มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
คณะครุศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ข้อสอบกลางภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2566

รหัสวิชา	ชื่อวิชา	วันเวลาสอบ	คะแนนเต็ม
MAI1305	ทฤษฎีจำนวน	เวลา 09:00 - 12:00 วันจันทร์ ที่ 22 มกราคม 2567	100 คะแนน 25%

ชื่อ-สกุล.. **รหัสนักศึกษา**................................. **หมู่เรียน**................

คำชี้แจง

1. ข้อสอบมี 18 ข้อ 15 หน้า แบ่งออกเป็น 3 ตอน ประกอบด้วย
   - **ตอนที่** 1 ข้อสอบแบบ 5 ตัวเลือก จำนวน 5 ข้อ (ข้อละ 2 คะแนน รวม 10 คะแนน)
   - **ตอนที่** 2 ข้อสอบแบบเติมคำตอบ จำนวน 5 ข้อ (ข้อละ 2 คะแนน รวม 10 คะแนน)
   - **ตอนที่** 3 ข้อสอบแบบแสดงวิธีทำ จำนวน 8 ข้อ (ข้อละ 10 คะแนน รวม 80 คะแนน)
2. เขียนรหัสนักศึกษา และหมู่เรียนด้วย**ตัวบรรจงลงในข้อสอบทุกหน้า**
3. ไม่อนุญาตให้ใช้เครื่องคำนวณและเครื่องมือสื่อสาร
4. **ห้าม**นำข้อสอบออกจากห้องสอบโดยเด็ดขาด
5. หากมี**การทุจริต**ในการสอบ จะได้รับการลงโทษตามระเบียบของมหาวิทยาลัย

ข้าพเจ้าจะปฏิบัติตามข้อตกลงอย่างเคร่งครัด
ลงชื่อผู้เข้าสอบ

....

อาจารย์ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย

ตอนที่	1	2	3								รวม
ข้อ	1-5	6-10	11	12	13	14	15	16	17	18	
คะแนน											

ตอนที่ 1 : (10 คะแนน) จงกากบาททับข้อที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว ข้อละ 2 คะแนน

1. ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มที่สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

13	หาร	a	มีเศษเหลือเท่ากับ	1
13	หาร	b	มีเศษเหลือเท่ากับ	12

แล้ว 13 หารจำนวนใดต่อไปนี้มี **เศษเหลือมากที่สุด**

ก. $a+b$

ข. ab

ค. $a-b$

ง. $b-a$

จ. a^2+b^2

2. ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม ที่สอดคล้องสมการ

$$b = aq + r \qquad ....(*)$$

เมื่อ $q, r \in \mathbb{Z}$ พิจารณาเงื่อนไขต่อไปนี้

(1) $a \neq 0$	(3) $0 \leq r < a$	(5) $0 < r \leq a$
(2) $b \neq 0$	(4) $0 \leq r < \lvert a \rvert$	(6) $0 < r \leq \lvert a \rvert$

แล้วเงื่อนไข $(1) - (6)$ ที่ทำให้สมการ $(*)$ เป็นขั้นตอนวิธีการหาร (Division Algorithm)

ก. (1) และ (3)

ข. (2) และ (5)

ค. (1) และ (4)

ง. (2) และ (6)

จ. (1) และ (5)

3. ให้ a, b และ c เป็นจำนวนเต็ม ที่สอดคล้องเงื่อนไข

$$a \mid b \qquad \text{และ} \qquad a \mid c$$

ข้อใดต่อไปนี้ **ไม่ถูกต้อง**

ก. $a \mid bc$

ข. $a \mid (b + c)$

ค. $a \mid (b - c)$

ง. $a^2 \mid bc$

จ. $a^2 \mid (b + c)$

4. ให้ $d = \gcd(9, b)$ โดยที่ $b \in \mathbb{Z}^+$ ถ้ามีจำนวนเต็ม x ซึ่ง

$$d = 9x + 2b$$

ข้อใดต่อไปนี้กล่าว **ถูกต้อง**

ก. $x < 0$

ข. d เป็นจำนวนเต็ม

ค. $\gcd(x, 2) = d$

ง. $\gcd(b, 2) = d$

จ. d เป็นจำนวนคู่ (Even number)

