



มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
คณะครุศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ข้อสอบกลางภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2562

รหัสวิชา MAP2403	ชื่อวิชา พีชคณิตนามธรรม	วันเวลาสอบ เวลา 10:00 – 13:00 วันพฤหัสบดี ที่ 3 ตุลาคม 2562	คะแนนเต็ม 105 คะแนน 30%
----------------------------	-----------------------------------	--	--------------------------------------

ชื่อ-สกุล..... รหัสนักศึกษา..... หมู่เรียน.....

คำชี้แจง

1. ข้อสอบมีทั้งหมด 12 หน้า จำนวน 10 ข้อ
2. เขียนชื่อ-สกุล รหัสนักศึกษา และตอนเรียนด้วยตัวบรรจงลงในข้อสอบทุกหน้า
3. ห้ามใช้ เครื่องคำนวณ และอุปกรณ์สื่อสารทุกชนิดในขณะสอบ
4. ไม่นอนุญาตให้นำเอกสารการเรียน ตำราเรียนทุกชนิดเข้าห้องสอบ
5. ห้าม นำข้อสอบออกจากห้องสอบโดยเด็ดขาด
6. หากมีการทุจริตในการสอบ จะได้รับการลงโทษตามระเบียบของมหาวิทยาลัย

ลงชื่อผู้เข้าสอบ

.....

อาจารย์ผู้สอน ผศ.ดร.ธนชัยศ จำปาหวาย

ข้อที่	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	รวม
คะแนน											

1. (10 คะแนน) จงตอบคำถามต่อไปนี้โดยไม่ต้องแสดงวิธีทำ (ข้อละ 1 คะแนน)

1.1 ค่าของ $\phi(2^5 - 5^2)$ เท่ากับเท่าใด _____

1.2 นิยาม $a * b = 2a + b + K$ เมื่อ $a, b \in \mathbb{R}$ โดยที่ K เป็นค่าคงตัว _____

ถ้า $1 * 2 = 5$ จงหา K

1.3 จงหา อันดับ (order) ของ $(\bar{2}, \bar{3})$ ใน $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{51}$ _____

1.4 จงหา อันดับ (order) ของ $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ ใน \mathbb{C}^* _____

1.5 ให้ $\alpha = (1\ 2\ 3)(2\ 3\ 4)(3\ 4\ 5)$ เป็นสมาชิกใน S_5 _____

จงหาจำนวนเต็มบวก k ที่น้อยที่สุดที่ทำให้ $\alpha^k = (1)$

1.6 จงหาจำนวนสมาชิกของ $\langle \bar{7} \rangle$ ใน \mathbb{Z}_{11}^* _____

1.7 จงหา จำนวน ตัวก่อกำเนิด (generator) ทั้งหมดของ \mathbb{Z}_{2500} _____

1.8 จงหา จำนวน กรุย่อย (generator) ทั้งหมดของ \mathbb{Z}_{500} _____

1.9 จงหา ดัชนี (index) $[\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_8 : \langle (\bar{2}, \bar{2}) \rangle]$ _____

1.10 จงหา จำนวนตัวก่อกำเนิด (generator) ของกรุปผลหาร $\mathbb{Z}_{100} / \langle \bar{20} \rangle$ _____

ข้อ 2 ถึง 10 จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

2. (12 คะแนน) จงตอบคำถามต่อไปนี้

2.1 (6 คะแนน) ให้ a เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่า $3 \mid a(2a^2 + 7)$

ข้อเสนอแนะ : ใช้ขั้นตอนวิธีการหาร (The Division Algorithm)

2.2 (6 คะแนน) ให้ a, b เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่ศูนย์พร้อมกัน จงพิสูจน์ว่า

$$\text{ถ้า } \gcd(a, b) = 1 \text{ แล้ว } \gcd(a^2, b^2) = 1$$

3. (10 คะแนน) จงตอบคำถามต่อไปนี้

3.1 (6 คะแนน) ให้ $*$ เป็นตัวดำเนินการทวิภาคบน $G = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ซึ่งมีสมบัติสลับที่ (commutative) และแสดงผลการดำเนินการดังตารางเคย์เลย์ต่อไปนี้

