ANSWERS FOR QUIZ 1 : MED1402 CALCULUS FOR TEACHER I

TOPIC	Limit and Continuity
QUIZ TIME	Fri 19 Feb 2016, 3rd Week, Semester 2/2015
BY TEACHER	Thanatyod Jampawai, Ph.D., Faculty of Education, Suan Sunandha Rajabhat University

---

1. จงหาลิมิตต่อไปนี้

1.1 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^3-64}{x^2-16}$

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^3-64}{x^2-16}=\lim_{x\to 4}\frac{x^3-4^3}{x^2-4^2}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x^2+4x+4^2)}{(x-4)(x+4)}=\lim_{x\to 4}\frac{x^2+4x+16}{x+4}=\frac{4^2+4(4)+16}{4+4}=6 \quad \#$$

1.2 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x+5}-2}{1-\sqrt{-x}}$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x+5}-2}{1-\sqrt{-x}} &= \lim_{x\to -1}\frac{(\sqrt{x+5}-2)}{(1-\sqrt{-x})}\cdot\frac{(\sqrt{x+5}+2)}{(\sqrt{x+5}+2)}\cdot\frac{(1+\sqrt{-x})}{(1+\sqrt{-x})}=\lim_{x\to -1}\frac{[(\sqrt{x+5})^2-2^2](1+\sqrt{-x})}{[1^2-(\sqrt{-x})^2](\sqrt{x+5}+2)}\\ &= \lim_{x\to -1}\frac{[x+5-4](1+\sqrt{-x})}{[1-(-x)](\sqrt{x+5}+2)}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(1+\sqrt{-x})}{(1+x)(\sqrt{x+5}+2)}\\ &= \lim_{x\to -1}\frac{1+\sqrt{-x}}{\sqrt{x+5}+2}=\frac{1+\sqrt{-(-1)}}{\sqrt{-1+5}+2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \quad \#\end{aligned}$$

2. จงหาลิมิตต่อไปนี้

2.1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2|x|-x}{x^3-|x|}$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2|x|-x}{x^3-|x|}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^3-x}{x^3-x}=\lim_{x\to 0^+}1=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2|x|-x}{x^3-|x|}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2(-x)-x}{x^3-(-x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x^3-x}{x^3+x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-(x^3+x)}{x^3+x}=\lim_{x\to 0^+}(-1)=-1$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2|x|-x}{x^3-|x|}$ ไม่มีลิมิต #

2.2 $\lim\limits_{x\to 0}\tan^2 x\cdot\sin\dfrac{7}{x}$

เนื่องจาก $-1\le\sin\frac{7}{x}\le 1$ ทุกๆ $x\neq 0$

ดังนั้น $-\tan^2 x\le\tan^2 x\cdot\sin\frac{7}{x}\le\tan^2 x$ (นำ $\tan^2 x\ge 0$ คูณตลอด)

เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 0}(-\tan^2 x)=0$ และ $\lim\limits_{x\to 0}\tan^2 x=0$ ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0}\tan^2 x\cdot\sin\dfrac{7}{x}=0$ #

3. จงหาลิมิตต่อไปนี้

3.1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{\sin 5x}$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 5x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\cos 3x}\cdot\frac{1}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 3x}\cdot\frac{\sin 3x}{x}\cdot\frac{x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 3x}\cdot\frac{3\sin 3x}{3x}\cdot\frac{5x}{5\sin 5x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 3x}\cdot 3\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)\cdot\frac{1}{5}\left(\frac{5x}{\sin 5x}\right)=\frac{1}{1}\cdot 3(1)\cdot\frac{1}{5}(1)=\frac{3}{5} \quad \#\end{aligned}$$

3.2 $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2+\sin^2 x}{1-\cos x}$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x^2+\sin^2 x}{1-\cos x} &= \lim_{x\to 0}\frac{(x^2+\sin^2 x)}{(1-\cos x)}\cdot\frac{(1+\cos x)}{(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{(x^2+\sin^2 x)(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{(x^2+\sin^2 x)(1+\cos x)}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{\sin^2 x}+\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x}\right)(1+\cos x)\\ &= \lim_{x\to 0}\left(\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2+1\right)(1+\cos x) = (1^2+1)(1+1) = 4 \qquad \#\end{aligned}$$

