คณิตศาสตร์

มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
คณะครุศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ข้อสอบกลางภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2565

รหัสวิชา	**ชื่อวิชา**	**วันเวลาสอบ**	**คะแนนเต็ม**
MAC2302	ทฤษฎีจำนวน	เวลา 9:00 - 12:00 วันจันทร์ ที่ 12 กันยายน 2565	105 คะแนน 25%

ชื่อ-สกุล.. **รหัสนักศึกษา**................................ **หมู่เรียน**..........

คำชี้แจง

1. ข้อสอบมีทั้งหมด 12 **หน้า จำนวน** 10 **ข้อ**
2. เขียนรหัสนักศึกษา และหมู่เรียนด้วย**ตัวบรรจงลงในข้อสอบทุกหน้า**
3. **ห้ามใช้** เครื่องคำนวณ และอุปกรณ์สื่อสารทุกชนิดในขณะสอบ
4. **ไม่อนุญาต**ให้นำเอกสารการเรียน ตำราเรียนทุกชนิดเข้าห้องสอบ
5. **ห้าม**นำข้อสอบออกจากห้องสอบโดยเด็ดขาด
6. หากมี**การทุจริต**ในการสอบ จะได้รับการลงโทษตามระเบียบของมหาวิทยาลัย

ข้าพเจ้าจะปฏิบัติตามข้อตกลงอย่างเคร่งครัด
ลงชื่อผู้เข้าสอบ

....

อาจารย์ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย

ข้อที่	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	**รวม**
คะแนน											

1. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้โดยไม่ต้องแสดงวิธีทำ (ข้อละ 1 คะแนน)

1.1 ถ้า 7 หาร a และ b มีเศษเหลือเท่ากับ 2 และ 3 ตามลำดับ แล้ว 7 หาร $(3a+2b)^2-(2a+3b)^2$ มีเศษเหลือเท่าใด (ตอบเป็นจำนวนบวก) __________

1.2 จงหาจำนวนเต็มสี่หลัก $1aa1$ ซึ่งหารด้วย 9 ลงตัว __________

1.3 จงหา**ผลบวก**ของจำนวนเต็มบวก m ทั้งหมด ที่สอดคล้อง $(m+1) \mid (m-2)^2$ __________

1.4 จงหา**หลักหน่วย**ของ 7^{22} __________

1.5 จงหาค่าของ $\ell\text{cm}(-10!, 12!)$ __________

1.6 ถ้ามีจำนวนเต็ม x, y ซึ่ง $65x+22y=1$ จงหา $\gcd(x, 22)$ __________

1.7 ให้ $a, b \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $\gcd(a,b)=13$ และ $ab=-845$ จงหา $\ell\text{cm}(a,b)$ __________

1.8 จงหา**จำนวนเฉพาะ** p **ที่มากสุด**ที่หาร $(p+2022)^2$ ลงตัว __________

1.9 จงหา**จำนวนตัวหาร**ทั้งหมดของ 2565 __________

1.10 ถ้ารูปแบบบัญญัติของจำนวนประกอบตัวหนึ่งคือ $2^2 \cdot 3^3 \cdot p^x < 600$ โดยที่ $x > 0$ แล้ว $p+x$ มีค่าเท่าใด __________

ข้อ 2 ถึง 10 จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

2. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

2.1 **(5 คะแนน)** จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้ โดยใช้วิธีขัดแย้ง (contradiction)

$$(\forall \varepsilon > 0, |x| < \varepsilon) \to x = 0$$

2.2 **(5 คะแนน)** จงพิสูจน์โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ว่า

$$\frac{1}{2^1 - 2^2} + \frac{1}{2^2 - 2^3} + \frac{1}{2^3 - 2^4} + \cdots + \frac{1}{2^n - 2^{n+1}} = \frac{1}{2^n} - 1$$

สำหรับจำนวนนับ n

3. **(10 คะแนน)** จงพิสูจน์ว่า $12 \mid n(n^2-1)(2n+1)$ ทุกจำนวนเต็มคี่ n
ข้อเสนอแนะ : ใช้ทฤษฎีบทที่ว่า ถ้า $a \mid c$ และ $b \mid c$ โดยที่ $\gcd(a,b)=1$ แล้ว $ab \mid c$

4. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

   4.1 **(5 คะแนน) เลขโดดหลักหน่วยที่มีศูนย์ตามหลัง** หมายถึง เลขโดดที่ไม่ใช่ศูนย์หลักแรกนับจากหลักหน่วยของจำนวนเต็ม เช่น เลขโดดหลักหน่วยที่มีศูนย์ตามหลังของ 5563000 คือ 3 และ 12390000 คือ 9 และ 10230100 คือ 1
   จงหา**เลขโดดหลักหน่วยที่มีศูนย์ตามหลัง**ของ $(5!)^{5!}$

