คณิตศาสตร์

มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
คณะครุศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ข้อสอบกลางภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2565

รหัสวิชา	**ชื่อวิชา**	**วันเวลาสอบ**	**คะแนนเต็ม**
MAC3310	พีชคณิตนามธรรม	เวลา 17:00 – 20:00 วันพฤหัสบดี ที่ 8 กันยายน 2565	105 คะแนน 25%

ชื่อ-สกุล... **รหัสนักศึกษา**.......................... **หมู่เรียน**..........

คำชี้แจง/ข้อตกลง

1. ข้อสอบมีทั้งหมด **12 หน้า จำนวน 10 ข้อ**
2. เขียนรหัสนักศึกษา และหมู่เรียนด้วย**ตัวบรรจงลงในข้อสอบทุกหน้า**
3. **ห้ามใช้** เครื่องคำนวณ และอุปกรณ์สื่อสารทุกชนิดในขณะสอบ
4. **ไม่อนุญาต**ให้นำเอกสารการเรียน ตำราเรียนทุกชนิดเข้าห้องสอบ
5. **ห้าม** นำข้อสอบออกจากห้องสอบโดยเด็ดขาด
6. หากมี**การทุจริต**ในการสอบ จะได้รับการลงโทษตามระเบียบของมหาวิทยาลัย

ข้าพเจ้าจะปฏิบัติตามข้อตกลงอย่างเคร่งครัด
ลงชื่อผู้เข้าสอบ

....

อาจารย์ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย

ข้อที่	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	**รวม**
คะแนน											

1. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้โดยไม่ต้องแสดงวิธีทำ (ข้อละ 1 คะแนน)

1.1 ค่าของ $\phi(25 \cdot 65)$ เท่ากับเท่าใด ________________

1.2 นิยาม $a * b = a^2 \cdot 2^b$ เมื่อ $a, b \in \mathbb{R}$ ________________

จงหาค่าของ $(1 * 0) * 2 - 1 * (0 * 2)$

1.3 จงหา **อันดับ (order)** ของ $(\bar{3}, \bar{5})$ ใน $\mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{30}$ ________________

1.4 จงหา **อันดับ (order)** ของ $-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ ใน $\mathbb{C}^*$ ________________

1.5 ให้ $\alpha = [(1\ 2\ 3)(2\ 3\ 4)]^3$ เป็นสมาชิกใน S_4 ________________

จงหา**จำนวนเต็มบวก k ที่น้อยที่สุด**ที่ทำให้ $\alpha^k = (1)$

1.6 จงหา**จำนวนสมาชิก**ของ $\langle \bar{5} \rangle$ ใน $\mathbb{Z}_{31}^*$ ________________

1.7 จงหา **จำนวน ตัวก่อกำเนิด (generator)** ทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_{1600}$ ________________

1.8 จงหา **จำนวน กรุปย่อยปกติ (normal subgroup)** ทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_{300}$ ________________

1.9 จงหา **จำนวนสมาชิก** ของ $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_9 / \langle (\bar{2}, \bar{3}) \rangle$ ________________

1.10 จงหา **จำนวน ตัวก่อกำเนิด (generator)** ของ $\mathbb{Z}_{150} / \left\langle \overline{25} \right\rangle$ ________________

ข้อ 2 ถึง 10 จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

2. **(12 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

2.1 **(6 คะแนน)** จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยวิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สำหรับจำนวนนับ n ใด ๆ

$$(2^2 - 1^2) + (4^2 - 3^2) + (6^2 - 5^2) + \cdots + [(2n)^2 - (2n-1)^2] = 2n^2 + n$$

2.2 **(6 คะแนน)** ให้ $x, y \in \mathbb{Z}$ และนิยามความสัมพันธ์ R บนจำนวนเต็มดังนี้

$$x\,R\,y \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad 3 \mid (2x + y)$$

จงแสดงว่า R เป็นความสัมพันธ์สมมูล (equivalent relation)

3. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

3.1 **(6 คะแนน)** ให้ Δ เป็นตัวดำเนินการทวิภาคบนเซตกำลัง $\mathcal{P}(D)$ เมื่อ $D = \{1,2\}$ นิยามโดย

$$A\Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

(ก) **(2 คะแนน)** จงเติมผลการดำเนินการในช่องว่างให้สมบูรณ์

Δ	$\varnothing$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$\varnothing$				
$\{1\}$				
$\{2\}$				
$\{1,2\}$				

(ข) **(2 คะแนน)** จงใช้ตารางจาก (ก) หาค่าของ $(\{1\}\Delta\{2\})\Delta\{1,2\}$

(ค) **(2 คะแนน)** จงใช้ตารางจาก (ก) หาเอกลักษณ์ของ Δ พร้อมบอกเหตุผล

3.2 **(4 คะแนน)** จงหาตัวผกผันการคูณของ $\overline{47}$ ใน $\mathbb{Z}_{99}^{\times}$

4. (10 **คะแนน**) นิยามการดำเนินการทวิภาค $*$ บน $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ ดังนี้

$$(a, b) * (c, d) = (c + 2ad, 2bd)$$

จงพิสูจน์ว่า $(G, *)$ เป็น**กรุป** (group)

5. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

5.1 **(5 คะแนน)** ให้ G เป็นกรุป และมีสมบัติว่า

$$(ab)^2 = a^2b^2 \quad \text{ทุก ๆ } a, b \in G$$

จงพิสูจน์ว่า G เป็นกรุปอาบีเลียน (abelian group)

5.2 **(5 คะแนน)** ให้ a, b, x เป็นสมาชิกในกรุป G ที่มีสมบัติ $xax = b$
จงพิสูจน์ว่า

$$\text{มี } y \in G \text{ ซึ่ง} \qquad ab = y^2$$

6. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

6.1 **(5 คะแนน)** ให้ $\alpha, \beta \in S_4$ โดยที่

$$\alpha = (1\ 2\ 3)\beta(1\ 3\ 2) \qquad \text{และ} \qquad \alpha^{2022} = (1\ 3\ 4)$$

จงหา β^{2022} (ตอบในรูปวัฏจักร (cycle))

6.2 **(5 คะแนน)** ใน S_{99} จงหา **อันดับ (order)** ของ $\alpha\beta$ เมื่อ

$$\alpha = (1\ 2)^2(2\ 3)^3(3\ 4)^4(4\ 5)^5 \cdots (98\ \ 99)^{99}$$
$$\beta = (1\ 2)(2\ 3)(3\ 4)(4\ 5) \cdots (98\ \ 99)$$

7. **(15 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

7.1 **(7 คะแนน)** จงแสดงว่า H เป็นกรุปย่อย (subgroup) ของ $GL_2(\mathbb{R})$ เมื่อ

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & \frac{1}{a} \end{bmatrix} : a \neq 0 \right\}$$

7.2 **(8 คะแนน)** จงหา **ตัวก่อกำเนิด (generator)** ทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_{22}^{\times}$

8. **(10 คะแนน)** พิจารณากรุป $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$ กับการบวก

   8.1 **(2 คะแนน)** $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$ เป็น **กรุปวัฏจักร** (cyclic group) หรือไม่เพราะเหตุใด

   8.2 **(4 คะแนน)** จงหา **กรุปย่อย** (subgroup) ทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$

   8.3 **(4 คะแนน)** จงเขียน **แลตทิซ** (Lattice) ของกรุปย่อยของ $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$

9. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

9.1 **(5 คะแนน)** ให้ H เป็นกรุปย่อย (subgroup) ของกรุป G และ $a, b \in G$ จงพิสูจน์ว่า

ถ้า $b^{-1}a \in H$ แล้ว $aH = bH$

9.2 **(5 คะแนน)** ให้ G เป็นกรุปจำกัดโดยที่ $|G| = 5$ จงพิสูจน์ว่า

ถ้า $a \in G$ โดยที่ $a \neq e$ แล้ว $\langle a \rangle = G$

ข้อเสนอแนะ : ใช้ทฤษฎีบทของลากรองจ์ (Lagrange's Theorem)

10. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

10.1 **(5 คะแนน)** กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ เป็นสมาชิกใน $GL_2(\mathbb{R})$

จงแจกแจงสมาชิก $\langle A \rangle$ และตรวจสอบว่า $\langle A \rangle$ เป็นกรุปย่อยปกติ(nornal subgroup) ของ $GL_2(\mathbb{R})$ หรือไม่

10.2 **(5 คะแนน)** จง**แจกแจงสมาชิก**ของกรุปผลหาร (quotient group)

$$\mathbb{Z}_{22}^{\times} / \langle \bar{3} \rangle$$

และใช้ผลจากข้อ 7.2 หา **ตัวก่อกำเนิด (generator)** ทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_{22}^{\times} / \langle \bar{3} \rangle$

คณิตศาสตร์

มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
คณะครุศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์
เฉลยข้อสอบกลางภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2565

รหัสวิชา	ชื่อวิชา	วันเวลาสอบ	คะแนนเต็ม
MAC3310	พีชคณิตนามธรรม	เวลา 17:00 – 20:00 วันพฤหัสบดี ที่ 8 กันยายน 2565	105 คะแนน 25%

โดย ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย

---

1. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้โดยไม่ต้องแสดงวิธีทำ (ข้อละ 1 คะแนน)

1.1 ค่าของ $\phi(25 \cdot 65)$ เท่ากับเท่าใด 1200

แนวคำตอบ $\phi(25 \cdot 65) = \phi(5^3 \cdot 13) = (5^3 - 5^2)(13 - 1) = 100(12) = 1200 \quad \#$

1.2 นิยาม $a * b = a^2 \cdot 2^b$ เมื่อ $a, b \in \mathbb{R}$ 3

จงหาค่าของ $(1 * 0) * 2 - 1 * (0 * 2)$

แนวคำตอบ

$$\begin{aligned}(1 * 0) * 2 - 1 * (0 * 2) &= (1^2 \cdot 2^0) * 2 - 1 * (0^2 \cdot 2^2) \\ &= 1 * 2 - 1 * 0 \\ &= 1^2 \cdot 2^2 - 1^2 \cdot 2^0 \\ &= 4 - 1 = 3 \quad \#\end{aligned}$$

1.3 จงหา **อันดับ (order)** ของ $(\bar{3}, \bar{5})$ ใน $\mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{30}$ 30

แนวคำตอบ เนื่องจากจาก $\circ(\bar{3}) = 5$ ใน $\mathbb{Z}_{15}$ และ $\circ(\bar{5}) = 6$ ใน $\mathbb{Z}_{30}$

