240\vec{u}\cdot\vec{v} + 225\|\vec{v}\|^2 = 64(1^2)-240(0)+225(1^2) = 289$$
$$\|8\vec{u}-15\vec{v}\| = 17 \quad \#$$

ข้อ 13

1. ระยะทางระหว่างจุด $(1,2,3)$ กับระนาบ $6x+2y-3z+6=0$ เท่ากับเท่าใด

   วิธีทำ จะได้ว่า

$$d = \frac{|6(1)+2(2)-3(3)+6|}{\sqrt{6^2+2^2+(-3)^2)}} = \frac{7}{7} = 1 \quad \#$$

2. ระยะทางระหว่างระนาบ $6x+2y+3z-11=0$ กับระนาบ $6x+2y+3z+10=0$ เท่ากับเท่าใด

   วิธีทำ จะได้ว่า

$$d = \frac{|-11-10|}{\sqrt{6^2+2^2+3^2)}} = \frac{21}{7} = 3 \quad \#$$

3. ระยะทางระหว่างระนาบ $6x-2y+3z=10$ กับระนาบ $6x-2y+3z+18=0$ เท่ากับเท่าใด

   วิธีทำ จะได้ว่า

$$d = \frac{|-10-18|}{\sqrt{6^2+(-2)^2+3^2)}} = \frac{28}{7} = 4 \quad \#$$

4. ระยะทางระหว่างจุด $(1,2,3)$ กับระนาบ $6x+2y+3z-5=0$ เท่ากับเท่าใด

   วิธีทำ จะได้ว่า

$$d = \frac{|6(1)+2(2)+3(3)-5|}{\sqrt{6^2+2^2+3^2)}} = \frac{14}{7} = 2 \quad \#$$

ข้อ 14

1. จงหามุมระหว่างเส้นตรง $x = y, z = 1$ กับระนาบ $-y + z = 0$

   วิธีทำ จะเห็นว่า $\vec{A} = \langle 1, 1, 0\rangle$ และ $\vec{N} = \langle 0, -1, 1\rangle$ จะได้ว่า

   $$\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{N}}{\|\vec{A}\|\cdot\|\vec{N}\|} = \frac{-1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} \qquad \therefore \theta = 120^\circ$$

   ดังนั้นมุมระหว่างเส้นตรงกับระนาบคือ $|90^\circ - 120^\circ| = 30^\circ \quad \#$

2. จงหามุมระหว่างเส้นตรง $x = y = z$ กับระนาบ $x + y + z = 0$

   วิธีทำ จะเห็นว่า $\vec{A} = \langle 1, 1, 1\rangle$ และ $\vec{N} = \langle 1, 1, 1\rangle$ จะได้ว่า $\vec{A} = \vec{N}$ นั่นคือ $\vec{A}$ ขนานกัน $\vec{N}$ และทิศเดียวกัน (0°)
   ดังนั้นมุมระหว่างเส้นตรงกับระนาบคือ $|90^\circ - 0^\circ| = 90^\circ \quad \#$

3. จงหามุมระหว่างระนาบ $x + y = 5$ กับระนาบ $-y + z = 4$

   วิธีทำ จะเห็นว่า $\vec{N_1} = \langle 1, 1, 0\rangle$ และ $\vec{N_2} = \langle 0, -1, 1\rangle$ จะได้ว่า

   $$\cos\theta = \frac{\vec{N_1}\cdot\vec{N_2}}{\|\vec{N_1}\|\cdot\|\vec{N_2}\|} = \frac{-1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$$

   ดังนั้นมุมระหว่างระนาบคือ $120^\circ \quad \#$

4. จงหามุมระหว่างระนาบ $x + z = 5$ กับระนาบ $x + y = 4$

   วิธีทำ จะเห็นว่า $\vec{N_1} = \langle 1, 0, 1\rangle$ และ $\vec{N_2} = \langle 1, 1, 0\rangle$ จะได้ว่า

   $$\cos\theta = \frac{\vec{N_1}\cdot\vec{N_2}}{\|\vec{N_1}\|\cdot\|\vec{N_2}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

   ดังนั้นมุมระหว่างระนาบคือ $60^\circ \quad \#$

ข้อ 15

1. ข้อใด**ไม่ถูกต้อง**
   (คำตอบมีหลายคำตอบต้องตอบให้ครบทุกคำตอบจึงจะได้คะแนนเต็ม 1 คะแนน)

   a. ถูกต้อง ถ้า L_1 และ L_2 ตัดกัน แล้วเราจะไม่นิยามระยะทางระหว่างเส้นตรงทั้งสอง

   b. ไม่ถูกต้อง เวกเตอร์แนวฉากคู่ ($\vec{B}$) ไม่จำเป็นต้องมีขนาดหนึ่งหน่วยเสมอไป

   c. ถูกต้อง ถ้า L_1 และ L_2 ไม่ตัดกันและไม่ขนานกันด้วย เรากล่าวได้ว่า L_1 และ L_2 เป็นเส้นไขว้ต่างระนาบ

   d. ไม่ถูกต้อง เมื่อเราทราบอัตราเร่งขณะเวลา t เราย่อมหาเวกเตอร์ความเร่งที่เวลา t นั่นได้เสมอ

   e. ถูกต้อง ระยะห่างจากจุด B ไปยังจุดเชิงตั้งฉาก (M) บนเส้นตรงหนึ่ง คือระยะที่สั้นที่สุดของจุด B กับเส้นตรงนั้น ๆ

ข้อ 16

16.1 จงตรวจสอบว่าลำดับ $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}-n}\right\}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}-n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}-n}\cdot\frac{\sqrt{n^2+n}+n}{\sqrt{n^2+n}+n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}+n}{(n^2+n)-n^2}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2(1+\frac{1}{n})}+n}{n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}+n}{n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}{n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right) = \left(\sqrt{1+0}+1\right) = 2
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}-n}\right\}$ เป็นลำดับลู่เข้า #

16.1 จงตรวจสอบว่าลำดับ $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2n}-n}\right\}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}-n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}-n}\cdot\frac{\sqrt{n^2+2n}+n}{\sqrt{n^2+2n}+n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+2n}+n}{(n^2+2n)-n^2}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2(1+\frac{2}{n})}+n}{2n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{1+\frac{2}{n}}+n}{2n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1\right)}{2n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+0}+1\right) = 1
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2n}-n}\right\}$ เป็นลำดับลู่เข้า #

16.1 จงตรวจสอบว่าลำดับ $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3n}-n}\right\}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+3n}-n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+3n}-n}\cdot\frac{\sqrt{n^2+3n}+n}{\sqrt{n^2+3n}+n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n}+n}{(n^2+3n)-n^2}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2(1+\frac{3}{n})}+n}{3n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{1+\frac{3}{n}}+n}{3n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1\right)}{3n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1\right)=\frac{1}{3}\left(\sqrt{1+0}+1\right)=\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3n}-n}\right\}$ เป็นลำดับลู่เข้า #

16.1 จงตรวจสอบว่าลำดับ $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n^2+4n}-n}\right\}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+4n}-n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+4n}-n}\cdot\frac{\sqrt{n^2+4n}+n}{\sqrt{n^2+4n}+n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+4n}+n}{(n^2+4n)-n^2}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2(1+\frac{4}{n})}+n}{4n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{1+\frac{4}{n}}+n}{4n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n\left(\sqrt{1+\frac{4}{n}}+1\right)}{4n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(\sqrt{1+\frac{4}{n}}+1\right)=\frac{1}{4}\left(\sqrt{1+0}+1\right)=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n^2+4n}-n}\right\}$ เป็นลำดับลู่เข้า #

16.2 จงตรวจสอบว่าลำดับ $\{a_n\}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก เมื่อกำหนดให้

$$a_n = (-1)^n \cos(n\pi) \qquad \text{เมื่อ } n = 1, 2, 3, ...$$

วิธีทำ พิจารณาค่า a_n เมื่อ $n = 1, 2, 3, ...$

$$\begin{aligned} a_1 &= (-1)^1 \cos(\pi) & a_1 &= (-1)(-1) = 1 \\ a_2 &= (-1)^2 \cos(2\pi) & a_2 &= (1)(1) = 1 \\ a_3 &= (-1)^3 \cos(3\pi) & a_3 &= (-1)(-1) = 1 \\ a_4 &= (-1)^4 \cos(4\pi) & a_4 &= (1)(1) = 1 \\ &\vdots & &\vdots \\ a_n &= (-1)^n \cos(n\pi) & a_n &= 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ นั่นคือ $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า #

