มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
คณะครุศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ข้อสอบกลางภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2564

ชื่อวิชา	พีชคณิตนามธรรม Abstract Algebra
รหัสวิชา	MAC3310
วันเวลาสอบ	วันจันทร์ ที่ 30 สิงหาคม 2564 เวลา 13:00 - 16:00
สถานที่สอบ	ห้องเรียนออนไลน์ (โปรแกรม Zoom)
ผู้สอน	ผู้ช่วยศาสตรจารย์ ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย
คะแนน	105 คะแนน คิดเป็น 25%

ข้อสอบ SET A

1. **(10 คะแนน)** จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

   1.1 **(6 คะแนน)** จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยวิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สำหรับจำนวนนับ n ใด ๆ

   $$1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \cdots + (2n-1)(2n+1) = \frac{n}{3}(2n+1)(2n+2) - n$$

   1.2 **(4 คะแนน)** ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่ศูนย์พร้อมกัน จงพิสูจน์ว่า

   ถ้า $\gcd(a+b, a-b) = 1$ แล้ว $\gcd(a,b) = 1$

2. **(12 คะแนน)** จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

   2.1 **(8 คะแนน)** ให้ $*$ เป็นตัวดำเนินการทวิภาคบน $G = \{1,2,3,4\}$ นิยามโดย

   $a * b =$ เศษเหลือที่เกิดจากการหาร ab^2 ด้วย 5

   (ก) **(4 คะแนน)** จงสร้างตารางเคย์เลย์ของการดำเนินการ $*$

   (ข) **(2 คะแนน)** จงหาค่าของ $1 * (2 * (3 * 4))$

   (ค) **(2 คะแนน)** จงหา k ที่ทำให้ $a * k = a$ ทุก ๆ $a \in G$ แล้ว k เป็นเอกลักษณ์ของ $*$ หรือไม่เพราะเหตุใด

   2.2 **(4 คะแนน)** จงหา**ตัวผกผัน**การคูณของ $\overline{71}$ ใน $\mathbb{Z}_{101}^{\times}$

3. **(10 คะแนน)** นิยามการดำเนินการทวิภาค $*$ บน $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ ดังนี้

   $$(a,b) * (c,d) = (c + ad, bd)$$

   จงพิสูจน์ว่า $(G,*)$ เป็นกรุป และจงตรวจสอบว่า G เป็นกรุปอาบีเลียน หรือไม่

4. **(10 คะแนน)** จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

   4.1 **(4 คะแนน)** ให้ $(G,*)$ เป็นกรุป ให้ $a \in G$ จงพิสูจน์ว่า

   ถ้า $a * a = a$ แล้ว $a = e$

   4.2 **(6 คะแนน)** นิยามการดำเนินการทวิภาค $*$ บน $G = [0,1)$ ดังนี้

   $$x * y = \begin{cases} x + y & \text{เมื่อ } x + y < 1 \\ x + y - 1 & \text{เมื่อ } x + y \geq 1 \end{cases}$$

   (ก) **(2 คะแนน)** จงแสดงว่า 0 เป็นเอกลักษณ์ของ $*$

   (ข) **(2 คะแนน)** จงหาตัวผกผันของ 0.25 และ 0.64

   (ค) **(2 คะแนน)** จงหาตัวผกผันของ $x \in G$

5. **(10 คะแนน)** จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

5.1 **(6 คะแนน)** ให้ $\alpha, \beta \in S_6$ โดยที่

$$\alpha(2\ 5\ 6\ 4) = (2\ 5\ 6\ 3) \qquad \text{และ} \qquad (1\ 4\ \ 2\ 3)\beta = (1\ 2\ 3\ 4)$$

จงหา $(\alpha\beta)^{2021}$ (ตอบในรูปวัฏจักร (cycle))

5.2 **(4 คะแนน)** ใน S_7 จงหา **อันดับ** (order) ของ α เมื่อ

$$\alpha = (1)(1\ 2)(1\ 2\ 3)(1\ 2\ 3\ 4)(1\ 2\ 3\ 4\ 5)(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)$$

6. **(10 คะแนน)** จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

6.1 **(7 คะแนน)** จงแสดงว่า H เป็น **กรุปย่อย** (subgroup) ของ $GL_3(\mathbb{R})$ เมื่อ

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} : ab = 1 \right\}$$

6.2 **(3 คะแนน)** จงหา**จำนวนกรุปย่อย**ทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_{99} \times \mathbb{Z}_{100}$

7. **(12 คะแนน)** จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

7.1 **(7 คะแนน)** จงหา **ตัวก่อกำเนิด** (generator) ทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_{50}^{\times}$

7.2 **(5 คะแนน)** ให้ G เป็นกรุปจำกัดโดยที่ $|G| = 4$
จงใช้ทฤษฎีบทลากรองจ์ (Lagrange's Theorem) แสดงว่ามีสมาชิกใน G ที่มี อันดับ (order) เท่ากับ 2

8. **(10 คะแนน)** พิจารณากรุป $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{25}$

8.1 **(2 คะแนน)** $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{25}$ เป็น **กรุปวัฏจักร** (cyclic group) หรือไม่เพราะเหตุใด

8.2 **(4 คะแนน)** จงหา **กรุปย่อย** (subgroup) ทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{25}$

8.3 **(4 คะแนน)** จงเขียน **แลตทิซ** (Lattice) ของกรุปย่อยของ $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{25}$

9. **(11 คะแนน)** จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

9.1 **(6 คะแนน)** ให้ H เป็นกรุปย่อย (subgroup) ของกรุป G และ $a, b \in G$ จงพิสูจน์ว่า

$$ab^{-1} \in H \qquad \text{ก็ต่อเมื่อ} \qquad Ha = Hb$$

9.2 **(5 คะแนน)** ให้ N เป็นกรุปย่อยของกรุป G และ $g \in G$ จงพิสูจน์ว่า

$$\text{ถ้า} \quad Ng = gN \qquad \text{แล้ว} \qquad gNg^{-1} \subseteq N$$

10. **(10 คะแนน)** จง**แจกแจงสมาชิก**ของกรุปผลหาร (quotient group)

$$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{15} / \langle (\bar{2}, \bar{3}) \rangle$$

พร้อมหา **ตัวก่อกำเนิด (generator)** ทั้งหมด

ข้อสอบ SET B

1. **(10 คะแนน)** จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

   1.1 **(6 คะแนน)** จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยวิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สำหรับจำนวนนับ n ใด ๆ

   $$2 \cdot 4 + 4 \cdot 6 + 6 \cdot 8 + \cdots + 2n(2n+2) = \frac{4n}{3}(n+1)(n+2)$$

   1.2 **(4 คะแนน)** ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่ศูนย์พร้อมกัน จงพิสูจน์ว่า

   $$\text{ถ้า} \quad \gcd(2a+b, a-2b) = 1 \qquad \text{แล้ว} \qquad \gcd(a,b) = 1$$

2. **(12 คะแนน)** จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

   2.1 **(8 คะแนน)** ให้ $*$ เป็นตัวดำเนินการทวิภาคบน $G = \{1, 2, 3, 4\}$ นิยามโดย

   $$a * b = \text{เศษเหลือที่เกิดจากการหาร } a^2b \text{ ด้วย } 5$$

   (ก) **(4 คะแนน)** จงสร้างตารางเคย์เลย์ของการดำเนินการ $*$

   (ข) **(2 คะแนน)** จงหาค่าของ $1 * (2 * (3 * 4))$

   (ค) **(2 คะแนน)** จงหา k ที่ทำให้ $k * a = a$ ทุก ๆ $a \in G$ แล้ว k เป็นเอกลักษณ์ของ $*$ หรือไม่เพราะเหตุใด

   2.2 **(4 คะแนน)** จงหาตัวผกผันการคูณของ $\overline{71}$ ใน $\mathbb{Z}_{99}^{\times}$

3. **(10 คะแนน)** นิยามการดำเนินการทวิภาค $*$ บน $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ ดังนี้

   $$(a,b) * (c,d) = (c + ad, bd)$$

   จงพิสูจน์ว่า $(G, *)$ เป็นกรุป และจงตรวจสอบว่า G เป็นกรุปอาบีเลียน หรือไม่

4. **(10 คะแนน)** จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

   4.1 **(4 คะแนน)** ให้ $(G, *)$ เป็นกรุป ให้ $a \in G$ จงพิสูจน์ว่า

   $$\text{ถ้า} \quad a * a = a \qquad \text{แล้ว} \qquad a = e$$

   4.2 **(6 คะแนน)** นิยามการดำเนินการทวิภาค $*$ บน $G = [0, 1)$ ดังนี้

   $$x * y = \begin{cases} x + y & \text{เมื่อ } x + y < 1 \\ x + y - 1 & \text{เมื่อ } x + y \geq 1 \end{cases}$$

   (ก) **(2 คะแนน)** จงแสดงว่า 0 เป็นเอกลักษณ์ของ $*$

   (ข) **(2 คะแนน)** จงหาตัวผกผันของ 0.20 และ 0.99

   (ค) **(2 คะแนน)** จงหาตัวผกผันของ $x \in G$

5. **(10 คะแนน)** จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

   5.1 **(6 คะแนน)** ให้ $\alpha, \beta \in S_6$ โดยที่

   $$(2\ 5\ 6\ 3)\alpha = (2\ 5\ 6\ 4) \quad \text{และ} \quad \beta(1\ 2\ \ 3\ 4) = (1\ 4\ 2\ 3)$$

   จงหา $(\alpha\beta)^{2021}$ (ตอบในรูปวัฏจักร (cycle))

   5.2 **(4 คะแนน)** ใน S_7 จงหา **อันดับ** (order) ของ α เมื่อ

   $$\alpha = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)(1\ 2\ 3\ 4\ 5)(1\ 2\ 3\ 4)(1\ 2\ 3)(1\ 2)(1)$$

