QUIZ 1 : ทฤษฎีจำนวน MAP1405

หัวข้อ สมบัติจำนวนเต็ม และขั้นตอนการหาร **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
เวลา อังคาร ที่ 22 มกราคม 2561 (สัปดาห์ที่ 3) ปีการศึกษา 2/2560
ผู้สอน อ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
ชื่อ-สกุล... **รหัสนักศึกษา**... **หมู่เรียน**.......................

จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

1. **(4 คะแนน)** สำหรับทุกจำนวนนับ n จงพิสูจน์โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

$$(3 \cdot 1^2 + 1) + (3 \cdot 2^2 + 2) + \cdots + (3n^2 + n) = n(n+1)^2$$

2. **(3 คะแนน)** จงแสดงว่า**กำลังสอง**ของจำนวนเต็มใดๆจะอยู่ในรูป

$$4k \quad \text{หรือ} \quad 4k+1$$

   สำหรับบางจำนวนเต็ม k

3. **(3 คะแนน)** จงหาจำนวนเต็มทั้งหมดตั้งแต่ 1 ถึง 100 ที่หารด้วย 4 เหลือเศษ 1 และหารด้วย 13 เหลือเศษ 6

เฉลย QUIZ 1 : ทฤษฎีจำนวน MAP1405

หัวข้อ สมบัติจำนวนเต็ม และขั้นตอนการหาร **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
เวลา อังคาร ที่ 22 มกราคม 2561 (สัปดาห์ที่ 3) ปีการศึกษา 2/2560
ผู้สอน อ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

1. **(4 คะแนน)** สำหรับทุกจำนวนนับ n จงพิสูจน์โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

$$(3\cdot 1^2+1)+(3\cdot 2^2+2)+\cdots+(3n^2+n)=n(n+1)^2$$

บทพิสูจน์. ให้ $n\in\mathbb{N}$ และ $P(n)$ แทนข้อความ

$$(3\cdot 1^2+1)+(3\cdot 2^2+2)+\cdots+(3n^2+n)=n(n+1)^2$$

ขั้นฐาน : เนื่องจาก $(3\cdot 1^2+1)=4=1\cdot 4=1\cdot 2^2=1(1+1)^2$ ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

ขั้นอุปนัย : ให้ $k\in\mathbb{N}$ สมมติ $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือ

$$(3\cdot 1^2+1)+(3\cdot 2^2+2)+\cdots+(3k^2+k)=k(k+1)^2$$

โดยสมมติฐาน จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(3\cdot 1^2+1)+(3\cdot 2^2+2)+\cdots+(3k^2+k)+[3(k+1)^2+(k+1)] &= [3(k+1)^2+(k+1)]+k(k+1)^2\\ &=(k+1)[3(k+1)+1+k(k+1)]\\ &=(k+1)(k^2+4k+4)\\ &=(k+1)(k+2)^2\end{aligned}$$

ทำให้สรุปได้ว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

ดังนั้น $(3\cdot 1^2+1)+(3\cdot 2^2+2)+\cdots+(3n^2+n)=n(n+1)^2$ ทุกจำนวนนับ n $\square$

2. **(3 คะแนน)** จงแสดงว่า**กำลังสอง**ของจำนวนเต็มใดๆจะอยู่ในรูป

$$4k \qquad \text{หรือ} \qquad 4k+1$$

สำหรับบางจำนวนเต็ม k

บทพิสูจน์. ให้ a เป็นจำนวนเต็มใดๆ โดยขั้นตอนการหาร มีจำนวนเต็ม q และ r ซึ่ง $a=2q+r$ โดยที่ $0\le r<2$ นั่นคือ $a=2q$ และ $a=2q+1$

กรณี $a=2q$ จะได้ว่า

$$a^2=(2q)^2=4q^2=4k$$

เมื่อให้ $k=q^2$

กรณี $a=2q+1$ จะได้ว่า

$$a^2=(2q+1)^2=4q^2+4q+1=4(q^2+q)+1=4k+1$$

เมื่อให้ $k=q^2+q$

$\square$

3. **(3 คะแนน)** จงหาจำนวนเต็มทั้งหมดตั้งแต่ 1 ถึง 100 ที่หารด้วย 4 เหลือเศษ 1 และหารด้วย 13 เหลือเศษ 6

