Quiz 1 : MAP2403 พีชคณิตนามธรรม

หัวข้อ ทฤษฎีจำนวนและกรุป **คะแนน** 10 คะแนน

เวลา วันพฤหัสบดี ที่ 29 สิงหาคม 2562 สัปดาห์ที่ 3 1/2562

ผู้สอน ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

ชื่อ–สกุล..**รหัสนักศึกษา**....................................**หมู่เรียน**...................

จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

1. **(3 คะแนน)** ให้ a, b เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่า

$$\text{ถ้า} \quad a \mid b^2 \quad \text{และ} \quad \gcd(a,b) = 1 \quad \text{แล้ว} \quad a \mid b$$

2. **(4 คะแนน)** นิยามการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{Z}$ โดย

$$a * b = a + b + 11$$

จงแสดงว่า $(\mathbb{Z}, *)$ เป็นกรุปอาบีเลียน

3. **(3 คะแนน)** จงหาตัวผกผันการคูณของ $\overline{16}$ ใน $\mathbb{Z}_{61}^*$

เฉลย Quiz 1 : MAP2403 พีชคณิตนามธรรม

หัวข้อ ทฤษฎีจำนวนและกรุป **คะแนน** 10 คะแนน

เวลา วันพฤหัสบดี ที่ 29 สิงหาคม 2562 สัปดาห์ที่ 3 1/2562

ผู้สอน ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. **(3 คะแนน)** ให้ a, b เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่า

$$\text{ถ้า} \quad a \mid b^2 \quad \text{และ} \quad \gcd(a,b) = 1 \quad \text{แล้ว} \quad a \mid b$$

บทพิสูจน์. ให้ ให้ a, b เป็นจำนวนเต็ม

สมมติว่า $a \mid b^2$ และ $\gcd(a,b) = 1$ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม x, y และ c ซึ่ง

$$b^2 = ac \quad \text{และ} \quad 1 = ax + by$$

นั่นคือ

$$\begin{aligned} b \cdot 1 = b(ax + by) &= abx + b^2y \\ b &= abx + (ac)y = a(bx + cy) \end{aligned}$$

ดังนั้น $a \mid b$ $\square$

2. **(4 คะแนน)** นิยามการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{Z}$ โดย

$$a * b = a + b + 11$$

จงแสดงว่า $(\mathbb{Z}, *)$ เป็นกรุปอาบีเลียน

บทพิสูจน์. ให้ $a, b, c \in \mathbb{Z}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} a * (b * c) &= a * (b + c + 11) \\ &= a + (b + c + 11) + 11 \\ &= (a + b + 11) + c + 11 \\ &= (a * b) + c + 11 \\ &= (a * b) * c \\ a * b = a + b + 11 &= b + a + 11 = b * a \end{aligned}$$

ดังนั้น $*$ มีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่มและสลับที่ จะเห็นได้ว่า

$$a * (-11) = a + (-11) + 11 = a = -11 + a + 11 = -11 * a$$

นั้นคือ -11 เป็นเอกลักษณ์ใน $\mathbb{Z}$ และสำหรับ $a \in \mathbb{Z}$ แล้ว

$$a * (-22 - a) = a + (-22 - a) + 11 = -11 = (-22 - a) + a + 11 = (-22 - a) * a$$

ฉะนั้น $-22 - a$ เป็นตัวผกผันของ a

สรุปได้ว่า $(\mathbb{Z}, *)$ เป็นกรุปอาบีเลียน $\square$

3. **(3 คะแนน)** จงหาตัวผกผันการคูณของ $\overline{16}$ ใน $\mathbb{Z}_{61}^*$

วิธีทำ พิจารณาเมตริกซ์ในการหา $\gcd(16, 61) = 1$

$$\begin{array}{rrrl} 61 & 1 & 0 & R_1 \\ 16 & 0 & 1 & R_2 \\ 13 & 1 & -3 & R_3 = R_1 - 3R_2 \\ 3 & -1 & 4 & R_4 = R_2 - R_3 \\ 1 & 5 & -19 & R_5 = R_3 - 4R_4 \end{array}$$

ดังนั้น $1 = 61(5) + 16(-19)$ จะได้ว่า

$$\bar{1} = \overline{61(5) + 16(-19)} = \overline{16} \cdot \overline{-19}$$

ดังนั้น $\overline{-19} = \overline{42}$ เป็นตัวผกผันการคูณของ $\overline{16}$ ใน $\mathbb{Z}_{61}^*$

Quiz 2 : MAP2403 พีชคณิตนามธรรม

หัวข้อ สมบัติของกรุป กรุปการเรียงสับเปลี่ยน และกรุปย่อย **คะแนน** 10 คะแนน

เวลา วันพฤหัสบดี ที่ 12 กันยายน 2562 สัปดาห์ที่ 5 1/2562

ผู้สอน ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

ชื่อ-สกุล...**รหัสนักศึกษา**..................................**หมู่เรียน**..................

จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

1. **(3 คะแนน)** กำหนดให้ G เป็นกรุป โดยมี e เป็นเอกลักษณ์ จงแสดงว่า

$$\text{ถ้า} \quad x^2 = e \quad \text{ทุก ๆ } x \in G \quad \text{แล้ว} \quad G \quad \text{เป็นกรุปอาบีเลียน}$$

2. **(3 คะแนน)** ใน S_{100} กำหนดให้

$$\alpha = (1\ 2)(2\ 3)(3\ 4)\dots(99\ \ 100)$$

จงหาอันดับ (order) ของ α

3. **(4 คะแนน)** กำหนดให้

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : ad - bc = 1 \right\}$$

จงแสดงว่า H เป็นกรุปย่อยของ $GL_2(\mathbb{R})$

เฉลย Quiz 2 : MAP2403 พีชคณิตนามธรรม

หัวข้อ สมบัติของกรุป กรุปการเรียงสับเปลี่ยน และกรุปย่อย **คะแนน** 10 คะแนน
เวลา วันพฤหัสบดี ที่ 12 กันยายน 2562 สัปดาห์ที่ 5 1/2562
ผู้สอน ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

1. **(3 คะแนน)** กำหนดให้ G เป็นกรุป โดยมี e เป็นเอกลักษณ์ จงแสดงว่า

$$\text{ถ้า} \quad x^2 = e \quad \text{ทุก ๆ } x \in G \quad \text{แล้ว} \quad G \quad \text{เป็นกรุปอาบีเลียน}$$

บทพิสูจน์. ให้ G เป็นกรุป สมมติว่า $x^2 = e$ ทุก ๆ $x \in G$
ให้ $a, b \in G$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
ab &= (ab)e \\
&= (ab)(ba)^2 \\
&= (ab)(ba)(ba) \\
&= (abba)(ba) \\
&= ab^2a(ba) \\
&= aea(ba) \\
&= a^2(ba) \\
&= e(ba) \\
&= ba
\end{aligned}$$

□

2. **(3 คะแนน)** ใน S_{100} กำหนดให้

$$\alpha = (1\ 2)(2\ 3)(3\ 4)\ldots(99\ \ 100)$$

จงหาอันดับ (order) ของ α
วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\alpha &= (1\ 2)(2\ 3)(3\ 4)\ldots(99\ \ 100) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 99 & 100 \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 100 & 1 \end{pmatrix} \\
&= (1\ 2\ 3\ \ldots\ 99\ \ 100)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\circ(\alpha) = 100$ #

3. **(4 คะแนน)** กำหนดให้

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : ad - bc = 1 \right\}$$

จงแสดงว่า H เป็นกรุปย่อยของ $GL_2(\mathbb{R})$

วิธีทำ ถ้า $a = d = 1$, $c = b = 0$ แล้ว $ad - bc = 1(1) - 0(0) = 1$ ดังนั้น $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ เป็นสมาชิกใน H

ให้ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ เป็นสมาชิกใน H นั่นคือ $ad - bc = 1$ และ $xw - zy = 1$ แล้ว

$$AB = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + bz & ay + bw \\ cx + dz & cy + dw \end{bmatrix}$$

พิจารณา

$$\begin{aligned}
(ax + bz)(cy + dw) - (cx + dz)(ay + bw) &= axcy + axdw + bzcy + bzdw - cxay - cxbw - dzay - dzbw \\
&= axdw + bzcy - cxbw - dzay \\
&= (axdw + dzay) + (bzcy - cxbw) \\
&= ad(xw - zy) - bc(xw - zy) \\
&= (ad - bc)(xw - zy) = 1 \cdot 1 = 1
\end{aligned}$$