4. จงหาลิมิตต่อไปนี้ (ถ้าลิมิตมีค่าเป็นอนันต์ต้องแสดงโดยใช้ทฤษฎีบท)

4.1 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x^2-5x+1}{(x+1)(2x-1)^2}$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2-5x+1}{(x+1)(2x-1)^2} &= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^3}+\frac{2x^2}{x^3}-\frac{5x}{x^3}+\frac{1}{x^3}}{\frac{(x+1)(2x-1)^2}{x^3}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{\frac{(x+1)}{x}\frac{(2x-1)^2}{x^2}}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{\left(\frac{x+1}{x}\right)\left(\frac{2x-1}{x}\right)^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(2-\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1+0-0+0}{(1+0)(2-0)^2} = \frac{1}{4} \qquad \#\end{aligned}$$

4.2 $\lim_{x\to 3^+}\left(\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{4}{x^2-2x-3}\right)$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3^+}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{4}{x^2-2x-3}\right) &= \lim_{x\to 3^+}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{4}{(x+1)(x-3)}\right) = \lim_{x\to 3^+}\left(\frac{1(x-3)}{(x+1)(x-3)}+\frac{4}{(x+1)(x-3)}\right)\\ &= \lim_{x\to 3^+}\frac{x+1}{(x+1)(x-3)} = \lim_{x\to 3^+}\frac{1}{x-3}\end{aligned}$$

เนื่องจาก (1) $\lim_{x\to 3^+}(x-3)=0$ และ (2) $x-3>0$ เมื่อ $x>3$ ดังนั้น

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{1}{x-3} = +\infty \qquad \#$$

5. กำหนดให้ $f(x)=\begin{cases} ax^2+1 & \text{เมื่อ } x<2\\ 2x+b & \text{เมื่อ } 2\le x<3\\ 3x-1 & \text{เมื่อ } x\ge 3\end{cases}$ ถ้าฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่บนช่วง $(0,3)$ จงหาค่าของ $f(4a-b)$

เนื่องจาก f ต่อเนื่องบนช่วง $(0,3)$ ดังนั้น f ต่อเนื่องที่จุด $x=2$ จะได้ว่า $\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^+}f(x)=f(2)$ แล้ว

$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^-}(ax^2+1)=a(2)^2+1=4a+1 \quad \text{และ} \quad \lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^+}(2x+b)=2(2)+b=4+b$$

ดังนั้น $4a+1=4+b$ ทำให้ได้ว่า $4a-b=3$ จึงสรุปได้ว่า

$$f(4a-b)=f(3)=3(3)-1=8 \qquad \#$$

EXTRA กำหนดให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามกำลังสองซึ่ง

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{x-1} = -1 \qquad \text{และ} \qquad f(2) = 0$$

จงหาค่าของลิมิต $\displaystyle \lim_{x\to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3}$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{x-1} = 2$ ดังนั้น $f(1) = 0$ นั้นคือฟังก์ชัน f มี 1 เป็นรากคำตอบ และมี 2 เป็นรากคำตอบของ f ด้วยเพราะ $f(2) = 0$ เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันพหุนามกำลังสอง จะได้ว่า

$$f(x) = a(x-1)(x-2)$$

พิจารณา

$$-1 = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{a(x-1)(x-2)}{x-1} = \lim_{x\to 1} a(x-2) = -a$$

ดังนั้น $a = 1$ ทำให้ได้ว่า

$$f(x) = (x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$$

แล้วค่าลิมิตของ

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} &= \lim_{x\to 3} \frac{(x^2-3x+2)-((3)^2-3(3)+2)}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x^2-3x+2)-2}{x-3} \\ &= \lim_{x\to 3} \frac{x^2-3x}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{x(x-3)}{x-3} = \lim_{x\to 3} x = 3 \qquad \# \end{aligned}$$

