

# Quiz 1 : MAC1303 แคลคูลัส 2

หัวข้อ ลำดับ และอนุกรม คะแนน 10 คะแนน

เวลา วันพฤหัสบดี ที่ 6 กุมภาพันธ์ 2563 สัปดาห์ที่ 3 ปีการศึกษา 2/2562

ผู้สอน ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนชัย จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

ชื่อ-สกุล.....รหัสนักศึกษา.....หมู่เรียน.....

---

## จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

1. (3 คะแนน) ลำดับ  $\left\{ \frac{n \sin(n\pi)}{n+1} \right\}$  เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก

2. (3 คะแนน) จงทดสอบอนุกรม  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^n}$  ว่าเป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

3. (4 คะแนน) อนุกรม  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(n+1)^3}$

เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ หรืออนุกรมลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข หรืออนุกรมลู่ออก

# เฉลย Quiz 1 : MAC1303 แคลคูลัส 2

หัวข้อ ลำดับ และอนุกรม คะแนน 10 คะแนน

เวลา วันพฤหัสบดี ที่ 6 กุมภาพันธ์ 2563 ัปดาห์ที่ 3 ปีการศึกษา 2/2562

ผู้สอน ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ณัชชศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

1. (3 คะแนน) ลำดับ  $\left\{ \frac{n \sin(n\pi)}{n+1} \right\}$  เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ จะเห็นได้ว่า  $\sin(n\pi) = 0$  ทุก ๆ  $n \in \mathbb{N}$  ทำให้ได้ว่า

$$\frac{n \sin(n\pi)}{n+1} = 0$$

ดังนั้น

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sin(n\pi)}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$$

สรุปได้ว่า  $\left\{ \frac{n \sin(n\pi)}{n+1} \right\}$  เป็นลำดับลู่เข้า

2. (3 คะแนน) จงทดสอบอนุกรม  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^n}$  ว่าเป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ ให้  $a_n = \frac{n}{n^n}$  จะได้ว่า

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{n(n+1)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \left( \frac{n}{n+1} \right)^n$$

พิจารณา  $f(x) = \left( \frac{x}{x+1} \right)^x$  เมื่อ  $x \geq 1$  จะได้ว่า

$$\ln f(x) = x \ln \left( \frac{x}{x+1} \right)$$

แล้ว

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left( \frac{x}{x+1} \right) \quad (I.F. \infty \cdot 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left( \frac{x}{x+1} \right)}{\frac{1}{x}} \quad (I.F. \frac{0}{0})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left( \frac{x+1}{x} \right) \cdot \frac{1}{(x+1)^2}}{-\frac{1}{x^2}} \quad (L'H)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{x}{x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

ฉะนั้น

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{1}{e}$$

ดังนั้น

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \left( \frac{n}{n+1} \right)^n = 0 \cdot \frac{1}{e} = 0 < 1$$

ดังนั้น  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^n}$  เป็นอนุกรมลู่เข้า

3. (4 คะแนน) อนุกรม  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(n+1)^3}$

เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสลับบัวร์นีย์ หรืออนุกรมลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข หรืออนุกรมลู่เข้าออก

วิธีทำ พิจารณา  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n \ln n}{(n+1)^3} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^3}$

ให้  $a_n = \frac{n}{(n+1)^3}$  เลือก  $b_n = \frac{1}{n^2}$  จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(n+1)^3} \cdot n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{(n+1)^3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^3 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right)^3 = 1 > 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^3}$  เป็นอนุกรมลู่เข้า

สรุปได้ว่า  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(n+1)^3}$  เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสลับบัวร์นีย์

## Quiz 2 : MAC1303 แคลคูลัส 2

หัวข้อ อนุกรมกำลัง คะแนน 10 คะแนน

เวลา วันพฤหัสบดี ที่ 13 กุมภาพันธ์ 2563 สัปดาห์ที่ 5 ปีการศึกษา 2/2562

ผู้สอน ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ฉันทยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

ชื่อ-สกุล.....รหัสนักศึกษา.....หมู่เรียน.....