ดังนั้น $AB \in H$ จากนั้นพิจารณา A^{-1} นั่นคือ

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

จะเห็นว่า $ad - (-c)(-d) = ad - cd = 1$ ดังนั้น $A^{-1} \in H$ สรุปได้ว่า $H \leq GL_2(\mathbb{R})$

Quiz 3 : MAP2403 พีชคณิตนามธรรม

หัวข้อ ฟังก์ชันสมสัณฐาน และริง

เวลา วันพฤหัสบดี ที่ 24 พฤศจิกายน 2562 สัปดาห์ที่ 11 1/2562

ผู้สอน ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

ชื่อ–สกุล...**รหัสนักศึกษา**..................................**หมู่เรียน**..................

จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

1. **(3 คะแนน)** ให้ $\varphi : (\mathbb{C}^*, \cdot) \to (\mathbb{R}^+, \cdot)$ นิยามโดย

$$\varphi(a+bi) = \sqrt{a^2+b^2} \qquad \text{เมื่อ } a,b \in \mathbb{R}$$

จงแสดงว่า φ เป็น **ฟังก์ชันสมสัณฐาน (homomorphism)**

2. **(3 คะแนน)** ให้ R เป็นริงซึ่งมี 1 และ $a,b \in R$ สมมติว่า $1+ab$ เป็นหน่วย (unit) นั่นคือมี $x \in R$ ซึ่ง

$$(1+ab)x = 1 = (1+ab)x$$

จงแสดงว่า $(1+ba)t = 1 = t(1+ba)$ เมื่อ $t = 1 - bxa$

3. **(4 คะแนน)** ให้ $a,b \in \mathbb{R}$ นิยาม

$$\begin{aligned} a \oplus b &= a+b \\ a \odot b &= 2ab \end{aligned}$$

จงตรวจสอบว่า $(R, \oplus, \odot)$ เป็นริงสลับที่ซึ่งมีหนึ่ง หรือไม่

เฉลย Quiz 3 : MAP2403 พีชคณิตนามธรรม

หัวข้อ ฟังก์ชันสมสัณฐาน และริง

เวลา วันพฤหัสบดี ที่ 24 พฤศจิกายน 2562 สัปดาห์ที่ 11 1/2562

ผู้สอน ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

1. **(3 คะแนน)** ให้ $\varphi : (\mathbb{C}^*, \cdot) \to (\mathbb{R}^+, \cdot)$ นิยามโดย

$$\varphi(a+bi) = \sqrt{a^2+b^2} \qquad \text{เมื่อ } a, b \in \mathbb{R}$$

จงแสดงว่า φ เป็น **ฟังก์ชันสมสัณฐาน (homomorphism)**

วิธีทำ ให้ $a+bi, c+di \in \mathbb{C}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\varphi((a+bi)(c+di)) &= \varphi((ac-bd)+(ad+bc)i) \\
&= \sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2} \\
&= \sqrt{a^2c^2-2acbd+b^2d^2+a^2d^2+2adbc+b^2c^2} \\
&= \sqrt{a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2} \\
&= \sqrt{a^2(c^2+d^2)+b^2(d^2+c^2)} \\
&= \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \\
&= \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2} \\
&= \varphi(a+bi)\varphi(c+di)
\end{aligned}$$

ดังนั้น φ เป็นฟังก์ชันสมสัณฐาน

2. **(3 คะแนน)** ให้ R เป็นริงซึ่งมี 1 และ $a, b \in R$ สมมติว่า $1+ab$ เป็นหน่วย (unit) นั่นคือมี $x \in R$ ซึ่ง

$$(1+ab)x = 1 = (1+ab)x$$

จงแสดงว่า $(1+ba)t = 1 = t(1+ba)$ เมื่อ $t = 1-bxa$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
(1+ba)t &= (1+ba)(1-bxa) \\
&= 1-bxa+ba-babxa \\
&= 1+ba-b(1+ab)xa \\
&= 1+ba-b[(1+ab)x]a \\
&= 1+ba-b1a \\
&= 1
\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}
t(1+ba) &= (1-bxa)(1+ba) \\
&= 1+ba-bxa-bxaba \\
&= 1+ba-bx(1+ab)a \\
&= 1+ba-b[x(1+ab)]a \\
&= 1+ba-b1a \\
&= 1
\end{aligned}$$