ANSWERS FOR QUIZ 2 : MED1402 CALCULUS FOR TEACHER I

TOPIC	Derivative, Chain rule and Linear approximation
QUIZ TIME	Fri 4 Mar 2016, 5th Week, Semester 2/2015
BY TEACHER	Thanatyod Jampawai, Ph.D., Faculty of Education, Suan Sunandha Rajabhat University

---

1. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1.1 $y = e^{x^2}\sin 3x + \tan x \sin^2 x + \ln(\sec x)$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= e^{x^2}(\sin 3x)' + (e^{x^2})'\sin 3x + (\tan x)'\sin^2 x + \tan x(\sin^2 x)' + \frac{1}{\sec x}(\sec x)' \\ &= e^{x^2}3\cos 3x + 2xe^{x^2}\sin 3x + \sec^2 x\sin^2 x + 2\sin x\cos x\tan x + \frac{1}{\sec x}\sec x\tan x \\ &= e^{x^2}(3\cos 3x + 2x\sin 3x) + \sin^2 x(\sec^2 x + 2) + \tan x \qquad \#\end{aligned}$$

1.2 $y = 2^{\sin x} + \arctan(e^x) + \frac{\cos 2x}{\ln x} + \sqrt{1+\arcsin x}$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 2^{\sin x}(\sin x)'\ln 2 + \frac{1}{1+(e^x)^2}(e^x)' + \frac{\ln x(\cos 2x)' - \cos 2x(\ln x)'}{[\ln x]^2} + \frac{1}{2}(1+\arcsin x)^{-\frac{1}{2}}(1+\arcsin x)' \\ &= 2^{\sin x}\cos x\ln 2 + \frac{e^x}{1+e^{2x}} + \frac{-2\sin 2x\ln x - \frac{1}{x}\cos 2x}{\ln^2 x} + \frac{1}{2\sqrt{1+\arcsin x}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= 2^{\sin x}\cos x\ln 2 + \frac{e^x}{1+e^{2x}} - \frac{2x\sin 2x\ln x + \cos 2x}{x\ln^2 x} + \frac{1}{2\sqrt{1+\arcsin x}\sqrt{1-x^2}} \qquad \#\end{aligned}$$

2. จงหาอนุพันธ์ของ $y = \sqrt{e^{x^2}\sin^5 x\frac{\ln^2 x(1+\cos x)^4\sqrt{\sqrt{x}}}{(\arctan x)^4(1-\ln x)^3}}$

$$\begin{aligned}\ln y &= \frac{1}{2}\left[x^2 + 5\ln(\sin x) + 2\ln(\ln x) + 4\ln(1+\cos x) + \frac{1}{4}\ln x - 4\ln(\arctan x) - 3\ln(1-\ln x)\right] \\ \frac{d\ln y}{dx} &= \frac{1}{2}\left[2x + 5\frac{\cos x}{\sin x} + 2\frac{1}{x\ln x} + 4\frac{-\sin x}{1+\cos x} + \frac{1}{4x} - 4\frac{1}{\arctan x}\frac{1}{(1+x^2)} - 3\frac{1}{1-\ln x}\left(-\frac{1}{x}\right)\right] \\ \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2}\left[2x + 5\cot x + \frac{2}{x\ln x} - \frac{4\sin x}{1+\cos x} + \frac{1}{4x} - \frac{4}{(1+x^2)\arctan x} + \frac{3}{x(1-\ln x)}\right] \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{y}{2}\left[2x + 5\cot x + \frac{2}{x\ln x} - \frac{4\sin x}{1+\cos x} + \frac{1}{4x} - \frac{4}{(1+x^2)\arctan x} + \frac{3}{x(1-\ln x)}\right] \qquad \#\end{aligned}$$

3. จงหาสมการเส้นสัมผัสของกราฟ $x^2 + y^2 = xe^{xy} + x\cos xy + 1$ ที่จุด $(0,1)$

$$\begin{aligned}(x^2+y^2)' &= (xe^{xy} + x\cos xy + 1)' \\ 2x + 2yy' &= x(e^{xy})' + (x)'e^{xy} + x(\cos xy)' + (x)'\cos xy \\ 2x + 2yy' &= xe^{xy}(xy'+y) + e^{xy} + x(-\sin xy)(xy'+y) + \cos xy\end{aligned}$$