   4.2 **(5 คะแนน)** กำหนดให้ a, b เป็นเลขโดด และ

   $$99ab00 \quad \text{เป็นจำนวนเต็มหกหลักที่หารด้วย } 77 \text{ ลงตัว}$$

   จงหาจำนวน $99ab00$

5. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

   5.1 **(5 คะแนน)** จงหาจำนวนเต็มบวก a ทั้งหมดที่สอดคล้อง $(5a-1) \mid (5a+3)(5a+8)$

   5.2 **(5 คะแนน)** จงพิสูจน์ว่า $9 \mid (4^n + 15n - 1)$ สำหรับจำนวนนับ n โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

6. (10 **คะแนน**) จงตอบคำถามต่อไปนี้

6.1 (5 **คะแนน**) ให้ a, b, c เป็นจำนวนเต็ม จงแสดงว่า

$$\text{ถ้า} \quad a^2 \mid bc \quad \text{และ} \quad \gcd(a,b) = 1 \quad \text{แล้ว} \quad a^2 \mid c^2$$

6.2 (5 **คะแนน**) จำนวนเต็มตั้งแต่ 150 ถึง 650 กี่จำนวนที่เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กับ 18

7. (12 **คะแนน**) จงตอบคำถามต่อไปนี้

7.1 (7 **คะแนน**) จงหาจำนวนเต็ม x, y ซึ่ง $222x - 565y = 1$

7.2 (5 **คะแนน**) จงหาตัวหารร่วมมาก 3131 และ 1313 โดยใช้วิธียุคลิด

8. **(10 คะแนน)** ให้ a, b เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่ศูนย์ และ $k \in \mathbb{Z}^+$ สมมติว่า $\gcd(k, b) = 1$

8.1 **(6 คะแนน)** จงพิสูจน์ว่า $\gcd(ka, b) = \gcd(a, b)$

8.2 **(4 คะแนน)** จงใช้ผลจากข้อ 8.1 แสดงว่า $\ell\text{cm}(ka, b) = k \cdot \ell\text{cm}(a, b)$

9. (12 **คะแนน**) จงตอบคำถามต่อไปนี้

9.1 (6 **คะแนน**) จงหาจำนวนเฉพาะ 2 ตัวแรกที่อยู่ในรูป

$$n^4 + n^2 + 33 \qquad \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มบวก}$$

9.2 (6 **คะแนน**) ให้ x, y เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่

$$\gcd(x,y) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7$$
$$\ell\mathrm{cm}(x,y) = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7^2$$

จงหา x และ y ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

10. **(11 คะแนน)** ให้ $N = 10! \cdot 20^{122} \cdot 25^{65}$

10.1 **(5 คะแนน)** จงเขียน N ในรูปแบบบัญญัติ

10.2 **(6 คะแนน)** N เป็นจำนวนเต็มกี่หลัก

คณิตศาสตร์

มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
คณะครุศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์
เฉลยข้อสอบกลางภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2565

รหัสวิชา	**ชื่อวิชา**	**วันเวลาสอบ**	**คะแนนเต็ม**
MAC2302	ทฤษฎีจำนวน	เวลา 9:00 - 12:00 วันจันทร์ ที่ 12 กันยายน 2565	105 คะแนน 25%

โดย ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย

---

1. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้โดย<u>ไม่ต้องแสดงวิธีทำ</u> (ข้อละ 1 คะแนน)

1.1 ถ้า 7 หาร a และ b มีเศษเหลือเท่ากับ 2 และ 3 ตามลำดับ แล้ว 7 หาร $(3a+2b)^2-(2a+3b)^2$ มีเศษเหลือเท่าใด (ตอบเป็นจำนวนบวก) 3

แนวคำตอบ จะได้ว่า 7 หาร $(3a+2b)^2-(2a+3b)^2$ มีเศษเหลือเท่ากับ

$$(3\cdot 2+2\cdot 3)^2-(2\cdot 2+3\cdot 3)^2=144-169=-25$$

นั่นคือเศษเหลือเท่ากับ -4 หรือ 3 #

1.2 จงหาจำนวนเต็มสี่หลัก $1aa1$ ซึ่งหารด้วย 9 ลงตัว 1881

แนวคำตอบ เนื่องจาก $9\mid(1+a+a+1)$ หรือ $9\mid(2+2a)$ ดังนั้น $a=8$
จำนวนนั้นคือ 1881 #

1.3 จงหา**ผลบวก**ของจำนวนเต็มบวก m ทั้งหมด ที่สอดคล้อง $(m+1)\mid(m-2)^2$ 10

แนวคำตอบ พิจารณา $(m-2)^2=[(m+1)-3]^2=(m+1)^2-6(m+1)+9$
ดังนั้น $(m+1)\mid 9$ ฉะนั้น $m+1=3,9$ หรือ $m=2,8$ ผลบวกของ m เท่ากับ $2+8=10$ #

1.4 จงหา**หลักหน่วย**ของ 7^{22} 9

แนวคำตอบ เนื่องจาก $7^4=2401$ หารด้วย 10 มีเศษเหลือเท่ากับ 1 ดังนั้น
10 หาร $7^{22}=(7^4)^5\cdot 7^2=(7^4)^5\cdot 49$ มีเศษเหลือเท่ากับ $1^5\cdot 9=9$
สรุปได้ว่า หลักหน่วยของ 7^{22} คือ 9 #

1.5 จงหาค่าของ $\ell\text{cm}(-10!,12!)$ 12!