ดังนั้น $\circ(\bar{3}, \bar{5}) = \ell\text{cm}(5, 6) = 30$ ใน $\mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{30} \quad \#$

1.4 จงหา **อันดับ (order)** ของ $-\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$ ใน $\mathbb{C}^*$ 8

แนวคำตอบ เนื่องจาก $z = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}$

จะได้ว่า 8 เป็นจำนวนเต็มบวกน้อยสุดที่ทำให้

$$z^8 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^8 = \left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)^8 = \cos 10\pi + i\sin 10\pi = 1$$

ดังนั้น $\circ(z) = 8 \quad \#$

1.5 ให้ $\alpha = [(1\ 2\ 3)(2\ 3\ 4)]^3$ เป็นสมาชิกใน S_4 2
จงหา**จำนวนเต็มบวก k ที่น้อยที่สุด**ที่ทำให้ $\alpha^k = (1)$

แนวคำตอบ เนื่องจาก $(1\ 2\ 3)(2\ 3\ 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (1\ 2)(3\ 4)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\alpha &= [(1\ 2)(3\ 4)]^3 = (1\ 2)^3(3\ 4)^3 = (1\ 2)^2(1\ 2)(3\ 4)^2(3\ 4)\\ &= (1)(1\ 2)(1)(3\ 4) = (1\ 2)(3\ 4)\end{aligned}$$

ดังนั้น $\circ(\alpha) = \ell\text{cm}(2, 2) = 2 \quad \#$

1.6 จงหา**จำนวนสมาชิก**ของ $\langle \bar{5} \rangle$ ใน $\mathbb{Z}_{31}^*$ 3

แนวคำตอบ เนื่องจาก

$$\langle \bar{5} \rangle = \{\bar{1}, \bar{5}, (\bar{5})^2, (\bar{5})^3, (\bar{5})^4, ...\} = \{\bar{1}, \bar{5}, \overline{25}\}$$

ดังนั้น $|\langle \bar{5} \rangle| = \circ(\bar{5}) = 3 \quad \#$

1.7 จงหา **จำนวน ตัวก่อกำเนิด (generator)** ทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_{1600}$ 640

แนวคำตอบ จำนวนตัวก่อกำเนิดของ $\mathbb{Z}_{1600}$ เท่ากับ

$$\phi(1600) = \phi(2^6 \cdot 5^2) = (2^6 - 2^5)(5^2 - 5^1) = 32 \cdot 20 = 640 \quad \#$$

1.8 จงหา **จำนวน กรุปย่อยปกติ (normal subgroup)** ทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_{300}$ 18

แนวคำตอบ เนื่องจาก $\mathbb{Z}_{300}$ เป็นกรุปอาบีเลียน ดังนั้นทุกกรุปย่อยเป็นกรุปย่อยปกติ
จะได้ว่าจำนวนกรุปย่อยปกติของ $\mathbb{Z}_{300}$ เท่ากับจำนวนตัวหารของ 300 นั่นคือ

$$\tau(300) = \tau(2^2 \cdot 3 \cdot 5^2) = (2+1)(1+1)(2+1) = 18 \quad \#$$

1.9 จงหา **จำนวนสมาชิก** ของ $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_9 / \langle(\bar{2}, \bar{3})\rangle$ 6

แนวคำตอบ

$$\begin{aligned}|\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_9 / \langle(\bar{2}, \bar{3})\rangle| = [\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_9 : \langle(\bar{2}, \bar{3})\rangle] &= \frac{10 \cdot 9}{\circ((\bar{2}, \bar{3}))}\\ &= \frac{90}{\ell\text{cm}(5, 3)}\\ &= \frac{90}{15} = 6 \quad \#\end{aligned}$$

1.10 จงหา **จำนวน ตัวก่อกำเนิด (generator)** ของ $\mathbb{Z}_{150} / \langle \overline{25} \rangle$ 20

แนวคำตอบ เนื่องจาก $\mathbb{Z}_{150}$ เป็นกรุปวัฏจักร โดยมี $\bar{1}$ เป็นตัวก่อกำเนิด
ดังนั้น $\mathbb{Z}_{150} / \langle \overline{25} \rangle$ เป็นกรุปวัฏจักร โดยมี $\langle \overline{25} \rangle + \bar{1}$ เป็นตัวก่อกำเนิด และ

$$|\mathbb{Z}_{150} / \langle \overline{25} \rangle| = [\mathbb{Z}_{150} : \langle \overline{25} \rangle] = \frac{150}{\circ(\overline{25})} = \frac{150}{6} = 25$$

ดังนั้นจำนวนตัวก่อกำเนิดของ $\mathbb{Z}_{150} / \langle \overline{25} \rangle$ เท่ากับ $\phi(25) = \phi(5^2) = 5^2 - 5^1 = 20 \quad \#$