5. จำนวนใดต่อไปนี้เป็น **จำนวนเฉพาะ (Prime number)**

ก. 267

ข. 275

ค. 273

ง. 277

จ. 279

ตอนที่ 2 : (10 คะแนน) จงเติมคำตอบในช่องว่าง (ด้านซ้ายบน) ให้ถูกต้อง ข้อละ 2 คะแนน

6. ______________________

จงหา**เศษเหลือ**ที่เกิดจากที่หาร 66^{24} ด้วย 7

7. ______________________

จงหา**หลักหน่วย**ของจำนวนเต็ม 2024^{66}

8. ______________________

ให้ d, q เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $d > 1$ โดยที่

$$d \mid (3q + 5) \qquad \text{และ} \qquad d \mid (q - 4)$$

แล้ว d คือจำนวนใด

9. ______________________

จงหา**จำนวนเลขศูนย์ที่ลงท้าย**ของจำนวนเต็ม $(25)^{67} \times (20)^{24}$

10. ______________________

จงหา**จำนวนตัวหาร**ของ $9! + 10!$

ตอนที่ 3 : (80 คะแนน) จงแสดงวิธีโดยละเอียด ข้อละ 10 คะแนน

11. **(10 คะแนน)** จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n} \qquad \text{สำหรับจำนวนนับ } n \text{ ใด ๆ}$$

12. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

12.1 **(5 คะแนน)** จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

ทุก ๆ จำนวนเต็ม x มีจำนวนเต็ม y เพียงตัวเดียว ซึ่ง $x + y = 24$

12.2 **(5 คะแนน)** จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

$$3 \mid n(n+1)(2n+7) \quad \text{ทุก ๆ จำนวนเต็ม } n$$

ข้อเสนอแนะ : ใช้ขั้นตอนวิธีการหาร (Division Algorithm)

13. **(10 คะแนน)** กำหนด $N = abbba$ เป็นจำนวนเต็มห้าหลัก

จงหาจำนวนเต็ม N ทั้งหมดที่ $28 \mid N$

ข้อเสนอแนะ : พิจารณา $28 = 4 \cdot 7$

14. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

14.1 **(5 คะแนน)** จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

$$6 \mid 2^n(2^{2n}-1) \qquad \text{ทุก ๆ จำนวนนับ } n$$

14.2 **(5 คะแนน)** ให้ $a, b, c \in \mathbb{Z}$ จงพิสูจน์ว่า

$$\text{ถ้า} \quad a \mid bc \quad \text{และ} \quad \gcd(a+b^2, a^2+b) = 1 \ \text{ แล้ว} \quad a \mid c$$

15. **(10 คะแนน)** จงหาจำนวนเต็ม x, y ที่สอดคล้องสมการ

$$1 = 111x - 191y$$

16. **(10 คะแนน)** กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนเต็ม

(ก) a และ b เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 10 แต่ไม่เกิน 100

(ข) $\gcd(a,b) \cdot \ell\text{cm}(a,b) = 2 \cdot 3 \cdot 5^3$

(ค) $\ell\text{cm}(a,b) - \gcd(a,b) = 3^3 \cdot 5$

จงหาย**กตัวอย่างจำนวนเต็มบวก** a, b ที่สอดคล้องเงื่อนไข (ก)-(ค) อย่างน้อย 1 คู่

17. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

17.1 **(5 คะแนน)** ให้ $a, b \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $ab = 3^2 \cdot 2^3$ และ

$$\gcd(2a, 4a + 2b) = 6$$

แล้ว $\ell\text{cm}(a, b)$ มีค่าเท่าใด

17.2 **(5 คะแนน)** ถ้า**จำนวนตัวหาร**ของ

$$N = (6! + 5! + 4!)^m$$

มีทั้งหมด 160 ตัว จงหาค่าของ m

18. **(10 คะแนน)** ให้ p, q เป็น**จำนวนเฉพาะ**ซึ่ง $p < q$ โดยที่

$$(p+q) \mid (p^2 + 6q^2 + 7^3 + 7pq)$$

จงหา p, q ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
คณะครุศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์
เฉลยข้อสอบปลายภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2566

รหัสวิชา	ชื่อวิชา	วันเวลาสอบ	คะแนนเต็ม
MAI1305	ทฤษฎีจำนวน	เวลา 09:00 - 12:00 วันจันทร์ ที่ 22 มกราคม 2567	100 คะแนน 25%