6. **(10 คะแนน)** จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

   6.1 **(7 คะแนน)** จงแสดงว่า H เป็นกรุปย่อย (subgroup) ของ $GL_3(\mathbb{R})$ เมื่อ

   $$H = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} : ab = 1 \right\}$$

   6.2 **(3 คะแนน)** จงหา**จำนวนกรุปย่อย**ทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_{111} \times \mathbb{Z}_{100}$

7. **(12 คะแนน)** จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

   7.1 **(7 คะแนน)** จงหา **ตัวก่อกำเนิด** (generator) ทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_{50}^{\times}$

   7.2 **(5 คะแนน)** ให้ G เป็นกรุปจำกัดโดยที่ $|G| = 4$
   จงใช้ทฤษฎีบทของลากรองจ์ (Lagrange's Theorem) แสดงว่ามีสมาชิกใน G ที่มีอันดับเท่ากับ 2

8. **(10 คะแนน)** พิจารณากรุป $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{25}$

   8.1 **(2 คะแนน)** $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{25}$ เป็น **กรุปวัฏจักร** (cyclic group) หรือไม่เพราะเหตุใด

   8.2 **(4 คะแนน)** จงหา **กรุปย่อย** (subgroup) ทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{25}$

   8.3 **(4 คะแนน)** จงเขียน **แลตทิซ** (Lattice) ของกรุปย่อยของ $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{25}$

9. **(11 คะแนน)** จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

   9.1 **(6 คะแนน)** ให้ H เป็นกรุปย่อย (subgroup) ของกรุป G และ $a, b \in G$ จงพิสูจน์ว่า

   $$a^{-1}b \in H \qquad \text{ก็ต่อเมื่อ} \qquad aH = bH$$

   9.2 **(5 คะแนน)** ให้ N เป็นกรุปย่อยของกรุป G จงพิสูจน์ว่า

   $$\text{ถ้า} \quad gNg^{-1} \subseteq N \text{ ทุก ๆ } g \in G \qquad \text{แล้ว} \qquad Ng = gN \text{ ทุก ๆ } g \in G$$

10. **(10 คะแนน)** จง**แจกแจงสมาชิก**ของกรุปผลหาร (quotient group)

$$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{15} / \langle(\bar{2}, \bar{5})\rangle$$

พร้อมหา **ตัวก่อกำเนิด (generator)** ทั้งหมด

มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
คณะครุศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์
เฉลยข้อสอบกลางภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2564

ชื่อวิชา	พีชคณิตนามธรรม Abstract Algebra
รหัสวิชา	MAC3310
วันเวลาสอบ	วันจันทร์ ที่ 30 สิงหาคม 2564 เวลา 13:00 - 16:00
สถานที่สอบ	ห้องเรียนออนไลน์ (โปรแกรม Zoom)
ผู้สอน	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย
คะแนน	105 คะแนน คิดเป็น 25%

เฉลยข้อสอบ SET A

1. (10 **คะแนน**) จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

   1.1 (6 **คะแนน**) จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยวิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สำหรับจำนวนนับ n ใด ๆ

$$1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \cdots + (2n-1)(2n+1) = \frac{n}{3}(2n+1)(2n+2) - n$$

บทพิสูจน์. สำหรับ $n \in \mathbb{N}$ กำหนดให้ $P(n)$ แทนประโยค

$$1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \cdots + (2n-1)(2n+1) = \frac{n}{3}(2n+1)(2n+2) - n$$

จะเห็นว่า $1 \cdot 3 = 3 = 4 - 1 = \frac{1}{3}(3)(4) - 1 = \frac{1}{3}(2 \cdot 1 + 1)(2 \cdot 1 + 2) - 1$ ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง
ให้ $k \in \mathbb{N}$ สมมติ $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือ

$$1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \cdots + (2k-1)(2k+1) = \frac{k}{3}(2k+1)(2k+2) - k$$

โดยสมมติฐาน จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \cdots + (2k-1)(2k+1) + (2k+1)(2k+3) &= \frac{k}{3}(2k+1)(2k+2) - k + (2k+1)(2k+3) \\
&= \frac{k}{3}(2k+1)(2k+2) - k + (4k^2 + 8k + 3) \\
&= \frac{k}{3}(2k+1)(2k+2) - k + (4k^2 + 8k + 4) - 1 \\
&= \frac{k}{3}(2k+1)(2k+2) + (2k+2)^2 - k - 1 \\
&= (2k+2)\left[\frac{k}{3}(2k+1) + (2k+2)\right] - (k+1) \\
&= 2(k+1)\left[\frac{2k^2 + k + 3(2k+2)}{3}\right] - (k+1) \\
&= 2(k+1)\left[\frac{2k^2 + 7k + 6}{3}\right] - (k+1) \\
&= 2(k+1)\left[\frac{(2k+3)(k+2)}{3}\right] - (k+1) \\
&= 2(k+1)\left[\frac{(2k+3)(k+2)}{3}\right] - (k+1) \\
&= \frac{k+1}{3}(2k+3)2(k+2) - (k+1) \\
&= \frac{k+1}{3}(2k+3)(2k+4) - (k+1)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง โดยอุปนัยเชิงคณิตสรุปได้ว่า
$1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \cdots + (2n-1)(2n+1) = \frac{n}{3}(2n+1)(2n+2) - n$ ทุก ๆ จำนวนนับ n $\square$

   1.2 (4 **คะแนน**) ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่ศูนย์พร้อมกัน จงพิสูจน์ว่า

ถ้า $\gcd(a+b, a-b) = 1$ แล้ว $\gcd(a, b) = 1$

บทพิสูจน์. ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่ศูนย์พร้อมกัน โดยที่ $\gcd(a+b, a-b) = 1$
จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม x และ y ซึ่ง

$$(a+b)x + (a-b)y = 1$$

ทำให้ได้ว่า

$$1 = ax + bx + ay - by = a(x+y) + b(x-y)$$

ดังนั้น $\gcd(a, b) = 1$ $\square$

2. (12 **คะแนน**) จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

2.1 (8 **คะแนน**) ให้ $*$ เป็นตัวดำเนินการทวิภาคบน $G = \{1, 2, 3, 4\}$ นิยามโดย

$$a * b = \text{เศษเหลือที่เกิดจากการหาร } ab^2 \text{ ด้วย } 5$$

(ก) (4 **คะแนน**) จงสร้างตารางเคย์เลย์ของการดำเนินการ $*$

วิธีทำ

$*$	1	2	3	4
1	1	4	4	1
2	2	3	3	2
3	3	2	2	3
4	4	1	1	4

(ข) (2 **คะแนน**) จงหาค่าของ $1 * (2 * (3 * 4))$

วิธีทำ จากตารางเคย์เลย์จะได้ว่า

$$1 * (2 * (3 * 4)) = 1 * (2 * 3) = 1 * 3 = 4 \quad \#$$

(ค) (2 **คะแนน**) จงหา k ที่ทำให้ $a * k = a$ ทุก ๆ $a \in G$ แล้ว k เป็นเอกลักษณ์ของ $*$ หรือไม่เพราะเหตุใด

วิธีทำ จากตารางเคย์เลย์จะได้ว่า $a * 1 = a$ และ $a * 4 = a$ ทุก ๆ $a \in G$ ดังนั้น $k = 1, 4$

เนื่องจาก $2 * 1 = 2 \neq 4 = 1 * 2$ ดังนั้น 1 ไม่เป็นเอกลักษณ์ของ $*$

เนื่องจาก $4 * 1 = 4 \neq 1 = 1 * 4$ ดังนั้น 4 ไม่เป็นเอกลักษณ์ของ $*$ $\quad \#$

2.2 (4 **คะแนน**) จงหา**ตัวผกผัน**การคูณของ $\overline{71}$ ใน $\mathbb{Z}_{101}^{\times}$

วิธีทำ พิจารณาเมตริกซ์ในการหา $\gcd(71, 101) = 1$

$$\begin{array}{rrrl}
101 & 1 & 0 & R_1 \\
71 & 0 & 1 & R_2 \\
30 & 1 & -1 & R_3 = R_1 - R_2 \\
11 & -2 & 3 & R_4 = R_2 - 2R_3 \\
8 & 5 & -7 & R_5 = R_3 - 2R_4 \\
3 & -7 & 10 & R_6 = R_4 - R_5 \\
2 & 19 & -27 & R_7 = R_5 - 2R_6 \\
1 & -26 & 37 & R_8 = R_6 - R_7
\end{array}$$

ดังนั้น $1 = 101(-26) + 71(37)$ จะได้ว่า

$$\bar{1} = \overline{101(-26) + 71(37)} = \overline{71} \cdot \overline{37}$$

ดังนั้น $\overline{37}$ เป็นตัวผกผันการคูณของ $\overline{71}$ ใน $\mathbb{Z}_{101}^{\times}$

3. **(10 คะแนน)** นิยามการดำเนินการทวิภาค $*$ บน $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ ดังนี้

$$(a,b) * (c,d) = (c + ad, bd)$$

จงพิสูจน์ว่า $(G, *)$ เป็นกรุป และจงตรวจสอบว่า G เป็นกรุปอาบีเลียน หรือไม่

บทพิสูจน์. ให้ $(a,b), (c,d), (x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
(a,b) * [(c,d) * (x,y)] &= (a,b) * (x + cy, dy) \\
&= ((x + cy) + ady, b(dy)) \\
&= (x + cy + ady, bdy) \\
&= (x + (c + ad)y, (bd)y) \\
&= (c + ad, bd) * (x,y) \\
&= [(a,b) * (c,d)] * (x,y)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $*$ มีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม เนื่องจาก

$$(a,b) * (0,1) = (0 + a1, b1) = (a,b) = (a + 0b, 1b) = (0,1) * (a,b)$$

นั่นคือ $(0,1)$ เป็นเอกลักษณ์ สำหรับ $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ นั่นคือ $b \neq 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
(a,b) * \left(-\frac{a}{b}, \frac{1}{b}\right) &= \left(-\frac{a}{b} + a \cdot \frac{1}{b}, b \cdot \frac{1}{b}\right) = (0,1) \\
\left(-\frac{a}{b}, \frac{1}{b}\right) * (a,b) &= \left(a + \left(-\frac{a}{b}\right) b, \frac{1}{b} \cdot b\right) = (0,1)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right)$ เป็นตัวผกผันของ (a,b) สรุปได้ว่า $(G, *)$ เป็นกรุป $\square$

