QUIZ 1 : MAT2203 NUMBER THEORY

TOPIC Division Algorithm & Divisibility **SCORE** 10 points
QUIZ TIME Tue 6 Sep 2016, 4th Week, Semester 1/2016
TEACHER Thanatyod Jampawai, Ph.D., Faculty of Education, Suan Sunandha Rajabhat University
NAME.. **ID**... **SECTION**.......................

จงแสดงวิธีทำโดยละเอียดเพื่อหาคำตอบต่อไปนี้ (ข้อละ 2.5 คะแนน)

1. จงหาเศษที่เกิดจากการหาร 333^{999} ด้วย 13

2. จงแสดงว่า $6 \mid n(n+1)(n+2)$ โดยใช้ขั้นตอนการหาร

3. จงพิสูจน์ข้อความ $15 \mid (2^{4n}-1)$ ทุกๆจำนวนนับ n โดยใช้หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

4. จงหาจำนวนเต็มบวก a ทั้งหมดที่สอดคล้อง $(a+3) \mid (a-3)^3$

ANSWERS QUIZ 1 : MAT2203 NUMBER THEORY

TOPIC	Division Algorithm & Divisibility **SCORE** 10 points
QUIZ TIME	Tue 6 Sep 2016, 4th Week, Semester 1/2016
TEACHER	Thanatyod Jampawai, Ph.D., Faculty of Education, Suan Sunandha Rajabhat University

---

1. จงหาเศษที่เกิดจากการหาร 333^{999} ด้วย 13

13	หาร	333	เหลือเศษ	8		
13	หาร	333^{999}	เหลือเศษ	$8^{999} = (2^3)^{999} = 2^{2997} = (2^6)^{499} \cdot 2^3$		
13	หาร	$64 = 2^6$	เหลือเศษ	-1		
13	หาร	$(2^6)^{499}$	เหลือเศษ	$(-1)^{499} = -1$		
13	หาร	2^3	เหลือเศษ	8		
13	หาร	$(2^6)^{499} \cdot 2^3$	เหลือเศษ	$(-1)8 = -8$	เท่ากับเศษ	5

ดังนั้น 13 หาร 333^{999} เหลือเศษเท่ากับ 5 #

2. จงแสดงว่า $6 \mid n(n+1)(n+2)$ โดยใช้ขั้นตอนการหาร

ให้ $n \in \mathbb{Z}$ โดยขั้นตอนการหาร $n = 6k, n = 6k+1, n = 6k+2, n = 6k+3, n = 6k+4$ และ $n = 6k+5$

- กรณี $n = 6k$ แล้ว $n(n+1)(n+2) = 6k(6k+1)(6k+2) = 6[k(6k+1)(6k+2)]$ $\therefore\ 6 \mid n(n+1)(n+2)$
- กรณี $n = 6k+1$ แล้ว

$$\begin{aligned} n(n=1)(n+2) &= (6k+1)(6k+1+1)(6k+1+2) = (6k+1)(6k+2)(6k+3) \\ &= (6k+1)2(3k+1)3(2k+1) = 6[(6k+1)(3k+2)(2k+1)] \end{aligned}$$

$\therefore\ 6 \mid n(n+1)(n+2)$

- กรณี $n = 6k+2$ แล้ว

$$\begin{aligned} n(n=1)(n+2) &= (6k+2)(6k+2+1)(6k+2+2) = (6k+2)(6k+3)(6k+4) \\ &= 2(3k+1)3(2k+1)(6k+4) = 6[(3k+1)(2k+1)(6k+4)] \end{aligned}$$

$\therefore\ 6 \mid n(n+1)(n+2)$

- กรณี $n = 6k+3$ แล้ว

$$\begin{aligned} n(n=1)(n+2) &= (6k+3)(6k+3+1)(6k+3+2) = (6k+3)(6k+4)(6k+5) \\ &= 3(2k+1)2(3k+2)(6k+5) = 6[(2k+1)(3k+2)(6k+5)] \end{aligned}$$

$\therefore\ 6 \mid n(n+1)(n+2)$

- กรณี $n = 6k+4$ แล้ว

$$\begin{aligned} n(n=1)(n+2) &= (6k+4)(6k+4+1)(6k+4+2) = (6k+4)(6k+5)(6k+6) \\ &= (6k+4)(6k+5)6(k+1) = 6[(6k+4)(6k+5)(k+1)] \end{aligned}$$