แนวคำตอบ เนื่องจาก $10!\mid 12!$ ดังนั้น $\ell\text{cm}(-10!,12!)=12!$ #

1.6 ถ้ามีจำนวนเต็ม x,y ซึ่ง $65x+22y=1$ จงหา $\gcd(x,22)$ 1

แนวคำตอบ เนื่องจาก $x(65)+22(y)=1$ ดังนั้น $\gcd(x,22)=1$

1.7 ให้ $a, b \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $\gcd(a,b) = 13$ และ $ab = -845$ จงหา $\ell\text{cm}(a,b)$ 65

แนวคำตอบ จาก $\gcd(a,b)\ell\text{cm}(a,b) = |ab|$ ดังนั้น

$$\ell\text{cm}(a,b) = \frac{|-845|}{13} = 65 \quad \#$$

1.8 จงหา**จำนวนเฉพาะ** p **ที่มากสุด**ที่หาร $(p+2022)^2$ ลงตัว 337

แนวคำตอบ จะได้ว่า $p \mid (p+2022)$ นั่นคือ $p \mid 2022$ เนื่องจาก $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$
ดังนั้นจำนวนเฉพาะที่มากที่สุดคือ 337 $\#$

1.9 จงหา**จำนวนตัวหาร**ทั้งหมดของ 2565 16

แนวคำตอบ เนื่องจาก $2565 = 3^3 \cdot 5 \cdot 19$ ดังนั้นจำนวนตัวหารของ 2565 เท่ากับ

$$(3+1)(1+1)(1+1) = 16 \quad \#$$

1.10 ถ้ารูปแบบบัญญัติของจำนวนประกอบตัวหนึ่งคือ $2^2 \cdot 3^3 \cdot p^x < 600$ 6

โดยที่ $x > 0$ แล้ว $p + x$ มีค่าเท่าใด

แนวคำตอบ เนื่องจาก $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^1 = 540 < 600$ ดังนั้น $p = 5, x = 1$
ทำให้ได้ว่า $p + x = 5 + 1 = 6$ $\#$

ข้อ 2 ถึง 10 จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

2. (**10 คะแนน**) จงตอบคำถามต่อไปนี้

   2.1 (**5 คะแนน**) จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้ โดยใช้วิธีขัดแย้ง (contradiction)

$$(\forall \varepsilon > 0, |x| < \varepsilon) \to x = 0$$

บทพิสูจน์. สมมติว่า $(\forall \varepsilon > 0, |x| < \varepsilon) \land x \neq 0$ จะได้ว่า $|x| > 0$
เนื่องจาก $|x| < \varepsilon$ ทุก ๆ $\varepsilon > 0$ นั่นคือกรณีที่ $\varepsilon = |x| > 0$ ต้องสอดคล้องเงื่อนไขดังกล่าว ฉะนั้น

$$|x| < \varepsilon = |x|$$

นี้เกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้นสิ่งที่สมมติไม่เป็นจริง สรุปได้ว่า $(\forall \varepsilon > 0, |x| < \varepsilon) \to x = 0$ □

   2.2 (**5 คะแนน**) จงพิสูจน์โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ว่า

$$\frac{1}{2^1 - 2^2} + \frac{1}{2^2 - 2^3} + \frac{1}{2^3 - 2^4} + \cdots + \frac{1}{2^n - 2^{n+1}} = \frac{1}{2^n} - 1$$

สำหรับจำนวนนับ n

บทพิสูจน์. ให้ $P(n)$ แทนข้อความ

$$\frac{1}{2^1 - 2^2} + \frac{1}{2^2 - 2^3} + \frac{1}{2^3 - 2^4} + \cdots + \frac{1}{2^n - 2^{n+1}} = \frac{1}{2^n} - 1$$

เมื่อ n เป็นจำนวนนับ

ขั้นฐาน : เนื่องจาก $\dfrac{1}{2^1 - 2^2} = -\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} - 1 = \dfrac{1}{2^1} - 1$ ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

ขั้นอุปนัย : สมมติว่า $P(k)$ เป็นจริง เมื่อ $k \in \mathbb{N}$ นั้นคือ

$$\frac{1}{2^1 - 2^2} + \frac{1}{2^2 - 2^3} + \frac{1}{2^3 - 2^4} + \cdots + \frac{1}{2^k - 2^{k+1}} = \frac{1}{2^k} - 1$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^1 - 2^2} + \frac{1}{2^2 - 2^3} + \frac{1}{2^3 - 2^4} + \cdots + \frac{1}{2^k - 2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1} - 2^{k+2}} &= \frac{1}{2^k} - 1 + \frac{1}{2^{k+1} - 2^{k+2}} \\
&= \frac{1}{2^k} - 1 + \frac{1}{2^{k+1}(1-2)} \\
&= \frac{1}{2^k} - 1 - \frac{1}{2^{k+1}} \\
&= \frac{2}{2 \cdot 2^k} - \frac{1}{2^{k+1}} - 1 \\
&= \frac{1}{2^{k+1}} - 1
\end{aligned}$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์สรุปได้ว่า

$$\frac{1}{2^1 - 2^2} + \frac{1}{2^2 - 2^3} + \frac{1}{2^3 - 2^4} + \cdots + \frac{1}{2^n - 2^{n+1}} = \frac{1}{2^n} - 1 \qquad \text{สำหรับจำนวนนับ } n$$