16.2 จงตรวจสอบว่าลำดับ $\{a_n\}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก เมื่อกำหนดให้

$$a_n = (-1)^n \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right) \qquad \text{เมื่อ } n = 1, 2, 3, ...$$

วิธีทำ พิจารณาค่า a_n เมื่อ $n = 1, 2, 3, ...$

$$\begin{aligned} a_1 &= (-1)^1 \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) & a_1 &= (-1)(-1) = 1 \\ a_2 &= (-1)^2 \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) & a_2 &= (1)(1) = 1 \\ a_3 &= (-1)^3 \sin\left(\frac{7\pi}{2}\right) & a_3 &= (-1)(-1) = 1 \\ a_4 &= (-1)^4 \sin\left(\frac{9\pi}{2}\right) & a_4 &= (1)(1) = 1 \\ &\vdots & &\vdots \\ a_n &= (-1)^n \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right) & a_n &= 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ นั่นคือ $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า #

16.3 จงตรวจสอบว่าลำดับ $\{a_n\}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก เมื่อกำหนดให้

$$a_n = (-1)^n \tan\left(\frac{(2n+1)\pi}{4}\right) \qquad \text{เมื่อ } n = 1, 2, 3, ...$$

วิธีทำ พิจารณาค่า a_n เมื่อ $n = 1, 2, 3, ...$

$$\begin{aligned} a_1 &= (-1)^1 \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) & a_1 &= (-1)(-1) = 1 \\ a_2 &= (-1)^2 \tan\left(\frac{5\pi}{4}\right) & a_2 &= (1)(1) = 1 \\ a_3 &= (-1)^3 \tan\left(\frac{7\pi}{4}\right) & a_3 &= (-1)(-1) = 1 \\ a_4 &= (-1)^4 \tan\left(\frac{9\pi}{4}\right) & a_4 &= (1)(1) = 1 \\ &\vdots & &\vdots \\ a_n &= (-1)^n \tan\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right) & a_n &= 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ นั่นคือ $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า #

ข้อ 17

17.1 กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับซึ่งสอดคล้องเงื่อนไข

$$a_1 = 2 \quad \text{และ } a_{n+1} = \frac{1+a_n}{1-a_n} \quad \text{เมื่อ } n = 1, 2, 3, ...$$

จงหาค่าของ $\sum_{n=1}^{2022} a_n$

วิธีทำ พิจารณาค่า a_n เมื่อ $n = 1, 2, 3, ...$

$$\begin{aligned}
a_1 &= 2 \\
a_2 &= \frac{1+2}{1-2} = -3 \\
a_3 &= \frac{1-3}{1-(-3)} = -\frac{1}{2} \\
a_4 &= \frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \\
a_5 &= \frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 2 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

ดังนั้นลำดับนี้มีเพียง 4 ค่าเท่านั้น เนื่องจาก $2022 = 4(505) + 2$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{2022} a_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2022} \\
&= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \cdots + (a_{2017} + a_{2018} + a_{2019} + a_{2020}) + a_{2021} + a_{2022} \\
&= \left(2 - 3 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(2 - 3 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(2 - 3 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + 2 - 3 \\
&= 505\left(2 - 3 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - 1 \\
&= 505\left(-\frac{7}{6}\right) - 1 \\
&= -\frac{3541}{6} \quad \#
\end{aligned}$$

17.1 กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับซึ่งสอดคล้องเงื่อนไข

$$a_1 = -3 \quad \text{และ } a_{n+1} = \frac{1+a_n}{1-a_n} \quad \text{เมื่อ } n = 1, 2, 3, ...$$

จงหาค่าของ $\displaystyle\sum_{n=1}^{2022} a_n$

วิธีทำ พิจารณาค่า a_n เมื่อ $n = 1, 2, 3, ...$

$$\begin{aligned}
a_1 &= -3 \\
a_2 &= \frac{1-3}{1-(-3)} = -\frac{1}{2} \\
a_3 &= \frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \\
a_4 &= \frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 2 \\
a_5 &= \frac{1+2}{1-2} = -3 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

ดังนั้นลำดับนี้มีเพียง 4 ค่าเท่านั้น เนื่องจาก $2022 = 4(505) + 2$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{2022} a_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2022} \\
&= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \cdots + (a_{2017} + a_{2018} + a_{2019} + a_{2020}) + a_{2021} + a_{2022} \\
&= \left(-3 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + 2\right) + \left(-3 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + 2\right) + \cdots + \left(-3 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + 2\right) - 3 - \frac{1}{2} \\
&= 505\left(-3 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + 2\right) - \frac{7}{2} \\
&= 505\left(-\frac{7}{6}\right) - \frac{7}{2} \\
&= -\frac{1778}{3} \quad \#
\end{aligned}$$

17.1 กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับซึ่งสอดคล้องเงื่อนไข

$$a_1 = 2 \quad \text{และ } a_{n+1} = \frac{1+a_n}{1-a_n} \quad \text{เมื่อ } n = 1, 2, 3, ...$$

จงหาค่าของ $\displaystyle\sum_{n=1}^{2565} a_n$

วิธีทำ พิจารณาค่า a_n เมื่อ $n = 1, 2, 3, ...$

$$\begin{aligned}
a_1 &= 2 \\
a_2 &= \frac{1+2}{1-2} = -3 \\
a_3 &= \frac{1-3}{1-(-3)} = -\frac{1}{2} \\
a_4 &= \frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \\
a_5 &= \frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 2 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

ดังนั้นลำดับนี้มีเพียง 4 ค่าเท่านั้น เนื่องจาก $2565 = 4(641) + 1$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{2565} a_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2565} \\
&= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \cdots + (a_{2561} + a_{2562} + a_{2563} + a_{2564}) + a_{2565} \\
&= \left(2 - 3 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(2 - 3 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(2 - 3 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + 2 \\
&= 641\left(2 - 3 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + 2 \\
&= 641\left(-\frac{7}{6}\right) + 2 \\
&= -\frac{4475}{6} \quad \#
\end{aligned}$$

17.1 กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับซึ่งสอดคล้องเงื่อนไข

$$a_1 = -3 \quad \text{และ } a_{n+1} = \frac{1+a_n}{1-a_n} \quad \text{เมื่อ } n = 1, 2, 3, ...$$

จงหาค่าของ $\displaystyle\sum_{n=1}^{2565} a_n$

วิธีทำ พิจารณาค่า a_n เมื่อ $n = 1, 2, 3, ...$

$$\begin{aligned}
a_1 &= -3 \\
a_2 &= \frac{1-3}{1-(-3)} = -\frac{1}{2} \\
a_3 &= \frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \\
a_4 &= \frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 2 \\
a_5 &= \frac{1+2}{1-2} = -3 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

ดังนั้นลำดับนี้มีเพียง 4 ค่าเท่านั้น เนื่องจาก $2565 = 4(641) + 1$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{2565} a_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2565} \\
&= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \cdots + (a_{2561} + a_{2562} + a_{2563} + a_{2564}) + a_{2565} \\
&= \left(-3 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + 2\right) + \left(-3 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + 2\right) + \cdots + \left(-3 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + 2\right) - 3 \\
&= 641\left(2 - 3 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - 3 \\
&= 641\left(-\frac{7}{6}\right) - 3 \\
&= -\frac{4505}{6} \quad \#
\end{aligned}$$

17.2 จงตรวจสอบอนุกรมต่อไปนี้ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$

วิธีทำ ให้ $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)\ln(x+1)}$ เมื่อ $x \geq 1$ จะได้ว่า

$$f'(x) = -((x+1)\ln(x+1))^{-2}\left(\ln(x+1) + (x+1)\cdot\frac{1}{x+1}\right) = -\frac{\ln(x+1)+1}{(x+1)\ln(x+1)} < 0$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันลด พิจารณา

$$\begin{aligned} t_n &= \int_1^n f(x)\,dx \\ &= \int_1^n \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}\,dx = \int_1^n \frac{1}{\ln(x+1)}\cdot\frac{1}{x+1}dx \\ &= \int_1^n \frac{1}{\ln(x+1)}\,d\ln(x+1) \\ &= [\ln(\ln(x+1))]_1^n = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2) \\ \lim_{n\to\infty} t_n &= +\infty \end{aligned}$$