แทน $x = 0$ และ $y = 1$ เพื่อหา y' จะได้

$$0 + 2y' = 0 + 1 + \cos 0 \qquad \text{ดังนั้น} \qquad y' = 1$$

สมการเส้นสมการเส้นสัมผัสของกราฟนี้ที่จุด $(0,1)$ คือ $y - 1 = 1(x-0)$ หรือ $y = x + 1$ #

4. กำหนดให้ $y = f(\frac{x-1}{x+1})$ และ $\frac{dy}{dx} = 1$ เมื่อ $x = 1$ จงหา $f'(0)$

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= f'\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \cdot \left(\frac{x-1}{x+1}\right)' \\
\frac{dy}{dx} &= f'\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \cdot \left(\frac{(x+1)(1)-(x-1)(1)}{(x+1)^2}\right) \\
\frac{dy}{dx} &= f'\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \cdot \frac{2}{(x+1)^2}
\end{aligned}$$

แทน $x = 1$ จะได้

$$1 = f'(0) \cdot \frac{2}{4}$$

ดังนั้น $f'(0) = 2$ #

5. จะประมาณค่าของ $\sqrt[3]{-7.999}$ โดยใช้ค่าเชิงอนุพันธ์
ให้ $f(x) = \sqrt[3]{x}$ และ $x = -8,\ \Delta x = 0.001$ จากสูตรการประมาณค่าเชิงเส้น

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + \Delta x f'(x) = \sqrt[3]{x} + \Delta x \cdot \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}
f(-7.999) = f(-8+0.001) &\approx f(-8) + (0.001)f'(-8) \\
&= \sqrt[3]{-8} + (0.001) \cdot \frac{1}{3}(-8)^{-\frac{2}{3}} \\
&= -1.9999167
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\sqrt[3]{-7.999} \approx -1.9999167$ #

EXTRA ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่ x และ $g(x) \neq 0$ จงแสดงว่า

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

บทพิสูจน์

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f}{g}(x+h) - \frac{f}{g}(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x+h)} + \frac{f(x)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{g(x+h)}\left[f(x+h) - f(x)\right] + f(x)\left[\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}\right]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{g(x)}{g(x)g(x+h)}\left[f(x+h) - f(x)\right] - f(x)\left[\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x+h)g(x)}\right]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{g(x)\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] - f(x)\left[\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]}{g(x)g(x+h)} \\
&= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}
\end{aligned}$$

□

ANSWERS FOR QUIZ 3 : MED1402 CALCULUS FOR TEACHER I

TOPIC	Extreme values and Curve
QUIZ TIME	Fri 11 Mar 2016, 6th Week, Semester 2/2015
BY TEACHER	Thanatyod Jampawai, Ph.D., Faculty of Education, Suan Sunandha Rajabhat University

---

1. จงวิเคราะห์กราฟและร่างกราฟ $y = \frac{x^2}{x-1}$ (5 คะแนน)

   - โดเมนของ f คือ $\mathbb{R} - \{1\}$
   - จุดตัดแกน X คือ $(0, 0)$
   - เส้นกำกับแนวดิ่งคือ $x = 1$ เนื่องจาก $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2}{x-1} = \pm\infty$
   - จัดรูป $y = \frac{x^2}{x-1} = x + \frac{1}{x-1}$ ดังนั้น