□

3. **(10 คะแนน)** จงพิสูจน์ว่า $12 \mid n(n^2-1)(2n+1)$ ทุกจำนวนเต็มคี่ n

ข้อเสนอแนะ : ใช้ทฤษฎีบทที่ว่า ถ้า $a \mid c$ และ $b \mid c$ โดยที่ $\gcd(a,b)=1$ แล้ว $ab \mid c$

<u>แบบที่ 1 ทำตามข้อเสนอแนะ</u>

บทพิสูจน์. ให้ n เป็นจำนวนเต็มคี่
โดยขั้นตอนวิธีการหารมีจำนวนเต็ม q ซึ่ง $n=3q$ หรือ $n=3q+1$ หรือ $n=3q+2$

กรณี $n=3q$ จะได้ว่า

$$n(n^2-1)(2n+1) = 3q((3q)^2-1)(2(3q)+1) = 3[q(9q^2-1)(6q+1)]$$

ดังนั้น $3 \mid n(n^2-1)(2n+1)$

กรณี $a=3q+1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} n(n^2-1)(2n+1) &= (3q+1)((3q+1)^2-1)(2(3q+1)+1) = (3q+1)(9q^2+6q)(6q+3) \\ &= (3q+1)(9q^2+6q)3(2q+1) \\ &= 3[(3q+1)(9q^2+6q)(2q+1)] \end{aligned}$$

ดังนั้น $3 \mid n(n^2-1)(2n+1)$

กรณี $n=3q+2$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} n(n^2-1)(2n+1) &= (3q+2)((3q+2)^2-1)(2(3q+2)+1) = (3q+2)(9q^2+12q+3)(6q+5) \\ &= (3q+2)3(3q^2+4q+1)(6q+5) \\ &= 3[(3q+2)(3q^2+4q+1)(6q+5)] \end{aligned}$$

ดังนั้น $3 \mid n(n^2-1)(2n+1)$

โดยขั้นตอนวิธีการหารมีจำนวนเต็ม q ซึ่ง $n=4q$ หรือ $n=4q+1$ หรือ $n=4q+2$ หรือ $n=4q+3$
เนื่องจาก n เป็นจำนวนเต็มคี่ ดังนั้น $n=4q+1$ หรือ $n=4q+3$

กรณี $a=4q+1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} n(n^2-1)(2n+1) &= (4q+1)((4q+1)^2-1)(2(4q+1)+1) = (4q+1)(16q^2+8q)(8q+3) \\ &= (4q+1)4(4q^2+2q)(8q+3) \\ &= 4[(4q+1)(4q^2+2q)(8q+3)] \end{aligned}$$

ดังนั้น $4 \mid n(n^2-1)(2n+1)$

กรณี $a=4q+3$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} n(n^2-1)(2n+1) &= (4q+3)((4q+3)^2-1)(2(4q+3)+1) = (4q+3)(16q^2+24q+8)(8q+7) \\ &= (4q+3)4(4q^2+6q+2)(8q+7) \\ &= 4[(4q+3)(4q^2+6q+2)(8q+7)] \end{aligned}$$

ดังนั้น $4 \mid n(n^2-1)(2n+1)$

เนื่องจาก $\gcd(3,4)=1$ โดยที่ $3 \mid n(n^2-1)(2n+1)$ และ $4 \mid n(n^2-1)(2n+1)$ ดังนั้น

$$12 \mid n(n^2-1)(2n+1) \quad \text{ทุกจำนวนเต็มคี่ } n$$

$\square$

แบบที่ 2 ทำโดยใช้ขั้นตอนวิธีการกับ 6

บทพิสูจน์. ให้ n เป็นจำนวนเต็มคี่
โดยขั้นตอนวิธีการหารมีจำนวนเต็ม q ซึ่ง

$$n = 6q \text{ หรือ } n = 6q+1 \text{ หรือ } n = 6q+2 \text{ หรือ } n = 6q+3 \text{ หรือ } n = 6q+4 \text{ หรือ } n = 6q+5$$

เนื่องจาก n เป็นจำนวนเต็มคี่ ดังนั้น $n = 6q+1$ หรือ $n = 6q+3$ หรือ $n = 6q+5$

กรณี $a = 6q+1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} n(n^2-1)(2n+1) &= (6q+1)((6q+1)^2-1)(2(6q+1)+1) = (4q+1)(36q^2+12q)(12q+3) \\ &= (6q+1)12(2q^2+q)(12q+3) \\ &= 12[(6q+1)(2q^2+q)(12q+3)] \end{aligned}$$