จะได้ว่า $\{t_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า สรุปได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$ เป็นอนุกรมลู่ออก #

17.2 จงตรวจสอบอนุกรมต่อไปนี้ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\ln(n+2)}$

วิธีทำ ให้ $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)\ln(x+2)}$ เมื่อ $x \geq 1$ จะได้ว่า

$$f'(x) = -((x+2)\ln(x+2))^{-2}\left(\ln(x+2) + (x+2)\cdot\frac{1}{x+2}\right) = -\frac{\ln(x+2)+1}{(x+2)\ln(x+2)} < 0$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันลด พิจารณา

$$\begin{aligned} t_n &= \int_1^n f(x)\,dx \\ &= \int_1^n \frac{1}{(x+2)\ln(x+2)}\,dx = \int_1^n \frac{1}{\ln(x+2)}\cdot\frac{1}{x+2}dx \\ &= \int_1^n \frac{1}{\ln(x+2)}\,d\ln(x+2) \\ &= [\ln(\ln(x+2))]_1^n = \ln(\ln(n+2)) - \ln(\ln 3) \\ \lim_{n\to\infty} t_n &= +\infty \end{aligned}$$

จะได้ว่า $\{t_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า สรุปได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\ln(n+2)}$ เป็นอนุกรมลู่ออก #

17.2 จงตรวจสอบอนุกรมต่อไปนี้ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)\ln(n+3)}$

วิธีทำ ให้ $f(x) = \dfrac{1}{(x+3)\ln(x+3)}$ เมื่อ $x \geq 1$ จะได้ว่า

$$f'(x) = -((x+3)\ln(x+3))^{-2}\left(\ln(x+3) + (x+3)\cdot\frac{1}{x+3}\right) = -\frac{\ln(x+3)+1}{(x+3)\ln(x+3)} < 0$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันลด พิจารณา

$$\begin{aligned}
t_n &= \int_1^n f(x)\,dx \\
&= \int_1^n \frac{1}{(x+3)\ln(x+3)}\,dx = \int_1^n \frac{1}{\ln(x+3)}\cdot\frac{1}{x+3}dx \\
&= \int_1^n \frac{1}{\ln(x+3)}\,d\ln(x+3) \\
&= [\ln(\ln(x+3))]_1^n = \ln(\ln(n+3)) - \ln(\ln 4) \\
\lim_{n\to\infty} t_n &= +\infty
\end{aligned}$$

จะได้ว่า $\{t_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า สรุปได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)\ln(n+3)}$ เป็นอนุกรมลู่ออก #

17.2 จงตรวจสอบอนุกรมต่อไปนี้ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+4)\ln(n+4)}$

วิธีทำ ให้ $f(x) = \dfrac{1}{(x+4)\ln(x+4)}$ เมื่อ $x \geq 1$ จะได้ว่า

$$f'(x) = -((x+4)\ln(x+4))^{-2}\left(\ln(x+4) + (x+4)\cdot\frac{1}{x+4}\right) = -\frac{\ln(x+4)+1}{(x+4)\ln(x+4)} < 0$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันลด พิจารณา

$$\begin{aligned}
t_n &= \int_1^n f(x)\,dx \\
&= \int_1^n \frac{1}{(x+4)\ln(x+4)}\,dx = \int_1^n \frac{1}{\ln(x+4)}\cdot\frac{1}{x+4}dx \\
&= \int_1^n \frac{1}{\ln(x+4)}\,d\ln(x+4) \\
&= [\ln(\ln(x+4))]_1^n = \ln(\ln(n+4)) - \ln(\ln 5) \\
\lim_{n\to\infty} t_n &= +\infty
\end{aligned}$$

จะได้ว่า $\{t_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า สรุปได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+4)\ln(n+4)}$ เป็นอนุกรมลู่ออก #

ข้อ 18

18.1 จงทดสอบอนุกรมต่อไปนี้ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2^n}{3^{n^2}}$

วิธีทำ พิจารณาอนุกรม

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^{n^2}} \quad \text{และ} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n^2}}$$

ใช้การทดสอบอัตราส่วน

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^2}{3^{(n+1)^2}} \cdot \frac{3^{n^2}}{n^2} \right| &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{3^{(n^2+2n+1)}} \cdot \frac{3^{n^2}}{n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \cdot \frac{1}{3^{2n+1}} \\
&= (1+0+0) \cdot 0 = 0 < 1
\end{aligned}$$

จะได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^{n^2}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า และพิจารณา

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{2^{n+1}}{3^{(n+1)^2}} \cdot \frac{3^{n^2}}{2^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n \cdot 2}{3^{(n^2+2n+1)}} \cdot \frac{3^{n^2}}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3^{2n+1}} = 0 < 1$$

จะได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n^2}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า สรุปได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2^n}{3^{n^2}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า #

18.1 จงทดสอบอนุกรมต่อไปนี้ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3^n}{2^{n^2}}$

วิธีทำ พิจารณาอนุกรม

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^{n^2}} \quad \text{และ} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^{n^2}}$$

ใช้การทดสอบอัตราส่วน

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^2}{2^{(n+1)^2}} \cdot \frac{2^{n^2}}{n^2} \right| &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{2^{(n^2+2n+1)}} \cdot \frac{2^{n^2}}{n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \cdot \frac{1}{2^{2n+1}} \\
&= (1+0+0) \cdot 0 = 0 < 1
\end{aligned}$$

จะได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^{n^2}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า และพิจารณา

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{3^{n+1}}{2^{(n+1)^2}} \cdot \frac{2^{n^2}}{3^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n \cdot 3}{2^{(n^2+2n+1)}} \cdot \frac{2^{n^2}}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{2^{2n+1}} = 0 < 1$$

จะได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^{n^2}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า สรุปได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3^n}{2^{n^2}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า #

18.1 จงทดสอบอนุกรมต่อไปนี้ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4^n}{2^{n^2}}$

วิธีทำ พิจารณาอนุกรม

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^{n^2}} \quad \text{และ} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{2^{n^2}}$$

ใช้การทดสอบอัตราส่วน

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^2}{2^{(n+1)^2}} \cdot \frac{2^{n^2}}{n^2} \right| &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{2^{(n^2+2n+1)}} \cdot \frac{2^{n^2}}{n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \cdot \frac{1}{2^{2n+1}} \\
&= (1+0+0) \cdot 0 = 0 < 1
\end{aligned}$$

จะได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^{n^2}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า และพิจารณา

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{4^{n+1}}{2^{(n+1)^2}} \cdot \frac{2^{n^2}}{4^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n \cdot 4}{2^{(n^2+2n+1)}} \cdot \frac{2^{n^2}}{4^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{2^{2n+1}} = 0 < 1$$

จะได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{2^{n^2}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า สรุปได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4^n}{2^{n^2}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า #

18.1 จงทดสอบอนุกรมต่อไปนี้ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4^n}{3^{n^2}}$

วิธีทำ พิจารณาอนุกรม

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^{n^2}} \quad \text{และ} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^{n^2}}$$

ใช้การทดสอบอัตราส่วน

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^2}{3^{(n+1)^2}} \cdot \frac{3^{n^2}}{n^2} \right| &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{3^{(n^2+2n+1)}} \cdot \frac{3^{n^2}}{n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \cdot \frac{1}{3^{2n+1}} \\
&= (1+0+0) \cdot 0 = 0 < 1
\end{aligned}$$

จะได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^{n^2}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า และพิจารณา

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{4^{n+1}}{3^{(n+1)^2}} \cdot \frac{3^{n^2}}{4^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n \cdot 4}{3^{(n^2+2n+1)}} \cdot \frac{3^{n^2}}{4^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{3^{2n+1}} = 0 < 1$$

จะได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^{n^2}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า สรุปได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4^n}{3^{n^2}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า #

18.2 จงทดสอบอนุกรมต่อไปนี้ว่าลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ หรือลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข หรือลู่ออก