$\therefore\ 6 \mid n(n+1)(n+2)$

- กรณี $n = 6k+5$ แล้ว

$$\begin{aligned} n(n=1)(n+2) &= (6k+5)(6k+5+1)(6k+5+2) = (6k+5)(6k+6)(6k+7) \\ &= (6k+5)6(k+1)6(6k+7) = 6[(6k+5)(k+1)(6k+7)] \end{aligned}$$

$\therefore\ 6 \mid n(n+1)(n+2)$

ดังนั้น $6 \mid n(n+1)(n+2)$ ทุกจำนวนเต็ม n $\square$

3. จงพิสูจน์ข้อความ $15 \mid (2^{4n}-1)$ ทุกๆจำนวนนับ n โดยใช้หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์
สำหรับ $n \in \mathbb{N}$ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $15 \mid (2^{4n}-1)$

- **ขั้นฐาน** เนื่องจาก $2^{4(1)}-1 = 16-1 = 15$ แล้ว $15 \mid (2^{4(1)}-1)$ ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง
- **ขั้นอุปนัย** สมมติว่า $P(k)$ เป็นจริงเมื่อ $k \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า $15 \mid (2^{4k}-1)$ ดังนั้นมีจำนวนเต็ม a ซึ่ง

$$2^{4k}-1 = 15a \qquad \text{หรือ} \qquad 2^{4k} = 15a+1$$

พิจารณา

$$\begin{aligned} 2^{4(k+1)}-1 = 2^{4k+4}-1 = 2^{4k}\cdot 2^4 - 1 &= 2^{4k}\cdot 16 - 1 \\ &= (15a+1)16-1 = 15a(16)+16-1 \\ &= 15a(16)+15 = 15(16a+1) \end{aligned}$$

ดังนั้น $15 \mid (2^{4(k+1)}-1)$ นั้นคือ $P(k+1)$ เป็นจริง $\square$

4. จงหาจำนวนเต็มบวก a ทั้งหมดที่สอดคล้อง $(a+3) \mid (a-3)^3$
พิจารณา

$$(a-3)^3 = [(a+3)-6]^3 = (a+3)^3 - 3(a+3)^2 6 + 3(a+3)6^2 - 6^3$$

ดังนั้น $(a+3) \mid 6^3$ หรือ $(a+3) \mid 2^3 \cdot 3^3$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} a+3 &= 1, 2^1, 2^2, 2^3, \\ &= 3, 3^2, 3^3, \\ &= 2\cdot 3, 2\cdot 3^2, 2\cdot 3^3, \\ &= 2^2\cdot 3, 2^2\cdot 3^2, 2^2\cdot 3^3, \\ &= 2^3\cdot 3, 2^3\cdot 3^2, 2^3\cdot 3^3 \\ a &= 1, 5, \\ &= 6, 24, \\ &= 3, 15, 51, \\ &= 9, 33, 105, \\ &= 21, 69, 213 \end{aligned}$$

ดังนั้น $a = 1, 3, 5, 6, 9, 15, 21, 24, 33, 51, 69, 105, 213$ #

QUIZ 2 : MAT2203 NUMBER THEORY

TOPIC G.C.D & Euclidean Algorithm SCORE 10 points
QUIZ TIME Tue 20 Sep 2016, 6th Week, Semester 1/2016
TEACHER Thanatyod Jampawai, Ph.D., Faculty of Education, Suan Sunandha Rajabhat University
NAME.. ID.. SECTION..............................

จงแสดงวิธีทำโดยละเอียดเพื่อหาคำตอบต่อไปนี้

1. ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มใดๆ จงพิสูจน์ว่า ถ้า $a \mid b^2$ และ $\gcd(a,b) = 1$ แล้ว $a \mid b$ (3 คะแนน)
   (ข้อเสนอแนะ ใช้ทฤษฎีบท 2.3.13)
2. ให้ $N = 7a77b7$ เป็นจำนวนเต็มหกหลัก ถ้า 99 เป็นตัวประกอบของ N จงหาเลขโดด a และ b ที่เป็นไปได้ทั้งหมด (3 คะแนน)
3. ถ้า $d = \gcd(579, 324)$ จงหาจำนวนเต็ม x และ y ที่สอดคล้องสมการ $d = 579x + 324y$ (4 คะแนน)