ข้อ 2 ถึง 10 จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

2. **(12 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

2.1 **(6 คะแนน)** จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยวิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์
สำหรับจำนวนนับ n ใด ๆ

$$(2^2-1^2)+(4^2-3^2)+(6^2-5^2)+\cdots+[(2n)^2-(2n-1)^2]=2n^2+n$$

บทพิสูจน์. สำหรับ $n \in \mathbb{N}$ กำหนดให้ $P(n)$ แทนประโยค

$$(2^2-1^2)+(4^2-3^2)+(6^2-5^2)+\cdots+[(2n)^2-(2n-1)^2]=2n^2+n$$

จะเห็นว่า $(2^2-1^2)=3=2+1=2\cdot 1^2+1$ ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง
ให้ $k \in \mathbb{N}$ สมมติ $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือ

$$(2^2-1^2)+(4^2-3^2)+(6^2-5^2)+\cdots+[(2k)^2-(2k-1)^2]=2k^2+k$$

โดยสมมติฐาน จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(2^2-1^2)+(4^2-3^2)+(6^2-5^2)+\cdots+[(2k)^2-(2k-1)^2]+[(2k+2)^2-(2k+1)^2]\\
&=2k^2+k+[(2k+2)^2-(2k+1)^2]\\
&=2k^2+k+(4k^2+8k+4)-(4k^2+4k+1)\\
&=2k^2+k+4k+3\\
&=2k^2+4k+2+(k+1)\\
&=2(k^2+2k+1)+(k+1)\\
&=2(k+1)^2+(k+1)\end{aligned}$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์สรุปได้ว่า

$$(2^2-1^2)+(4^2-3^2)+(6^2-5^2)+\cdots+[(2n)^2-(2n-1)^2]=2n^2+n \qquad \text{ทุก ๆ จำนวนนับ } n$$

□

2.2 **(6 คะแนน)** ให้ $x, y \in \mathbb{Z}$ และนิยามความสัมพันธ์ R บนจำนวนเต็มดังนี้

$$x\,R\,y \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad 3 \mid (2x+y)$$

จงแสดงว่า R เป็นความสัมพันธ์สมมูล (equivalent relation)

บทพิสูจน์. จะแสดงว่า R มีสมบัติ 3 ข้อต่อไปนี้

1. **สมบัติสะท้อน (Reflexive)**
   สำหรับจำนวนเต็ม x ใด ๆ จะได้ว่า $2x+x=3x$ ดังนั้น $3 \mid (2x+x)$ สรุปได้ว่า $x\,R\,x$
2. **สมบัติสมมาตร (Symmetric)**
   ให้ $x, y \in \mathbb{Z}$ สมมติว่า $x\,R\,y$ นั่นคือ $3 \mid (2x+y)$ จะได้ว่ามี $k \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $2x+y=3k$ หรือ $y=3k-2x$ ฉะนั้น
   $$2y+x=2(3k-2x)+x=6k-4x+x=6k-3x=3(2k-x)$$
   ดังนั้น $3 \mid (2y+x)$ หรือ $y\,R\,x$
3. **สมบัติถ่ายทอด (Transitive)**
   ให้ $x, y, z \in \mathbb{Z}$ สมมติว่า $x\,R\,y$ และ $y\,R\,z$ จะได้ว่า $3 \mid (2x+y)$ ทำให้ได้ว่า $3 \mid [(2x+y)+(2y+z)]$ หรือ
   $$3 \mid (2x+z+3y)$$
   เนื่องจาก $3 \mid 3y$ ดังนั้น $3 \mid (2x+z)$ สรุปได้ว่า $x\,R\,z$

ดังนั้น R เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน $\mathbb{Z}$

□

3. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

3.1 **(6 คะแนน)** ให้ Δ เป็นตัวดำเนินการทวิภาคบนเซตกำลัง $\mathcal{P}(D)$ เมื่อ $D = \{1, 2\}$ นิยามโดย

$$A\Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

(ก) **(2 คะแนน)** จงเติมผลการดำเนินการในช่องว่างให้สมบูรณ์

Δ	$\varnothing$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$\{1\}$	$\{1\}$	$\varnothing$	$\{1,2\}$	$\{2\}$
$\{2\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$	$\varnothing$	$\{1\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{2\}$	$\{1\}$	$\varnothing$

(ข) **(2 คะแนน)** จงใช้ตารางจาก (ก) หาค่าของ $(\{1\}\Delta\{2\})\Delta\{1, 2\}$
แนวคำตอบ จากตารางจาก (ก)

$$(\{1\}\Delta\{2\})\Delta\{1, 2\} = (\{1, 2\})\Delta\{1, 2\} = \varnothing \quad \#$$

(ค) **(2 คะแนน)** จงใช้ตารางจาก (ก) หาเอกลักษณ์ของ Δ พร้อมบอกเหตุผล

แนวคำตอบ จากตารางจาก (ก) แถวที่ 2 และหลักที่ 2 สอดคล้องเงื่อนไข

$$\varnothing\Delta A = A = A\Delta\varnothing \quad \text{ทุก ๆ } A \in \mathcal{P}(D)$$

ดังนั้นเอกลักษณ์ของ Δ คือ $\varnothing$ (เซตว่าง) #

3.2 **(4 คะแนน)** จงหาตัวผกผันการคูณของ $\overline{47}$ ใน $\mathbb{Z}_{99}^{\times}$
แนวคำตอบ พิจารณาเมตริกซ์ในการหา $\gcd(47, 99) = 1$

$$\begin{array}{rrrl} 99 & 1 & 0 & R_1 \\ 47 & 0 & 1 & R_2 \\ 5 & 1 & -2 & R_3 = R_1 - 2R_2 \\ 2 & -9 & 19 & R_4 = R_2 - 9R_3 \\ 1 & 19 & -40 & R_5 = R_3 - 2R_4 \end{array}$$