ดังนั้น $12 \mid n(n^2-1)(2n+1)$

กรณี $a = 6q+3$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} n(n^2-1)(2n+1) &= (6q+3)((6q+3)^2-1)(2(6q+3)+1) = (6q+3)(36q^2+36q+8)(12q+7) \\ &= 3(2q+1)4(9q^2+9q+2)(12q+7) \\ &= 12[(2q+1)(9q^2+9q+2)(12q+7)] \end{aligned}$$

ดังนั้น $12 \mid n(n^2-1)(2n+1)$

กรณี $a = 6q+5$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} n(n^2-1)(2n+1) &= (6q+5)((6q+5)^2-1)(2(6q+5)+1) = (6q+5)(36q^2+60q+24)(12q+11) \\ &= (6q+5)12(3q^2+5q+2)(12q+11) \\ &= 12[(6q+5)(3q^2+5q+2)(12q+11)] \end{aligned}$$

ดังนั้น $12 \mid n(n^2-1)(2n+1)$

สรุปได้ว่า $12 \mid n(n^2-1)(2n+1)$ ทุกจำนวนเต็มคี่ n $\square$

4. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

4.1 **(5 คะแนน) เลขโดดหลักหน่วยที่มีศูนย์ตามหลัง** หมายถึง เลขโดดที่ไม่ใช่ศูนย์หลักแรกนับจากหลักหน่วยของจำนวนเต็ม เช่น เลขโดดหลักหน่วยที่มีศูนย์ตามหลังของ 5563000 คือ 3 และ 12390000 คือ 9 และ 10230100 คือ 1 จงหา**เลขโดดหลักหน่วยที่มีศูนย์ตามหลัง**ของ $(5!)^{5!}$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$(5!)^{5!} = 120^{120} = (12 \cdot 10)^{120} = 12^{120} \cdot 10^{120}$$

เนื่องจาก 10 หาร 12 เหลือเศษเท่ากับ 2 ดังนั้น

10 หาร 12^{120}	เหลือเศษเท่ากับ	10 หาร 2^{120}

เนื่องจาก

10 หาร $(2)^{10} = 1024$	เหลือเศษเท่ากับ	4
10 หาร $2^{120} = (2^{10})^{12}$	เหลือเศษเท่ากับ	$4^{12} = 2^{24}$

จะได้ว่า

10 หาร $2^{24} = ((2)^{10})^2 \cdot 2^4$	เหลือเศษเท่ากับ	10 หาร $4^2 \cdot 2^4 = 16 \cdot 16 = 256$
10 หาร 256	เหลือเศษเท่ากับ 6	

ดังนั้นหลักหน่วยที่มีศูนย์ตามหลังของ $(5!)^{5!}$ เท่ากับ 6 $\#$

4.2 **(5 คะแนน)** กำหนดให้ a, b เป็นเลขโดด และ

$$99ab00 \quad \text{เป็นจำนวนเต็มหกหลักที่หารด้วย 77 ลงตัว}$$

จงหาจำนวน $99ab00$

แนวคำตอบ เนื่องจาก $77 = 7 \cdot 11$ ซึ่ง $77 \mid 99ab00$ และ $\gcd(7, 11) = 1$ ดังนั้น $7 \mid 99ab00$ และ $11 \mid 99ab00$ นั่นคือ

$$7 \text{ หาร } 1(0) + 3(0) + 2(b) - 1(a) - 3(9) - 2(9) = 2b - a - 45 = 2b - a - 7(6) - 3 \text{ ลงตัว}$$

ดังนั้น $7 \mid (2b - a - 3)$ จะได้ว่า

$$2b - a = 3 \quad \text{หรือ} \quad 2b - a = -4 \quad \text{หรือ} \quad 2b - a = 10 \quad \text{หรือ} \quad 2b - a = 17$$

พิจารณา $11 \mid 99ab00$

$$11 \text{ หาร } 0 - 0 + b - a + 9 - 9 = b - a \text{ ลงตัว จะได้ว่า } b - a = 0$$

	$b - a = 0$	$99ab00$
$2b - a = 3$	$a = 3, b = 3$	993300
$2b - a = -4$	$a = -4, b = -4$	เป็นไปไม่ได้
$2b - a = 10$	$a = 10, b = 10$	เป็นไปไม่ได้
$2b - a = 17$	$a = 17, b = 17$	เป็นไปไม่ได้

ดังนั้นจำนวนดังกล่าวคือ 993300 $\#$

5. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

5.1 **(5 คะแนน)** จงหาจำนวนเต็มบวก a ทั้งหมดที่สอดคล้อง $(5a-1) \mid (5a+3)(5a+8)$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}(5a+3)(5a+8) &= [(5a-1)+4][(5a-1)+9] \\ &= (5a-1)^2 + 13(5a-1) + 36\end{aligned}$$

นั่นคือ $(5a-1) \mid 36$ สรุปได้ว่า $5a-1 = 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36$ ดังนั้น $a = 1, 2$ $\#$