เนื่องจาก

$$(1,2) * (2,1) = (2 + 1 \cdot 1, 2 \cdot 1) = (3,2) \neq (5,2) = (1 + 2 \cdot 2, 1 \cdot 2) = (2,1) * (1,2)$$

ดังนั้น $*$ ไม่มีสมบัติสลับที่ นั่นคือ G ไม่เป็นกรุปอาบีเลียน

4. (10 **คะแนน**) จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

4.1 (4 **คะแนน**) ให้ $(G, *)$ เป็นกรุป ให้ $a \in G$ จงพิสูจน์ว่า

ถ้า $a * a = a$ แล้ว $a = e$

บทพิสูจน์. ให้ $a \in G$ สมมติว่า $a * a = a$ จะได้ว่า

$$a = a * e = a * (a * a^{-1}) = (a * a) * a^{-1} = a * a^{-1} = e$$

ดังนั้น $a = e$ $\square$

4.2 (6 **คะแนน**) นิยามการดำเนินการทวิภาค $*$ บน $G = [0, 1)$ ดังนี้

$$x * y = \begin{cases} x + y & \text{เมื่อ } x + y < 1 \\ x + y - 1 & \text{เมื่อ } x + y \geq 1 \end{cases}$$

(ก) (2 **คะแนน**) จงแสดงว่า 0 เป็นเอกลักษณ์ของ $*$

บทพิสูจน์. ให้ $a \in G = [0, 1)$ จะได้ว่า $a + 0 = a < 1$

$$a * 0 = a + 0 = a = 0 + a = 0 * a$$

ดังนั้น 0 เป็นเอกลักษณ์ของ $*$ $\square$

(ข) (2 **คะแนน**) จงหาตัวผกผันของ 0.25 และ 0.64
วิธีทำ เนื่องจาก

$$0.25 * 0.75 = (0.25 + 0.75) - 1 = 0 = (0.75 + 0.25) - 1 = 0.75 * 0.25$$

ดังนั้น 0.75 เป็นตัวผกผันของ 0.25
เนื่องจาก

$$0.64 * 0.36 = (0.64 + 0.36) - 1 = 0 = (0.36 + 0.64) - 1 = 0.36 * 0.64$$

ดังนั้น 0.64 เป็นตัวผกผันของ 0.36

(ค) (2 **คะแนน**) จงหาตัวผกผันของ $x \in G$
วิธีทำ จากการสังเกตข้อ (ข) จะได้ว่า $1 - x$ เป็นตัวผกผันผันของ x

บทพิสูจน์. ให้ $x \in G = [0, 1)$
กรณี $x = 0$ จะได้ว่า $0 * 0 = 0 + 0 = 0$ ดังนั้น 0 เป็นตัวผกผันผันของ 0
กรณี $x \in (0, 1)$ ให้ $y = 1 - x$ จะเห็นว่า $0 < 1 - x < 1$ และ $x + y = x + (1 - x) = 1$ โดยที่

$$x * y = x + y - 1 = x + (1 - x) - 1 = 0$$
$$y * x = y + x - 1 = (1 - x) + x - 1 = 0$$

ดังนั้น $1 - x$ เป็นตัวผกผันผันของ x $\square$

5. **(10 คะแนน)** จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

5.1 **(6 คะแนน)** ให้ $\alpha, \beta \in S_6$ โดยที่

$$\alpha(2\ 5\ 6\ 4) = (2\ 5\ 6\ 3) \qquad \text{และ} \qquad (1\ 4\ \ 2\ 3)\beta = (1\ 2\ 3\ 4)$$

จงหา $(\alpha\beta)^{2021}$ (ตอบในรูปวัฏจักร (cycle))

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\alpha = (2\ 5\ 6\ 3)(2\ 5\ 6\ 4)^{-1} = (2\ 5\ 6\ 3)(4\ 6\ 5\ 2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} = (2\ 4\ 3)$$

$$\beta = (1\ 4\ \ 2\ 3)^{-1}(1\ 2\ 3\ 4) = (3\ 2\ \ 4\ 1)(1\ 2\ 3\ 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} = (1\ 4\ 3)$$

ฉะนั้น

$$\alpha\beta = (2\ 4\ 3)(1\ 4\ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} = (1\ 3)(2\ 4)$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} (\alpha\beta)^{2021} &= [(1\ 3)(2\ 4)]^{2021} \\ &= (1\ 3)^{2021}(2\ 4)^{2021} \\ &= (1\ 3)^{2020}(1\ 3)(2\ 4)^{2020}(2\ 4) \\ &= [(1\ 3)^2]^{1010}(1\ 3)[(2\ 4)^2]^{1010}(2\ 4) \\ &= (1)^{1010}(1\ 3)(1)^{1010}(2\ 4) \\ &= (1)(1\ 3)(1)(2\ 4) \\ &= (1\ 3)(2\ 4) \quad \# \end{aligned}$$

5.2 **(4 คะแนน)** ใน S_7 จงหา **อันดับ** (order) ของ α เมื่อ

$$\alpha = (1)(1\ 2)(1\ 2\ 3)(1\ 2\ 3\ 4)(1\ 2\ 3\ 4\ 5)(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)$$

วิธีทำ พิจารณา

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 5 & 3 & 6 & 2 & 7 & 4 \end{pmatrix} = (2\ 5)(4\ 6\ \ 7)$$

ดังนั้น

$$\circ(\alpha) = \ell\text{cm}(\circ((2\ 5)), \circ((4\ 6\ \ 7))) = \ell\text{cm}(2, 3) = 6 \quad \#$$

6. (10 **คะแนน**) จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

6.1 (7 **คะแนน**) จงแสดงว่า H เป็น **กรุปย่อย** (subgroup) ของ $GL_3(\mathbb{R})$ เมื่อ

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} : ab = 1 \right\}$$

วิธีทำ ถ้า $a = c = 1$ แล้ว $ac = 1$ ดังนั้น $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ เป็นสมาชิกใน H

ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix}$ เป็นสมาชิกใน H นั่นคือ $ac = 1$ และ $xy = 1$ แล้ว

$$AB^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & y^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & ax^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & by^{-1} \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า $(ax^{-1})(by^{-1}) = \dfrac{ab}{xy} = \dfrac{1}{1} = 1$ ดังนั้น $AB^{-1} \in H$

ดังนั้น $H \leq GL_3(\mathbb{R})$

6.2 (3 **คะแนน**) จงหา**จำนวนกรุปย่อย**ทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_{99} \times \mathbb{Z}_{100}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\gcd(99, 100) = 1$ ฉะนั้น $\mathbb{Z}_{99} \times \mathbb{Z}_{100}$ เป็นกรุปวัฏจักร

จะเห็นว่า $n = |\mathbb{Z}_{99} \times \mathbb{Z}_{100}| = 99 \cdot 100$ ดังนั้นจำนวนกรุปย่อยทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_{99} \times \mathbb{Z}_{100}$ เท่ากับ

$$\begin{aligned} \tau(n) &= \tau(99 \cdot 100) \\ &= \tau(3^2 \cdot 11 \cdot 2^2 \cdot 5^2) \\ &= \tau(2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11) \\ &= (2+1)(2+1)(2+1)(1+1) \\ &= 3(3)(3)(2) \\ &= 54 \quad \# \end{aligned}$$

7. (12 **คะแนน**) จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

7.1 (7 **คะแนน**) จงหา **ตัวก่อกำเนิด** (generator) ทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_{50}^{\times}$

วิธีทำ $|\mathbb{Z}_{50}^{\times}| = \phi(50) = \phi(2 \cdot 5^2) = (2-1)(5^2-5) = 20$ จะเห็นว่า

$$
\begin{array}{rcccccccrcccccccr}
(\bar{3})^1 & & & & & & & = & \bar{3} & & (\bar{3})^{11} & = & (\bar{3})(\bar{3})^{10} & = & \overline{-3} & = & \overline{-3} \\
(\bar{3})^2 & & & & & & & = & \bar{9} & & (\bar{3})^{12} & = & (\bar{3})(\bar{3})^{11} & = & \overline{-9} & = & \overline{-9} \\
(\bar{3})^3 & & & & & & & = & \overline{27} & & (\bar{3})^{13} & = & (\bar{3})(\bar{3})^{12} & = & \overline{-27} & = & \overline{23} \\
(\bar{3})^4 & & & & = & \overline{81} & & = & \overline{31} & & (\bar{3})^{14} & = & (\bar{3})(\bar{3})^{13} & = & \overline{69} & = & \overline{19} \\
(\bar{3})^5 & = & (\bar{3})(\bar{3})^4 & & = & \overline{93} & & = & \overline{-7} & & (\bar{3})^{15} & = & (\bar{3})(\bar{3})^{14} & = & \overline{57} & = & \overline{7} \\
(\bar{3})^6 & = & (\bar{3})(\bar{3})^5 & & = & \overline{-21} & & = & \overline{29} & & (\bar{3})^{16} & = & (\bar{3})(\bar{3})^{15} & = & \overline{21} & = & \overline{21} \\
(\bar{3})^7 & = & (\bar{3})(\bar{3})^6 & & = & \overline{87} & & = & \overline{-13} & & (\bar{3})^{17} & = & (\bar{3})(\bar{3})^{16} & = & \overline{63} & = & \overline{13} \\
(\bar{3})^8 & = & (\bar{3})(\bar{3})^7 & & = & \overline{-39} & & = & \overline{11} & & (\bar{3})^{18} & = & (\bar{3})(\bar{3})^{17} & = & \overline{39} & = & \overline{-11} \\
(\bar{3})^9 & = & (\bar{3})(\bar{3})^8 & & = & \overline{33} & & = & \overline{-17} & & (\bar{3})^{19} & = & (\bar{3})(\bar{3})^{18} & = & \overline{-33} & = & \overline{17} \\
(\bar{3})^{10} & = & (\bar{3})(\bar{3})^9 & & = & \overline{-51} & & = & \overline{-1} & & (\bar{3})^{20} & = & (\bar{3})(\bar{3})^{19} & = & \overline{51} & = & \bar{1}
\end{array}
$$