โดย ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย

ตอนที่ 1 : (10 คะแนน) จงกากบาททับข้อที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว ข้อละ 2 คะแนน

1. ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มที่สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

$$\begin{array}{cccc} 13 & \text{หาร} & a & \text{มีเศษเหลือเท่ากับ} \quad 1 \\ 13 & \text{หาร} & b & \text{มีเศษเหลือเท่ากับ} \quad 12 \end{array}$$

แล้ว 13 หารจำนวนใดต่อไปนี้มี **เศษเหลือมากที่สุด**

ก. $a+b$

ข. ab Answer

ค. $a-b$

ง. $b-a$

จ. a^2+b^2

ตอบข้อ ข.

ก. 13 หาร $a+b$ เศษเหลือคือ $1+12$ หรือ 0
ข. 13 หาร ab เศษเหลือคือ $1\cdot 12 = 12$
ค. 13 หาร $a-b$ เศษเหลือคือ $1-12=-11$ หรือ 2
ง. 13 หาร $b-a$ เศษเหลือคือ $12-1=11$
จ. 13 หาร a^2+b^2 เศษเหลือคือ $1^2+12^2=145$ หรือ 2

2. ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม ที่สอดคล้องสมการ

$$b = aq + r \qquad ....(*)$$

เมื่อ $q, r \in \mathbb{Z}$ พิจารณาเงื่อนไขต่อไปนี้

(1) $a \neq 0$
(2) $b \neq 0$
(3) $0 \leq r < a$
(4) $0 \leq r < |a|$
(5) $0 < r \leq a$
(6) $0 < r \leq |a|$

แล้วเงื่อนไข $(1) - (6)$ ที่ทำให้สมการ $(*)$ เป็นขั้นตอนวิธีการหาร (Division Algorithm)

ก. (1) และ (3)

ข. (2) และ (5)

ค. (1) และ (4) Answer

ง. (2) และ (6)

จ. (1) และ (5)

ตอบข้อ ค. ขั้นตอนวิธีการหาร (Division Algorithm) กล่าวว่า
ทุก ๆ $a, b \in \mathbb{Z}$ โดยที่ $a \neq 0$ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม q, r เพียงคู่เดียว

$$b = aq + r \quad \text{เมื่อ} \quad 0 \leq r < |a|$$

3. ให้ a, b และ c เป็นจำนวนเต็ม ที่สอดคล้องเงื่อนไข

$$a \mid b \qquad \text{และ} \qquad a \mid c$$

ข้อใดต่อไปนี้ **ไม่ถูกต้อง**

ก. $a \mid bc$

ข. $a \mid (b+c)$

ค. $a \mid (b-c)$

ง. $a^2 \mid bc$

จ. $a^2 \mid (b+c)$ Answer

ตอบข้อ จ. ถ้า $a \mid b$ และ $a \mid c$ จะได้ว่ามี $x, y \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $b = ax$ และ $c = ay$ แล้ว

ก. $bc = (ax)(ay) = a(axy)$ ดังนั้น $a \mid bc$

ข. $b + c = (ax) + (ay) = a(x + y)$ ดังนั้น $a \mid (b + c)$

ค. $b - c = (ax) - (ay) = a(x - y)$ ดังนั้น $a \mid (b - c)$

ง. $bc = (ax)(ay) = a^2(xy)$ ดังนั้น $a^2 \mid bc$

จ. ตัวอย่างค้าน ถ้า $4 \mid 4$ และ $4 \mid 8$ แต่ $4^2 \nmid 4 \cdot 8$

4. ให้ $d = \gcd(9, b)$ โดยที่ $b \in \mathbb{Z}^+$ ถ้ามีจำนวนเต็ม x ซึ่ง

$$d = 9x + 2b$$

ข้อใดต่อไปนี้กล่าว **ถูกต้อง**

ก. $x < 0$ Answer

ข. d เป็นจำนวนเต็ม Answer

ค. $\gcd(x, 2) = d$

ง. $\gcd(b, 2) = d$

จ. d เป็นจำนวนคู่ (Even number)