*	1	2	3	4	5
1	3	2	4	1	
2		5		2	2
3		3	2	3	4
4				4	5
5	5				1

- (ก) (2 คะแนน) จงเติมตัวเลขในช่องว่างของตารางเคย์เลย์ให้สมบูรณ์
 (ข) (2 คะแนน) จงหาค่าของ $4 * (2 * 3) + (4 * 2) * 3$
 (ค) (2 คะแนน) จงหา เอกลักษณ์ (identity) ของ $*$ พร้อมให้เหตุผลประกอบ

3.2 (4 คะแนน) จงหาตัวผกผันการคูณ (multiplicative inverse) ของ $\overline{61}$ ใน $\mathbb{Z}_{100}^{\times}$

4. (10 คะแนน) นิยามการดำเนินการทวิภาคโดย

$$a * b = \frac{1}{2}ab \quad \text{เมื่อ } a, b \in \mathbb{R}^*$$

จงพิสูจน์ว่า $(\mathbb{R}^*, *)$ เป็น กรุปอาบีเลียน (abelian group)

5. (9 คะแนน) จงตอบคำถามต่อไปนี้

5.1 (4 คะแนน) ให้ G เป็นกรุป และมีสมบัติว่า

$$x^2 = x \quad \text{ทุก } x \in G$$

จงพิสูจน์ว่า G เป็นกรุปอาบีเลียน (abelian group)

5.2 (5 คะแนน) ให้ $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ นิยามการดำเนินการทวิภาคโดย

$$(a, b) * (c, d) = (a + c + 1, 2b + d)$$

จงตรวจสอบว่า $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, *)$ เป็นกรุปหรือไม่

6. (10 คะแนน) จงตอบคำถามต่อไปนี้

6.1 (6 คะแนน) ให้ $\alpha = (1\ 2)(3\ 4\ 5)$ และ $\beta = (3\ 4\ 6)(7\ 8)$ เป็นสมาชิกใน S_8 จงหา

$$(\beta\alpha)^{2562}(\alpha\beta)^{2019}$$

6.2 (4 คะแนน) ใน S_{15} จงหา **อันดับ (order)** ของ α เมื่อ

$$\alpha = (1\ 3\ 5\ 7\ 9\ 11\ 13\ 15)(1\ 4\ 7\ 10\ 13)(1\ 5\ 9\ 13)$$

7. (14 คะแนน) จงตอบคำถามต่อไปนี้

7.1 (7 คะแนน) จงแสดงว่า H เป็นกรุปย่อย (subgroup) ของ $GL_2(\mathbb{R})$ เมื่อ

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} : ac = 1 \right\}$$

7.2 (7 คะแนน) จงหา ตัวก่อกำเนิด (generator) ทั้งหมดของ \mathbb{Z}_{27}^\times

8. (10 คะแนน) พิจารณากรุป $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_9$ กับการบวก

8.1 (2 คะแนน) $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_9$ เป็น กรุปวัฏจักร (cyclic group) หรือไม่เพราะเหตุใด

8.2 (4 คะแนน) จงหา กรุปย่อย (subgroup) ทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_9$

8.3 (4 คะแนน) จงเขียน แลตทิซ (Lattice) ของกรุปย่อยของ $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_9$

9. (10 คะแนน) จงตอบคำถามต่อไปนี้

9.1 (5 คะแนน) ให้ H เป็นกรุปย่อย (subgroup) ของกรุป G และ $a, b \in G$ จงพิสูจน์ว่า

$$a \in Hb \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad Ha = Hb$$

9.2 (5 คะแนน) ให้ G เป็นกรุปจำกัดโดยที่ $|G| = n$ จงพิสูจน์ว่า

ถ้า n เป็นจำนวนเฉพาะ แล้ว ทุก ๆ กรุปย่อยของ G เป็นกรุปย่อยปกติ (normal subgroup)

ข้อเสนอแนะ : ใช้ทฤษฎีบทของลากรองจ์ (Lagrange's Theorem)

10. (10 คะแนน) จงตอบคำถามต่อไปนี้

10.1 (5 คะแนน) ให้ N และ M เป็นกรุปย่อยปกติ (normal subgroup) ของกรุป G จงพิสูจน์ว่า

$$N \cap M \text{ เป็นกรุปย่อยปกติของ } G$$

10.2 (5 คะแนน) จงแจกแจงสมาชิกของกรุปผลหาร (quotient group)

$$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9 / \langle (\bar{2}, \bar{6}) \rangle$$

พร้อมหา ตัวก่อกำเนิด (generator) ทั้งหมด