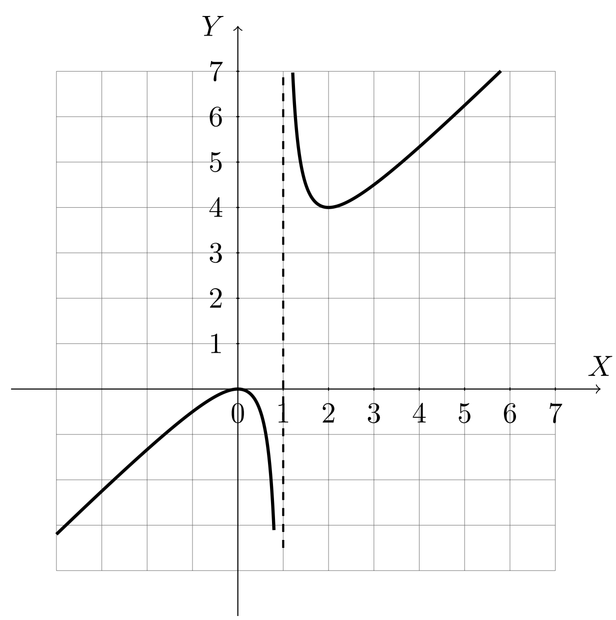
     $$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} = 0$$

     ดังนั้นจุดวิกฤตคือ $x = 0, 2$ ฟังก์ชันนี้เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ และเป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(0, 1) \cup (1, 2)$
   - หาจุดเปลี่ยนเว้าจาก

     $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{(x-1)^3}$$

     ไม่มีจุดเปลี่ยนเว้า ฟังก์ชันนี้มีความเว้าอยู่บนบนช่วง $(1, \infty)$ และมีความเว้าอยู่ล่างบนช่วง $(-\infty, 1)$

f'	$+$		$-$		$-$		$+$
		0		1		2	
f''	$-$		$-$		$+$		$+$



จุด $(0, 0)$ เป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์ และจุด $(2, 4)$ เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์

2. กำหนดให้ $f(x) = xe^x$ จงตอบคำถามต่อไปนี้ (3 คะแนน)

   2.1 จงหาจุดวิกฤกต ช่วงเพิ่ม และช่วงลด

   2.2 จงหาจุดเปลี่ยนเว้า ช่วงเว้าบน ช่วงเว้าล่าง

   2.3 จงหาค่าสุดขีดโดยใช้การทดสอบอนุพันธ์อันอับสอง (second derivative test)

พิจารณาอนุพันธ์อันอับหนึ่ง

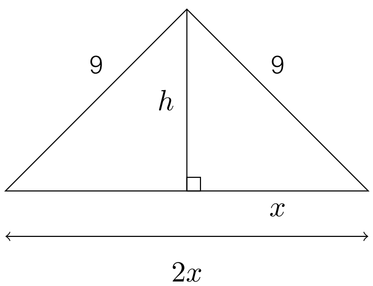
$$f'(x) = xe^x + e^x = e^x(x+1) = 0$$

จะได้ $x = -1$ เป็นจุดวิกฤต f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-1, \infty)$ และ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-\infty, -1)$ #
พิจารณาอนุพันธ์อันอับสอง

$$f''(x) = xe^x + e^x + e^x = e^x(x+2) = 0$$

จะได้ $x = -2$ เป็นจุดเปลี่ยนเว้า f เป็นฟังก์ชันที่มีความเว้าอยู่บนบนช่วง $(-2, \infty)$ และ f เป็นฟังก์ชันที่มีความเว้าอยู่ล่างบนช่วง $(-\infty, -2)$ #
ทดสอบอนุพันธ์อันอับสองสำหรับจุดวิกฤต $x = -1$ จะได้ $f''(-1) = e^{-1}(-1+2) = e^{-1} > 0$ ดังนั้นจุดนี้ให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์และมีค่าต่ำสุดเท่ากับ $f(-1) = -\frac{1}{e}$ #

3. จงหาพื้นที่มากที่สุดของสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ถ้าด้านที่เท่ากันทั้งสองด้านยาวเท่ากับ 9 ฟุต (2 คะแนน)



$$h = \sqrt{81 - x^2}$$

ให้ $2x$ เป็นความยาวด้านที่เหลือ และ A เป็นฟังก์ชันพื้นที่ ดังนั้น

$$A(x) = \frac{1}{2}(2x)(h) = x\sqrt{81 - x^2}$$

$$A'(x) = x\frac{1}{2}(81 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) + \sqrt{81 - x^2} = \frac{81 - 3x^2}{\sqrt{81 - x^2}}$$