ดังนั้น $1 = 99(19) + 47(-40)$ จะได้ว่า

$$\bar{1} = \overline{99(-19) + 47(-40)} = \overline{47} \cdot \overline{-40}$$

ดังนั้น $\overline{-40} = \overline{59}$ เป็นตัวผกผันการคูณของ $\overline{47}$ ใน $\mathbb{Z}_{99}^{\times}$

4. **(10 คะแนน)** นิยามการดำเนินการทวิภาค $*$ บน $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ ดังนี้

$$(a, b) * (c, d) = (c + 2ad, 2bd)$$

จงพิสูจน์ว่า $(G, *)$ เป็น**กรุป** (group)

บทพิสูจน์. ให้ $(a, b), (c, d), (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
(a, b) * [(c, d) * (x, y)] &= (a, b) * (x + 2cy, 2dy) \\
&= ((x + 2cy) + 2a(2dy), 2b(2dy)) \\
&= (x + 2cy + 4ady, 4bdy) \\
&= (x + 2(c + 2ad)y, 2(2bd)y) \\
&= (c + 2ad, 2bd) * (x, y) \\
&= [(a, b) * (c, d)] * (x, y)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $*$ มีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม เนื่องจาก

$$(a, b) * \left(0, \frac{1}{2}\right) = \left(0 + 2a \cdot \frac{1}{2}, 2b \cdot \frac{1}{2}\right) = (a, b) = \left(a + 2(0)b, 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot b\right) = \left(0, \frac{1}{2}\right) * (a, b)$$

นั่นคือ $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ เป็นเอกลักษณ์ สำหรับ $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ นั่นคือ $b \neq 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
(a, b) * \left(-\frac{a}{2b}, \frac{1}{4b}\right) &= \left(-\frac{a}{2b} + 2a \cdot \frac{1}{4b}, 2b \cdot \frac{1}{4b}\right) = \left(0, \frac{1}{2}\right) \\
\left(-\frac{a}{2b}, \frac{1}{4b}\right) * (a, b) &= \left(a + 2\left(-\frac{a}{2b}\right)b, 2 \cdot \frac{1}{4b} \cdot b\right) = \left(0, \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\left(-\frac{a}{2b}, \frac{1}{4b}\right)$ เป็นตัวผกผันของ (a, b) สรุปได้ว่า $(G, *)$ เป็นกรุป $\square$

5. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

5.1 **(5 คะแนน)** ให้ G เป็นกรุป และมีสมบัติว่า

$$(ab)^2 = a^2b^2 \quad \text{ทุก ๆ } a, b \in G$$

จงพิสูจน์ว่า G เป็นกรุปอาบีเลียน (abelian group)

<u>แบบที่ 1 : ใช้เอกลักษณ์</u>

บทพิสูจน์. ให้ $a, b \in G$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} ab &= eabe \\ &= (a^{-1}a)ab(bb^{-1}) \\ &= a^{-1}(aa)(bb)b^{-1} \\ &= a^{-1}(a^2b^2)b^{-1} \\ &= a^{-1}(ab)^2b^{-1} && \text{โดยสมมติฐาน} \\ &= a^{-1}(ab)(ab)b^{-1} \\ &= (a^{-1}a)ba(bb^{-1}) \\ &= ebae \\ &= ba \end{aligned}$$

ดังนั้น G เป็นกรุปอาบีเลียน □

<u>แบบที่ 2 : ใช้สมบัติการตัดออก</u>

บทพิสูจน์. ให้ $a, b \in G$ จะได้ว่า

$$a(ba)b = (ab)(ab) = (ab)^2 = a^2b^2 = (aa)(bb) = a(ab)b$$

โดยสมบัติการตัดออก จะได้ว่า $ba = ab$ ดังนั้น G เป็นกรุปอาบีเลียน □

5.2 **(5 คะแนน)** ให้ a, b, x เป็นสมาชิกในกรุป G ที่มีสมบัติ $xax = b$
จงพิสูจน์ว่า

$$\text{มี } y \in G \text{ ซึ่ง} \qquad ab = y^2$$

<u>แบบที่ 1 : y ในรูป x และ b</u>

บทพิสูจน์. ให้ a, b, x เป็นสมาชิกในกรุป G ที่มีสมบัติ $xax = b$

$$\begin{aligned} x^{-1}(xax)x^{-1} &= x^{-1}bx^{-1} \\ a &= x^{-1}bx^{-1} \\ ab &= x^{-1}bx^{-1}b = (x^{-1}b)^2 \end{aligned}$$

เลือก $y = x^{-1}b \in G$ ดังนั้น $ab = y^2$ □

<u>แบบที่ 2 : y ในรูป x และ a</u>

บทพิสูจน์. ให้ a, b, x เป็นสมาชิกในกรุป G ที่มีสมบัติ $xax = b$

$$ab = a(xax) = (ax)(ax) = (ax)^2$$

เลือก $y = ax \in G$ ดังนั้น $ab = y^2$ □

6. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

6.1 **(5 คะแนน)** ให้ $\alpha, \beta \in S_4$ โดยที่

$$\alpha = (1\ 2\ 3)\beta(1\ 3\ 2) \qquad \text{และ} \qquad \alpha^{2022} = (1\ 3\ 4)$$