ดังนั้น $\bar{3}$ เป็นตัวก่อกำเนิดของ $\mathbb{Z}_{50}^{\times}$ และ $1 \le k < 20$ ซึ่ง $\gcd(k, 20) = 1$ ประกอบไปด้วย

$$k = 1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19$$

จะได้ว่าตัวก่อกำเนิดทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_{50}^{\times}$ คือ

$$
\begin{array}{rclcrcl}
(\bar{3})^1 & = & \bar{3} & \qquad & (\bar{3})^{11} & = & \overline{47} \\
(\bar{3})^3 & = & \overline{27} & & (\bar{3})^{13} & = & \overline{23} \\
(\bar{3})^7 & = & \overline{37} & & (\bar{3})^{17} & = & \overline{13} \\
(\bar{3})^9 & = & \overline{33} & & (\bar{3})^{19} & = & \overline{17}
\end{array}
$$

7.2 (5 **คะแนน**) ให้ G เป็นกรุปจำกัดโดยที่ $|G| = 4$

จงใช้ทฤษฎีบทลากรองจ์ (Lagrange's Theorem) แสดงว่ามีสมาชิกใน G ที่มี อันดับ (order) เท่ากับ 2

วิธีทำ

แบบที่ 1

สมมติว่า $|G| = 4$ และ $H \le G$ จากทฤษฎีบทลากรองจ์ จะได้ว่า $|H|$ หาร 4 ลงตัว นั่นคือ $|H| = 1, 2, 4$

ดังนั้นมีกรุปย่อย $|H| = 2$ ให้ $H = \{e, a\}$ โดยที่ $a \in G$ และ $a \neq e$ จะได้ว่า $a^2 \in H$ นั่นคือ

$$a^2 = a \qquad \text{หรือ} \qquad a^2 = e$$

ในกรณี $a^2 = a$ จะได้ว่า

$$a = ae = a(aa^{-1}) = (aa)a^{-1} = a^2a^{-1} = aa^{-1} = e$$

ซึ่งเกิดข้อขัดแย้งกับ $a \neq e$ ดังนั้น $a^2 = e$ นั่นคือ $\circ(a) = 2$

แบบที่ 2

สมมติว่า $|G| = 4$ ให้ $a \in G$ ซึ่ง $a \neq e$ จะได้ว่า $\langle a \rangle$ เป็นกรุปย่อยของ G โดยทฤษฎีบทลากรองจ์ จะได้ว่า $|\langle a \rangle|$ หาร $|G|$ ลงตัว นั่นคือ

$$\circ(a) = |\langle a \rangle| = 1, 2, 4$$

ถ้า $\circ(a) = 1$ จะได้ว่า $a = e$ เกิดข้อขัดแย้ง

กรณีที่ $\circ(a) = 2$ ได้ตามที่ต้องการ

กรณี $\circ(a) = 4$ จะได้ว่า $\langle a \rangle = G$ นั่นคือ a เป็นตัวก่อกำเนิด ฉะนั้น $G = \{e, a, a^2, a^3\}$ โดยทฤษฎีบทของจำนวนตัวก่อกำเนิดจะได้ว่า a^3 $(\gcd(3, 4) = 1)$ เป็นตัวก่อกำเนิดของ G ด้วย จะเห็นว่า $a^2 \neq e$ ทำให้ได้ว่า $\circ(a^2) = 2$

8. (10 **คะแนน**) พิจารณากรุป $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{25}$

8.1 (2 **คะแนน**) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{25}$ เป็น **กรุปวัฏจักร** (cyclic group) หรือไม่เพราะเหตุใด

วิธีทำ เนื่องจาก $\gcd(2, 25) = 1$ ดังนั้น $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{25}$ เป็นกรุปวัฏจักร

8.2 (4 **คะแนน**) จงหา **กรุปย่อย** (subgroup) ทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{25}$

วิธีทำ จะเห็นได้ว่า $(\bar{1}, \bar{1})$ เป็นตัวก่อกำเนิดของ $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{25}$ และ $|\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{25}| = 2 \times 25 = 50$ ตัวหารของ 50 คือ 1, 2, 5, 10, 25, 50 ดังนั้นกรุปย่อยของ $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{25}$ คือ

$$\left\langle \frac{50}{1}(\bar{1}, \bar{1}) \right\rangle = \langle (\bar{0}, \bar{0}) \rangle = \{(\bar{0}, \bar{0})\}$$

$$\left\langle \frac{50}{2}(\bar{1}, \bar{1}) \right\rangle = \langle (\bar{1}, \bar{0}) \rangle = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{0})\}$$

$$\left\langle \frac{50}{5}(\bar{1}, \bar{1}) \right\rangle = \langle (\bar{0}, \overline{10}) \rangle = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \overline{10}), (\bar{0}, \overline{20}), (\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \overline{15})\}$$

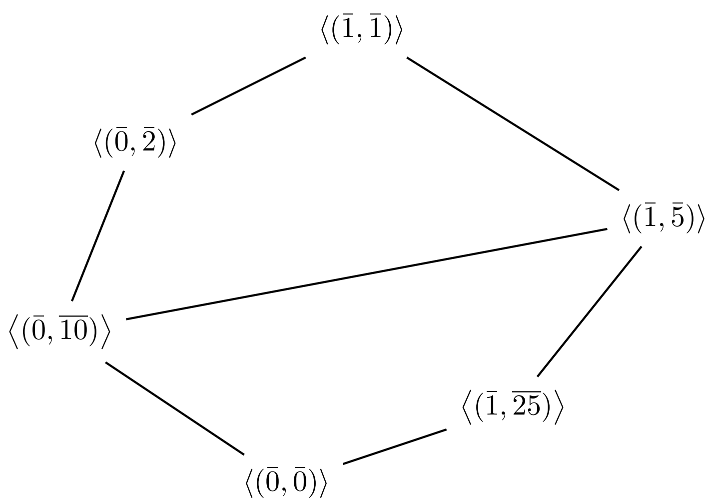
$$\begin{aligned}\left\langle \frac{50}{10}(\bar{1}, \bar{1}) \right\rangle = \langle (\bar{1}, \bar{5}) \rangle = \{&(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{5}), (\bar{0}, \overline{10}), (\bar{1}, \overline{15}), (\bar{0}, \overline{20}),\\ &(\bar{1}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{5}), (\bar{1}, \overline{10}), (\bar{0}, \overline{15}), (\bar{1}, \overline{20})\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{50}{25}(\bar{1}, \bar{1}) \right\rangle = \langle (\bar{0}, \bar{2}) \rangle = \{&(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{8}),\\ &(\bar{0}, \overline{10}), (\bar{0}, \overline{12}), (\bar{0}, \overline{14}), (\bar{0}, \overline{16}), (\bar{1}, \overline{18}),\\ &(\bar{0}, \overline{20}), (\bar{0}, \overline{22}), (\bar{0}, \overline{24}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{3}),\\ &(\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{7}), (\bar{0}, \bar{9}), (\bar{0}, \overline{11}), (\bar{1}, \overline{13}),\\ &(\bar{0}, \overline{15}), (\bar{0}, \overline{17}), (\bar{0}, \overline{19}), (\bar{0}, \overline{21}), (\bar{1}, \overline{23})\}\end{aligned}$$

$$\left\langle \frac{50}{50}(\bar{1}, \bar{1}) \right\rangle = \langle (\bar{1}, \bar{1}) \rangle = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{25}$$

8.3 (4 **คะแนน**) จงเขียน **แลตทิซ** (Lattice) ของกรุปย่อยของ $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{25}$

วิธีทำ เขียนแลตทิซได้ดังนี้



9. (11 **คะแนน**) จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

9.1 (6 **คะแนน**) ให้ H เป็นกรุปย่อย (subgroup) ของกรุป G และ $a, b \in G$ จงพิสูจน์ว่า

$$ab^{-1} \in H \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad Ha = Hb$$

บทพิสูจน์. ให้ $H \leq G$ และ $a, b \in G$
$(\rightarrow)$ สมมติว่า $ab^{-1} \in H$ จะได้ว่ามี $h_1 \in H$ ซึ่ง $ab^{-1} = h_1$ นั่นคือ $a = h_1 b$ และ $b = h_1^{-1} a$
ให้ $x \in Ha$ จะได้ว่ามี $h_2 \in H$ ซึ่ง $x = h_2 a$ นั่นคือ

$$x = h_2(h_1 b) = (h_1 h_2)b \in Hb$$

ดังนั้น $Ha \subseteq Hb$
ให้ $y \in Hb$ จะได้ว่ามี $h_3 \in H$ ซึ่ง $y = h_3 b$ นั่นคือ

$$y = h_3(h_1^{-1} a) = (h_3 h_1^{-1})a \in Ha$$

ดังนั้น $Hb \subseteq Ha$ ฉะนั้น $Ha = Hb$
$(\leftarrow)$ สมมติว่า $Ha = Hb$ เนื่องจาก $a = ea \in Ha$ ดังนั้น $a \in Hb$ จะได้ว่ามี $h \in H$ ซึ่ง $a = hb$ นั่นคือ

$$ab^{-1} = h \in H$$

□

9.2 (5 **คะแนน**) ให้ N เป็นกรุปย่อยของกรุป G และ $g \in G$ จงพิสูจน์ว่า

$$\text{ถ้า} \quad Ng = gN \quad \text{แล้ว} \quad gNg^{-1} \subseteq N$$

บทพิสูจน์. ให้ $N \leq G$ และ $g \in G$ สมมติว่า $Ng = gN$
ให้ $x \in gNg^{-1}$ จะได้ว่ามี $n \in N$ ซึ่ง $x = gng^{-1}$ นั่นคือ

$$xg = gn \in gN = Ng$$

จะได้ว่ามี $n_1 \in N$ ซึ่ง $xg = n_1 g$ ฉะนั้น $x = n_1 \in N$ □

10. **(10 คะแนน)** จง**แจกแจงสมาชิก**ของกรุปผลหาร (quotient group)

$$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{15} / \left\langle (\bar{2}, \bar{3}) \right\rangle$$