ดังนั้นจุดวิกฤตคือ $x = -3\sqrt{3}$ และ $x = 3\sqrt{3}$ เนื่องจาก x เป็นความยาวของด้านสามเหลี่ยมดังนั้น ใช้จุดวิกฤต $x = 3\sqrt{3}$ จากพิจารณาเครื่องหมายของความชันจะได้ว่าจุดนี้ให้ค่าสูงสุด ดังนั้น

$$A(3\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}\sqrt{81 - (3\sqrt{3})^2} = 27\sqrt{2}$$

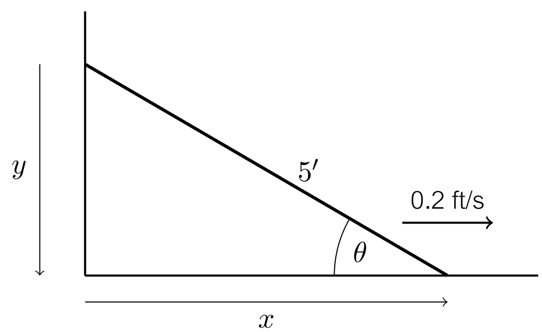
ดังนั้นพื้นที่มากที่สุดของสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มีด้านที่เท่ากันทั้งสองด้านยาวเท่ากับ 9 ฟุตเท่ากับ $27\sqrt{2}$ ตารางฟุต #

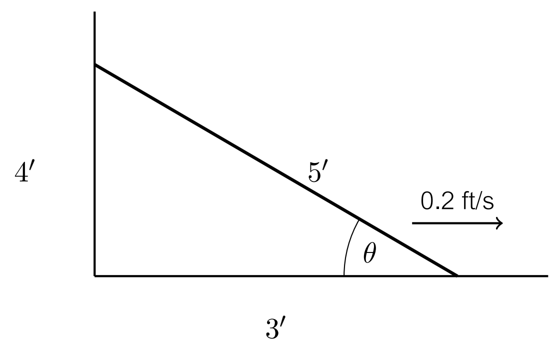
ANSWERS FOR QUIZ 4 : MED1402 CALCULUS FOR TEACHER I

TOPIC Relative rate and l'Hospital's law
QUIZ TIME Fri 18 Mar 2016, 7th Week, Semester 2/2015
BY TEACHER Thanatyod Jampawai, Ph.D., Faculty of Education, Suan Sunandha Rajabhat University

---

1. บันไดยาว 5 ฟุต วางพิงกำแพงไว้ ถ้าฐานบันไดกำลังเลื่อนออกจากกำแพงด้วยอัตราเร็ว 0.2 ฟุตต่อวินาที ขณะที่ยอดอยู่สูงจากพื้น 4 ฟุต จงหา





1.1 จงหาว่าปลายบนของบันไดเลื่อนลงด้วยอัตราเร็วเท่าใด (2 คะแนน)

1.2 จงหาอัตราเร็วของมุมที่บันไดทำกับพื้นดิน หรือ $\frac{d\theta}{dt}$ (2 คะแนน)

กำหนดให้ x เป็นระยะตามแนวราบ (ตามแกน X) เป็น $+$ เมื่อเคลื่อนที่ไปทางขวา เป็น $-$ เมื่อเคลื่อนที่ไปทางซ้าย
y เป็นระยะตามแนวดิ่ง (ตามแกน Y) เป็น $+$ เมื่อเคลื่อนที่ขึ้น เป็น $-$ เมื่อเคลื่อนที่ลง
θ เป็นมุมของบันไดกับแนวราบ เป็น $+$ เมื่อเคลื่อนที่ตามเข็มนาฬิกา เป็น $-$ เมื่อเคลื่อนที่ทวนเข็มนาฬิกา

จากโจทย์จะได้ว่า $\frac{dx}{dt} = 0.2$ ft/s และ

$$x^2 + y^2 = 5^2 \qquad \text{และ} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