จงหา β^{2022} (ตอบในรูปวัฏจักร (cycle))

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\alpha^2 &= \alpha\alpha = (1\ 2\ 3)\beta(1\ 3\ 2)(1\ 2\ 3)\beta(1\ 3\ 2) = (1\ 2\ 3)\beta(1)\beta(1\ 3\ 2) = (1\ 2\ 3)\beta^2(1\ 3\ 2)\\
\alpha^3 &= \alpha^2\alpha = (1\ 2\ 3)\beta^2(1\ 3\ 2)(1\ 2\ 3)\beta(1\ 3\ 2) = (1\ 2\ 3)\beta^2(1)\beta(1\ 3\ 2) = (1\ 2\ 3)\beta^3(1\ 3\ 2)\\
\alpha^4 &= \alpha^3\alpha = (1\ 2\ 3)\beta^3(1\ 3\ 2)(1\ 2\ 3)\beta(1\ 3\ 2) = (1\ 2\ 3)\beta^3(1)\beta(1\ 3\ 2) = (1\ 2\ 3)\beta^4(1\ 3\ 2)\\
&\ \vdots\\
\alpha^{2022} &= (1\ 2\ 3)\beta^{2022}(1\ 3\ 2)\\
(1\ 3\ 4) &= (1\ 2\ 3)\beta^{2022}(1\ 3\ 2)
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\beta^{2022} &= (1\ 2\ 3)^{-1}(1\ 3\ 4)(1\ 3\ 2)^{-1} = (3\ 2\ 1)(1\ 3\ 4)(2\ 3\ 1)\\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (2\ 4\ 3) \quad \#
\end{aligned}$$

6.2 **(5 คะแนน)** ใน S_{99} จงหา **อันดับ (order)** ของ $\alpha\beta$ เมื่อ

$$\begin{aligned}
\alpha &= (1\ 2)^2(2\ 3)^3(3\ 4)^4(4\ 5)^5\cdots(98\ \ 99)^{99}\\
\beta &= (1\ 2)(2\ 3)(3\ 4)(4\ 5)\cdots(98\ \ 99)
\end{aligned}$$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\alpha &= (1\ 2)^2(2\ 3)^{2+1}(3\ 4)^{2(2)}(4\ 5)^{2(2)+1}\cdots(97\ \ 98)^{2(49)}(98\ \ 99)^{2(49)+1}\\
&= (1)(2\ 3)(1)(4\ 5)\cdots(1)(98\ \ 99)\\
&= (2\ 3)(4\ 5)(6\ 7)\cdots(98\ \ 99)\\
\alpha\beta &= (2\ 3)(4\ 5)(6\ 7)\cdots(98\ \ 99)\cdot(1\ 2)(2\ 3)(3\ 4)(4\ 5)\cdots(98\ \ 99)\\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \cdots & 98 & 99 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 & 7 & 6 & \cdots & 99 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \cdots & 98 & 99 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \cdots & 99 & 1 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots & 97 & 98 & 99 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 7 & 6 & \cdots & 99 & 98 & 1 \end{pmatrix}\\
&= (1\ 3\ 5\ 7\ \cdots\ 99)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\circ(\alpha\beta) = 50 \quad \#$

7. **(15 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

7.1 **(7 คะแนน)** จงแสดงว่า H เป็นกรุปย่อย (subgroup) ของ $GL_2(\mathbb{R})$ เมื่อ

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & \frac{1}{a} \end{bmatrix} : a \neq 0 \right\}$$

แนวคำตอบ เลือก $a = 1 \neq 0$ จะได้ว่า $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ เป็นสมาชิกใน H

ให้ $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & \frac{1}{a} \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} x & 0 \\ y & \frac{1}{x} \end{bmatrix}$ เป็นสมาชิกใน H นั่นคือ $a \neq 0$ และ $x \neq 0$ แล้ว

$$AB^{-1} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 0 \\ y & \frac{1}{x} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{1} \begin{bmatrix} \frac{1}{x} & 0 \\ -y & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a}{x} & 0 \\ \frac{b}{x} - \frac{y}{a} & \frac{x}{a} \end{bmatrix}$$

เนื่องจาก $\frac{a}{x} \neq 0$ และ $\frac{x}{a} = \frac{1}{\frac{a}{x}}$ ดังนั้น $AB^{-1} \in H$

ดังนั้น $H \leq GL_2(\mathbb{R})$

7.2 **(8 คะแนน)** จงหา **ตัวก่อกำเนิด (generator)** ทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_{22}^{\times}$