3. **(4 คะแนน)** ให้ $a, b \in \mathbb{R}$ นิยาม

$$a \oplus b = a + b$$
$$a \odot b = 2ab$$

จงตรวจสอบว่า $(R, \oplus, \odot)$ เป็นริงสลับที่ซึ่งมีหนึ่ง หรือไม่

บทพิสูจน์. ให้ $a, b, c \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} a \oplus (b \oplus c) &= a \oplus (b + c) \\ &= a + (b + c) = (a + b) + c \\ &= (a \oplus b) + c = (a \oplus b) \oplus c \\ a \oplus b &= a + b = b + a = b \oplus a \end{aligned}$$

ดังนั้น $\oplus$ มีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่มและสลับที่ จะเห็นได้ว่า

$$a \oplus 0 = a + 0 = a = 0 + a = 0 \oplus a$$

นั้นคือ 0 เป็นเอกลักษณ์ใน $\mathbb{R}$ และสำหรับ $a \in \mathbb{R}$ แล้ว

$$a \oplus (-a) = a + (-a) - 1 = 1 = (-a) + a - 1 = (-a) \oplus a$$

ฉะนั้น $-a$ เป็นตัวผกผันของ a สรุปได้ว่า $(\mathbb{R}, \oplus)$ เป็นกรุปอาบีเลียน พิจารณา

$$a \odot (b \odot c) = a \odot (2bc) = 2a(2bc) = 2(2ab)c = (2ab) \odot c = (a \odot b) \odot c$$

และ

$$\begin{aligned} a \odot b &= 2ab = 2ba = b \odot a \\ \frac{1}{2} \odot a &= 2\left(\frac{1}{2}a\right) = a = 2\left(a\frac{1}{2}\right) = a \odot \frac{1}{2} \end{aligned}$$

นั่นคือ $(\mathbb{R}, \odot)$ เป็นกึ่งกรุปที่มีสมบัติสลับที่และมีหนึ่งคือ $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} a \odot (b \oplus c) &= a \odot (b + c) = 2a(b + c) = 2ab + 2ac = (a \odot b) \oplus (a \odot c) \\ (b \oplus c) \odot a &= (b + c) \odot a = 2(b + c)a = 2ba + 2ca = (b \odot a) \oplus (c \odot a) \end{aligned}$$

สรุปได้ว่า $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ เป็นริงสลับที่ซึ่งมีหนึ่ง

$\square$

Quiz 4 : MAP2403 พีชคณิตนามธรรม

หัวข้อ ริงย่อย ไอดีส ริงสมสัณฐาน และโดเมนเชิงจำนวนเต็ม

เวลา วันพฤหัสบดี ที่ 8 พฤศจิกายน 2562 สัปดาห์ที่ 13 1/2562

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

ชื่อ–สกุล...**รหัสนักศึกษา**..................................**หมู่เรียน**..................

จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

1. **(4 คะแนน)** จงตรวจสอบว่า S เป็น **ริงย่อย** (subring) **ไอดีลขวา ไอดีลซ้าย** หรือ **ไอดีล** (ideal) ของ $GL_2(\mathbb{R})$ หรือไม่ เมื่อ

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & x \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

2. **(3 คะแนน)** ให้ $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_6$ กำหนดโดย $\varphi(x) = (4\bar{x})^3$
   จงตรวจสอบว่า φ เป็น**ริงสาทิสสัณฐาน** (ring homomorphism) หรือไม่

3. **(3 คะแนน)** จงหา**ตัวหารศูนย์** (zero divisor) ทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_9$

เฉลย Quiz 4 : MAP2403 พีชคณิตนามธรรม

หัวข้อ ริงย่อย ไอดีส ริงสมสัณฐาน และโดเมนเชิงจำนวนเต็ม

เวลา วันพฤหัสบดี ที่ 8 พฤศจิกายน 2562 สัปดาห์ที่ 13 1/2562

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

1. **(4 คะแนน)** จงตรวจสอบว่า S เป็น **ริงย่อย (subring)** **ไอดีลขวา** **ไอดีลซ้าย** หรือ **ไอดีล (ideal)** ของ $GL_2(\mathbb{R})$ หรือไม่ เมื่อ

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & x \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