วิธีทำ ให้ $x \in \{1, 2, 3, 4, ..., 100\}$ ซึ่งสอดคล้อง

$$x = 4q + 1 \qquad \text{เมื่อ } q \in \mathbb{Z}$$

และสอดคล้องกับ

$$x = 13p + 6 \qquad \text{เมื่อ } p \in \mathbb{Z}$$

ดังนั้น $4q + 2 = 13p + 6$ แล้ว

$$\begin{aligned} 4q + 1 &= 13q + 6 \\ 4q &= 13p + 5 = 4 + (1 + 13p) \\ q &= 1 + \frac{1 + 13p}{4} \end{aligned}$$

สรุปเป็นตารางได้ดังนี้

p	q	x
3	11	45
7	24	97

ดังนั้น $x = 45, 97$ #

QUIZ 1 : ทฤษฎีจำนวน MAP1405 (เพิ่มเติม)

หัวข้อ สมบัติจำนวนเต็ม และขั้นตอนการหาร **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
เวลา ศุกร์ ที่ 26 มกราคม 2561 (สัปดาห์ที่ 3) ปีการศึกษา 2/2560
ผู้สอน อ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
ชื่อ-สกุล.. **รหัสนักศึกษา**.. **หมู่เรียน**.......................

จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

1. **(4 คะแนน)** สำหรับทุกจำนวนนับ n จงพิสูจน์โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

$$(3\cdot 2+2)+(3\cdot 2^2+4)+\cdots+(3\cdot 2^n+2n)=6\cdot 2^n+(n-2)(n+3)$$

2. **(3 คะแนน)** จงแสดงว่า**กำลังสองของจำนวนคี่**ใดๆจะอยู่ในรูป $8k+1$ สำหรับบางจำนวนเต็ม k

3. **(3 คะแนน)** จงหาจำนวนเต็มทั้งหมดตั้งแต่ 1 ถึง 200 ที่หารด้วย 11 เหลือเท่ากับ 9 และหารด้วย 13 เศษเหลือ 6

เฉลย QUIZ 1 : ทฤษฎีจำนวน MAP1405 (เพิ่มเติม)

หัวข้อ สมบัติจำนวนเต็ม และขั้นตอนการหาร **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
เวลา ศุกร์ ที่ 26 มกราคม 2561 (สัปดาห์ที่ 3) ปีการศึกษา 2/2560
ผู้สอน อ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

1. **(4 คะแนน)** สำหรับทุกจำนวนนับ n จงพิสูจน์โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

$$(3\cdot 2+2)+(3\cdot 2^2+4)+\cdots+(3\cdot 2^n+2n)=6\cdot 2^n+(n-2)(n+3)$$

บทพิสูจน์. ให้ $n\in\mathbb{N}$ และ $P(n)$ แทนข้อความ

$$(3\cdot 2+2)+(3\cdot 2^2+4)+\cdots+(3\cdot 2^n+2n)=6\cdot 2^n+(n-2)(n+3)$$

ขั้นฐาน : เนื่องจาก $(3\cdot 2+2)=8=12-4=6\cdot 2+4(-1)=6\cdot 2+(1+3)(1-2)$ ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

ขั้นอุปนัย : ให้ $k\in\mathbb{N}$ สมมติ $P(k)$ เป็นจริง นั้นคือ

$$(3\cdot 2+2)+(3\cdot 2^2+4)+\cdots+(3\cdot 2^k+2k)=6\cdot 2^k+(k-2)(k+3)$$

โดยสมมติฐาน จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(3\cdot 2+2)+(3\cdot 2^2+4)+\cdots+&(3\cdot 2^k+2k)+(3\cdot 2^{k+1}+2(k+1))\\ &=6\cdot 2^k+(k-2)(k+3)+(3\cdot 2^{k+1}+2(k+1))\\ &=6\cdot 2^k+k^2+k-6+3\cdot 2^k\cdot 2+2k+2\\ &=6\cdot 2^k+6\cdot 2^k+k^2+3k-4\\ &=2\cdot 6\cdot 2^k+(k-1)(k+4)\\ &=6\cdot 2^{k+1}+(k+1-2)(k+1+3)\end{aligned}$$