วิธีทำ $|\mathbb{Z}_{22}^{\times}| = \phi(22) = \phi(2 \cdot 11) = (2-1)(11-1) = 10$ จะเห็นว่า

$$\begin{array}{rcccccl}
(\overline{7})^1 & & & & & = & \overline{7} \\
(\overline{7})^2 & & & = & \overline{49} & = & \overline{5} \\
(\overline{7})^3 & = & (\overline{7})(\overline{7})^2 & = & \overline{35} & = & \overline{13} \\
(\overline{7})^4 & = & (\overline{7})(\overline{7})^3 & = & \overline{91} & = & \overline{3} \\
(\overline{7})^5 & = & (\overline{7})(\overline{7})^4 & = & \overline{21} & = & \overline{-1} \\
(\overline{7})^6 & = & (\overline{7})(\overline{7})^5 & = & \overline{-7} & = & \overline{-7} \\
(\overline{7})^7 & = & (\overline{7})(\overline{7})^6 & = & \overline{-49} & = & \overline{-5} = \overline{17} \\
(\overline{7})^8 & = & (\overline{7})(\overline{7})^7 & = & \overline{-35} & = & \overline{9} \\
(\overline{7})^9 & = & (\overline{7})(\overline{7})^8 & = & \overline{63} & = & \overline{-3} = \overline{19} \\
(\overline{7})^{10} & = & (\overline{7})(\overline{7})^9 & = & \overline{-21} & = & \overline{1}
\end{array}$$

ดังนั้น $\overline{7}$ เป็นตัวก่อกำเนิดของ $\mathbb{Z}_{22}^{\times}$ และ $1 \leq k < 10$ ซึ่ง $\gcd(k, 10) = 1$ ประกอบไปด้วย

$$k = 1, 3, 7, 9$$

จะได้ว่าตัวก่อกำเนิดทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_{22}^{\times}$ คือ

$$\begin{array}{rcl}
(\overline{7})^1 & = & \overline{7} \\
(\overline{7})^3 & = & \overline{13} \\
(\overline{7})^7 & = & \overline{17} \\
(\overline{7})^9 & = & \overline{19}
\end{array}$$

8. **(10 คะแนน)** พิจารณากรุป $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$ กับการบวก

8.1 **(2 คะแนน)** $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$ เป็น **กรุปวัฏจักร (cyclic group)** หรือไม่เพราะเหตุใด

แนวคำตอบ เนื่องจาก $\gcd(3,4) = 1$ ดังนั้น $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$ เป็นกรุปวัฏจักร

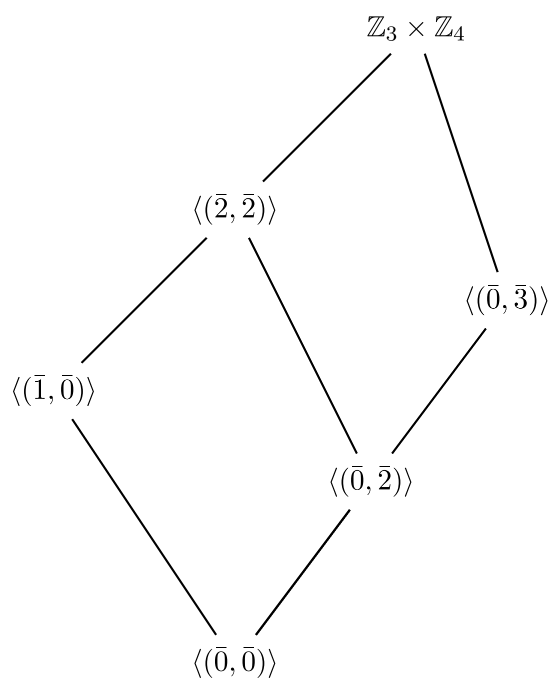
8.2 **(4 คะแนน)** จงหา **กรุปย่อย (subgroup)** ทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$

แนวคำตอบ จะเห็นได้ว่า $(\bar{1}, \bar{1})$ เป็นตัวก่อกำเนิดของ $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$ และ $|\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4| = 3 \times 4 = 12$ ตัวหารของ 12 คือ 1, 2, 3, 4, 6, 12 ดังนั้นกรุปย่อยของ $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$ คือ

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{12}{1}\langle(\bar{1},\bar{1})\rangle = \langle(\bar{0},\bar{0})\rangle = \{(\bar{0},\bar{0})\} \\
&\tfrac{12}{2}\langle(\bar{1},\bar{1})\rangle = \big\langle(\bar{0},\bar{2})\big\rangle = \{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{0},\bar{2})\} \\
&\tfrac{12}{3}\big\langle(\bar{1},\bar{1})\big\rangle = \big\langle(\bar{1},\bar{0})\big\rangle = \{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{1},\bar{0}),(\bar{2},\bar{0})\} \\
&\tfrac{12}{4}\big\langle(\bar{1},\bar{1})\big\rangle = \big\langle(\bar{0},\bar{3})\big\rangle = \{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{0},\bar{3}),(\bar{0},\bar{2}),(\bar{0},\bar{1})\} \\
&\tfrac{12}{6}\big\langle(\bar{1},\bar{1})\big\rangle = \big\langle(\bar{2},\bar{2})\big\rangle = \{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{2},\bar{2}),(\bar{1},\bar{0}),(\bar{0},\bar{2}),(\bar{2},\bar{0}),(\bar{1},\bar{2})\} \\
&\tfrac{12}{12}\langle(\bar{1},\bar{1})\rangle = \big\langle(\bar{1},\bar{1})\big\rangle = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4
\end{aligned}
$$

8.3 **(4 คะแนน)** จงเขียน **แลตทิซ (Lattice)** ของกรุปย่อยของ $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$

