Quiz 1 : MAP1403 คณิตศาสตร์ 2

หัวข้อ ลำดับ และอนุกรม **คะแนน** 10 คะแนน

เวลา วันพุธ ที่ 23 มกราคม 2562 สัปดาห์ที่ 3 **ปีการศึกษา** 2/2561

ผู้สอน ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

ชื่อ–สกุล...**รหัสนักศึกษา**...................................**หมู่เรียน**.................

จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

1. **(3 คะแนน)** ลำดับ $\left\{\sqrt{n^2+2}-n+2\right\}$ เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก
2. **(3 คะแนน)** จงทดสอบอนุกรม $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!}{3^n\cdot n!}$ ว่าเป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก
3. **(4 คะแนน)** อนุกรม $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln n}{n^2}$

   เป็นอนุกรมลู้เข้าแบบสัมบูรณ์ หรืออนุกรมลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข หรืออนุกรมลู่ออก

เฉลย Quiz 1 : MAP1403 คณิตศาสตร์ 2

หัวข้อ ลำดับ และอนุกรม **คะแนน** 10 คะแนน

เวลา วันพุธ ที่ 23 มกราคม 2562 สัปดาห์ที่ 3 **ปีการศึกษา** 2/2561

ผู้สอน ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. **(3 คะแนน)** ลำดับ $\left\{\sqrt{n^2+2}-n+2\right\}$ เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+2}-n+2 &= \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2}-(n-2)\right)\cdot\frac{\sqrt{n^2+2}+(n-2)}{\sqrt{n^2+2}+(n-2)} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2-(n-2)^2}{\sqrt{n^2+2}+(n-2)} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2-(n^2-4n+4)}{\sqrt{n^2(1+\frac{2}{n^2})}+n(1-\frac{2}{n})} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{4n-2}{n\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}+n(1-\frac{2}{n})} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n(4-\frac{2}{n})}{n\left(\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}+1-\frac{2}{n}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}+1-\frac{2}{n}} \\
&= \frac{4-0}{\sqrt{1+0}+1-0} = \frac{4}{2} = 2 \qquad \#
\end{aligned}$$

2. **(3 คะแนน)** จงทดสอบอนุกรม $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!}{3^n\cdot n!}$ ว่าเป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ ให้ $a_n = \dfrac{(2n+1)!}{3^n\cdot n!}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n+3)!}{3^{n+1}\cdot(n+1)!}\cdot\frac{3^n\cdot n!}{(2n+1)!}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)(2n+2)(2n+1)!}{3^n\cdot 3\cdot(n+1)n!}\cdot\frac{3^n\cdot n!}{(2n+1)!} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)(2n+2)}{3(n+1)} \\
&= \infty
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!}{3^n\cdot n!}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

3. **(4 คะแนน)** อนุกรม $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln n}{n^2}$

เป็นอนุกรมลู้เข้าแบบสัมบูรณ์ หรืออนุกรมลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข หรืออนุกรมลู่ออก

วิธีทำ พิจารณา $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n\ln n}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$

ให้ $a_n = \dfrac{\ln n}{n^2}$ เลือก $b_n = \dfrac{1}{n^{1.5}}$ จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^2}\cdot n^{1.5} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$$

ให้ $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ เมื่อ $x \geq 1$ พิจารณา

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}} && \left(I.F.\frac{\infty}{\infty}\right)\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} && (\text{ Hospital's Law })\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x}} = 0\end{aligned}$$

ทำให้ได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}} = 0$$

เนื่องจาก $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1.5}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า $(p = 1.5 > 1)$

ดังนั้น $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

สรุปได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln n}{n^2}$ เป็นอนุกรมลู้เข้าแบบสัมบูรณ์

Quiz 2 : MAP1403 คณิตศาสตร์ 2

หัวข้อ อนุกรมกำลัง และอนุกรมเทย์เลอร์ **คะแนน** 10 คะแนน

เวลา วันพุธ ที่ 6 กุมภาพันธ์ 2562 สัปดาห์ที่ 5 **ปีการศึกษา** 2/2561

ผู้สอน ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

ชื่อ–สกุล..**รหัสนักศึกษา**....................................**หมู่เรียน**..................

จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

1. **(3 คะแนน)** จงหารัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้าของอนุกรม $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3x)^{2n}}{n+1}$

2. **(3 คะแนน)** จงหาอนุกรมกำลังของฟังก์ชันผลบวก $f(x)=\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2$

3. **(4 คะแนน)** จงหาอนุกรมเทย์เลอร์ของ $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ รอบจุด 1

เฉลย Quiz 2 : MAP1403 คณิตศาสตร์ 2

หัวข้อ อนุกรมกำลัง และอนุกรมเทย์เลอร์ **คะแนน** 10 คะแนน
เวลา วันพุธ ที่ 6 กุมภาพันธ์ 2562 สัปดาห์ที่ 5 **ปีการศึกษา** 2/2561
ผู้สอน ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. **(3 คะแนน)** จงหารัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้าของอนุกรม $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3x)^{2n}}{n+1}$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(3x)^{2n+2}}{n+2}\cdot\frac{n+1}{(3x)^{2n}}\right| &= |3x|^2\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}\\ &= |3x^2|<1\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}|3x|&<1\\ -1<3x&<1\\ -\frac{1}{3}<x&<\frac{1}{3}\end{aligned}$$

ตรวจสอบการลู่เข้าเมื่อ $x=\frac{1}{3}$ และ $x=-\frac{1}{3}$ จะได้ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ ให้ $a_n=\dfrac{1}{n+1}$ และ $b_n=\dfrac{1}{n}$ พิจารณา

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1>0$$

เนื่องจาก $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}$ ลู่ออก ดังนั้น ลู่ออก $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}$

สรุปได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3x)^{2n}}{n+1}$ มีรัศมีแห่งการลู่เข้าคือ $\dfrac{1}{3}$ และช่วงแห่งการลู่เข้า $\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$ #

2. **(3 คะแนน)** จงหาอนุกรมกำลังของฟังก์ชันผลบวก $f(x)=\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2$

วิธีทำ พิจารณา

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n \qquad \text{เมื่อ } |-x|<1$$

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \qquad \text{เมื่อ } |x|<1$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+x}\right)=\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \qquad \text{เมื่อ } |x|<1$$

$$-\frac{1}{(1+x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n x^{n-1} \qquad \text{เมื่อ } |x|<1$$

$$\frac{x^2}{(1+x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} n x^{n+1} \qquad \text{เมื่อ } |x|<1$$

3. **(4 คะแนน)** จงหาอนุกรมเทย์เลอร์ของ $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ รอบจุด 1

วิธีทำ พิจารณา

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^{-2} & f(1) &= 1 = (-1)^0 0! \\
f'(x) &= (-2)x^{-3} & f'(1) &= (-2) = (-1)^1 1! \\
f''(x) &= (-2)(-3)x^{-4} & f'(1) &= (-2)(-3) = (-1)^2 3! \\
f'''(x) &= (-2)(-3)(-4)x^{-5} & f'(1) &= (-2)(-3)(-4) = (-1)^3 4! \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= (-2)(-3)\cdots(-n-1)x^{-n-2} & f^{(n)}(1) &= (-1)^n (n+1)!
\end{aligned}
$$

ดังนั้นอนุกรมเทย์เลอร์ของ $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ รอบจุด 1 คือ

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)!}{n!}(x-1)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(x-1)^n \qquad \#
\end{aligned}
$$

Quiz 3 : MAP1403 คณิตศาสตร์ 2

หัวข้อ ระบบพิกัดเชิงขั้ว ลิมิตของฟังก์ชันหลายตัวแปร และอนุพันธ์ย่อย **คะแนน** 10 คะแนน

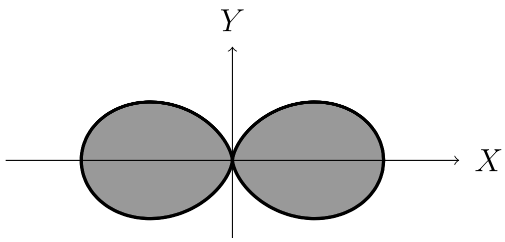
เวลา วันพุธ ที่ 20 มีนาคม 2562 สัปดาห์ที่ 11 **ปีการศึกษา** 2/2561

ผู้สอน ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

ชื่อ–สกุล..**รหัสนักศึกษา**....................................**หมู่เรียน**..................