จะได้ว่า

$$\frac{d}{dt}(x^2+y^2) = \frac{d}{dt}(25)$$
$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

ขณะที่ $y = 4$ ft จะได้ $x = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ ft ดังนั้น $2(3)(0.2) + 2(4)\frac{dy}{dt} = 0$ นั่นคือ $\frac{dy}{dt} = -\frac{3}{20}$ ft/s

ขณะที่ปลายอยู่สูงจากพื้น 4 ฟุตเท่ากับ ปลายบนของบันไดเลื่อนลงด้วยอัตราเร็วเท่ากับ $\frac{3}{20}$ ฟุตต่อวินาที #

จากสมการ $\tan\theta = \frac{y}{x}$ จัดรูปจะได้ $x\tan\theta = y$ แล้ว

$$\frac{d}{dt}(x\tan\theta) = \frac{d}{dt}(y)$$
$$x\sec^2\theta\frac{d\theta}{dt} + \tan\theta\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}$$

ขณะที่ $y = 4$ ft จะได้ $x = 3$ ft และ $\tan\theta = \frac{4}{3}$ ทำให้ได้ว่า $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta = 1 + \frac{16}{9} = \frac{25}{9}$ แล้ว

$$5(\frac{25}{9})\frac{d\theta}{dt} + \frac{3}{4}(0.2) = -\frac{3}{20}$$
$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{27}{1250}$$

ขณะที่ปลายอยู่สูงจากพื้น 4 ฟุตเท่ากับ มุมที่บันไดทำกับพื้นดินลดลงด้วยอัตราเร็วเท่ากับ $\frac{27}{1250}$ เรเดียนต่อวินาที #

2. จงหาลิมิตต่อไปนี้ (ข้อละ 2 คะแนน)

2.1 $\lim_{x \to 0} \frac{x \sin x + x^2 + \ln(2+x)}{e^x + x^2 - \cos x}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \sin x + x^2 + \ln(2+x)}{e^x + x^2 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x + x\cos x + 2x + \frac{1}{2+x}}{e^x + 2x + \sin x} \qquad (I.F.\,\frac{0}{0},\ \text{l'Hospital's law})$$
$$= \frac{1}{2} \qquad \#$$

2.2 $\lim_{x \to \infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$

$$\lim_{x \to \infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = \lim_{x \to \infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \qquad (I.F.\infty \cdot 0 \text{ จัดรูป } I.F.\frac{0}{0})$$
$$= \lim_{x \to \infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}(-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}} \qquad (\text{l'Hospital's law})$$
$$= \lim_{x \to \infty} e^{\frac{1}{x}} \qquad (\text{จัดรูป})$$
$$= 1 \qquad \#$$

3. จงหาลิมิตของ $\lim_{x \to 0} (\tan x)^{\sin x}$ (2 คะแนน)

ให้ $y = (\tan x)^{\sin x}$ แล้ว $\ln y = \sin x \ln(\tan x)$

$$\lim_{x \to 0} \ln y = \lim_{x \to 0} \sin x \ln(\tan x) \qquad (I.F.0 \cdot \infty)$$
$$\ln\left(\lim_{x \to 0} y\right) = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(\tan x)}{\csc x} \qquad (I.F.\frac{\infty}{\infty})$$
$$\ln\left(\lim_{x \to 0} y\right) = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\tan x}\sec^2 x}{-\csc x \cot x} \qquad (\text{l'Hospital's law})$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x \sec^2 x}{-\tan x \cot x}$$
$$= \lim_{x \to 0} -\sin x \sec^2 x = 0$$
$$\lim_{x \to 0} y = e^0$$
$$\lim_{x \to 0} (\tan x)^{\sin x} = 1 \qquad \#$$

ANSWERS FOR QUIZ 5 : MED1402 CALCULUS FOR TEACHER I

TOPIC	Definite and Indefinite inetegral
QUIZ TIME	Fri 1 Apr 2016, 9th Week, Semester 2/2015
BY TEACHER	Thanatyod Jampawai, Ph.D., Faculty of Education, Suan Sunandha Rajabhat University