ตอบข้อ ก. หรือ ข. (ตอบข้อใดข้อหนึ่งได้ 2 คะแนน) จากนิยาม ห.ร.ม. d เป็นจำนวนเต็มบวก นั่นคือ d เป็นจำนวนเต็มด้วย และ $d \mid 9$ และ $d \mid b$ เนื่องจาก $b > 0$ จะได้ว่า

$$d \leq 9 \quad \text{และ} \quad d \leq b$$

เนื่องจาก $b < 2b$ และ $2b = d - 2x$ ฉะนั้น $d < 2b$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} d &< d - 2x \\ 0 &< -2x \\ 0 &> x \end{aligned}$$

สรุปได้ว่า $x < 0$
ข้อ ค-จ ไม่ถูกต้อง โดยเลือก $b = 15$ จะได้ $d = 3$ และ $x = -3$

5. จำนวนใดต่อไปนี้เป็น **จำนวนเฉพาะ (Prime number)**

ก. 267

ข. 275

ค. 273

ง. 277 Answer

จ. 279

ตอบข้อ ง. จะเห็นว่า 3 หาร $267, 273, 279$ ลงตัว และ $5 \mid 275$ ดังนั้น ก, ข, ค และ จ ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ พิจารณาจำนวนเฉพาะ $p < \sqrt{277} \approx 16$ จะได้ $p = 2, 3, 5, 7, 11, 13$ โดยที่

$$2 \nmid 277,\ 3 \nmid 277,\ 5 \nmid 277,\ 7 \nmid 277,\ 11 \nmid 277 \text{ และ } 13 \nmid 277$$

ดังนั้น 277 เป็นจำนวนเฉพาะ

ตอนที่ 2 : (10 คะแนน) จงเติมคำตอบในช่องว่าง (ด้านซ้ายบน) ให้ถูกต้อง ข้อละ 2 คะแนน

6. ตอบ 1

จงหา**เศษเหลือ**ที่เกิดจากที่หาร 66^{24} ด้วย 7

แนวคำตอบ พิจารณา

7	หาร	66	เศษเหลือเท่ากับ	3
7	หาร	66^{24}	เศษเหลือเท่ากับ	3^{24}
7	หาร	$3^4 = 81$	เศษเหลือเท่ากับ	2
7	หาร	$3^{24} = (3^4)^3$	เศษเหลือเท่ากับ	$2^3 = 8$ หรือ เศษเหลือเท่ากับ 1

ดังนั้น 7 หาร 66^{24} มีเศษเหลือเท่ากับ 1 #

7. ตอบ 6

จงหา**หลักหน่วย**ของจำนวนเต็ม 2024^{66}

แนวคำตอบ พิจารณา

10	หาร	2024	เศษเหลือเท่ากับ	4
10	หาร	2024^{66}	เศษเหลือเท่ากับ	4^{66}
10	หาร	$4^2 = 16$	เศษเหลือเท่ากับ	6
10	หาร	$4^{66} = (4^2)^{33}$	เศษเหลือเท่ากับ	6^{33}
10	หาร	$6^3 = 216$	เศษเหลือเท่ากับ	6
10	หาร	$6^{33} = (6^3)^{11}$	เศษเหลือเท่ากับ	6^{11}
10	หาร	$6^{11} = (6^3)^3 \cdot 6^2$	เศษเหลือเท่ากับ	$6^3 \cdot 6^2 = 6^5$
10	หาร	$6^5 = 6^3 \cdot 6^2$	เศษเหลือเท่ากับ	$6 \cdot 6^2 = 216$ หรือ เศษเหลือเท่ากับ 6

ดังนั้น หลักหน่วยของจำนวนเต็ม 2024^{66} เท่ากับ 6 #

8. ตอบ 17

ให้ d, q เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $d > 1$ โดยที่

$$d \mid (3q+5) \qquad \text{และ} \qquad d \mid (q-4)$$

แล้ว d คือจำนวนใด

แนวคำตอบ สมมติว่า $d \mid (3q+5)$ และ $d \mid (q-4)$ จะได้ว่า มีจำนวนเต็ม x, y ซึ่ง

$$3q+5 = dx \qquad \text{และ} \qquad q-4 = dy$$

ฉะนั้น

$$\begin{aligned}(3q+5) - 3(q-4) &= dx - 3dy \\ 17 &= d(x-3y)\end{aligned}$$

ดังนั้น $d \mid 17$ เนื่องจาก $d \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $d > 1$ สรุปได้ว่า $d = 17$