---

1. **(4 คะแนน)** จงหา**พื้นที่ที่แรเงา**ดังรูป เมื่อ $r = 2 + 2\cos 2\theta$



$r = 2 + 2\cos 2\theta$

2. **(3 คะแนน)** จงตรวจสอบว่า**ลิมิตต่อไปนี้มีค่าหรือไม่** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 + y^2}$

3. **(3 คะแนน)** จงหา**อนุพันธ์ย่อย**ของฟังก์ชัน $f(x, y) = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$

เฉลย Quiz 3 : MAP1403 คณิตศาสตร์ 2

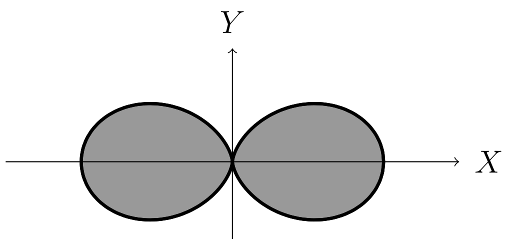
หัวข้อ ระบบพิกัดเชิงขั้ว ลิมิตของฟังก์ชันหลายตัวแปร และอนุพันธ์ย่อย **คะแนน** 10 คะแนน

เวลา วันพุธ ที่ 20 มีนาคม 2562 สัปดาห์ที่ 11 **ปีการศึกษา** 2/2561

ผู้สอน ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. **(4 คะแนน)** จงหา**พื้นที่ที่แรเงา**ดังรูป เมื่อ $r = 2 + 2\cos 2\theta$



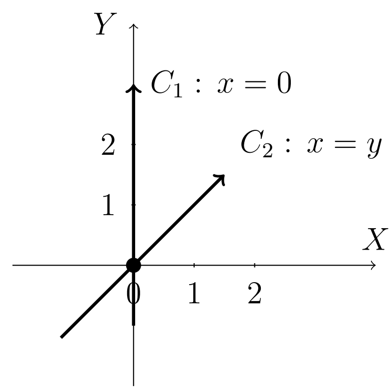
$r = 2 + 2\cos 2\theta$

วิธีทำ ให้ A เป็นพื้นที่ที่แรเงา จากรูปจะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
A &= 2\int_0^{\pi} \frac{1}{2} r^2 \, d\theta \\
&= \int_0^{\pi} (2 + 2\cos 2\theta)^2 \, d\theta \\
&= \int_0^{\pi} 4 + 8\cos 2\theta + 4\cos^2 2\theta \, d\theta \\
&= \int_0^{\pi} 4 + 8\cos 2\theta + 2(1 + \cos 4\theta) \, d\theta \\
&= \int_0^{\pi} 6 + 8\cos 2\theta + 2\cos 4\theta \, d\theta \\
&= \left[6\theta + 4\sin 2\theta + \frac{1}{2}\sin 4\theta \right]_0^{\pi} \\
&= 6\pi \quad \#
\end{aligned}
$$

2. **(3 คะแนน)** จงตรวจสอบว่า**ลิมิตต่อไปนี้มีค่าหรือไม่** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2}$

วิธีทำ พิจารณาเส้นโค้งที่ผ่านจุด $(0,0)$ คือ $C_1 : x = 0$ และ $C_2 : y = x$



บน $C_1 :\ x = 0$ จะได้

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{0+0+y^2}{0+y^2} = 1$$

บน $C_2 :\ y = x$ จะได้

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+x(x)+x^2}{x^2+x^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2}{2x^2} = \frac{3}{2}$$

เนื่องจากลิมิตบน C_1 และ C_2 มีค่าไม่เท่ากัน ดังนั้น $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2}$ ไม่มีค่า #

3. **(3 คะแนน)** จงหา**อนุพันธ์ย่อย**ของฟังก์ชัน $f(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

วิธีทำ อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f เทียบตัวแปร x

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot y(-x^{-2}) = -\frac{y}{x^2+y^2} \qquad \#$$

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f เทียบตัวแปร y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad \#$$

Quiz4 : MAP1403 คณิตศาสตร์ 2

หัวข้อ กฎลูกโซ่ อนุพันธ์อันดับสูง และอินทิกรัลสองชั้นบนโดเมนทั่วไป **คะแนน** 10 คะแนน

เวลา วันพุธ ที่ 3 เมษายน 2562 สัปดาห์ที่ 13 **ปีการศึกษา** 2/2561

ผู้สอน ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

ชื่อ-สกุล...**รหัสนักศึกษา**...................................**หมู่เรียน**.................