---

1. จงหาอินทริกรัลไม่จำกัดเขตต่อไปนี้

1.1 $\displaystyle\int \left(x^3 + e^x - \cos x + 2^x + \frac{2}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = \frac{x^4}{4} + e^x - \sin x + \frac{2^x}{\ln 2} - 2\sqrt{x} + c \quad \#$

1.2 $\displaystyle\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}\, dx = \int \frac{x^2+2x+1}{x^{\frac{1}{2}}}\, dx = \int \left(x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right) dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + c$

2. จงหาอินทริกรัลของ $\displaystyle\int \frac{\sin(e^{-x})}{e^x}\, dx$

ให้ $u = e^{-x}$ ดังนั้น $du = -e^{-x}dx$ แล้ว

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin(e^{-x})}{e^x}\, dx &= \int \frac{\sin u}{e^x}\, e^x du = \int \sin u \, du \\ &= -\cos u + c = -\cos(e^{-x}) + c \quad \#\end{aligned}$$

3. จงหาค่าของ $\displaystyle\int_2^5 \frac{x+1}{\sqrt{x-1}}\, dx$

ให้ $u = x - 1$ ดังนั้น $du = dx$ แล้ว

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{\sqrt{x-1}}\, dx &= \int \frac{u+2}{\sqrt{u}}\, du = \int \left(u^{\frac{1}{2}} + 2u^{-\frac{1}{2}}\right) du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + 4u^{\frac{1}{2}} + c \\ &= \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + 4(x-1)^{\frac{1}{2}} + c \\ \int_2^5 \frac{x+1}{\sqrt{x-1}}\, dx &= \left[\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + 4(x-1)^{\frac{1}{2}}\right]_1^5 \\ &= \left[\frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}} + 4(4)^{\frac{1}{2}}\right] - \left[\frac{2}{3} + 4\right] = \frac{28}{3} \quad \#\end{aligned}$$

4. กำหนดให้ $f(x) = x^3$ บน $[0,1]$ และ $P = \{0, 0.1, 0.5, 0.6, 1\}$ จงหา

4.1 $L(P,f)$

$$\begin{aligned}L(P,f) &= f(0)[0.1-0] + f(0.1)[0.5-0.1] + f(0.5)[0.6-0.5] + f(0.6)[1-0.6] \\ &= 0^3(0.1) + (0.1)^3(0.4) + (0.5)^3(0.1) + (0.6)^3(0.4) \\ &= 0 + 0.004 + 0.0125 + 0.0864 \\ &= 0.0993 \quad \#\end{aligned}$$

4.2 $U(P,f)$

$$\begin{aligned}U(P,f) &= f(0.1)[0.1-0] + f(0.5)[0.5-0.1] + f(0.6)[0.6-0.5] + f(1)[1-0.6] \\ &= (0.1)^3(0.1) + (0.5)^3(0.4) + (0.6)^3(0.1) + (1)^3(0.4) \\ &= 0.0001 + 0.0300 + 0.2160 + 0.4000 \\ &= 0.4517 \quad \#\end{aligned}$$

5. จงหาอนุพันธ์ของ

5.1 $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{\arctan t}{1+t^2}\, dt = \frac{\arctan x}{1+x^2}$

5.2 $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_{\frac{1}{x}}^{x^2} \sqrt{\sin t}\, dt = \frac{d}{dx}\left[-\int_1^{\frac{1}{x}} \sqrt{\sin t}\, dt + \int_1^{x^2} \sqrt{\sin t}\, dt\right] = \frac{1}{x^2}\sqrt{\sin\frac{1}{x}} + 2x\sqrt{\sin x^2} \quad \#$

ANSWERS FOR QUIZ 6 : MED1402 CALCULUS FOR TEACHER I

TOPIC	Integration techniques
QUIZ TIME	Fri 22 Apr 2016, 11th Week, Semester 2/2015
BY TEACHER	Thanatyod Jampawai, Ph.D., Faculty of Education, Suan Sunandha Rajabhat University