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)! + (2n)!}$$

วิธีทำ พิจารณา

$$a_n = \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)! + (2n)!} = \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)(2n)! + (2n)!} = \frac{(-1)^n n!}{[(2n+1)+1](2n)!} = \frac{(-1)^n n!}{(2n+2)(2n)!}$$

ใช้การทดสอบอัตราส่วน

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(2n+4)(2n+2)!} \cdot \frac{(2n+2)(2n)!}{(-1)^n n!} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+2)}{(2n+4)(2n+2)(2n+1)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{(2n+4)(2n+1)} = 0 < 1
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)! + (2n)!}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์

18.2 จงทดสอบอนุกรมต่อไปนี้ว่าลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ หรือลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข หรือลู่ออก

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)! - (2n)!}$$

วิธีทำ พิจารณา

$$a_n = \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)! - (2n)!} = \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)(2n)! - (2n)!} = \frac{(-1)^n n!}{[(2n+1)-1](2n)!} = \frac{(-1)^n n!}{(2n)(2n)!}$$

ใช้การทดสอบอัตราส่วน

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(2n+2)(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)(2n)!}{(-1)^n n!} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n)}{(2n+2)(2n+2)(2n+1)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(2n+2)(2n+1)} = 0 < 1
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)! - (2n)!}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์

ข้อ 19

1. จงหารัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้าของอนุกรม $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(6-5x)^{2n}}{n\cdot 9^n}$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}(6-5x)^{2n+2}}{(n+1)9^{n+1}}\cdot\frac{n\cdot 9^n}{(-1)^n(6-5x)^{2n}}\right| &= |5x-6|^2\lim_{n\to\infty}\frac{n}{9(n+1)}\\ &= \frac{1}{9}|5x-6|^2<1\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}|5x-6|&<3\\ -3<5x-6&<3\\ -\frac{3}{5}<x-\frac{6}{5}&<\frac{3}{5}\\ \frac{3}{5}<x&<\frac{9}{5}\end{aligned}$$

จะได้ว่ารัศมีแห่งการลู่เข้าคือ $\frac{3}{5}$ ตรวจสอบการลู่เข้าเมื่อ
สำหรับ $x=\frac{3}{5}=\frac{9}{5}$ จะได้ว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(6-5x)^{2n}}{n\cdot 9^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

เป็นอนุกรมลู่เข้า (อนุกรมสลับ)
สรุปได้ว่า รัศมีแห่งการลู่เข้าคือ $\frac{3}{5}$ ช่วงแห่งการลู่เข้าคือ $[\frac{3}{5},\frac{9}{5}]$ $\#$

2. จงหารัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้าของอนุกรม $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(6x-5)^{2n}}{n\cdot 9^n}$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}(6x-5)^{2n+2}}{(n+1)9^{n+1}}\cdot\frac{n\cdot 9^n}{(-1)^n(6x-5)^{2n}}\right| &= |6x-5|^2\lim_{n\to\infty}\frac{n}{9(n+1)}\\ &= \frac{1}{9}|6x-5|^2<1\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}|6x-5|&<3\\ -3<6x-5&<3\\ -\frac{1}{2}<x-\frac{5}{6}&<\frac{1}{2}\\ \frac{1}{3}<x&<\frac{4}{3}\end{aligned}$$

จะได้ว่ารัศมีแห่งการลู่เข้าคือ $\frac{1}{2}$ ตรวจสอบการลู่เข้าเมื่อ
สำหรับ $x=\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$ จะได้ว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(6x-5)^{2n}}{n\cdot 9^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

เป็นอนุกรมลู่เข้า (อนุกรมสลับ)
สรุปได้ว่า รัศมีแห่งการลู่เข้าคือ $\frac{1}{2}$ ช่วงแห่งการลู่เข้าคือ $[\frac{1}{3},\frac{4}{3}]$ $\#$

3. จงหารัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้าของอนุกรม $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(6x-5)^{2n+1}}{n \cdot 9^n}$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}(6x-5)^{2n+3}}{(n+1)9^{n+1}} \cdot \frac{n \cdot 9^n}{(-1)^n(6x-5)^{2n+1}}\right| &= |6x-5|^2 \lim_{n\to\infty} \frac{n}{9(n+1)} \\ &= \frac{1}{9}|6x-5|^2 < 1\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}|6x-5| &< 3 \\ -3 < 6x-5 &< 3 \\ -\frac{1}{2} < x - \frac{5}{6} &< \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} < x &< \frac{4}{3}\end{aligned}$$

จะได้ว่ารัศมีแห่งการลู่เข้าคือ $\frac{1}{2}$ ตรวจสอบการลู่เข้าเมื่อ

กรณี $x = \frac{1}{3}$ จะได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(6x-5)^{2n+1}}{n \cdot 9^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-3(-1)^n}{n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า (อนุกรมสลับ)

กรณี $x = \frac{4}{3}$ จะได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(6x-5)^{2n+1}}{n \cdot 9^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(-1)^n}{n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า (อนุกรมสลับ)

สรุปได้ว่า รัศมีแห่งการลู่เข้าคือ $\frac{1}{2}$ ช่วงแห่งการลู่เข้าคือ $[\frac{1}{3}, \frac{4}{3}]$ #

4. จงหารัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้าของอนุกรม $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(6-5x)^{2n+2}}{n \cdot 9^n}$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}(6-5x)^{2n+4}}{(n+1)9^{n+1}} \cdot \frac{n \cdot 9^n}{(-1)^n(6-5x)^{2n+2}}\right| &= |5x-6|^2 \lim_{n\to\infty} \frac{n}{9(n+1)} \\ &= \frac{1}{9}|5x-6|^2 < 1\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}|5x-6| &< 3 \\ -3 < 5x-6 &< 3 \\ -\frac{3}{5} < x - \frac{6}{5} &< \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} < x &< \frac{9}{5}\end{aligned}$$

จะได้ว่ารัศมีแห่งการลู่เข้าคือ $\frac{3}{5}$ ตรวจสอบการลู่เข้าเมื่อ
สำหรับ $x = \frac{3}{5} = \frac{9}{5}$ จะได้ว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(6-5x)^{2n+2}}{n \cdot 9^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

เป็นอนุกรมลู่เข้า (อนุกรมสลับ)
สรุปได้ว่า รัศมีแห่งการลู่เข้าคือ $\frac{3}{5}$ ช่วงแห่งการลู่เข้าคือ $[\frac{3}{5}, \frac{9}{5}]$ #

ข้อ 20

1. ให้ $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ จงประมาณค่าของ $\dfrac{1}{\sqrt[3]{1.1}}$ โดยใช้พหุนามเทย์เลอร์ 3 ของ f รอบจุด $x = 1$ พร้อมทั้งหาขอบเขตความผิดพลาด

วิธีทำ พิจารณา

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^{-\frac{1}{3}} & f(1) &= 1 \\
f'(x) &= -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} & f'(1) &= -\frac{1}{3} \\
f''(x) &= \frac{4}{9}x^{-\frac{7}{3}} & f'(1) &= \frac{4}{9} \\
f'''(x) &= -\frac{28}{27}x^{-\frac{10}{3}} & f'(1) &= -\frac{28}{27} \\
f^{(4)}(x) &= \frac{280}{81}x^{-\frac{13}{3}}
\end{aligned}
$$

จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
T_3(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 \\
&= 1 - \frac{1}{3}(x-1) + \frac{2}{9}(x-1)^2 - \frac{14}{81}(x-1)^3
\end{aligned}
$$

ประมาณค่า $\dfrac{1}{\sqrt[3]{1.1}}$ โดยแทน $x = 1.1$ ใน $T_3(x)$ จะได้

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt[3]{1.1}} &= f(1.1) \\
&\approx T_3(1.1) = 1 - \frac{1}{3}(0.1) + \frac{2}{9}(0.1)^2 - \frac{14}{81}(0.1)^3 \\
&= 1 - \frac{0.1}{3} + \frac{0.02}{9} - \frac{0.014}{81} = \frac{78.466}{81} = 0.96872
\end{aligned}
$$

ให้ $1 < c < 1.1$ และ

$$
|R_4(1.1)| = \left|\frac{f^{(4)}(c)}{4!}(0.1)^4\right| = \left|\frac{280c^{-\frac{13}{3}}}{81 \cdot 4!}(0.1)^4\right| = \frac{280}{81 \cdot 4!}(0.1)^4 \cdot c^{-\frac{13}{3}}
$$