วิธีทำ ให้ $\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$ เป็นสมาชิกใน S แล้ว

$$\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-a & y-b \\ 0 & x-a \end{bmatrix} \in S$$
$$\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xa & ab+ya \\ 0 & xa \end{bmatrix} \in S$$

ดังนั้น S เป็นริงย่อยของ $GL_2(\mathbb{R})$
เลือก $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in S$ และ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$ จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \notin S$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \notin S$$

ดังนั้น S ไม่เป็น ไอดีลขวา ไอดีลซ้าย และไอดีล ของ $GL_2(\mathbb{R})$

2. **(3 คะแนน)** ให้ $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_6$ กำหนดโดย $\varphi(x) = (4\bar{x})^3$
จงตรวจสอบว่า φ เป็น**ริงสาทิสสัณฐาน** (ring homomorphism) หรือไม่
วิธีทำ ให้ $x, y \in \mathbb{Z}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\varphi(x+y) &= (4(\overline{x+y}))^3 \\
&= 64(\bar{x}+\bar{y})^3 \\
&= 64((\bar{x})^3 + 3(\bar{x})^2\bar{y} + 3(\bar{x})(\bar{y})^2 + (\bar{y})^3) \\
&= 64(\bar{x})^3 + 192(\bar{x})^2\bar{y} + 196(\bar{x})(\bar{y})^2 + 64(\bar{y})^3 \\
&= 64(\bar{x})^3 + 64(\bar{y})^3 && \because 192 = 32 \cdot 6 \\
&= (4\bar{x})^3 + (4\bar{y})^3 \\
&= \varphi(x) + \varphi(y)
\end{aligned}$$

และ

$$\varphi(x)\varphi(y) = (2\bar{x})^3(2\bar{y})^3 = 8(\bar{x})^3 8(\bar{y})^3 = 64(\bar{x}\bar{y})^3 = (4\overline{xy})^3 = \varphi(xy)$$

ดังนั้น φ เป็นริงสาทิสสัณฐาน

3. **(3 คะแนน)** จงหา**ตัวหารศูนย์ (zero divisor)** ทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_9$

วิธีทำ วิธีทำ ตัวหารศูนย์ของ $\mathbb{Z}_8$ คือ $\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}$ และตัวหารศูนย์ของ $\mathbb{Z}_9$ คือ $\bar{3}, \bar{6}$

ดังนั้นตัวหารศูนย์ของ $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_9$ ประกอบด้วย

$(\bar{0}, \bar{1})$	$(\bar{1}, \bar{0})$	$(\bar{2}, \bar{1})$	$(\bar{4}, \bar{1})$	$(\bar{6}, \bar{1})$	$(\bar{1}, \bar{3})$	$(\bar{1}, \bar{6})$
$(\bar{0}, \bar{2})$	$(\bar{2}, \bar{0})$	$(\bar{2}, \bar{2})$	$(\bar{4}, \bar{2})$	$(\bar{6}, \bar{2})$	$(\bar{3}, \bar{3})$	$(\bar{3}, \bar{6})$
$(\bar{0}, \bar{3})$	$(\bar{3}, \bar{0})$	$(\bar{2}, \bar{3})$	$(\bar{4}, \bar{3})$	$(\bar{6}, \bar{3})$	$(\bar{5}, \bar{3})$	$(\bar{5}, \bar{6})$
$(\bar{0}, \bar{4})$	$(\bar{4}, \bar{0})$	$(\bar{2}, \bar{4})$	$(\bar{4}, \bar{4})$	$(\bar{6}, \bar{4})$	$(\bar{7}, \bar{3})$	$(\bar{7}, \bar{6})$
$(\bar{0}, \bar{5})$	$(\bar{5}, \bar{0})$	$(\bar{2}, \bar{5})$	$(\bar{4}, \bar{5})$	$(\bar{6}, \bar{5})$		
$(\bar{0}, \bar{6})$	$(\bar{6}, \bar{0})$	$(\bar{2}, \bar{6})$	$(\bar{4}, \bar{6})$	$(\bar{6}, \bar{6})$		
$(\bar{0}, \bar{7})$	$(\bar{7}, \bar{0})$	$(\bar{2}, \bar{7})$	$(\bar{4}, \bar{7})$	$(\bar{6}, \bar{7})$		
$(\bar{0}, \bar{8})$		$(\bar{2}, \bar{9})$	$(\bar{4}, \bar{8})$	$(\bar{6}, \bar{8})$		