9. ตอบ 48

จงหา**จำนวนเลขศูนย์ที่ลงท้าย**ของจำนวนเต็ม $(25)^{67} \times (20)^{24}$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}(25)^{67} \times (20)^{24} &= (5^2)^{67} \times (2 \times 10)^{24} \\ &= 5^{134} \times 2^{24} \times 10^{24} \\ &= 5^{110} \times (5^{24} \times 2^{24}) \times 10^{24} \\ &= 5^{110} \times (5 \times 2)^{24} \times 10^{24} \\ &= 5^{110} \times 10^{24} \times 10^{24} \\ &= 5^{110} \times 10^{48}\end{aligned}$$

ดังนั้นจำนวนเลขศูนย์ที่ลงท้ายของจำนวนเต็ม $(25)^{67} \times (20)^{24}$ มี 48 ตัว #

10. ตอบ 320

จงหา**จำนวนตัวหาร**ของ $9! + 10!$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}9! + 10! = 9! + 9! \cdot 10 &= 9!(1+10) \\ &= 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 11 \\ &= 2 \times 3 \times 2^2 \times 5 \times (2 \cdot 3) \times 7 \times 2^3 \times 3^2 \times 11 \\ &= 2^7 \times 3^4 \times 5 \times 7 \times 11\end{aligned}$$

จำนวนตัวหารของ $9! + 10!$ เท่ากับ

$$(7+1)(4+1)(1+1)(1+1)(1+1) = 8 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 320 \qquad \text{ตัว}$$

ตอนที่ 3 : (80 คะแนน) จงแสดงวิธีโดยละเอียด ข้อละ 10 คะแนน

11. **(10 คะแนน)** จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n} \qquad \text{สำหรับจำนวนนับ } n \text{ ใด ๆ}$$

บทพิสูจน์. ให้ $n \in \mathbb{N}$ และ $P(n)$ แทนข้อความ

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}$$

ขั้นฐาน : เนื่องจาก $\frac{1}{2}=2-\frac{3}{2}=2-\frac{1+2}{2}$ ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

ขั้นอุปนัย : ให้ $k \in \mathbb{N}$ สมมติ $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือ

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{k}{2^k}=2-\frac{k+2}{2^k}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{k}{2^k}+\frac{k+1}{2^{k+1}} &= 2-\frac{k+2}{2^k}+\frac{k+1}{2^{k+1}} \\
&= 2-\frac{2(k+2)}{2^k\cdot 2}+\frac{k+1}{2^{k+1}} \\
&= 2+\frac{-2(k+2)+k+1}{2^{k+1}} \\
&= 2+\frac{-2k-4+k+1}{2^{k+1}} \\
&= 2+\frac{-k-3}{2^{k+1}} \\
&= 2-\frac{k+3}{2^{k+1}} \\
&= 2-\frac{(k+1)+2}{2^{k+1}}
\end{aligned}$$

ทำให้สรุปได้ว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เราสรุปได้ว่า

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}$$

สำหรับทุกจำนวนนับ n $\square$

12. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

12.1 **(5 คะแนน)** จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

ทุก ๆ จำนวนเต็ม x มีจำนวนเต็ม y เพียงตัวเดียว ซึ่ง $x + y = 24$

แนวคำตอบ เขียนในรูปสัญลักษณ์คือ

$$\forall x \in \mathbb{Z} \exists! y \in \mathbb{Z},\ x + y = 24$$

พิสูจน์ข้อความมีเพียงหนึ่งเดียว

บทพิสูจน์. ให้ x เป็นจำนวนเต็ม

ขั้นที่ 1 มีอย่างน้อยหนึ่งตัว เลือก $y = 5 - x$ จะได้ว่า

$$x + y = x + (5 - y) = 5$$

ขั้นที่ 2 มีเพียงตัวเดียว ให้ $y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$ จะได้ว่า $x + y_1 = 24$ และ $x + y_2 = 24$ ฉะนั้น

$$x + y_1 = 24 = x + y_2$$

โดยสมบัติการตัดออกของการบวก สรุปได้ว่า $y_1 = y_2$ □

12.2 **(5 คะแนน)** จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

$$3 \mid n(n+1)(2n+7) \quad \text{ทุก ๆ จำนวนเต็ม } n$$

ข้อเสนอแนะ : ใช้ขั้นตอนวิธีการหาร (Division Algorithm)