แนวคำตอบ



9. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

9.1 **(5 คะแนน)** ให้ H เป็นกรุปย่อย (subgroup) ของกรุป G และ $a, b \in G$ จงพิสูจน์ว่า

$$\text{ถ้า} \quad b^{-1}a \in H \quad \text{แล้ว} \quad aH = bH$$

***บทพิสูจน์*.** H เป็นกรุปย่อยของ G และ $a, b \in G$ สมมติว่า $b^{-1}a \in H$ จะได้ว่า $a^{-1}b = (b^{-1}a)^{-1} \in H$
($\subseteq$) ให้ $x \in aH$ จะได้ว่ามี $h \in H$ ซึ่ง $x = ah$ จะได้ว่า $b^{-1}x = (b^{-1}a)h \in H$ ดังนั้น $(b^{-1}x)^{-1} \in H$ นั่นคือ

$$x^{-1}b \in H$$

มี $h_1 \in H$ ซึ่ง $x^{-1}b = h_1$ นั่นคือ $x = (h_1b^{-1})^{-1} = bh_1^{-1} \in bH$ ดังนั้น $aH \subseteq bH$
($\supseteq$) ให้ $y \in bH$ จะได้ว่ามี $h \in H$ ซึ่ง $y = bh$ จะได้ว่า $a^{-1}y = (a^{-1}b)h \in H$ ดังนั้น $(a^{-1}y)^{-1} \in H$ นั่นคือ

$$y^{-1}a \in H$$

มี $h_1 \in H$ ซึ่ง $y^{-1}a = h_1$ นั่นคือ $y = (h_1a^{-1})^{-1} = ah_1^{-1} \in aH$ ดังนั้น $bH \subseteq aH$
สรุปได้ว่า $aH = bH$ $\square$

9.2 **(5 คะแนน)** ให้ G เป็นกรุปจำกัดโดยที่ $|G| = 5$ จงพิสูจน์ว่า

$$\text{ถ้า } a \in G \text{ โดยที่ } a \neq e \text{ แล้ว } \langle a \rangle = G$$

ข้อเสนอแนะ : ใช้ทฤษฎีบทของลากรองจ์ (Lagrange's Theorem)

***บทพิสูจน์*.** ให้ $a \in G$ โดยที่ $a \neq e$ จะได้ว่า $\langle a \rangle$ เป็นกรุปย่อยของ G ซึ่ง $|G| = 5$
โดยทฤษฎีบทของลากรองจ์จะได้ว่า $|\langle a \rangle|$ หาร 5 ลงตัว นั่นคือ $|\langle a \rangle| = 1$ หรือ 5
แต่ $a \neq e$ ทำให้ได้ว่า $|\langle a \rangle| = 5$ ดังนั้น $\langle a \rangle = G$ $\square$

10. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

10.1 **(5 คะแนน)** กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ เป็นสมาชิกใน $GL_2(\mathbb{R})$

จงแจกแจงสมาชิก $\langle A \rangle$ และตรวจสอบว่า $\langle A \rangle$ เป็นกรุปย่อยปกติ(nornal subgroup) ของ $GL_2(\mathbb{R})$ หรือไม่

แนวคำตอบ พิจารณา

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \therefore \circ(A) = 2$$

ดังนั้น

$$\langle A \rangle = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \#$$

เลือก $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$ จะได้ว่า $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ และ

$$\begin{aligned} B \langle A \rangle B^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \neq \langle A \rangle \end{aligned}$$

ดังนั้น $\langle A \rangle$ ไม่เป็นกรุปย่อยปกติ(nornal subgroup) ของ $GL_2(\mathbb{R})$ $\quad \#$

10.2 **(5 คะแนน)** จง**แจกแจงสมาชิก**ของกรุปผลหาร (quotient group)

$$\mathbb{Z}_{22}^{\times} / \langle \bar{3} \rangle$$

และใช้ผลจากข้อ 7.2 หา **ตัวก่อกำเนิด (generator)** ทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_{22}^{\times} / \langle \bar{3} \rangle$

แนวคำตอบ

$$[\mathbb{Z}_{22}^{\times} : \langle \bar{3} \rangle] = \frac{\phi(22)}{\circ(\bar{3})} = \frac{10}{5} = 2$$

และ $\langle \bar{3} \rangle = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{9}, \bar{5}, \overline{15}\}$ แล้ว

$$\begin{aligned} \langle \bar{3} \rangle \cdot \bar{1} &= \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{9}, \bar{5}, \overline{15}\} \\ \langle \bar{3} \rangle \cdot \bar{7} &= \{\bar{7}, \overline{21}, \overline{19}, \overline{13}, \overline{17}\} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\mathbb{Z}_{22}^{\times} / \langle \bar{3} \rangle = \{\langle \bar{3} \rangle, \langle \bar{3} \rangle \cdot \bar{7}\}$$

ผลจากข้อ 7.2 จะเห็นว่า $\bar{7}$ เป็นตัวก่อกำเนิดของ $\mathbb{Z}_{22}^{\times}$ ดังนั้น $\langle \bar{3} \rangle \cdot \bar{7}$ เป็นตัวก่อกำเนิดของ $\mathbb{Z}_{22}^{\times} / \langle \bar{3} \rangle$ แล้ว $1 \leq k < 2$ ซึ่ง $\gcd(k, 2) = 1$ คือ $k = 1$ ดังนั้นตัวก่อกำเนิดทั้งหมดมีเพียงตัวเดียวคือ

$$\langle \bar{3} \rangle \cdot \bar{7}$$