พร้อมหา **ตัวก่อกำเนิด** (generator) ทั้งหมด

วิธีทำ พิจารณา

$$[\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{15} : \langle (\bar{2}, \bar{3}) \rangle] = \frac{4 \cdot 15}{\circ((\bar{2}, \bar{3}))} = \frac{60}{\ell\text{cm}(2,5)} = \frac{60}{10} = 6$$

และ $\langle (\bar{2}, \bar{3}) \rangle = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{6}), (\bar{2}, \bar{9}), (\bar{0}, \overline{12}), (\bar{2}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{2}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{9}), (\bar{2}, \overline{12})\}$ แล้ว

$$\begin{aligned}
\langle (\bar{2}, \bar{3}) \rangle + (\bar{0}, \bar{0}) &= \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{6}), (\bar{2}, \bar{9}), (\bar{0}, \overline{12}), (\bar{2}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{2}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{9}), (\bar{2}, \overline{12})\} \\
\langle (\bar{2}, \bar{3}) \rangle + (\bar{1}, \bar{0}) &= \{(\bar{1}, \bar{0}), (\bar{3}, \bar{3}), (\bar{1}, \bar{6}), (\bar{3}, \bar{9}), (\bar{1}, \overline{12}), (\bar{3}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{3}), (\bar{3}, \bar{6}), (\bar{1}, \bar{9}), (\bar{3}, \overline{12})\} \\
\langle (\bar{2}, \bar{3}) \rangle + (\bar{0}, \bar{1}) &= \{(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{7}), (\bar{2}, \overline{10}), (\bar{0}, \overline{13}), (\bar{2}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{2}, \bar{7}), (\bar{0}, \overline{10}), (\bar{2}, \overline{13})\} \\
\langle (\bar{2}, \bar{3}) \rangle + (\bar{1}, \bar{1}) &= \{(\bar{1}, \bar{1}), (\bar{3}, \bar{4}), (\bar{1}, \bar{7}), (\bar{3}, \overline{10}), (\bar{1}, \overline{13}), (\bar{3}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{4}), (\bar{3}, \bar{7}), (\bar{1}, \overline{10}), (\bar{3}, \overline{13})\} \\
\langle (\bar{2}, \bar{3}) \rangle + (\bar{2}, \bar{2}) &= \{(\bar{2}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{5}), (\bar{2}, \bar{8}), (\bar{0}, \overline{11}), (\bar{2}, \overline{14}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{2}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{8}), (\bar{2}, \overline{11}), (\bar{0}, \overline{14})\} \\
\langle (\bar{2}, \bar{3}) \rangle + (\bar{3}, \bar{5}) &= \{(\bar{3}, \bar{5}), (\bar{1}, \bar{8}), (\bar{3}, \overline{11}), (\bar{1}, \overline{14}), (\bar{3}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{5}), (\bar{3}, \bar{8}), (\bar{1}, \overline{11}), (\bar{3}, \overline{14}), (\bar{1}, \bar{2})\}
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{15} / \langle (\bar{2}, \bar{3}) \rangle = \{ &\langle (\bar{2}, \bar{3}) \rangle, \langle (\bar{2}, \bar{3}) \rangle + (\bar{1}, \bar{0}), \langle (\bar{2}, \bar{3}) \rangle + (\bar{0}, \bar{1}), \langle (\bar{2}, \bar{3}) \rangle + (\bar{1}, \bar{1}), \\
&\langle (\bar{2}, \bar{3}) \rangle + (\bar{2}, \bar{2}), \langle (\bar{2}, \bar{3}) \rangle + (\bar{3}, \bar{5}) \}
\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\gcd(4, 15) = 1$ ดังนั้น $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{15}$ เป็นกรุปวัฏจักร ทำให้ได้ว่า $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{15} / \langle (\bar{2}, \bar{3}) \rangle$ เป็นกรุปวัฏจักร จะเห็นว่า $(\bar{1}, \bar{1})$ เป็นตัวก่อกำเนิดของ $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{15}$ ดังนั้น

$$\langle (\bar{2}, \bar{3}) \rangle + (\bar{1}, \bar{1}) \text{ เป็นตัวก่อกำเนิดของ } \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{15} / \langle (\bar{2}, \bar{3}) \rangle$$

แล้ว $1 \le k < 6$ ซึ่ง $\gcd(k, 6) = 1$ คือ $k = 1, 5$ ดังนั้นตัวก่อกำเนิดทั้งหมดคือ

$$\begin{aligned}
1 \left(\langle (\bar{2}, \bar{3}) \rangle + (\bar{1}, \bar{1}) \right) &= \langle (\bar{2}, \bar{3}) \rangle + 1(\bar{1}, \bar{1}) = \langle (\bar{2}, \bar{3}) \rangle + (\bar{1}, \bar{1}) \\
5 \left(\langle (\bar{2}, \bar{3}) \rangle + (\bar{1}, \bar{1}) \right) &= \langle (\bar{2}, \bar{3}) \rangle + 5(\bar{1}, \bar{1}) = \langle (\bar{2}, \bar{3}) \rangle + (\bar{1}, \bar{5})
\end{aligned}$$

เฉลยข้อสอบ SET B

1. (10 **คะแนน**) จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

   1.1 (6 **คะแนน**) จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยวิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์
   สำหรับจำนวนนับ n ใด ๆ

$$2 \cdot 4 + 4 \cdot 6 + 6 \cdot 8 + \cdots + 2n(2n+2) = \frac{4n}{3}(n+1)(n+2)$$

บทพิสูจน์. สำหรับ $n \in \mathbb{N}$ กำหนดให้ $P(n)$ แทนประโยค

$$2 \cdot 4 + 4 \cdot 6 + 6 \cdot 8 + \cdots + 2n(2n+2) = \frac{4n}{3}(n+1)(n+2)$$

จะเห็นว่า $2 \cdot 4 = 8 = \frac{4}{3}(2)(3) = \frac{4}{3}(1+1)(1+2) - 1$ ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง
ให้ $k \in \mathbb{N}$ สมมติ $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือ

$$2 \cdot 4 + 4 \cdot 6 + 6 \cdot 8 + \cdots + 2k(2k+2) = \frac{4k}{3}(k+1)(k+2)$$

โดยสมมติฐาน จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
2 \cdot 4 + 4 \cdot 6 + 6 \cdot 8 + \cdots + 2k(2k+2) + (2k+2)(2k+4) &= \frac{4k}{3}(k+1)(k+2) + (2k+2)(2k+4) \\
&= \frac{4k}{3}(k+1)(k+2) + 2(k+1)2(k+2) \\
&= (k+1)(k+2)\left[\frac{4k}{3} + 4\right] \\
&= (k+1)(k+2)\left[\frac{4k+12}{3}\right] \\
&= (k+1)(k+2)\left[\frac{4(k+3)}{3}\right] \\
&= \frac{4(k+1)}{3}(k+2)(k+3)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง โดยอุปนัยเชิงคณิตสรุปได้ว่า
$2 \cdot 4 + 4 \cdot 6 + 6 \cdot 8 + \cdots + 2n(2n+2) = \frac{4n}{3}(n+1)(n+2)$ ทุก ๆ จำนวนนับ n $\square$

   1.2 (4 **คะแนน**) ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่ศูนย์พร้อมกัน จงพิสูจน์ว่า

$$\text{ถ้า} \quad \gcd(2a+b, a-2b) = 1 \quad \text{แล้ว} \quad \gcd(a,b) = 1$$

บทพิสูจน์. ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่ศูนย์พร้อมกัน โดยที่ $\gcd(2a+b, a-2b) = 1$
จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม x และ y ซึ่ง

$$(2a+b)x + (a-2b)y = 1$$

ทำให้ได้ว่า

$$1 = 2ax + bx + ay - 2by = a(2x+y) + b(x-2y)$$

ดังนั้น $\gcd(a,b) = 1$ $\square$

2. **(12 คะแนน)** จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

2.1 **(8 คะแนน)** ให้ $*$ เป็นตัวดำเนินการทวิภาคบน $G = \{1, 2, 3, 4\}$ นิยามโดย

$$a * b = \text{เศษเหลือที่เกิดจากการหาร } a^2b \text{ ด้วย } 5$$

(ก) **(4 คะแนน)** จงสร้างตารางเคย์เลย์ของการดำเนินการ $*$
วิธีทำ

$*$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	4	3	2	1
3	4	3	2	1
4	1	2	3	4

(ข) **(2 คะแนน)** จงหาค่าของ $1 * (2 * (3 * 4))$
วิธีทำ จากตารางเคย์เลย์จะได้ว่า

$$1 * (2 * (3 * 4)) = 1 * (2 * 1) = 1 * 4 = 4 \quad \#$$

(ค) **(2 คะแนน)** จงหา k ที่ทำให้ $k * a = a$ ทุก ๆ $a \in G$
แล้ว k เป็นเอกลักษณ์ของ $*$ หรือไม่เพราะเหตุใด

วิธีทำ จากตารางเคย์เลย์จะได้ว่า $1 * a = a$ และ $4 * a = a$ ทุก ๆ $a \in G$ ดังนั้น $k = 1, 4$
เนื่องจาก $2 * 1 = 4 \neq 2 = 1 * 2$ ดังนั้น 1 ไม่เป็นเอกลักษณ์ของ $*$
เนื่องจาก $1 * 4 = 4 \neq 1 = 4 * 1$ ดังนั้น 4 ไม่เป็นเอกลักษณ์ของ $*$ #