บทพิสูจน์. ให้ n เป็นจำนวนเต็ม โดยขั้นตอนวิธีการหารมีจำนวนเต็ม q ซึ่ง

$$n = 3q \quad \text{หรือ} \quad n = 3q+1 \quad \text{หรือ} \quad n = 3q+2$$

- กรณี $n = 3q$ จะได้ว่า

$$n(n+1)(2n+7) = (3q)(3q+1)(2(3q)+7) = 3[q(3q+2)(6q+7)]$$

  ดังนั้น $3 \mid n(n+1)(2n+7)$

- กรณี $n = 3q+1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} n(n+1)(2n+7) &= (3q+1)(3q+1+1)(2(3q+1)+7) \\ &= (3q+1)(3q+2)(6q+2+7) \\ &= (3q+1)(3q+2)(6q+9) \\ &= (3q+1)(3q+2)3(6q+3) \\ &= 3[(3q+1)(3q+2)(6q+3)] \end{aligned}$$

  ดังนั้น $3 \mid n(n+1)(2n+7)$

- กรณี $n = 3q+2$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} n(n+1)(2n+7) &= (3q+2)(3q+2+1)(2(3q+2)+7) \\ &= (3q+2)(3q+3)(6q+4+7) \\ &= (3q+2)3(q+1)(6q+11) \\ &= 3[(3q+2)(q+1)(6q+11)] \end{aligned}$$

  ดังนั้น $3 \mid n(n+1)(2n+7)$

□

13. **(10 คะแนน)** กำหนด $N = abbba$ เป็นจำนวนเต็มห้าหลัก จงหาจำนวนเต็ม N ทั้งหมดที่ $28 \mid N$
ข้อเสนอแนะ : พิจารณา $28 = 4 \cdot 7$

แนวคำตอบ เนื่องจาก $28 = 7 \cdot 4$ และ $\gcd(4, 7) = 1$ พิจารณา

$$7 \mid N \text{ และ } 4 \mid N \text{ จะสรุปได้ว่า } 7 \cdot 4 \mid N$$

กรณี $7 \mid N$ จะได้ว่า

$$7 \quad \text{หาร} \quad 1a + 3b + 2b - 1b - 3a = 4b - 2a = 2(2b - a) \quad \text{ลงตัว}$$

เนื่องจาก $7 \nmid 2$ จะได้ว่า $7 \mid (2b - a)$
เนื่องจาก b เป็นเลขโดด $2b$ มีค่ามากสุด 18 และมีค่าต่ำสุด 0
เนื่องจาก a เป็นเลขโดดที่ไม่ใช่ศูนย์ a มีค่ามากสุด 9 และมีค่าต่ำสุด 1

$$-9 \leq 2b - a \leq 17$$

จะได้ว่า

$$2b - a = 0, \pm 7, 14$$

กรณีที่ $4 \mid N$ พิจารณา $4 \mid ba$ เนื่องจาก $ba = 10b + a$ ฉะนั้น

$$4 \quad \text{หาร} \quad 10b + a = 4(2b) + 2b + a \quad \text{ลงตัว นั่นคือ } 4 \mid (2b + a)$$

พิจารณาจำนวนที่เป็นไปได้ดังตารางต่อไปนี้

$2b - a$	b	a	$2b + a$	$N = abbba$	$28 \mid N$
0	1	2	4	21112	ใช่
0	2	4	8	42224	ใช่
0	3	6	12	63336	ใช่
0	4	8	8	84448	ใช่
7	4	1	9	14441	ไม่ใช่
7	5	3	13	35553	ไม่ใช่
7	6	5	17	56665	ไม่ใช่
7	7	7	21	77777	ไม่ใช่
7	8	9	25	98889	ไม่ใช่
−7	0	7	7	70007	ไม่ใช่
−7	1	9	11	91119	ไม่ใช่
14	8	2	18	28882	ไม่ใช่
14	9	4	22	49994	ไม่ใช่

ดังนั้น N ที่เป็นได้ทั้งหมดมี 4 จำนวนคือ 21112, 42224, 63336 และ 84448 $\#$

14. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

14.1 **(5 คะแนน)** จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

$$6 \mid 2^n(2^{2n}-1) \qquad \text{ทุก ๆ จำนวนนับ } n$$

บทพิสูจน์. ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $6 \mid 2^n(2^{2n}-1)$