พิจารณา

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1.1} &< c^{-1} < 1 \\
\therefore \quad c^{-\frac{13}{3}} &< 1
\end{aligned}
$$

จะได้ว่า

$$
|R_4(1.1)| < \frac{280}{81 \cdot 4!}(0.1)^4 = 0.0000144
$$

2. ให้ $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ จงประมาณค่าของ $\dfrac{1}{\sqrt[3]{0.9}}$ โดยใช้พหุนามเทย์เลอร์ 3 ของ f รอบจุด $x = 1$ พร้อมทั้งหาขอบเขตความผิดผลาด

วิธีทำ พิจารณา

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^{-\frac{1}{3}} & f(1) &= 1 \\
f'(x) &= -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} & f'(1) &= -\frac{1}{3} \\
f''(x) &= \frac{4}{9}x^{-\frac{7}{3}} & f'(1) &= \frac{4}{9} \\
f'''(x) &= -\frac{28}{27}x^{-\frac{10}{3}} & f'(1) &= -\frac{28}{27} \\
f^{(4)}(x) &= \frac{280}{81}x^{-\frac{13}{3}}
\end{aligned}
$$

จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
T_3(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 \\
&= 1 - \frac{1}{3}(x-1) + \frac{2}{9}(x-1)^2 - \frac{14}{81}(x-1)^3
\end{aligned}
$$

ประมาณค่า $\dfrac{1}{\sqrt[3]{0.9}}$ โดยแทน $x = 0.9$ ใน $T_3(x)$ จะได้

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt[3]{0.9}} &= f(0.9) \\
&\approx T_3(0.9) = 1 - \frac{1}{3}(-0.1) + \frac{2}{9}(-0.1)^2 - \frac{14}{81}(-0.1)^3 \\
&= 1 + \frac{0.1}{3} + \frac{0.02}{9} + \frac{0.014}{81} = \frac{93.894}{81} = 1.035728
\end{aligned}
$$

ให้ $0.9 < c < 1$ และ

$$
|R_4(1.1)| = \left|\frac{f^{(4)}(c)}{4!}(-0.1)^4\right| = \left|\frac{280c^{-\frac{13}{3}}}{81 \cdot 4!}(0.1)^4\right| = \frac{280}{81 \cdot 4!}(0.1)^4 \cdot c^{-\frac{13}{3}}
$$

พิจารณา

$$
\begin{aligned}
1 < c^{-1} &< \frac{1}{0.9} \\
\therefore \quad c^{-\frac{13}{3}} &< \frac{1}{0.9^{\frac{13}{3}}}
\end{aligned}
$$

จะได้ว่า

$$
|R_4(0.9)| < \frac{280}{81 \cdot 4!}(0.1)^4 \cdot \frac{1}{0.9^{\frac{13}{3}}} = 0.0000227
$$

ข้อ 21

จงให้ตารางเทย์เลอร์

21.1 จงหาฟังก์ชันผลบวกของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{2^n(n-1)!}$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} && \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R} \\
\frac{d}{dx}e^x &= \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} && \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R} \\
e^x &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!} && \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R} \\
e^x &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} && \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R} \\
e^{\frac{x^2}{2}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\frac{x^2}{2})^{n-1}}{n!} && \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R} \\
e^{\frac{x^2}{2}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-2}}{2^{n-1}\cdot(n-1)!} && \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R} \\
\frac{x^4}{2}\cdot e^{\frac{x^2}{2}} &= \frac{x^4}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-2}}{2^{n-1}\cdot(n-1)!} && \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{2^n(n-1)!} && \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

21.1 จงหาฟังก์ชันผลบวกของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{3^n(n-1)!}$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} && \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R} \\
\frac{d}{dx}e^x &= \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} && \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R} \\
e^x &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!} && \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R} \\
e^x &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} && \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R} \\
e^{\frac{x^2}{3}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\frac{x^2}{3})^{n-1}}{n!} && \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R} \\
e^{\frac{x^2}{3}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-2}}{3^{n-1}\cdot(n-1)!} && \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R} \\
\frac{x^4}{3}\cdot e^{\frac{x^2}{2}} &= \frac{x^4}{3}\cdot\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-2}}{3^{n-1}\cdot(n-1)!} && \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{3^n(n-1)!} && \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

21.2 จงหาอนุกรมกำลังซึ่งมีฟังก์ชันผลบวกต่อไปนี้ $f(x) = x\left(\frac{x}{x+1}\right)^2$

วิธีทำ พิจารณา

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \qquad \text{เมื่อ } |-x| < 1$$

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{1+x} = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \qquad \text{เมื่อ } |x| < 1$$

$$-\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n x^{n-1} \qquad \text{เมื่อ } |x| < 1$$

$$-\frac{1}{(1+x)^2}\cdot(-x^3) = (-x^3)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n x^{n-1} \qquad \text{เมื่อ } |x| < 1$$

$$x\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} n x^{n+2} \qquad \text{เมื่อ } |x| < 1$$

21.2 จงหาอนุกรมกำลังซึ่งมีฟังก์ชันผลบวกต่อไปนี้ $f(x) = x\left(\frac{x}{x-1}\right)^2$

วิธีทำ พิจารณา

$$\frac{1}{x-1} = -\frac{1}{1-x} = -\sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad \text{เมื่อ } |x| < 1$$

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{(x-1)} = \frac{d}{dx} - \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad \text{เมื่อ } |x| < 1$$

$$-\frac{1}{(x-1)^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \qquad \text{เมื่อ } |x| < 1$$

$$\frac{1}{(x-1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \qquad \text{เมื่อ } |x| < 1$$

$$\frac{1}{(x-1)^2}\cdot x^3 = x^3\cdot\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \qquad \text{เมื่อ } |x| < 1$$

$$x\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n+2} \qquad \text{เมื่อ } |x| < 1$$

ข้อ 22

22.1 ให้ $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$ เป็นเวกเตอร์ในสามมิติ ถ้า $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ โดยที่ $\|\vec{a}\|=1, \|\vec{b}\|=2$ และ $\|\vec{c}\|=3$ จงหาค่าของ $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) &= \vec{a}\cdot\vec{0} \\
\|\vec{a}\|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c} &= 0 \\
1+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c} &= 0 \qquad \longrightarrow \qquad \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}=-1 \\
\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) &= \vec{b}\cdot\vec{0} \\
\vec{b}\cdot\vec{a}+\|\vec{b}\|^2+\vec{b}\cdot\vec{c} &= 0 \\
\vec{b}\cdot\vec{a}+4+\vec{b}\cdot\vec{c} &= 0 \qquad \longrightarrow \qquad \vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{c}=-4 \\
\vec{c}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) &= \vec{c}\cdot\vec{0} \\
\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{b}+\|\vec{c}\|^2 &= 0 \\
\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{b}+9 &= 0 \qquad \longrightarrow \qquad \vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{b}=-9
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c})+(\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{c})+(\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{b}) &= -1-4-9=-14 \\
2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}) &= -14 \\
\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c} &= -7 \qquad \#
\end{aligned}$$

22.1 ให้ $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$ เป็นเวกเตอร์ในสามมิติ ถ้า $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ โดยที่ $\|\vec{a}\|=1, \|\vec{b}\|=3$ และ $\|\vec{c}\|=4$ จงหาค่าของ $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) &= \vec{a}\cdot\vec{0} \\
\|\vec{a}\|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c} &= 0 \\
1+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c} &= 0 \qquad \longrightarrow \qquad \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}=-1 \\
\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) &= \vec{b}\cdot\vec{0} \\
\vec{b}\cdot\vec{a}+\|\vec{b}\|^2+\vec{b}\cdot\vec{c} &= 0 \\
\vec{b}\cdot\vec{a}+9+\vec{b}\cdot\vec{c} &= 0 \qquad \longrightarrow \qquad \vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{c}=-9 \\
\vec{c}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) &= \vec{c}\cdot\vec{0} \\
\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{b}+\|\vec{c}\|^2 &= 0 \\
\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{b}+16 &= 0 \qquad \longrightarrow \qquad \vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{b}=-16
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c})+(\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{c})+(\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{b}) &= -1-9-16=-26 \\
2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}) &= -26 \\
\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c} &= -13 \qquad \#
\end{aligned}$$