2.2 **(4 คะแนน)** จงหาตัวผกผันการคูณของ $\overline{71}$ ใน $\mathbb{Z}_{99}^{\times}$
วิธีทำ พิจารณาเมตริกซ์ในการหา $\gcd(71, 99) = 1$

$$\begin{array}{rrrl}
99 & 1 & 0 & R_1 \\
71 & 0 & 1 & R_2 \\
28 & 1 & -1 & R_3 = R_1 - R_2 \\
15 & -2 & 3 & R_4 = R_2 - 2R_3 \\
13 & 3 & -4 & R_5 = R_3 - R_4 \\
2 & -5 & 7 & R_6 = R_4 - R_5 \\
1 & 33 & -46 & R_8 = R_6 - 6R_7
\end{array}$$

ดังนั้น $1 = 99(33) + 71(-46)$ จะได้ว่า

$$\overline{1} = \overline{99(33) + 71(-46)} = \overline{71} \cdot \overline{-46} = \overline{71} \cdot \overline{53}$$

ดังนั้น $\overline{53}$ เป็นตัวผกผันการคูณของ $\overline{71}$ ใน $\mathbb{Z}_{99}^{\times}$

3. (10 **คะแนน**) นิยามการดำเนินการทวิภาค $*$ บน $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ ดังนี้

$$(a, b) * (c, d) = (c + ad, bd)$$

จงพิสูจน์ว่า $(G, *)$ เป็นกรุป และจงตรวจสอบว่า G เป็นกรุปอาบีเลียน หรือไม่

บทพิสูจน์. ให้ $(a, b), (c, d), (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$
จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
(a, b) * [(c, d) * (x, y)] &= (a, b) * (x + cy, dy) \\
&= ((x + cy) + ady, b(dy)) \\
&= (x + cy + ady, bdy) \\
&= (x + (c + ad)y, (bd)y) \\
&= (c + ad, bd) * (x, y) \\
&= [(a, b) * (c, d)] * (x, y)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $*$ มีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม เนื่องจาก

$$(a, b) * (0, 1) = (0 + a1, b1) = (a, b) = (a + 0b, 1b) = (0, 1) * (a, b)$$

นั่นคือ $(0, 1)$ เป็นเอกลักษณ์ สำหรับ $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ นั่นคือ $b \neq 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
(a, b) * \left(-\frac{a}{b}, \frac{1}{b}\right) &= \left(-\frac{a}{b} + a \cdot \frac{1}{b}, b \cdot \frac{1}{b}\right) = (0, 1) \\
\left(-\frac{a}{b}, \frac{1}{b}\right) * (a, b) &= \left(a + \left(-\frac{a}{b}\right) b, \frac{1}{b} \cdot b\right) = (0, 1)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right)$ เป็นตัวผกผันของ (a, b) สรุปได้ว่า $(G, *)$ เป็นกรุป $\square$

เนื่องจาก

$$(1, 2) * (2, 1) = (2 + 1 \cdot 1, 2 \cdot 1) = (3, 2) \neq (5, 2) = (1 + 2 \cdot 2, 1 \cdot 2) = (2, 1) * (1, 2)$$

ดังนั้น $*$ ไม่มีสมบัติสลับที่ นั่นคือ G ไม่เป็นกรุปอาบีเลียน

4. (10 **คะแนน**) จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

4.1 (4 **คะแนน**) ให้ $(G, *)$ เป็นกรุป ให้ $a \in G$ จงพิสูจน์ว่า

$$\text{ถ้า} \quad a * a = a \qquad \text{แล้ว} \qquad a = e$$

บทพิสูจน์. ให้ $a \in G$ สมมติว่า $a * a = a$ จะได้ว่า

$$a = a * e = a * (a * a^{-1}) = (a * a) * a^{-1} = a * a^{-1} = e$$

ดังนั้น $a = e$ □

4.2 (6 **คะแนน**) นิยามการดำเนินการทวิภาค $*$ บน $G = [0, 1)$ ดังนี้

$$x * y = \begin{cases} x + y & \text{เมื่อ } x + y < 1 \\ x + y - 1 & \text{เมื่อ } x + y \geq 1 \end{cases}$$

(ก) (2 **คะแนน**) จงแสดงว่า 0 เป็นเอกลักษณ์ของ $*$

บทพิสูจน์. ให้ $a \in G = [0, 1)$ จะได้ว่า $a + 0 = a < 1$

$$a * 0 = a + 0 = a = 0 + a = 0 * a$$

ดังนั้น 0 เป็นเอกลักษณ์ของ $*$ □

(ข) (2 **คะแนน**) จงหาตัวผกผันของ 0.20 และ 0.99
วิธีทำ เนื่องจาก

$$0.20 * 0.80 = (0.20 + 0.80) - 1 = 0 = (0.80 + 0.20) - 1 = 0.80 * 0.20$$

ดังนั้น 0.80 เป็นตัวผกผันของ 0.20
เนื่องจาก

$$0.99 * 0.01 = (0.99 + 0.01) - 1 = 0 = (0.01 + 0.99) - 1 = 0.01 * 0.99$$

ดังนั้น 0.01 เป็นตัวผกผันของ 0.99

(ค) (2 **คะแนน**) จงหาตัวผกผันของ $x \in G$
วิธีทำ จากการสังเกตข้อ (ข) จะได้ว่า $1 - x$ เป็นตัวผกผันผันของ x

บทพิสูจน์. ให้ $x \in G = [0, 1)$
กรณี $x = 0$ จะได้ว่า $0 * 0 = 0 + 0 = 0$ ดังนั้น 0 เป็นตัวผกผันผันของ 0
กรณี $x \in (0, 1)$ ให้ $y = 1 - x$ จะเห็นว่า $0 < 1 - x < 1$ และ $x + y = x + (1 - x) = 1$ โดยที่

$$x * y = x + y - 1 = x + (1 - x) - 1 = 0$$
$$y * x = y + x - 1 = (1 - x) + x - 1 = 0$$

ดังนั้น $1 - x$ เป็นตัวผกผันผันของ x □

5. (10 **คะแนน**) จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

5.1 (6 **คะแนน**) ให้ $\alpha, \beta \in S_6$ โดยที่

$$(2\ 5\ 6\ 3)\alpha = (2\ 5\ 6\ 4) \qquad \text{และ} \qquad \beta(1\ 2\ 3\ 4) = (1\ 4\ 2\ 3)$$

จงหา $(\alpha\beta)^{2021}$ (ตอบในรูปวัฏจักร (cycle))

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\alpha = (2\ 5\ 6\ 3)^{-1}(2\ 5\ 6\ 4) = (3\ 6\ 5\ 2)(2\ 5\ 6\ 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 6 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} = (3\ 6\ 4)$$

$$\beta = (1\ 4\ 2\ 3)(1\ 2\ 3\ 4)^{-1} = (1\ 4\ 2\ 3)(4\ 3\ 2\ 1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 4)$$

ฉะนั้น

$$\alpha\beta = (3\ 6\ 4)(1\ 2\ 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 6 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 3\ 6\ 4)$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} (\alpha\beta)^{2021} &= [(1\ 2\ 3\ 6\ 4)]^{2021} \\ &= (1\ 2\ 3\ 6\ 4)^{2020}(1\ 2\ 3\ 6\ 4) \\ &= [(1\ 2\ 3\ 6\ 4)^5]^{404}(1\ 2\ 3\ 6\ 4) \\ &= (1)^{404}(1\ 2\ 3\ 6\ 4) \\ &= (1)(1\ 2\ 3\ 6\ 4) \\ &= (1\ 2\ 3\ 6\ 4) \quad \# \end{aligned}$$

5.2 (4 **คะแนน**) ใน S_7 จงหา **อันดับ** (order) ของ α เมื่อ

$$\alpha = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)(1\ 2\ 3\ 4\ 5)(1\ 2\ 3\ 4)(1\ 2\ 3)(1\ 2)(1)$$

วิธีทำ พิจารณา

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 7)(2\ 6)(3\ 5)$$

ดังนั้น

$$\circ(\alpha) = \ell\text{cm}(\circ((1\ 7)), \circ((2\ 6)), \circ((3\ 5))) = \ell\text{cm}(2, 2, 2) = 2 \quad \#$$

6. (10 **คะแนน**) จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

6.1 (7 **คะแนน**) จงแสดงว่า H เป็นกรุปย่อย (subgroup) ของ $GL_3(\mathbb{R})$ เมื่อ

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} : ab = 1 \right\}$$

วิธีทำ ถ้า $a = c = 1$ แล้ว $ac = 1$ ดังนั้น $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ เป็นสมาชิกใน H

ให้ $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix}$ เป็นสมาชิกใน H นั่นคือ $ac = 1$ และ $xy = 1$ แล้ว

$$AB^{-1} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & y^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & by^{-1} \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า $(ax^{-1})(by^{-1}) = \dfrac{ab}{xy} = \dfrac{1}{1} = 1$ ดังนั้น $AB^{-1} \in H$

ดังนั้น $H \leq GL_3(\mathbb{R})$

6.2 (3 **คะแนน**) จงหา**จำนวนกรุปย่อย**ทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_{111} \times \mathbb{Z}_{100}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\gcd(111, 100) = 1$ ฉะนั้น $\mathbb{Z}_{111} \times \mathbb{Z}_{100}$ เป็นกรุปวัฏจักร

จะเห็นว่า $n = |\mathbb{Z}_{111} \times \mathbb{Z}_{100}| = 111 \cdot 100$ ดังนั้นจำนวนกรุปย่อยทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_{111} \times \mathbb{Z}_{100}$ เท่ากับ

$$\begin{aligned} \tau(n) &= \tau(111 \cdot 100) \\ &= \tau(3 \cdot 37 \cdot 2^2 \cdot 5^2) \\ &= \tau(2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 37) \\ &= (2+1)(1+1)(2+1)(1+1) \\ &= 3(2)(3)(2) \\ &= 36 \quad \# \end{aligned}$$

7. **(12 คะแนน)** จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

7.1 **(7 คะแนน)** จงหา **ตัวก่อกำเนิด** (generator) ทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_{50}^{\times}$