ขั้นฐาน : เนื่องจาก $2^1(2^2-1)=6$ ดังนั้น $6 \mid 2^1(2^{2\cdot 1}-1)$ ทำให้ได้ว่า $P(1)$ เป็นจริง

ขั้นอุปนัย : สมมติ $P(k)$ เป็นจริง เมื่อ $k \in \mathbb{N}$ นั่นคือ $6 \mid 2^k(2^{2k}-1)$ มีจำนวนเต็ม q ซึ่ง

$$2^{3k}-2^k = 2^k(2^{2k}-1) = 6q$$

นั่นคือ $2^{3k} = 6q + 2^k$ โดยสมมติฐานจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
2^{k+1}(2^{2(k+1)}-1) &= 2\cdot 2^k(2^{2k+2}-1)\\
&= 2\cdot 2^k(2^2\cdot 2^{2k}-1)\\
&= 2^3\cdot 2^{3k} - 2\cdot 2^k\\
&= 8(6q+2^k) - 2\cdot 2^k\\
&= 48q + 8\cdot 2^k - 2\cdot 2^k\\
&= 48q + 6\cdot 2^k\\
&= 6(8q+2^k)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $6 \mid 2^{k+1}(2^{2(k+1)}-1)$ สรุปได้ว่า $P(k+1)$ เป็นจริง โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์สรุปได้ว่า

$$6 \mid 2^n(2^{2n}-1) \qquad \text{ทุก ๆ จำนวนนับ } n$$

$\square$

14.2 **(5 คะแนน)** ให้ $a,b,c \in \mathbb{Z}$ จงพิสูจน์ว่า

$$\text{ถ้า} \quad a \mid bc \quad \text{และ} \quad \gcd(a+b^2, a^2+b) = 1 \quad \text{แล้ว} \quad a \mid c$$

บทพิสูจน์. ให้ $a,b,c \in \mathbb{Z}$ สมมติว่า $a \mid bc$ และ $\gcd(a+b^2, a^2+b) = 1$ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม x, y และ k ซึ่ง

$$bc = ak \qquad \text{และ} \qquad 1 = (a+b^2)x + (a^2+b)y$$

$$\begin{aligned}
1\cdot c &= c(a+b^2)x + c(a^2+b)y\\
c &= cax + cb^2x + ca^2y + cby\\
&= cax + (bc)bx + ca^2y + (bc)y\\
&= cax + (ak)bx + ca^2y + (ak)y\\
&= a(cx + kbx + cay + ky)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $a \mid c$

$\square$

15. **(10 คะแนน)** จงหาจำนวนเต็ม x, y ที่สอดคล้องสมการ

$$1 = 111x - 191y$$

แนวคำตอบ พิจารณาสมการ

$$\begin{array}{rcllll|rrl}
191 & = & 191(1) & + & 111(0) & & 1 & 0 & R_1 \\
111 & = & 191(0) & + & 111(1) & & 0 & 1 & R_2 \\
\hline
80 & = & 191(1) & + & 111(-1) & & 1 & -1 & R_3 = R_1 - R_2 \\
31 & = & 191(-1) & + & 111(2) & & -1 & 2 & R_4 = R_2 - R_3 \\
18 & = & 191(3) & + & 111(-5) & & 3 & -5 & R_5 = R_3 - 2R_4 \\
13 & = & 191(-4) & + & 111(7) & & -4 & 7 & R_6 = R_4 - R_5 \\
5 & = & 191(7) & + & 111(-12) & & 7 & -12 & R_7 = R_5 - R_6 \\
3 & = & 191(-18) & + & 111(31) & & -18 & 31 & R_8 = R_6 - 2R_7 \\
2 & = & 191(25) & + & 111(-43) & & 25 & -43 & R_9 = R_7 - R_8 \\
1 & = & 191(-43) & + & 111(74) & & -43 & 74 & R_{10} = R_8 - R_9
\end{array}$$

จะได้ว่า $1 = 111(74) - 191(43)$ ดังนั้น $x = 74$ และ $y = 43$ #

16. **(5 คะแนน)** กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนเต็ม

(ก) a และ b เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 10 แต่ไม่เกิน 100