5.2 **(5 คะแนน)** จงพิสูจน์ว่า $9 \mid (4^n + 15n - 1)$ สำหรับจำนวนนับ n โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

บทพิสูจน์. ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $9 \mid (4^n + 15n - 1)$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับ

ขั้นฐาน : เนื่องจาก $4^1 + 15(1) - 1 = 18$ นั่นคือ $9 \mid (4^1 + 15(1) - 1)$ ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

ขั้นอุปนัย : สมมติว่า $P(k)$ เป็นจริง เมื่อ $k \in \mathbb{N}$ นั้นคือ $9 \mid (4^k + 15k - 1)$

จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม x ซึ่ง $4^k + 15k - 1 = 9x$ หรือ $4^k = 9x - 15k + 1$

$$\begin{aligned}4^{k+1} + 15(k+1) - 1 &= 4 \cdot 4^k + 15k + 14 \\ &= 4(9x - 15k + 1) + 15k + 14 \\ &= 36x - 60k + 4 + 15k + 14 \\ &= 36x - 45k + 18 \\ &= 9(4x - 5k + 2)\end{aligned}$$

ดังนั้น $9 \mid (4^{k+1} + 15(k+1) - 1)$ นั่นคือ $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์สรุปได้ว่า $9 \mid (4^n + 15n - 1)$ สำหรับจำนวนนับ n $\square$

6. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

6.1 **(5 คะแนน)** ให้ a, b, c เป็นจำนวนเต็ม จงแสดงว่า

$$\text{ถ้า} \quad a^2 \mid bc \quad \text{และ} \quad \gcd(a,b) = 1 \quad \text{แล้ว} \quad a^2 \mid c^2$$

บทพิสูจน์. ให้ a, b และ c เป็นจำนวนเต็ม สมมติว่า $a^2 \mid bc$ และ $\gcd(a,b) = 1$
จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม x, y, k ซึ่ง $1 = ax + by$ และ $bc = a^2k$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
c^2 &= c^2 \cdot 1 = c^2(ax+by) \\
&= c^2ax + c^2by \\
&= c^2ax \cdot 1 + c(bc)y \\
&= c^2ax(ax+by) + c(a^2k)y \\
&= c^2a^2x^2 + c^2xby + a^2cky \\
&= a^2c^2x^2 + c(bc)xy + a^2cky \\
&= a^2c^2x^2 + c(a^2k)xy + a^2cky \\
&= a^2(c^2x^2 + ckxy + cky)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $a^2 \mid c^2$ □

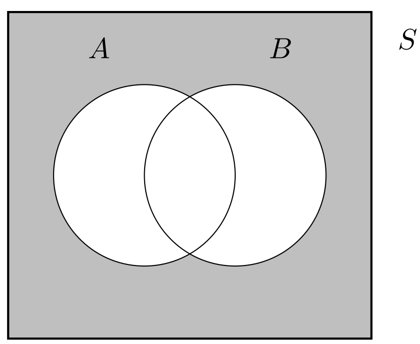
6.2 **(5 คะแนน)** จำนวนเต็มตั้งแต่ 150 ถึง 650 กี่จำนวนที่เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กับ 18
แนวคำตอบ กำหนดให้ $S = \{150, 151, 152, ..., 650\}$ และ

$$G = \{x \in S \,:\, \text{gcd}(x, 18) = 1\}$$

พิจารณา $18 = 2 \times 3^2$ เนื่องจาก $\gcd(x, 18) = 4$ ดังนั้น $2 \nmid x$ และ $3 \nmid x$ กำหนดให้

$$A = \{x \in S \,:\, 2 \mid x\} \qquad \text{และ} \qquad B = \{x \in S \,:\, 3 \mid x\}$$

เห็นได้ชัดว่า $G = (A \cup B)^c$ ซึ่งตรงกับแผนภาพเวนน์-ออยเลอร์ดังรูป



จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
A &= \{150, 152, 154, ..., 650\} \\
B &= \{150, 153, 156, ..., 648\} \\
A \cap B &= \{x \in S \,:\, 2 \mid x \text{ และ } 3 \mid x\} = \{150, 156, 162, ..., 648\}
\end{aligned}$$

จะได้ว่า $n(S) = 501, n(A) = 251, n(B) = 167$ และ $n(A \cap B) = 84$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
n(G) = n((A \cup B)^c) &= n(S) - n(A \cup B) \\
&= n(S) - [n(A) + n(B) - n(A \cap B)] \\
&= 501 - [251 + 167 - 84] = 167
\end{aligned}$$

ดังนั้น จำนวนเต็มตั้งแต่ 150 ถึง 650 ซึ่งเป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กับ 18 เท่ากับ 167 จำนวน #