ANSWERS QUIZ 2 : MAT2203 NUMBER THEORY (SEC2)

TOPIC	G.C.D & Euclidean Algorithm **SCORE** 10 points
QUIZ TIME	Tue 20 Sep 2016, 6th Week, Semester 1/2016
TEACHER	Thanatyod Jampawai, Ph.D., Faculty of Education, Suan Sunandha Rajabhat University

---

1. ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มใดๆ จงพิสูจน์ว่า ถ้า $a \mid b^2$ และ $\gcd(a,b)=1$ แล้ว $a \mid b$

Proof. ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม สมมติว่า $a \mid b^2$ และ $\gcd(a,b)=1$
จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $b^2 = ak$ และโดยทฤษฎีบท 2.3.13 จะมีจำนวนเต็ม x, y ซึ่ง $1 = ax + by$ นำ b คูณทั้งสองข้างจะได้

$$b = abx + b^2y = abx + aky = a(bx + ky)$$

ดังนั้น $a \mid b$ $\square$

2. ให้ $N = 7a77b7$ เป็นจำนวนเต็มหกหลัก ถ้า 99 เป็นตัวประกอบของ N จงหาเลขโดด a และ b ที่เป็นไปได้ทั้งหมด
เนื่องจาก $99 \mid N$ และ $99 = 9 \times 11$ ซึ่ง $gcd(9,11) = 1$ ดังนั้นเราพิจารณาแค่ว่า $9 \mid N$ และ $11 \mid N$
$9 \mid 7a77b7$ จะได้ว่า $9 \mid (7+a+7+7+b+7)$ หรือ $9 \mid (a+b+28)$ ดังนั้น $a+b = 8, 17$
$11 \mid 7a77b7$ จะได้ว่า $9 \mid (7-b+7-7+a-7)$ หรือ $11 \mid (a-b)$ ดังนั้น $a-b = 0, 11$
จากเงื่อนไขทั้งหมดจะได้ว่า $a = 4$ และ $b = 4$ เท่านั้น

3. ถ้า $d = \gcd(579, 324)$ จงหาจำนวนเต็ม x และ y ที่สอดคล้องสมการ $d = 579x + 324y$

$$\begin{aligned} 579 &= 324(1) + 255 & 255 &= 579 - 324(1) \\ 324 &= 255(1) + 69 & 69 &= 324 - 255(1) \\ 255 &= 69(3) + 48 & 48 &= 255 - 69(3) \\ 69 &= 48(1) + 21 & 21 &= 69 - 48(1) \\ 48 &= 21(2) + 6 & 6 &= 48 - 21(2) \\ 21 &= 6(3) + 3 & 3 &= 21 - 6(3) \\ 6 &= 3(2) + 0 & & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 &= 21 - 6(3) = 21 - [48 - 21(2)](3) = 21 - 48(3) + 21(6) = 21(7) - 48(3) \\ &= [69 - 48(1)](7) - 48(3) = 69(7) - 48(7) - 48(3) = 69(7) - 48(10) \\ &= 69(7) - [255 - 69(3)](10) = 69(7) - 255(10) + 69(30) = 69(37) - 255(10) \\ &= [324 - 255(1)](37) - 255(10) = 324(37) - 255(37) - 255(10) = 324(37) - 255(47) \\ &= 324(37) - [579 - 324(1)](47) = 324(37) - 579(47) + 324(47) = 324(84) - 579(47) \\ &= 579(-47) + 324(84) \end{aligned}$$

สรุปได้ว่า $d = 3$, $x = -47$, และ $y = 84$

QUIZ 2 : MAT2203 NUMBER THEORY

TOPIC G.C.D & Euclidean Algorithm **SCORE** 10 points
QUIZ TIME Tue 20 Sep 2016, 6th Week, Semester 1/2016
TEACHER Thanatyod Jampawai, Ph.D., Faculty of Education, Suan Sunandha Rajabhat University
NAME.. ID.. SECTION...............................