(ข) $\gcd(a,b) \cdot \ell\text{cm}(a,b) = 2 \cdot 3 \cdot 5^3$

(ค) $\ell\text{cm}(a,b) - \gcd(a,b) = 5 \cdot 29$

จงหา**ยกตัวอย่างจำนวนเต็มบวก** a, b ที่สอดคล้องเงื่อนไข (ก)-(ค) อย่างน้อย 1 คู่

แนวคำตอบ ให้ $d = \gcd(a,b)$ และ $m = \ell\text{cm}(a,b)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} dm &= 2 \cdot 3 \cdot 5^3 = 750 \\ m - d &= 5 \cdot 29 = 145 \qquad \therefore m = 145 + d \end{aligned}$$

ฉะนั้น

$$\begin{aligned} d(145 + d) &= 750 \\ d^2 + 145d - 750 &= 0 \\ (d-5)(d+150) &= 0 \end{aligned}$$

ทำให้ได้ว่า $d = 5$ และ $m = 145 + 5 = 150$ พิจารณา

$$\begin{aligned} \gcd(a,b) &= 5 \\ \ell\text{cm}(a,b) &= 150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \end{aligned}$$

พิจารณาค่า a, b จากตารางต่อไปนี้

a	$3 \cdot 5 = 15$	$2 \cdot 5 = 10$	$2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$
b	$2 \cdot 5^2 = 50$	$3 \cdot 5^2 = 75$	$5^2 = 25$
$\gcd(a,b)$	5	5	5
$\ell\text{cm}(a,b)$	$2 \cdot 3 \cdot 5^2$	$2 \cdot 3 \cdot 5^2$	$2 \cdot 3 \cdot 5^2$

ตัวอย่าง a, b คือ $(15, 50)$ และ $(30, 25)$

17. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

17.1 **(5 คะแนน)** ให้ $a, b \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $ab = 3^2 \cdot 2^3$ และ

$$\gcd(2a, 4a + 2b) = 6$$

แล้ว $\ell\text{cm}(a, b)$ มีค่าเท่าใด

แนวคำตอบ โดยการหา ห.ร.ม. แบบยุคลิด จะได้ว่า

$$6 = \gcd(2a, 4a + 2b) = \gcd(2a, 2(2a) + 2b) = \gcd(2a, 2b) = 2 \cdot \gcd(a, b)$$

ฉะนั้น $\gcd(a, b) = 3$ ดังนั้น

$$\ell\text{cm}(a, b) = \frac{ab}{\gcd(a, b)} = \frac{3^2 \cdot 2^3}{3} = 3 \cdot 2^3 = 24 \quad \#$$

17.2 **(5 คะแนน)** ถ้า**จำนวนตัวหาร**ของ

$$N = (6! + 5! + 4!)^m$$

มีทั้งหมด 160 ตัว จงหาค่าของ m

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned} 6! + 5! + 4! &= 6 \cdot 5 \cdot 4! + 5 \cdot 4! + 4! \\ &= 4!(30 + 5 + 1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 36 = 2^5 \cdot 3^3 \\ N &= (2^5 \cdot 3^3)^m = 2^{5m} \cdot 3^{3m} \end{aligned}$$

จำนวนตัวหารของ N คือ

$$\begin{aligned} (5m + 1)(3m + 1) &= 160 \\ 15m^2 + 8m + 1 &= 160 \\ 15m^2 + 8m - 159 &= 0 \\ (m - 3)(15m + 53) &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $m = 3 \quad \#$

18. **(10 คะแนน)** ให้ p, q เป็น**จำนวนเฉพาะ**ซึ่ง $p < q$ โดยที่

$$(p+q) \mid (p^2 + 6q^2 + 7^3 + 7pq)$$

จงหา p, q ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned} p^2 + 6q^2 + 7^3 + 7pq &= (p^2 + 2pq + q^2) + 5q^2 + 5pq + 7^3 \\ &= (p+q)^2 + 5q(p+q) + 7^3 \end{aligned}$$

ดังนั้น $(p+q) \mid 7^3$ จะได้ว่า $p + q = 1, 7, 7^2, 7^3 = 1, 7, 49, 343$
เนื่องจาก p, q เป็นจำนวนเฉพาะซึ่ง $p < q$ และ $p + q$ เป็นจำนวนคี่ ดังนั้น $p = 2$ และ q เป็นจำนวนคี่ จะได้ว่า

$$q = 5, 47, 341$$

เนื่องจาก $341 = 11 \cdot 31$ ดังนั้น p, q ที่เป็นไปได้ทั้งหมดคือ

p	2	2
q	5	47