ทำให้สรุปได้ว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

ดังนั้น $(3\cdot 2+2)+(3\cdot 2^2+4)+\cdots+(3\cdot 2^n+2n)=6\cdot 2^n+(n-2)(n+3)$ ทุกจำนวนนับ n □

2. **(3 คะแนน)** จงแสดงว่า**กำลังสองของจำนวนคี่**ใดๆจะอยู่ในรูป $8k+1$ สำหรับบางจำนวนเต็ม k

บทพิสูจน์. ให้ a เป็นจำนวนคี่ โดยขั้นตอนการหาร มีจำนวนเต็ม q และ r ซึ่ง $a=4q+r$ โดยที่ $0\le r<4$ นั้นคือ $a=4q$, $a=4q+1$, $a=4q+2$ หรือ $a=4q+3$ เนื่องจาก a เป็นจำนวนคี่ จะได้ว่า $a=4q+1$ หรือ $a=4q+3$

กรณี $a=4q+1$ จะได้ว่า

$$a^2=(4q+1)^2=16q^2+8q+1=4(2q^2+q)=8k+1$$

เมื่อให้ $k=2q^2+q$

กรณี $a=4q+3$ จะได้ว่า

$$a^2=(4q+3)^2=16q^2+24q+9=8(2q^2+3q+1)=8k+1$$

เมื่อให้ $k=2q^2+3q$

□

3. **(3 คะแนน)** จงหาจำนวนเต็มทั้งหมดตั้งแต่ 1 ถึง 200 ที่หารด้วย 11 เหลือเท่ากับ 9 และหารด้วย 13 เศษเหลือ 6

วิธีทำ ให้ $x \in \{1, 2, 3, 4, ..., 200\}$ ซึ่งสอดคล้อง

$$x = 11q + 9 \qquad \text{เมื่อ } q \in \mathbb{Z}$$

และสอดคล้องกับ

$$x = 13p + 6 \qquad \text{เมื่อ } p \in \mathbb{Z}$$

ดังนั้น $11q + 9 = 13p + 6$ แล้ว

$$\begin{aligned} 11q &= 13q - 3 \\ q &= \frac{13p - 3}{11} \end{aligned}$$

สรุปเป็นตารางได้ดังนี้

p	q	x
7	8	97

ดังนั้น $x = 97$ #

QUIZ 2 : ทฤษฎีจำนวน MAP1405

หัวข้อ การหารลงตัว และตัวหารร่วมมาก **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
เวลา อังคาร ที่ 6 กุมภาพันธ์ 2561 (สัปดาห์ที่ 5) ปีการศึกษา 2/2560
ผู้สอน อ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
ชื่อ-สกุล.. **รหัสนักศึกษา**... **หมู่เรียน**......................

จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

1. **(4 คะแนน)** จงพิสูจน์ว่า สำหรับจำนวนนับ n ใดๆ $8 \mid (7 \cdot 3^{2n} - 7)$ โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์
2. **(3 คะแนน)** ให้ $N = 888ab88$ เป็นจำนวนเต็ม 7 หลัก เมื่อ a, b เป็นเลขโดด ถ้า $99 \mid N$ จงหา N ทั้งหมดที่เป็นไปได้
3. **(3 คะแนน)** ให้ a, b เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่ศูนย์พร้อมกัน จงพิสูจน์ว่า

$$\text{ถ้า} \quad \gcd(a,b) = 1 \quad \text{แล้ว} \quad \gcd(a^2, b^2) = 1$$

(ข้อแนะนำ ใช้ทฤษฎีบทเชิงเส้นสำหรับ G.C.D.)