22.1 ให้ $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$ เป็นเวกเตอร์ในสามมิติ ถ้า $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ โดยที่ $\|\vec{a}\|=2, \|\vec{b}\|=3$ และ $\|\vec{c}\|=5$ จงหาค่าของ $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) &= \vec{a}\cdot\vec{0} \\
\|\vec{a}\|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c} &= 0 \\
4+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c} &= 0 \qquad \longrightarrow \qquad \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}=-4 \\
\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) &= \vec{b}\cdot\vec{0} \\
\vec{b}\cdot\vec{a}+\|\vec{b}\|^2+\vec{b}\cdot\vec{c} &= 0 \\
\vec{b}\cdot\vec{a}+9+\vec{b}\cdot\vec{c} &= 0 \qquad \longrightarrow \qquad \vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{c}=-9 \\
\vec{c}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) &= \vec{c}\cdot\vec{0} \\
\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{b}+\|\vec{c}\|^2 &= 0 \\
\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{b}+25 &= 0 \qquad \longrightarrow \qquad \vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{b}=-25
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c})+(\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{c})+(\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{b}) &= -4-9-25=-38 \\
2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}) &= -38 \\
\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c} &= -19 \quad \#
\end{aligned}$$

22.1 ให้ $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$ เป็นเวกเตอร์ในสามมิติ ถ้า $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ โดยที่ $\|\vec{a}\|=2, \|\vec{b}\|=1$ และ $\|\vec{c}\|=7$ จงหาค่าของ $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) &= \vec{a}\cdot\vec{0} \\
\|\vec{a}\|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c} &= 0 \\
4+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c} &= 0 \qquad \longrightarrow \qquad \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}=-4 \\
\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) &= \vec{b}\cdot\vec{0} \\
\vec{b}\cdot\vec{a}+\|\vec{b}\|^2+\vec{b}\cdot\vec{c} &= 0 \\
\vec{b}\cdot\vec{a}+1+\vec{b}\cdot\vec{c} &= 0 \qquad \longrightarrow \qquad \vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{c}=-1 \\
\vec{c}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) &= \vec{c}\cdot\vec{0} \\
\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{b}+\|\vec{c}\|^2 &= 0 \\
\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{b}+49 &= 0 \qquad \longrightarrow \qquad \vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{b}=-49
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c})+(\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{c})+(\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{b}) &= -4-1-49=-54 \\
2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}) &= -54 \\
\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c} &= -27 \quad \#
\end{aligned}$$

21.2 ให้ L เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $(1,2,1)$ และตั้งฉากกับระนาบ M ที่มีสมการเป็น $2x+y-2z=20$ จงหาจุดตัดของเส้นตรง L กับระนาบ M

วิธีทำ เนื่องจาก L ตั้งฉากกับระนาบจะได้ว่า $\vec{A}$ ขนาน $\vec{N}$ เลือก $\vec{A}=\vec{N}=\langle 2,1,-2\rangle$ ดังนั้นสมการเส้นตรง L คือ

$$\begin{cases} x &= 1+2t \\ y &= 2+t \\ z &= 1-2t \end{cases}$$

พิจารณา

$$\begin{aligned} 2(1+2t)+(2+t)-2(1-2t) &= 20 \\ 2+4t+2+t-2+4t &= 20 \\ 9t &= 18 \qquad \therefore \qquad t=2 \end{aligned}$$

ดังนั้นจุดตัดของเส้นตรง L กับระนาบ M คือ $(1+2\cdot 2, 2+2, 1-2\cdot 2)=(5,4,-3)$ #

21.2 ให้ L เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $(1,-2,1)$ และตั้งฉากกับระนาบ M ที่มีสมการเป็น $2x+y-2z=-7$ จงหาจุดตัดของเส้นตรง L กับระนาบ M

วิธีทำ เนื่องจาก L ตั้งฉากกับระนาบจะได้ว่า $\vec{A}$ ขนาน $\vec{N}$ เลือก $\vec{A}=\vec{N}=\langle 2,1,-2\rangle$ ดังนั้นสมการเส้นตรง L คือ

$$\begin{cases} x &= 1+2t \\ y &= -2+t \\ z &= 1-2t \end{cases}$$

พิจารณา

$$\begin{aligned} 2(1+2t)+(-2+t)-2(1-2t) &= -7 \\ 2+4t-2+t-2+4t &= -7 \\ 9t &= -9 \qquad \therefore \qquad t=-1 \end{aligned}$$

ดังนั้นจุดตัดของเส้นตรง L กับระนาบ M คือ $(1+2(-1), 2-1, 1-2(-1))=(-1,-3,3)$ #

21.2 ให้ L เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $(1,2,-1)$ และตั้งฉากกับระนาบ M ที่มีสมการเป็น $2x+y-2z=-12$ จงหาจุดตัดของเส้นตรง L กับระนาบ M

วิธีทำ เนื่องจาก L ตั้งฉากกับระนาบจะได้ว่า $\vec{A}$ ขนาน $\vec{N}$ เลือก $\vec{A}=\vec{N}=\langle 2,1,-2\rangle$ ดังนั้นสมการเส้นตรง L คือ

$$\begin{cases} x &= 1+2t \\ y &= 2+t \\ z &= -1-2t \end{cases}$$

พิจารณา

$$\begin{aligned} 2(1+2t)+(2+t)-2(-1-2t) &= -12 \\ 2+4t+2+t+2+4t &= -12 \\ 9t &= -18 \qquad \therefore \qquad t=-2 \end{aligned}$$

ดังนั้นจุดตัดของเส้นตรง L กับระนาบ M คือ $(1+2(-2),2-2,1-2(-2))=(-3,0,5)$ #

21.2 ให้ L เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-1,2,1)$ และตั้งฉากกับระนาบ M ที่มีสมการเป็น $2x+y-2z=25$ จงหาจุดตัดของเส้นตรง L กับระนาบ M

วิธีทำ เนื่องจาก L ตั้งฉากกับระนาบจะได้ว่า $\vec{A}$ ขนาน $\vec{N}$ เลือก $\vec{A}=\vec{N}=\langle 2,1,-2\rangle$ ดังนั้นสมการเส้นตรง L คือ

$$\begin{cases} x &= -1+2t \\ y &= 2+t \\ z &= 1-2t \end{cases}$$

พิจารณา

$$\begin{aligned} 2(-1+2t)+(2+t)-2(1-2t) &= 25 \\ -2+4t+2+t-2+4t &= 25 \\ 9t &= 27 \qquad \therefore \qquad t=3 \end{aligned}$$

ดังนั้นจุดตัดของเส้นตรง L กับระนาบ M คือ $(1+2\cdot 3,2+3,1-2\cdot 3)=(7,5,-5)$ #

ข้อ 23

กำหนดให้ $L_1 : x = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{3}$ และ $L_2 : \dfrac{4-x}{2} = \dfrac{y-1}{4} = z-5$ เป็นเส้นตรงในสามมิติ

23.1 จงหาจุดตัดของเส้นตรง L_1 และ L_2

23.2 จงหาสมการระนาบที่ผ่านเส้นตรง L_1 และ L_2

วิธีทำ จากสมการของ L_1 จะได้ว่า $y-1=2x$ และสมการของ L_2 จะได้ว่า $y-1=4\left(\frac{4-x}{2}\right)=2(4-x)=8-2x$ นั่นคือ

$$\begin{aligned} 2x &= 8-2x \\ 4x &= 8 \quad \therefore \quad x=2 \\ y-1 &= 2(2)=4 \quad \therefore \quad y=5 \\ z &= 3(2) \quad \therefore \quad z=6 \end{aligned}$$

ดังนั้นจุดตัดของเส้นตรง L_1 และ L_2 คือ $(2,5,6)$ #

จะเห็นว่า $\vec{A}_1 = \langle 1,2,3\rangle$ และ $\vec{A}_2 = \langle -2,4,1\rangle$ เนื่องจากระนาบที่ผ่านเส้นตรง L_1 และ L_2 จะได้ว่า $\vec{N}$ ตั้งฉากกับ $\vec{A}_1$ และ $\vec{A}_2$ ฉะนั้น

$$\begin{aligned} \vec{N} = \vec{A}_1 \times \vec{A}_2 &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{i} & \vec{i} \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= \langle -10,-7,8\rangle \end{aligned}$$