---

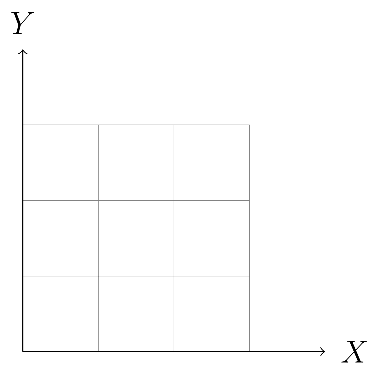
1. **(4 คะแนน)** กำหนดให้ $u = xy$ โดยที่

$$x = r\sqrt{\cos\theta} \quad \text{และ} \quad y = r\sqrt{\sin\theta}$$

จงหาค่า $\dfrac{\partial u}{\partial \theta}$ เมื่อ $(r,\theta) = \left(1, \dfrac{\pi}{4}\right)$

2. **(3 คะแนน)** จงใช้ค่าเชิงอนุพันธ์ประมาณค่าของ $\dfrac{1.001}{0.999}$

3. **(3 คะแนน)** จงเปลี่ยนลำดับการอินทิกรัลของ $\displaystyle\int_0^1 \int_{1-x}^{1-x^2} f(x,y)\, dydx$



เฉลย Quiz4 : MAP1403 คณิตศาสตร์ 2

หัวข้อ กฎลูกโซ่ อนุพันธ์อันดับสูง และอินทิกรัลสองชั้นบนโดเมนทั่วไป **คะแนน** 10 คะแนน
เวลา วันพุธ ที่ 3 เมษายน 2562 สัปดาห์ที่ 13 **ปีการศึกษา** 2/2561
ผู้สอน ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. **(4 คะแนน)** กำหนดให้ $u = xy$ โดยที่

$$x = r\sqrt{\cos\theta} \quad \text{และ} \quad y = r\sqrt{\sin\theta}$$

จงหาค่า $\dfrac{\partial u}{\partial \theta}$ เมื่อ $(r,\theta) = \left(1, \dfrac{\pi}{4}\right)$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial \theta} &= \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta} \\
&= y\cdot\frac{r}{\sqrt{\cos\theta}}\cdot(-\sin\theta) + x\cdot\frac{r}{\sqrt{\sin\theta}}\cdot\cos\theta \\
&= r\sqrt{\sin\theta}\cdot\frac{r}{\sqrt{\cos\theta}}\cdot(-\sin\theta) + r\sqrt{\cos\theta}\cdot\frac{r}{\sqrt{\sin\theta}}\cdot\cos\theta \\
\therefore \quad \frac{\partial u}{\partial \theta}\left(1, \frac{\pi}{4}\right) &= 1\sqrt{\sin\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\cos\frac{\pi}{4}}}\cdot(-\sin\frac{\pi}{4}) + 1\sqrt{\cos\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\sin\frac{\pi}{4}}}\cdot\cos\frac{\pi}{4} \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad \#
\end{aligned}$$

2. **(3 คะแนน)** จงใช้ค่าเชิงอนุพันธ์ประมาณค่าของ $\dfrac{1.001}{0.999}$

วิธีทำ ให้ $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$ จะได้ว่า $f_x(x,y) = \dfrac{1}{y}$ และ $f_y(x,y) = -\dfrac{x}{y^2}$
กำหนดให้ $x = 1$, $y = 1$ $dx = 0.001$ และ $dy = -0.001$ ดังนั้น