วิธีทำ $|\mathbb{Z}_{50}^{\times}| = \phi(50) = \phi(2\cdot 5^2) = (2-1)(5^2-5) = 20$ จะเห็นว่า

$$\begin{array}{rcccccccccccccc}
(\bar{3})^1 & & & & & = & \bar{3} & & (\bar{3})^{11} & = & (\bar{3})(\bar{3})^{10} & = & \overline{-3} & = & \overline{-3} \\
(\bar{3})^2 & & & & & = & \bar{9} & & (\bar{3})^{12} & = & (\bar{3})(\bar{3})^{11} & = & \overline{-9} & = & \overline{-9} \\
(\bar{3})^3 & & & & & = & \overline{27} & & (\bar{3})^{13} & = & (\bar{3})(\bar{3})^{12} & = & \overline{-27} & = & \overline{23} \\
(\bar{3})^4 & & & = & \overline{81} & = & \overline{31} & & (\bar{3})^{14} & = & (\bar{3})(\bar{3})^{13} & = & \overline{69} & = & \overline{19} \\
(\bar{3})^5 & = & (\bar{3})(\bar{3})^4 & = & \overline{93} & = & \overline{-7} & & (\bar{3})^{15} & = & (\bar{3})(\bar{3})^{14} & = & \overline{57} & = & \bar{7} \\
(\bar{3})^6 & = & (\bar{3})(\bar{3})^5 & = & \overline{-21} & = & \overline{29} & & (\bar{3})^{16} & = & (\bar{3})(\bar{3})^{15} & = & \overline{21} & = & \overline{21} \\
(\bar{3})^7 & = & (\bar{3})(\bar{3})^6 & = & \overline{87} & = & \overline{-13} & & (\bar{3})^{17} & = & (\bar{3})(\bar{3})^{16} & = & \overline{63} & = & \overline{13} \\
(\bar{3})^8 & = & (\bar{3})(\bar{3})^7 & = & \overline{-39} & = & \overline{11} & & (\bar{3})^{18} & = & (\bar{3})(\bar{3})^{17} & = & \overline{39} & = & \overline{-11} \\
(\bar{3})^9 & = & (\bar{3})(\bar{3})^8 & = & \overline{33} & = & \overline{-17} & & (\bar{3})^{19} & = & (\bar{3})(\bar{3})^{18} & = & \overline{-33} & = & \overline{17} \\
(\bar{3})^{10} & = & (\bar{3})(\bar{3})^9 & = & \overline{-51} & = & \overline{-1} & & (\bar{3})^{20} & = & (\bar{3})(\bar{3})^{19} & = & \overline{51} & = & \bar{1}
\end{array}$$

ดังนั้น $\bar{3}$ เป็นตัวก่อกำเนิดของ $\mathbb{Z}_{50}^{\times}$ และ $1 \le k < 20$ ซึ่ง $\gcd(k, 20) = 1$ ประกอบไปด้วย

$$k = 1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19$$

จะได้ว่าตัวก่อกำเนิดทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_{50}^{\times}$ คือ

$$\begin{array}{rclcrcl}
(\bar{3})^1 & = & \bar{3} & & (\bar{3})^{11} & = & \overline{47} \\
(\bar{3})^3 & = & \overline{27} & & (\bar{3})^{13} & = & \overline{23} \\
(\bar{3})^7 & = & \overline{37} & & (\bar{3})^{17} & = & \overline{13} \\
(\bar{3})^9 & = & \overline{33} & & (\bar{3})^{19} & = & \overline{17}
\end{array}$$

7.2 **(5 คะแนน)** ให้ G เป็นกรุปจำกัดโดยที่ $|G| = 4$

จงใช้ทฤษฎีบทลากรองจ์ (Lagrange's Theorem) แสดงว่ามีสมาชิกใน G ที่มี อันดับ (order) เท่ากับ 2

วิธีทำ

แบบที่ 1

สมมติว่า $|G| = 4$ และ $H \le G$ จากทฤษฎีบทลากรองจ์ จะได้ว่า $|H|$ หาร 4 ลงตัว นั่นคือ $|H| = 1, 2, 4$

ดังนั้นมีกรุปย่อย $|H| = 2$ ให้ $H = \{e, a\}$ โดยที่ $a \in G$ และ $a \ne e$ จะได้ว่า $a^2 \in H$ นั่นคือ

$$a^2 = a \qquad \text{หรือ} \qquad a^2 = e$$

ในกรณี $a^2 = a$ จะได้ว่า

$$a = ae = a(aa^{-1}) = (aa)a^{-1} = a^2a^{-1} = aa^{-1} = e$$

ซึ่งเกิดข้อขัดแย้งกับ $a \ne e$ ดังนั้น $a^2 = e$ นั่นคือ $\circ(a) = 2$

แบบที่ 2

สมมติว่า $|G| = 4$ ให้ $a \in G$ ซึ่ง $a \ne e$ จะได้ว่า $\langle a \rangle$ เป็นกรุปย่อยของ G โดยทฤษฎีบทลากรองจ์ จะได้ว่า $|\langle a \rangle|$ หาร $|G|$ ลงตัว นั่นคือ

$$\circ(a) = |\langle a \rangle| = 1, 2, 4$$

ถ้า $\circ(a) = 1$ จะได้ว่า $a = e$ เกิดข้อขัดแย้ง

กรณีที่ $\circ(a) = 2$ ได้ตามที่ต้องการ

กรณี $\circ(a) = 4$ จะได้ว่า $\langle a \rangle = G$ นั่นคือ a เป็นตัวก่อกำเนิด ฉะนั้น $G = \{e, a, a^2, a^3\}$ โดยทฤษฎีบทของจำนวนตัวก่อกำเนิดจะได้ว่า a^3 $(\gcd(3, 4) = 1)$ เป็นตัวก่อกำเนิดของ G ด้วย จะเห็นว่า $a^2 \ne e$ ทำให้ได้ว่า $\circ(a^2) = 2$

8. **(10 คะแนน)** พิจารณากรุป $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{25}$

8.1 **(2 คะแนน)** $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{25}$ เป็น **กรุปวัฏจักร** (cyclic group) หรือไม่เพราะเหตุใด

วิธีทำ เนื่องจาก $\gcd(3, 25) = 1$ ดังนั้น $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{25}$ เป็นกรุปวัฏจักร

8.2 **(4 คะแนน)** จงหา **กรุปย่อย** (subgroup) ทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{25}$

วิธีทำ จะเห็นได้ว่า $(\bar{1}, \bar{1})$ เป็นตัวก่อกำเนิดของ $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{25}$ และ $|\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{25}| = 3 \times 25 = 75$ ตัวหารของ 75 คือ 1, 3, 5, 15, 25, 75 ดังนั้นกรุปย่อยของ $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{25}$ คือ

$$\left\langle \frac{75}{1}(\bar{1}, \bar{1}) \right\rangle = \langle (\bar{0}, \bar{0}) \rangle = \{(\bar{0}, \bar{0})\}$$

$$\left\langle \frac{75}{3}(\bar{1}, \bar{1}) \right\rangle = \left\langle (\bar{1}, \bar{0}) \right\rangle = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0})\}$$

$$\left\langle \frac{75}{5}(\bar{1}, \bar{1}) \right\rangle = \left\langle (\bar{0}, \overline{15}) \right\rangle = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \overline{15}), (\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \overline{20}), (\bar{0}, \overline{10})\}$$

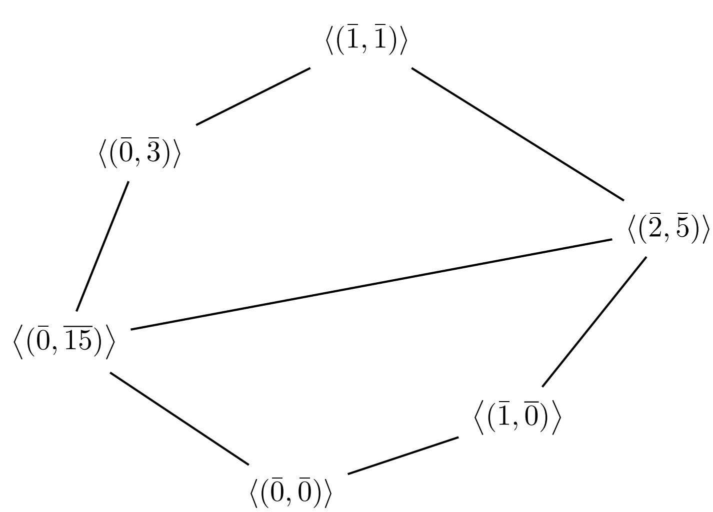
$$\begin{aligned}\left\langle \frac{75}{15}(\bar{1}, \bar{1}) \right\rangle = \left\langle (\bar{2}, \bar{5}) \right\rangle = \{&(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{5}), (\bar{1}, \overline{10}), (\bar{0}, \overline{15}), (\bar{2}, \overline{20}),\\ &(\bar{1}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{5}), (\bar{2}, \overline{10}), (\bar{1}, \overline{15}), (0, \overline{20}),\\ &(\bar{2}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{5}), (\bar{0}, \overline{10}), (\bar{2}, \overline{15}), (\bar{1}, \overline{20})\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{75}{25}(\bar{1}, \bar{1}) \right\rangle = \left\langle (\bar{0}, \bar{3}) \right\rangle = \{&(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{9}), (\bar{0}, \overline{12}),\\ &(\bar{0}, \overline{15}), (\bar{0}, \overline{18}), (\bar{0}, \overline{21}), (\bar{0}, \overline{24}), (\bar{0}, \bar{2}),\\ &(\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{8}), (\bar{0}, \overline{11}), (\bar{0}, \overline{14}), (\bar{0}, \overline{17}),\\ &(\bar{0}, \overline{20}), (\bar{0}, \overline{23}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{7}),\\ &(\bar{0}, \overline{10}), (\bar{0}, \overline{13}), (\bar{0}, \overline{16}), (\bar{0}, \overline{19}), (\bar{0}, \overline{22})\}\end{aligned}$$

$$\left\langle \frac{75}{75}(\bar{1}, \bar{1}) \right\rangle = \left\langle (\bar{1}, \bar{1}) \right\rangle = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{25}$$