เฉลย QUIZ 2 : ทฤษฎีจำนวน MAP1405

หัวข้อ การหารลงตัว และตัวหารร่วมมาก **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
เวลา อังคาร ที่ 6 กุมภาพันธ์ 2561 (สัปดาห์ที่ 5) ปีการศึกษา 2/2560
ผู้สอน อ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. **(4 คะแนน)** จงพิสูจน์ว่า สำหรับจำนวนนับ n ใดๆ $8 \mid (7 \cdot 3^{2n} - 7)$ โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

บทพิสูจน์. ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $8 \mid (7 \cdot 3^{2n} - 7)$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

ขั้นฐาน : เนื่องจาก $7 \cdot 3^{2(1)} - 7 = 63 - 7 = 56 = 8(7)$ ดังนั้น $8 \mid (7 \cdot 3^{2(1)} - 7)$ ทำให้ได้ว่า $P(1)$ เป็นจริง

ขั้นอุปนัย : สมมติ $P(k)$ เป็นจริง เมื่อ $k \in \mathbb{N}$ นั้นคือ $8 \mid (7 \cdot 3^{2k} - 7)$ มีจำนวนเต็ม q ซึ่ง

$$7 \cdot 3^{2k} - 7 = 8q \qquad \text{หรือ} \qquad 7 \cdot 3^{2k} = 7 + 8q$$

โดยสมมติฐานจะได้ว่า

$$\begin{aligned} 7 \cdot 3^{2(k+1)} - 7 &= 7 \cdot 3^{2k+2} - 7 = 7 \cdot 3^{2k} \cdot 3^2 - 7 \\ &= (7 + 8q)9 - 7 = 63 + 72q - 7 = 72q + 56 \\ &= 8(9q + 7) \end{aligned}$$

ดังนั้น $8 \mid (7 \cdot 3^{2(k+1)} - 7)$ สรุปได้ว่า $P(k+1)$ เป็นจริง โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์สรุปได้ว่า

$$8 \mid (7 \cdot 3^{2n} - 7) \quad \text{สำหรับทุกๆ } n \text{ เป็นจำนวนนับ}$$

$\square$

2. **(3 คะแนน)** ให้ $N = 888ab88$ เป็นจำนวนเต็ม 7 หลัก เมื่อ a, b เป็นเลขโดด ถ้า $99 \mid N$ จงหา N ทั้งหมดที่เป็นไปได้
วิธีทำ เนื่องจาก $\gcd(9, 11) = 1$ สำหรับ $99 \mid N$ เพียงพอที่จะพิจารณา $9 \mid N$ และ $11 \mid N$ ดังนั้น

$$9 \mid (8 + 8 + 8 + a + b + 8 + 8) \qquad \text{และ} \qquad 11 \mid (8 - 8 + b - a + 8 - 8 + 8)$$

นั่นคือ $9 \mid (40 + a + b)$ และ $11 \mid (8 + b - a)$ พิจารณากรณีที่ $9 \mid N$ จะได้ว่า $a + b = 5, 14$ ดังตารางต่อไปนี้

a	0	5	1	4	2	3	5	9	6	8	7
b	5	0	4	1	3	2	9	5	8	6	7

เมื่อนำ a, b ไปตรวจสอบกับเงื่อนไข $11 \mid (8 + b - a)$ จะได้ว่า $a = 1$ และ $b = 4$ ดังนั้น $N = 8881488$ #

3. **(3 คะแนน)** ให้ a, b เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่ศูนย์พร้อมกัน จงพิสูจน์ว่า

$$\text{ถ้า} \quad \gcd(a, b) = 1 \quad \text{แล้ว} \quad \gcd(a^2, b^2) = 1$$

(ข้อแนะนำ ใช้ทฤษฎีบทเชิงเส้นสำหรับ G.C.D.)

บทพิสูจน์. ให้ a, b เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่ศูนย์พร้อมกัน สมมติว่า $\gcd(a, b) = 1$ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม x, y ซึ่ง $1 = ax + by$ ฉนั้น $ab = a^2bx + ab^2y$ แล้ว

$$\begin{aligned} 1 = (ax + by)^2 &= a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 \\ &= a^2x^2 + 2(a^2bx + ab^2y)xy + b^2y^2 \\ &= a^2(x^2 + 2bx^2y) + b^2(y^2 + 2axy^2) \end{aligned}$$

ดังนั้น $\gcd(a^2, b^2) = 1$

$\square$

QUIZ 3 : ทฤษฎีจำนวน MAP1405

หัวข้อ สมภาค สมการสมภาคเชิงเส้น ทฤษฎีบทเศษเหลือของจีน **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
เวลา จันทร์ ที่ 19 มีนาคม 2561 (สัปดาห์ที่ 11) ปีการศึกษา 2/2560
ผู้สอน อ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
ชื่อ-สกุล... **รหัสนักศึกษา**.. **หมู่เรียน**.......................

จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

1. **(3 คะแนน)** จงพิสูจน์ว่า $7 \mid (3^{2n+1} + 2^{n+2})$ ทุก ๆ จำนวนนับ n โดย**ไม่ใช้**อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์
2. **(3 คะแนน)** จงหาคำตอบของสมการสมภาค $49x \equiv 91 \pmod{161}$
3. **(4 คะแนน)** จงหาคำตอบของระบบสมการสมภาค

$$\begin{aligned} 5x &\equiv 3 \pmod{7} \\ 6x &\equiv 4 \pmod{17} \end{aligned}$$

เฉลย QUIZ 3 : ทฤษฎีจำนวน MAP1405

หัวข้อ สมภาค สมการสมภาคเชิงเส้น ทฤษฎีบทเศษเหลือของจีน **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
เวลา จันทร์ ที่ 19 มีนาคม 2561 (สัปดาห์ที่ 11) ปีการศึกษา 2/2560
ผู้สอน อ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. **(3 คะแนน)** จงพิสูจน์ว่า $7 \mid (3^{2n+1} + 2^{n+2})$ ทุก ๆ จำนวนนับ n โดย**ไม่ใช้**อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

   บทพิสูจน์. เนื่องจาก $9 \equiv 2 \pmod 7$ สำหรับจำนวนนับ n ใด ๆ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 3^{2n} = 9^n &\equiv 2^n \pmod 7 \\ 3^{2n}\cdot 3 &\equiv 2^n \cdot 3 \pmod 7 \\ 3^{2n+1} &\equiv 2^n\cdot(-4) \pmod 7 \\ 3^{2n+1} &\equiv -2^{n+2} \pmod 7 \end{aligned}$$

   ดังนั้น $7 \mid (3^{2n+1} + 2^{n+2})$ $\square$

2. **(3 คะแนน)** จงหาคำตอบของสมการสมภาค $49x \equiv 91 \pmod{161}$
   วิธีทำ เนื่องจาก $\gcd(49, 161) = 7$ และ $7 \mid 91$ ดังนั้น $49x \equiv 91 \pmod{161}$ มีคำตอบ
   พิจารณา $7x \equiv 13 \pmod{23}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 70x &\equiv 130 \pmod{23} \\ x &\equiv 15 \pmod{23} \end{aligned}$$

   ดังนั้น $x = 15 + 23t$ เมื่อ $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ เป็นคำตอบที่ไม่สมภาคกันมอดุโล 161 นั่นคือ

$$x = 15, 38, 61, 84, 107, 130, 153$$

   คำตอบทั่วไปคือ $x = 15 + 23n$ เมื่อ $n \in \mathbb{Z}$

3. **(4 คะแนน)** จงหาคำตอบของระบบสมการสมภาค

$$\begin{aligned} 5x &\equiv 3 \pmod 7 \\ 6x &\equiv 4 \pmod{17} \end{aligned}$$

   วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned} 5x &\equiv 3 \pmod 7 \\ 20x &\equiv 12 \pmod 7 \\ -x &\equiv -2 \pmod 7 \\ x &\equiv 2 \pmod 7 \end{aligned}$$

   และ

$$\begin{aligned} 6x &\equiv 4 \pmod{17} \\ 18x &\equiv 12 \pmod{17} \\ x &\equiv 2 \pmod{17} \end{aligned}$$

   ดังนั้นระบบสมการดังกล่าวจะสอดคล้องระบบสมการ

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \pmod 7 \\ x &\equiv 12 \pmod{17} \end{aligned}$$

   พิจารณาสมการ

$$\begin{aligned} 17x &\equiv 1 \pmod 7 \quad \longrightarrow \quad x_1 = 5 \\ 7x &\equiv 1 \pmod{17} \quad \longrightarrow \quad x_2 = 5 \end{aligned}$$