สมการของระนาบที่ผ่านจุด $(2,5,6)$ และตั้งฉากกับ $\vec{N} = \langle -10,-7,8\rangle$ คือ

$$\begin{aligned} -10(x-2)-7(y-5)+8(z-6) &= 0 \\ -10x-7y+8z &= -7 \quad \# \end{aligned}$$

กำหนดให้ $L_1 : x = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z}{2}$ และ $L_2 : \dfrac{4-x}{2} = \dfrac{y-1}{5} = z-3$ เป็นเส้นตรงในสามมิติ

23.1 จงหาจุดตัดของเส้นตรง L_1 และ L_2

23.2 จงหาสมการระนาบที่ผ่านเส้นตรง L_1 และ L_2

วิธีทำ จากสมการของ L_1 จะได้ว่า $z=2x$ และสมการของ L_2 จะได้ว่า $z=\frac{4-x}{2}+3$ นั่นคือ

$$\begin{aligned} 2x &= \frac{4-x}{2}+3 \\ 4x-6 &= 4-x \\ 5x &= 10 \quad \therefore \quad x=2 \\ z &= 2(2)=4 \quad \therefore \quad z=4 \\ y-2 &= 2(2) \quad \therefore \quad y=6 \end{aligned}$$

ดังนั้นจุดตัดของเส้นตรง L_1 และ L_2 คือ $(2,6,4)$ #

จะเห็นว่า $\vec{A}_1 = \langle 1,2,2\rangle$ และ $\vec{A}_2 = \langle -2,5,1\rangle$ เนื่องจากระนาบที่ผ่านเส้นตรง L_1 และ L_2 จะได้ว่า $\vec{N}$ ตั้งฉากกับ $\vec{A}_1$ และ $\vec{A}_2$ ฉะนั้น

$$\begin{aligned} \vec{N} = \vec{A}_1 \times \vec{A}_2 &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{i} & \vec{i} \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} \\ &= \langle -8,-5,9\rangle \end{aligned}$$

สมการของระนาบที่ผ่านจุด $(2,6,4)$ และตั้งฉากกับ $\vec{N} = \langle -8,-5,9\rangle$ คือ

$$\begin{aligned} -8(x-2)-5(y-6)+9(z-4) &= 0 \\ -8x-5y+9z &= -10 \quad \# \end{aligned}$$

กำหนดให้ $L_1 : x = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z}{3}$ และ $L_2 : \dfrac{4-x}{2} = \dfrac{y-4}{5} = z-5$ เป็นเส้นตรงในสามมิติ

23.1 จงหาจุดตัดของเส้นตรง L_1 และ L_2

23.2 จงหาสมการระนาบที่ผ่านเส้นตรง L_1 และ L_2

วิธีทำ จากสมการของ L_1 จะได้ว่า $z = 3x$ และสมการของ L_2 จะได้ว่า $z = \frac{4-x}{2} + 5$ นั่นคือ

$$\begin{aligned} 3x &= \frac{4-x}{2} + 5 \\ 6x - 10 &= 4 - x \\ 7x &= 14 \quad \therefore \quad x = 2 \\ z &= 3(2) = 6 \quad \therefore \quad z = 6 \\ y - 1 &= 4(2) \quad \therefore \quad y = 9 \end{aligned}$$

ดังนั้นจุดตัดของเส้นตรง L_1 และ L_2 คือ $(2, 9, 6)$ #
จะเห็นว่า $\vec{A}_1 = \langle 1, 4, 3 \rangle$ และ $\vec{A}_2 = \langle -2, 5, 1 \rangle$ เนื่องจากระนาบที่ผ่านเส้นตรง L_1 และ L_2 จะได้ว่า $\vec{N}$ ตั้งฉากกับ $\vec{A}_1$ และ $\vec{A}_2$ ฉะนั้น

$$\begin{aligned} \vec{N} = \vec{A}_1 \times \vec{A}_2 &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{i} & \vec{i} \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} \\ &= \langle -11, -7, 13 \rangle \end{aligned}$$

สมการของระนาบที่ผ่านจุด $(2, 9, 6)$ และตั้งฉากกับ $\vec{N} = \langle -11, -7, 13 \rangle$ คือ

$$\begin{aligned} -11(x-2) - 7(y-9) + 13(z-6) &= 0 \\ -11x - 7y + 13z &= -7 \quad \# \end{aligned}$$

กำหนดให้ $L_1 : x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+2}{4}$ และ $L_2 : \dfrac{4-x}{2} = \dfrac{y-1}{3} = z-5$ เป็นเส้นตรงในสามมิติ

23.1 จงหาจุดตัดของเส้นตรง L_1 และ L_2

23.1 จงหาสมการระนาบที่ผ่านเส้นตรง L_1 และ L_2

วิธีทำ จากสมการของ L_1 จะได้ว่า $z = 4x - 2$ และสมการของ L_2 จะได้ว่า $z = \frac{4-x}{2} + 5$ นั่นคือ

$$\begin{aligned} 4x - 2 &= \frac{4-x}{2} + 5 \\ 8x - 14 &= 4 - x \\ 9x &= 18 \quad \therefore \quad x = 2 \\ z &= 4(2) - 2 = 6 \quad \therefore \quad z = 6 \\ y &= 2(2) \quad \therefore \quad y = 4 \end{aligned}$$

ดังนั้นจุดตัดของเส้นตรง L_1 และ L_2 คือ $(2, 4, 6)$ #
จะเห็นว่า $\vec{A}_1 = \langle 1, 2, 4 \rangle$ และ $\vec{A}_2 = \langle -2, 3, 1 \rangle$ เนื่องจากระนาบที่ผ่านเส้นตรง L_1 และ L_2 จะได้ว่า $\vec{N}$ ตั้งฉากกับ $\vec{A}_1$ และ $\vec{A}_2$ ฉะนั้น

$$\begin{aligned} \vec{N} = \vec{A}_1 \times \vec{A}_2 &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{i} & \vec{i} \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= \langle -10, -9, 7 \rangle \end{aligned}$$

สมการของระนาบที่ผ่านจุด $(2, 4, 6)$ และตั้งฉากกับ $\vec{N} = \langle -10, -9, 7 \rangle$ คือ

$$\begin{aligned} -10(x-2) - 9(y-4) + 7(z-6) &= 0 \\ -10x - 9y + 7z &= -14 \quad \# \end{aligned}$$

ข้อ 24

1. จงหาเวกเตอร์เส้นสัมผัสหน่วย $\vec{T}$ เวกเตอร์แนวฉากหน่วย $\vec{N}$ และเวกเตอร์แนวฉากคู่ $\vec{B}$ ของเส้นโค้ง

$$\vec{r}(t) = \langle 2\sin^2 t, \sin 2t, t\rangle \quad \text{ที่จุด} \quad (2, 0, \tfrac{\pi}{2})$$

วิธีทำ จะเห็นว่า $\vec{r}(\frac{\pi}{2}) = \langle 2, 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ นั่นคือ $t = \frac{\pi}{2}$

เวกเตอร์สัมผัสหน่วย $\vec{T}$ เมื่อ $t = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}
\vec{r}'(t) &= \langle 4\sin t\cos t, 2\cos 2t, 1\rangle \\
\vec{r}'(t) &= \langle 2\sin 2t, 2\cos 2t, 1\rangle \\
\|\vec{r}'(t)\| &= \sqrt{4\sin^2 2t + 4\cos^2 2t + 1} = \sqrt{5} \\
\vec{T}(t) &= \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\langle 2\sin 2t, 2\cos 2t, 1\rangle \\
\vec{T}(\frac{\pi}{2}) &= \left\langle 0, -\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right\rangle \qquad \#
\end{aligned}$$