8.3 **(4 คะแนน)** จงเขียน **แลตทิซ** (Lattice) ของกรุปย่อยของ $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{25}$

วิธีทำ เขียนแลตทิซได้ดังนี้



9. (11 **คะแนน**) จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

9.1 (6 **คะแนน**) ให้ H เป็นกรุปย่อย (subgroup) ของกรุป G และ $a, b \in G$ จงพิสูจน์ว่า

$$a^{-1}b \in H \qquad \text{ก็ต่อเมื่อ} \qquad aH = bH$$

บทพิสูจน์. ให้ $H \leq G$ และ $a, b \in G$
$(\rightarrow)$ สมมติว่า $a^{-1}b \in H$ จะได้ว่ามี $h_1 \in H$ ซึ่ง $a^{-1}b = h_1$ นั่นคือ $b = ah_1$ และ $a = bh_1^{-1}$
ให้ $x \in aH$ จะได้ว่ามี $h_2 \in H$ ซึ่ง $x = ah_2$ นั่นคือ

$$x = (bh_1^{-1})h_2 = b(h_1^{-1}h_2) \in bH$$

ดังนั้น $aH \subseteq bH$
ให้ $y \in bH$ จะได้ว่ามี $h_3 \in H$ ซึ่ง $y = bh_3$ นั่นคือ

$$y = (ah_1)h_3 = a(h_1h_3) \in aH$$

ดังนั้น $bH \subseteq aH$ ฉะนั้น $aHa = aH$
$(\leftarrow)$ สมมติว่า $aH = bH$ เนื่องจาก $b = be \in bH$ ดังนั้น $b \in aH$ จะได้ว่ามี $h \in H$ ซึ่ง $b = ah$ นั่นคือ

$$a^{-1}b = h \in H$$

$\square$

9.2 (5 **คะแนน**) ให้ N เป็นกรุปย่อยของกรุป G จงพิสูจน์ว่า

$$\text{ถ้า} \quad gNg^{-1} \subseteq N \text{ ทุก ๆ } g \in G \qquad \text{แล้ว} \qquad Ng = gN \text{ ทุก ๆ } g \in G$$

บทพิสูจน์. ให้ $N \leq G$ สมมติว่า $gNg^{-1} \subseteq N$ ทุก ๆ $g \in G$
ให้ $a \in G$ และ $x \in Na$ จะได้ว่ามี $n \in N$ ซึ่ง $x = na$ เลือก $g = a^{-1} \in G$ นั่นคือ

$$a^{-1}x = a^{-1}na = gng^{-1} \in g^{-1}Ng \subseteq N$$

จะได้ว่ามี $n_1 \in N$ ซึ่ง $a^{-1}x = n_1$ ฉะนั้น $x = an_1 \in aN$ ฉะนั้น $Na \subseteq aN$
ให้ $y \in aN$ จะได้ว่ามี $n_2 \in N$ ซึ่ง $y = an_2$ นั่นคือ

$$ya^{-1} = an_2a^{-1} =\in aNa^{-1} \subseteq N$$

จะได้ว่ามี $n_3 \in N$ ซึ่ง $ya^{-1} = n_3$ ฉะนั้น $y = n_3a \in Na$ ฉะนั้น $Na \subseteq aN$
ดังนั้น $Ng = gN$ $\square$

10. **(10 คะแนน)** จง**แจกแจงสมาชิก**ของกรุปผลหาร (quotient group)

$$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{15} / \left\langle (\bar{2}, \bar{5}) \right\rangle$$

พร้อมหา **ตัวก่อกำเนิด** (generator) ทั้งหมด

วิธีทำ พิจารณา

$$[\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{15} : \langle (\bar{2}, \bar{5}) \rangle] = \frac{4 \cdot 15}{\circ((\bar{2}, \bar{5}))} = \frac{60}{\ell\text{cm}(2,3)} = \frac{60}{6} = 10$$

และ $\langle (\bar{2}, \bar{5}) \rangle = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{5}), (\bar{0}, \overline{10}), (\bar{2}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{5}), (\bar{2}, \overline{10})\}$ แล้ว

$$\begin{aligned}
\langle (\bar{2}, \bar{5}) \rangle + (\bar{0}, \bar{0}) &= \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{5}), (\bar{0}, \overline{10}), (\bar{2}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{5}), (\bar{2}, \overline{10})\} \\
\langle (\bar{2}, \bar{5}) \rangle + (\bar{1}, \bar{0}) &= \{(\bar{1}, \bar{0}), (\bar{3}, \bar{5}), (\bar{1}, \overline{10}), (\bar{3}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{5}), (\bar{3}, \overline{10})\} \\
\langle (\bar{2}, \bar{5}) \rangle + (\bar{0}, \bar{1}) &= \{(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{6}), (\bar{0}, \overline{11}), (\bar{2}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{6}), (\bar{2}, \overline{11})\} \\
\langle (\bar{2}, \bar{5}) \rangle + (\bar{1}, \bar{1}) &= \{(\bar{1}, \bar{1}), (\bar{3}, \bar{6}), (\bar{1}, \overline{11}), (\bar{3}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{6}), (\bar{3}, \overline{11})\} \\
\langle (\bar{2}, \bar{5}) \rangle + (\bar{1}, \bar{2}) &= \{(\bar{1}, \bar{2}), (\bar{3}, \bar{7}), (\bar{1}, \overline{12}), (\bar{3}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{7}), (\bar{3}, \overline{12})\} \\
\langle (\bar{2}, \bar{5}) \rangle + (\bar{2}, \bar{2}) &= \{(\bar{2}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{7}), (\bar{2}, \overline{12}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{2}, \bar{7}), (\bar{0}, \overline{12})\} \\
\langle (\bar{2}, \bar{5}) \rangle + (\bar{2}, \bar{3}) &= \{(\bar{2}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{8}), (\bar{2}, \overline{13}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{2}, \bar{8}), (\bar{0}, \overline{13})\} \\
\langle (\bar{2}, \bar{5}) \rangle + (\bar{1}, \bar{4}) &= \{(\bar{1}, \bar{4}), (\bar{3}, \bar{9}), (\bar{1}, \overline{14}), (\bar{3}, \bar{4}), (\bar{1}, \bar{9}), (\bar{3}, \overline{14})\} \\
\langle (\bar{2}, \bar{5}) \rangle + (\bar{2}, \bar{4}) &= \{(\bar{2}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{9}), (\bar{2}, \overline{14}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{2}, \bar{9}), (\bar{0}, \overline{14})\} \\
\langle (\bar{2}, \bar{5}) \rangle + (\bar{3}, \bar{3}) &= \{(\bar{3}, \bar{3}), (\bar{1}, \bar{8}), (\bar{3}, \overline{13}), (\bar{1}, \bar{3}), (\bar{3}, \bar{8}), (\bar{1}, \overline{13})\}
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{15} / \langle (\bar{2}, \bar{5}) \rangle = \{&\langle (\bar{2}, \bar{5}) \rangle, \langle (\bar{2}, \bar{5}) \rangle + (\bar{1}, \bar{0}), \langle (\bar{2}, \bar{5}) \rangle + (\bar{0}, \bar{1}), \langle (\bar{2}, \bar{5}) \rangle + (\bar{1}, \bar{1}), \langle (\bar{2}, \bar{5}) \rangle + (\bar{1}, \bar{2}) \\
&\langle (\bar{2}, \bar{5}) \rangle + (\bar{2}, \bar{2}), \langle (\bar{2}, \bar{5}) \rangle + (\bar{2}, \bar{3}), \langle (\bar{2}, \bar{5}) \rangle + (\bar{1}, \bar{4}), \langle (\bar{2}, \bar{5}) \rangle + (\bar{2}, \bar{4}), \langle (\bar{2}, \bar{5}) \rangle + (\bar{3}, \bar{3})\}
\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\gcd(4, 15) = 1$ ดังนั้น $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{15}$ เป็นกรุปวัฏจักร ทำให้ได้ว่า $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{15} / \langle (\bar{2}, \bar{5}) \rangle$ เป็นกรุปวัฏจักร
จะเห็นว่า $(\bar{1}, \bar{1})$ เป็นตัวก่อกำเนิดของ $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{15}$ ดังนั้น

$$\langle (\bar{2}, \bar{5}) \rangle + (\bar{1}, \bar{1}) \text{ เป็นตัวก่อกำเนิดของ } \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{15} / \langle (\bar{2}, \bar{5}) \rangle$$

แล้ว $1 \leq k < 10$ ซึ่ง $\gcd(k, 10) = 1$ คือ $k = 1, 3, 7, 9$ ดังนั้นตัวก่อกำเนิดทั้งหมดคือ

$$\begin{aligned}
1 \left(\langle (\bar{2}, \bar{5}) \rangle + (\bar{1}, \bar{1}) \right) &= \langle (\bar{2}, \bar{5}) \rangle + 1(\bar{1}, \bar{1}) = \langle (\bar{2}, \bar{5}) \rangle + (\bar{1}, \bar{1}) \\
3 \left(\langle (\bar{2}, \bar{5}) \rangle + (\bar{1}, \bar{1}) \right) &= \langle (\bar{2}, \bar{5}) \rangle + 3(\bar{1}, \bar{1}) = \langle (\bar{2}, \bar{5}) \rangle + (\bar{3}, \bar{3}) \\
7 \left(\langle (\bar{2}, \bar{5}) \rangle + (\bar{1}, \bar{1}) \right) &= \langle (\bar{2}, \bar{5}) \rangle + 7(\bar{1}, \bar{1}) = \langle (\bar{2}, \bar{5}) \rangle + (\bar{3}, \bar{7}) \\
9 \left(\langle (\bar{2}, \bar{5}) \rangle + (\bar{1}, \bar{1}) \right) &= \langle (\bar{2}, \bar{5}) \rangle + 9(\bar{1}, \bar{1}) = \langle (\bar{2}, \bar{5}) \rangle + (\bar{1}, \bar{9})
\end{aligned}$$