   จะได้ว่า $x_0 = 17(5)(2) + 7(5)(12) = 170 + 420 = 590$ ดังนั้น

$$x \equiv 590 \equiv 114 \pmod{119} \qquad \#$$

QUIZ 4 : ทฤษฎีจำนวน MAP1405

หัวข้อ ทฤษฎีบทเศษเหลือของจีน ส่วนตกค้างลดทอน และฟังก์ชันเชิงการคูณ **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
เวลา อังคาร ที่ 3 เมษายน 2561 (สัปดาห์ที่ 11) ปีการศึกษา 2/2560
ผู้สอน อ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
ชื่อ-สกุล.. **รหัสนักศึกษา**... **หมู่เรียน**.......................

---

1. **(4 คะแนน)** นาย ก มีเหรียญบาทจำนวนหนึ่ง และทำการแบ่งเหรียญออกเป็นกอง ๆ 3 แบบ ดังนี้

   - แบ่งออกเป็นกอง ๆ ละ 15 เหรียญพบว่าเหลือ 8 เหรียญ
   - แบ่งออกเป็นกอง ๆ ละ 12 เหรียญพบว่าเหลือ 2 เหรียญ
   - แบ่งออกเป็นกอง ๆ ละ 20 เหรียญพบว่าเหลือ 18 เหรียญ

   ถามว่าการแบ่งแบบต่างๆของ นาย ก **เป็นไปได้หรือไม่** ถ้าเป็นไปได้ นาย ก มีเหรียญบาท**อย่างน้อย**กี่เหรียญ

2. **(3 คะแนน)** จงหาเลขโดด**สามหลักสุดท้าย**ของ 2017^{2402}

3. **(3 คะแนน)** จงหาค่าของ $\tau(2018) + \sigma(2560) + \phi(1998)$

เฉลย QUIZ 4 : ทฤษฎีจำนวน MAP1405

หัวข้อ ทฤษฎีบทเศษเหลือของจีน ส่วนตกค้างลดทอน และฟังก์ชันเชิงการคูณ **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
เวลา อังคาร ที่ 3 เมษายน 2561 (สัปดาห์ที่ 11) ปีการศึกษา 2/2560
ผู้สอน อ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. **(4 คะแนน)** นาย ก มีเหรียญบาทจำนวนหนึ่ง และทำการแบ่งเหรียญออกเป็นกอง ๆ 3 แบบ ดังนี้

   - แบ่งออกเป็นกอง ๆ ละ 15 เหรียญพบว่าเหลือ 8 เหรียญ
   - แบ่งออกเป็นกอง ๆ ละ 12 เหรียญพบว่าเหลือ 2 เหรียญ
   - แบ่งออกเป็นกอง ๆ ละ 20 เหรียญพบว่าเหลือ 18 เหรียญ

   ถามว่าการแบ่งแบบต่างๆของ นาย ก **เป็นไปได้หรือไม่** ถ้าเป็นไปได้ นาย ก มีเหรียญบาท**อย่างน้อย**กี่เหรียญ
   วิธีทำ ให้ x แทนจำนวนเหรียญบาททั้งหมดของนาย ก จากการแบ่งจะได้ว่า

$$\begin{aligned} x &\equiv 8 \pmod{15} \\ x &\equiv 2 \pmod{12} \\ x &\equiv 18 \pmod{20} \end{aligned}$$

   เนื่องจาก $\gcd(15,12) = 3$ ซึ่ง $3 \mid (8-2)$, $\gcd(15,20) = 5$ ซึ่ง $5 \mid (8-18)$
   และ $\gcd(12,20) = 4$ ซึ่ง $4 \mid (2-18)$ ดังนั้นระบบสมการนี้มีคำตอบ นั่นคือการแบ่งแบบต่างๆที่ นาย ก ทำเป็นไปได้
   จาก $x \equiv 8 \pmod{15}$ มีคำตอบเดียวกับระบบคำตอบของสมการ

$$\begin{aligned} x &\equiv 8 \pmod{3} \longrightarrow x \equiv 2 \pmod{3} \\ x &\equiv 8 \pmod{5} \longrightarrow x \equiv 3 \pmod{5} \end{aligned}$$