เวกเตอร์แนวฉากหน่วย $\vec{N}$ เมื่อ $t = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}
\vec{T}'(t) &= \frac{1}{\sqrt{5}}\langle 4\cos 2t, -4\sin 2t, 0\rangle \\
\|\vec{T}'(t)\| &= \frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{16\cos^2 2t + 16\sin^2 2t + 0} = \frac{4}{\sqrt{5}} \\
\vec{N}(t) &= \frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{T}'(t)\|} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{4}{\sqrt{5}}}\langle 4\cos 2t, -4\sin 2t, 0\rangle = \langle \cos 2t, -\sin 2t, 0\rangle \\
\vec{N}(\frac{\pi}{2}) &= \langle -1, 0, 0\rangle \qquad \#
\end{aligned}$$

เวกเตอร์แนวฉากคู่ $\vec{B}$ เมื่อ $t = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}
\vec{B}(\frac{\pi}{2}) &= \vec{T}(\frac{\pi}{2}) \times \vec{N}(\frac{\pi}{2}) \\
&= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \left\langle 0, -\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right\rangle \qquad \#
\end{aligned}$$

2. จงหาเวกเตอร์เส้นสัมผัสหน่วย $\vec{T}$ เวกเตอร์แนวฉากหน่วย $\vec{N}$ และเวกเตอร์แนวฉากคู่ $\vec{B}$ ของเส้นโค้ง

$$\vec{r}(t) = \langle 2\sin^2 t, \sin 2t, t\rangle \quad \text{ที่จุด} \quad (2, 0, -\tfrac{\pi}{2})$$

วิธีทำ จะเห็นว่า $\vec{r}(\frac{-\pi}{2}) = \langle 2, 0, -\frac{\pi}{2}\rangle$ นั่นคือ $t = -\frac{\pi}{2}$

เวกเตอร์สัมผัสหน่วย $\vec{T}$ เมื่อ $t = -\frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}
\vec{r}'(t) &= \langle 4\sin t\cos t, 2\cos 2t, 1\rangle \\
\vec{r}'(t) &= \langle 2\sin 2t, 2\cos 2t, 1\rangle \\
\|\vec{r}'(t)\| &= \sqrt{4\sin^2 2t + 4\cos^2 2t + 1} = \sqrt{5} \\
\vec{T}(t) &= \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\langle 2\sin 2t, 2\cos 2t, 1\rangle \\
\vec{T}(-\frac{\pi}{2}) &= \left\langle 0, -\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right\rangle \qquad \#
\end{aligned}$$

เวกเตอร์แนวฉากหน่วย $\vec{N}$ เมื่อ $t = -\frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}
\vec{T}'(t) &= \frac{1}{\sqrt{5}}\langle 4\cos 2t, -4\sin 2t, 0\rangle \\
\|\vec{T}'(t)\| &= \frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{16\cos^2 2t + 16\sin^2 2t + 0} = \frac{4}{\sqrt{5}} \\
\vec{N}(t) &= \frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{T}'(t)\|} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{4}{\sqrt{5}}}\langle 4\cos 2t, -4\sin 2t, 0\rangle = \langle \cos 2t, -\sin 2t, 0\rangle \\
\vec{N}(-\frac{\pi}{2}) &= \langle -1, 0, 0\rangle \qquad \#
\end{aligned}$$

เวกเตอร์แนวฉากคู่ $\vec{B}$ เมื่อ $t = -\frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}
\vec{B}(-\frac{\pi}{2}) &= \vec{T}(-\frac{\pi}{2}) \times \vec{N}(-\frac{\pi}{2}) \\
&= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \left\langle 0, -\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right\rangle \qquad \#
\end{aligned}$$

3. จงหาเวกเตอร์เส้นสัมผัสหน่วย $\vec{T}$ เวกเตอร์แนวฉากหน่วย $\vec{N}$ และเวกเตอร์แนวฉากคู่ $\vec{B}$ ของเส้นโค้ง

$$\vec{r}(t) = \langle 2\cos^2 t, \sin 2t, t\rangle \quad \text{ที่จุด} \quad (0, 0, \tfrac{\pi}{2})$$

วิธีทำ จะเห็นว่า $\vec{r}(\frac{\pi}{2}) = \langle 0, 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ นั่นคือ $t = \frac{\pi}{2}$

เวกเตอร์สัมผัสหน่วย $\vec{T}$ เมื่อ $t = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}
\vec{r}'(t) &= \langle -4\cos t \sin t, 2\cos 2t, 1\rangle \\
\vec{r}'(t) &= \langle -2\sin 2t, 2\cos 2t, 1\rangle \\
\|\vec{r}'(t)\| &= \sqrt{4\sin^2 2t + 4\cos^2 2t + 1} = \sqrt{5} \\
\vec{T}(t) &= \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\langle -2\sin 2t, 2\cos 2t, 1\rangle \\
\vec{T}(\frac{\pi}{2}) &= \left\langle 0, -\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right\rangle \qquad \#
\end{aligned}$$

เวกเตอร์แนวฉากหน่วย $\vec{N}$ เมื่อ $t = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}
\vec{T}'(t) &= \frac{1}{\sqrt{5}}\langle -4\cos 2t, -4\sin 2t, 0\rangle \\
\|\vec{T}'(t)\| &= \frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{16\cos^2 2t + 16\sin^2 2t + 0} = \frac{4}{\sqrt{5}} \\
\vec{N}(t) &= \frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{T}'(t)\|} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{4}{\sqrt{5}}}\langle -4\cos 2t, -4\sin 2t, 0\rangle = \langle -\cos 2t, -\sin 2t, 0\rangle \\
\vec{N}(\frac{\pi}{2}) &= \langle 1, 0, 0\rangle \qquad \#
\end{aligned}$$

เวกเตอร์แนวฉากคู่ $\vec{B}$ เมื่อ $t = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}
\vec{B}(\frac{\pi}{2}) &= \vec{T}(\frac{\pi}{2}) \times \vec{N}(\frac{\pi}{2}) \\
&= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \left\langle 0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right\rangle \qquad \#
\end{aligned}$$

4. จงหาเวกเตอร์เส้นสัมผัสหน่วย $\vec{T}$ เวกเตอร์แนวฉากหน่วย $\vec{N}$ และเวกเตอร์แนวฉากคู่ $\vec{B}$ ของเส้นโค้ง

$$\vec{r}(t) = \langle 2\cos^2 t, \sin 2t, t\rangle \quad \text{ที่จุด} \quad (0, 0, -\tfrac{\pi}{2})$$

วิธีทำ จะเห็นว่า $\vec{r}(-\frac{\pi}{2}) = \langle 0, 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ นั่นคือ $t = -\frac{\pi}{2}$

เวกเตอร์สัมผัสหน่วย $\vec{T}$ เมื่อ $t = -\frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}
\vec{r}'(t) &= \langle -4\cos t \sin t, 2\cos 2t, 1\rangle \\
\vec{r}'(t) &= \langle -2\sin 2t, 2\cos 2t, 1\rangle \\
\|\vec{r}'(t)\| &= \sqrt{4\sin^2 2t + 4\cos^2 2t + 1} = \sqrt{5} \\
\vec{T}(t) &= \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\langle -2\sin 2t, 2\cos 2t, 0\rangle \\
\vec{T}(-\frac{\pi}{2}) &= \left\langle 0, -\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right\rangle \qquad \#
\end{aligned}$$

เวกเตอร์แนวฉากหน่วย $\vec{N}$ เมื่อ $t = -\frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}
\vec{T}'(t) &= \frac{1}{\sqrt{5}}\langle -4\cos 2t, -4\sin 2t, 0\rangle \\
\|\vec{T}'(t)\| &= \frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{16\cos^2 2t + 16\sin^2 2t + 0} = \frac{4}{\sqrt{5}} \\
\vec{N}(t) &= \frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{T}'(t)\|} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{4}{\sqrt{5}}}\langle -4\cos 2t, -4\sin 2t, 0\rangle = \langle -\cos 2t, -\sin 2t, 0\rangle \\
\vec{N}(-\frac{\pi}{2}) &= \langle 1, 0, 0\rangle \qquad \#
\end{aligned}$$

เวกเตอร์แนวฉากคู่ $\vec{B}$ เมื่อ $t = -\frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}
\vec{B}(-\frac{\pi}{2}) &= \vec{T}(-\frac{\pi}{2}) \times \vec{N}(-\frac{\pi}{2}) \\
&= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \left\langle 0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right\rangle \qquad \#
\end{aligned}$$