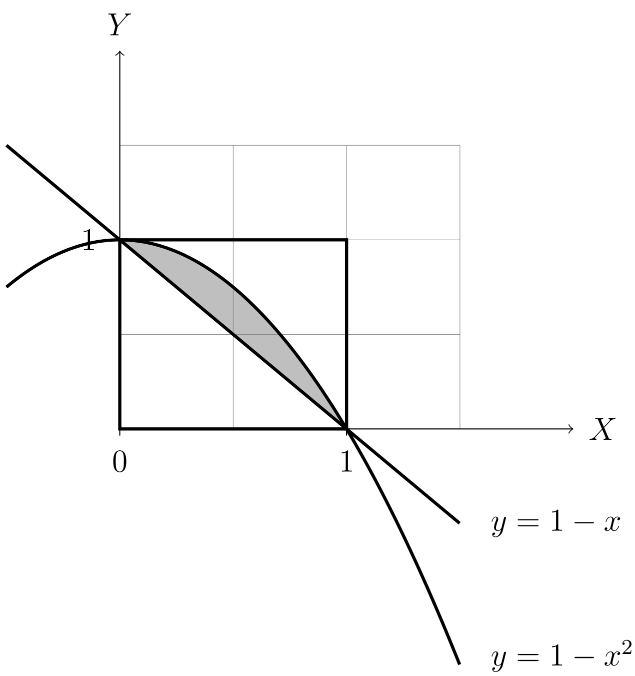
$$\begin{aligned}
\frac{1.001}{0.999} &= f(1.001, 9.999) \\
&= f(1+0.001, 1-0.001) \\
&\approx f(1,1) + f_x(1,1)\cdot 0.001 + f_y(1,1)\cdot(-0.001) \\
&= 1 + 1(0.001) + (-1)(-0.001) \\
&= 1 + 0.001 + 0.001 \\
&= 1.002 \quad \#
\end{aligned}$$

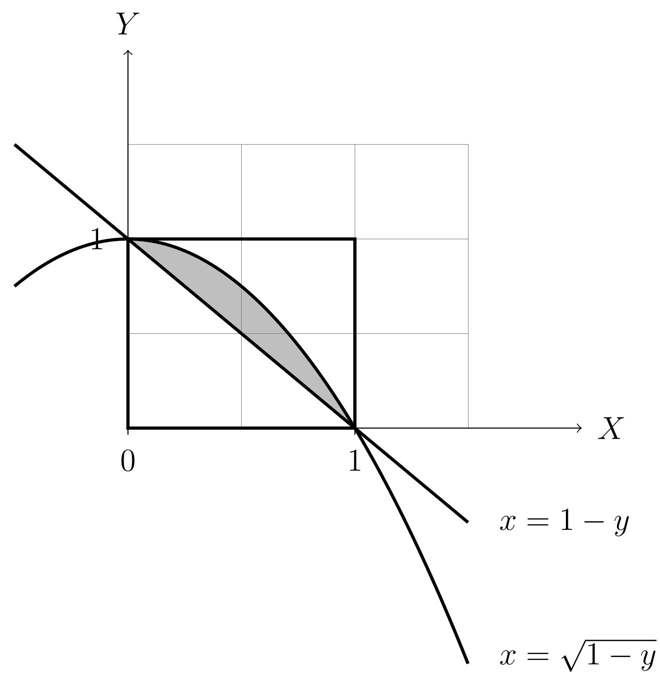
3. **(3 คะแนน)** จงเปลี่ยนลำดับการอินทิกรัลของ $\displaystyle\int_0^1 \int_{1-x}^{1-x^2} f(x,y)\,dydx$

วิธีทำ พิจารณาอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วย $x=0$ ถึง $x=1$ และ $y=1-x$ ถึง $y=1-x^2$
จุดตัดกราฟ $y=1-x$ ถึง $y=1-x^2$หาได้จาก

$$
\begin{aligned}
1-x &= 1-x^2 \\
x^2 - x &= 0 \\
x(x-1) &= 0 \\
x &= 0, 1
\end{aligned}
$$

จุดตัดคือ $(1,0)$ และ $(0,1)$





จากกราฟจะได้ว่า

$$\int_0^1 \int_{1-x}^{1-x^2} f(x,y)\,dydx = \int_0^1 \int_{1-y}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)\,dxdy \qquad \#$$