7. (12 **คะแนน**) จงตอบคำถามต่อไปนี้

7.1 (7 **คะแนน**) จงหาจำนวนเต็ม x, y ซึ่ง $222x - 565y = 1$

แนวคำตอบ โดยขั้นตอนการหารของยุคลิด

$$
\begin{array}{rclcl|rrrl}
565 & = & 565(1) & + & 222(0) & 551 & 1 & 0 & R_1 \\
222 & = & 565(0) & + & 222(1) & 222 & 0 & 1 & R_2 \\
121 & = & 565(1) & + & 222(-2) & 121 & 1 & -2 & R_3 = R_1 - 2R_2 \\
101 & = & 565(-1) & + & 222(3) & 101 & -1 & 3 & R_4 = R_2 - R_3 \\
20 & = & 565(2) & + & 222(-5) & 20 & 2 & -5 & R_5 = R_3 - R_4 \\
1 & = & 565(-11) & + & 222(28) & 1 & -11 & 28 & R_6 = R_4 - 5R_5
\end{array}
$$

ดังนั้น $222(28) - 565(11) = 565(-11) + 222(28) = 1$ นั่นคือ $x = 28$ และ $y = 11$ #

7.2 (5 **คะแนน**) จงหาตัวหารร่วมมาก 3131 และ 1313 โดยใช้วิธียุคลิด

แนวคำตอบ พิจารณา

$$
\begin{aligned}
\gcd(1313, 3131) &= \gcd(1313, 1313(2) + 505) \\
&= \gcd(1313, 505) \\
&= \gcd(505(2) + 303, 505) \\
&= \gcd(303, 505) \\
&= \gcd(303, 303(1) + 202) \\
&= \gcd(303, 202) \\
&= \gcd(202(1) + 101, 202) \\
&= \gcd(101, 202) \\
&= \gcd(101, 101(2) + 0) \\
&= \gcd(101, 0) \\
&= 101
\end{aligned}
$$

ดังนั้น ตัวหารร่วมมาก 3131 และ 1313 เท่ากับ 101 #

8. **(10 คะแนน)** ให้ a, b เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่ศูนย์ และ $k \in \mathbb{Z}^+$ สมมติว่า $\gcd(k, b) = 1$

8.1 **(6 คะแนน)** จงพิสูจน์ว่า $\gcd(ka, b) = \gcd(a, b)$

<u>แบบที่ 1 ใช้บทนิยาม</u>

บทพิสูจน์. ให้ a, b เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่ศูนย์ และ $k \in \mathbb{Z}^+$ กำหนดให้ $d = \gcd(a, b)$ สมมติว่า $\gcd(k, b) = 1$ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม x, y ซึ่ง $1 = kx + by$ จะแสดงว่า $\gcd(ka, b) = d$

(ก) เนื่องจาก $\gcd(a, b) = d$ จะได้ว่า $d \mid a$ และ $d \mid b$ ทำให้ได้ว่า

$$d \mid ka$$

ฉะนั้น d เป็นตัวหารร่วมของ ka และ b

(ข) ให้ $c \in \mathbb{Z}^+$ ซึ่ง $c \mid ka$ และ $c \mid b$ จะได้ว่ามี $s, t \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $ka = cs$ และ $b = ct$ ฉะนั้น

$$\begin{aligned} a = a \cdot 1 &= a(kx + by) \\ &= (ka)x + aby \\ &= (cs)x + a(ct)y \\ &= c(sx + aty) \end{aligned}$$

จะได้ว่า $c \mid a$ เนื่องจาก $c \mid b$ ดังนั้น $c \mid d$

สรุปได้ว่า $\gcd(ka, b) = d = \gcd(a, b)$ □

<u>แบบที่ 1 ใช้การหารลงตัวของ ห.ร.ม.</u>

บทพิสูจน์. ให้ a, b เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่ศูนย์ และ $k \in \mathbb{Z}^+$ สมมติว่า $\gcd(k, b) = 1$
จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม x, y ซึ่ง $1 = kx + by$ จะได้ว่า $a = kxa + bay$
ให้ $d = \gcd(a, b)$ และ $d' = \gcd(ak, b)$ จะแสดงว่า $d \mid d'$ และ $d' \mid d$

เนื่องจาก $d = \gcd(a, b)$ จะได้ว่า $d \mid a$ และ $d \mid b$ ทำให้ได้ว่า $d \mid ak$ ดังนั้น d เป็นตัวหารร่วมของ ak และ b ดังนั้น $d \mid d'$

สรุปได้ว่า $\gcd(ka, b) = d = \gcd(a, b)$ □

<u>แบบที่ 2 ใช้ทฤษฎีบทตัวหารร่วมมาก</u>

บทพิสูจน์. ให้ a, b เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่ศูนย์ และ $k \in \mathbb{Z}^+$ กำหนดให้ $d = \gcd(a, b)$ จะได้ว่า

$$\gcd\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$$

สมมติว่า $\gcd(k, b) = 1$ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม x, y, s, t ซึ่ง

$$1 = kx + by \qquad \text{และ} \qquad 1 = \frac{a}{d} \cdot s + \frac{b}{d} \cdot t$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 1 \cdot 1 &= (kx + by)\left(\frac{a}{d} \cdot s + \frac{b}{d} \cdot t\right) \\ &= kxs \cdot \frac{a}{d} + kxt \cdot \frac{b}{d} + bys \cdot \frac{a}{d} + byt \cdot \frac{b}{d} \\ &= xs \cdot \frac{ka}{d} + kxt \cdot \frac{b}{d} + ays \cdot \frac{b}{d} + byt \cdot \frac{b}{d} \\ &= \frac{ka}{d}(xs) + \frac{b}{d}(kxt + ays + yt) \end{aligned}$$