   จาก $x \equiv 2 \pmod{12}$ มีคำตอบเดียวกับระบบคำตอบของสมการ

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \pmod{3} \\ x &\equiv 2 \pmod{4} \end{aligned}$$

   จาก $x \equiv 18 \pmod{20}$ มีคำตอบเดียวกับระบบคำตอบของสมการ

$$\begin{aligned} x &\equiv 18 \pmod{4} \longrightarrow x \equiv 2 \pmod{4} \\ x &\equiv 18 \pmod{5} \longrightarrow x \equiv 3 \pmod{5} \end{aligned}$$

   ดังนั้นคำตอบของระบบสมการนี้จะสอดคล้องระบบสมการ

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \pmod{3} \\ x &\equiv 2 \pmod{4} \\ x &\equiv 3 \pmod{5} \end{aligned}$$

   เนื่องจาก $x \equiv 2 \pmod{3}$ และ $x \equiv 2 \pmod{4}$ คำตอบจะสอดคล้องสมการ $x \equiv 2 \pmod{12}$ เพียงพอที่หาคำตอบของระบบสมการ

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \pmod{12} \\ x &\equiv 3 \pmod{5} \end{aligned}$$

   ให้ $a_1 = 2, a_2 = 3, m_1 = 12, m_2 = 5$ พิจารณาระบบสมการ

$$\begin{aligned} 5x &\equiv 1 \pmod{12} \quad \ldots \quad (1) \\ 12x = 2x &\equiv 1 \pmod{5} \quad \ldots \quad (2) \end{aligned}$$

   จะได้ว่า $x_1 = 5$ และ $x_2 = -2$ เป็นคำของระบบสมการ (1) และ (2) ตามลำดับ แล้ว

$$\begin{aligned} x_0 &= m_2x_1a_1 + m_1x_2a_2 \\ &= 5(5)(2) + 12(-2)(3) \\ &= 50 - 12 \\ &= 38 \end{aligned}$$

   จะได้ว่าคำตอบของระบบสมการนี้คือ $x \equiv 38 \pmod{60}$ ดังนั้น นาย ก มีเหรียญบาทอย่างน้อย 38 เหรียญ

2. **(3 คะแนน)** จงหาเลขโดด**สามหลักสุดท้าย**ของ 2017^{2402}

วิธีทำ เนื่องจาก $\phi(1000) = \phi(2^3 \cdot 5^3) = (2^3 - 2^2)(5^3 - 5^2) = (4)(100) = 400$ และ $2017 \equiv 17 \pmod{1000}$ และ $1000 \nmid 17$ โดยทฤษฎีบทของออยเลอร์จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
2017^{\phi(1000)} &\equiv 1 && \pmod{1000} \\
17^{400} &\equiv 1 && \pmod{1000} \\
17^{2400} = (17^{400})^6 &\equiv 1^6 && \pmod{1000} \\
17^{2402} \cdot 17^{2400} \cdot 17^2 &\equiv 1 \cdot 17^2 && \pmod{1000} \\
17^{2402} &\equiv 289 && \pmod{1000}
\end{aligned}
$$

ดังนั้นเลขโดดสามหลักสุดท้ายของ 2017^{2402} คือ 289 #

3. **(3 คะแนน)** จงหาค่าของ $\tau(2018) + \sigma(2560) + \phi(1998)$

วิธีทำ พิจารณา

$$
\begin{aligned}
\tau(2018) &= \tau(2 \cdot 1009) \\
&= 2 \cdot 2 \\
&= 4 \\
\sigma(2560) &= \sigma(2^9 \cdot 5) = \sigma(2^9)\sigma(5) \\
&= \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} \cdot (1 + 5) \\
&= 1023 \cdot 6 \\
&= 6138 \\
\phi(1998) &= \phi(2 \cdot 3^3 \cdot 37) \\
&= (2 - 1)(3^3 - 3^2)(37 - 1) \\
&= 1(18)(36) \\
&= 648
\end{aligned}
$$

ดังนั้น

$$\tau(2018) + \sigma(2560) + \phi(1998) = 4 + 6138 + 648 = 6790 \quad \#$$