---

จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

1. (3 คะแนน) จงหาค่าและช่วงแห่งการลู่ออกของอนุกรม  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{4^n \cdot n}$
2. (3 คะแนน) จงหาอนุกรมกำลังของฟังก์ชันผลบวก  $f(x) = \frac{9x}{(x+3)^2}$
3. (4 คะแนน) จงหาอนุกรมเทย์เลอร์ของ  $f(x) = \frac{1}{2-x}$  รอบจุด 1

## เฉลย Quiz 2 : MAC1303 แคลคูลัส 2

หัวข้อ อนุกรมกำลัง      คะแนน 10 คะแนน

เวลา วันพฤหัสบดี ที่ 13 กุมภาพันธ์ 2563 สัปดาห์ที่ 5      ปีการศึกษา 2/2562

ผู้สอน ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนชัย จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

1. (3 คะแนน) จงหาคำจำกัดและช่วงแห่งการลู่เข้าของอนุกรม  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{4^n \cdot n}$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x-1)^{2n+2}}{4^{n+1}(n+1)} \cdot \frac{4^n \cdot n}{(x-1)^{2n}} \right| &= |x-1|^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{4(n+1)} \\ &= |x-1|^2 \cdot \frac{1}{4} < 1 \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |x-1|^2 &< 4 \\ |x-1| &< 2 \\ -2 < x-1 < 2 \\ -1 < x < 3 \end{aligned}$$

ตรวจสอบการลู่เข้าเมื่อ  $x = -1$  จะได้ว่า

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{4^n \cdot n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^{2n}}{4^n \cdot n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{ลู่ออกเนื่องจาก } p = 1 \leq 1$$

และ  $x = 3$  จะได้ว่า

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{4^n \cdot n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{4^n \cdot n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{ลู่ออกเนื่องจาก } p = 1 \leq 1$$

สรุปได้ว่า  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{4^n \cdot n}$  มีรัศมีแห่งการลู่เข้าคือ 1 และช่วงแห่งการลู่เข้า  $(-1, 3)$       #

2. (3 คะแนน) จงหาอนุกรมกำลังของฟังก์ชันผลบวก  $f(x) = \frac{9x}{(x+3)^2}$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+3} &= \frac{1}{3(1+\frac{x}{3})} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{3}\right)^n && \text{เมื่อ } \left|-\frac{x}{3}\right| < 1 \\ \frac{1}{x+3} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} x^n && \text{เมื่อ } |x| < 3 \\ \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x+3} \right) &= \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} x^n && \text{เมื่อ } |x| < 3 \\ -\frac{1}{(x+3)^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} n x^{n-1} && \text{เมื่อ } |x| < 3 \\ \frac{9x}{(x+3)^2} &= -9x \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} n x^{n-1} && \text{เมื่อ } |x| < 3 \\ &= -9 \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 3^{-n+1} n x^n && \text{เมื่อ } |x| < 3 \end{aligned}$$

3. (4 คะแนน) จงหาอนุกรมเทย์เลอร์ของ  $f(x) = \frac{1}{2-x}$  รอบจุด 1

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned} f(x) &= (2-x)^{-1} & f(1) &= 1 = 0! \\ f'(x) &= (-1)(2-x)^{-2}(-1) & f'(1) &= (-1)1(-1) = 1! \\ f''(x) &= (-2)(2-x)^{-3}(-1) & f''(1) &= (-2)1(-1) = 2! \\ f'''(x) &= 2(-3)(2-x)^{-4}(-1) & f'''(1) &= 2(-3)1(-1) = 3! \\ &\vdots & & \\ f^{(n)}(x) &= (-2)(-3)\cdots(-n)(2-x)^{-(n+1)}(-1) & f^{(n)}(1) &= n! \end{aligned}$$

ดังนั้นอนุกรมเทย์เลอร์ของ  $f(x) = \frac{1}{2-x}$  รอบจุด 1 คือ

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!} (x-1)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n!} (x-1)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (x-1)^n \quad \# \end{aligned}$$