ดังนั้น $\gcd\left(\frac{ka}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$ สรุปได้ว่า

$$\begin{aligned} d \cdot \gcd\left(\frac{ka}{d}, \frac{b}{d}\right) &= d \cdot 1 \\ \gcd(ka, b) &= d \end{aligned}$$

□

8.2 **(4 คะแนน)** จงใช้ผลจากข้อ 8.1 แสดงว่า $\ell\text{cm}(ka, b) = k \cdot \ell\text{cm}(a, b)$

บทพิสูจน์. ให้ a, b เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่ศูนย์ และ $k \in \mathbb{Z}^+$ กำหนดให้ $d = \gcd(a, b)$ และ $\ell\text{cm}(a, b) = m$ สมมติว่า $\gcd(k, b) = 1$ จากข้อ 8.1 จะได้ว่า $\gcd(ka, b) = d$ เนื่องจาก

$$\begin{aligned} \gcd(a, b) \cdot \ell\text{cm}(a, b) &= |ab| \\ dm &= |ab| \\ d &= \frac{|ab|}{m} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \gcd(ka, b) \cdot \ell\text{cm}(ka, b) &= |kab| \\ d \cdot \ell\text{cm}(ka, b) &= k|ab| \\ \frac{|ab|}{m} \cdot \ell\text{cm}(ka, b) &= k|ab| \\ \ell\text{cm}(ka, b) &= km \end{aligned}$$

สรุปได้ว่า $\ell\text{cm}(ka, b) = k \cdot \ell\text{cm}(a, b)$ □

9. (12 **คะแนน**) จงตอบคำถามต่อไปนี้

9.1 (6 **คะแนน**) จงหาจำนวนเฉพาะ 2 ตัวแรกที่อยู่ในรูป

$$n^4 + n^2 + 33 \qquad \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มบวก}$$

แนวคำตอบ พิจารณา

	$n^4 + n^2 + 33$	ชนิดของจำนวน
$n = 1$	$35 = 5 \cdot 7$	จำนวนประกอบ
$n = 2$	53	จำนวนเฉพาะ
$n = 3$	$123 = 3 \cdot 41$	จำนวนประกอบ
$n = 4$	$305 = 5 \cdot 61$	จำนวนประกอบ
$n = 5$	683	จำนวนเฉพาะ

พิจารณาจำนวนเฉพาะ $x < \sqrt{683} = 26.13$ นั่นคือ $x = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23$
จะเห็นว่า $x \nmid 683$ ทุก ๆ x ดังนั้น 683 เป็นจำนวนเฉพาะ
ดังนั้นจำนวนเฉพาะ 2 ตัวแรกที่อยู่ในรูปนี้คือ 53 และ 683 $\#$

9.2 (6 **คะแนน**) ให้ x, y เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่

$$\gcd(x, y) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7$$
$$\ell\text{cm}(x, y) = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7^2$$

จงหา x และ y ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

แนวคำตอบ จากเงื่อนไขจะได้ว่า

$$x = 2^{2+a} \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7^{1+c}$$
$$y = 2^{2+b} \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7^{1+d}$$

จะได้ว่า

	$a = 0, b = 2$	$a = 2, b = 0$
$c = 0$	$x = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7$	$x = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7$
$d = 1$	$y = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7^2$	$y = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7^2$
$c = 1$	$x = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7^2$	$x = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7^2$
$d = 0$	$y = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7$	$y = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7$

10. **(11 คะแนน)** ให้ $N = 10! \cdot 20^{122} \cdot 25^{65}$

10.1 **(5 คะแนน)** จงเขียน N ในรูปแบบบัญญัติ

แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} N &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot (2^2 \cdot 5)^{122} \cdot (5^2)^{65} \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 5 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 7 \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot (2 \cdot 5) \cdot 2^{244} \cdot 5^{122} \cdot 5^{130} \\ &= 2^{252} \cdot 3^4 \cdot 5^{254} \cdot 7 \end{aligned}$$

10.2 **(6 คะแนน)** N เป็นจำนวนเต็มกี่หลัก

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned} N &= 2^{252} \cdot 3^4 \cdot 5^{254} \cdot 7 \\ &= 3^4 \cdot (2^{252} \cdot 5^{252}) \cdot 5^2 \cdot 7 \\ &= 81 \cdot (2 \cdot 5)^{252} \cdot 25 \cdot 7 \\ &= 14175 \cdot 10^{252} \end{aligned}$$

ดังนั้น N เป็นจำนวนเต็ม $5 + 252 = 257$ หลัก $\#$