จงแสดงวิธีทำโดยละเอียดเพื่อหาคำตอบต่อไปนี้

1. ให้ a, b และ c เป็นจำนวนเต็มใดๆ จงพิสูจน์ว่า ถ้า $a \mid c$ และ $b \mid c$ โดยที่ $\gcd(a, b) = 1$ แล้ว $ab \mid c$ (3 คะแนน)
(ข้อเสนอแนะ ใช้ทฤษฎีบท 2.3.13)

2. ให้ $N = 7a77b7$ เป็นจำนวนเต็มหกหลัก ถ้า 33 เป็นตัวประกอบของ N จงหาเลขโดด a และ b ที่เป็นไปได้ทั้งหมด (3 คะแนน)

3. ถ้า $d = \gcd(597, 342)$ จงหาจำนวนเต็ม x และ y ที่สอดคล้องสมการ $d = 597x + 342y$ (4 คะแนน)

ANSWERS QUIZ 2 : MAT2203 NUMBER THEORY (SEC1)

TOPIC	G.C.D & Euclidean Algorithm **SCORE** 10 points
QUIZ TIME	Tue 20 Sep 2016, 6th Week, Semester 1/2016
TEACHER	Thanatyod Jampawai, Ph.D., Faculty of Education, Suan Sunandha Rajabhat University

---

1. ให้ a, b และ c เป็นจำนวนเต็มใดๆ จงพิสูจน์ว่า ถ้า $a \mid c$ และ $b \mid c$ โดยที่ $\gcd(a,b) = 1$ แล้ว $ab \mid c$

   Proof. ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม สมมติว่า $a \mid c$ และ $b \mid c$ โดยที่ $\gcd(a,b) = 1$
   จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม k และ p ซึ่ง $c = ak$ และ $c = bp$ โดยทฤษฎีบท 2.3.13 จะมีจำนวนเต็ม x, y ซึ่ง $1 = ax + by$ นำ c คูณทั้งสองข้างจะได้
   $$c = cax + cby = (bp)ax + (ak)by = ab(px + ky)$$
   ดังนั้น $ab \mid c$ □

2. ให้ $N = 7a77b7$ เป็นจำนวนเต็มหกหลัก ถ้า 33 เป็นตัวประกอบของ N จงหาเลขโดด a และ b ที่เป็นไปได้ทั้งหมด
   เนื่องจาก $33 \mid N$ และ $33 = 3 \times 11$ ซึ่ง $gcd(3, 11) = 1$ ดังนั้นเราพิจารณาแค่ว่า $3 \mid N$ และ $11 \mid N$
   $3 \mid 7a77b7$ จะได้ว่า $9 \mid (7 + a + 7 + 7 + b + 7)$ หรือ $3 \mid (a + b + 28)$ ดังนั้น $a + b = 2, 5, 8, 11, 14, 17$
   $11 \mid 7a77b7$ จะได้ว่า $9 \mid (7 - b + 7 - 7 + a - 7)$ หรือ $11 \mid (a - b)$ ดังนั้น $a - b = 0$
   จากเงื่อนไขทั้งหมดจะได้ว่า (a, b) ที่เป็นไปได้คือ $(1, 1)$, $(4, 4)$ และ $(7, 7)$

3. ถ้า $d = \gcd(597, 342)$ จงหาจำนวนเต็ม x และ y ที่สอดคล้องสมการ $d = 597x + 342y$

$$\begin{aligned} 597 &= 342(1) + 255 \\ 342 &= 255(1) + 87 \\ 255 &= 87(2) + 81 \\ 87 &= 81(1) + 6 \\ 81 &= 6(13) + 3 \\ 6 &= 3(2) + 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 255 &= 597 - 342(1) \\ 87 &= 342 - 255(1) \\ 81 &= 255 - 87(2) \\ 6 &= 87 - 81(1) \\ 3 &= 81 - 6(13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 &= 81 - 6(13) = 81 - [87 - 81(1)](13) = 81 - 87(13) + 81(13) = 81(14) - 87(13) \\ &= [255 - 87(2)](14) - 87(13) = 255(14) - 87(28) - 87(13) = 255(14) - 87(41) \\ &= 255(14) - [342 - 255(1)](41) = 255(14) - 342(41) + 255(41) = 255(55) - 342(41) \\ &= [597 - 342(1)](55) - 342(41) = 597(55) - 342(55) - 342(41) = 597(55) - 342(96) \\ &= 597(55) + 342(-96) \end{aligned}$$

สรุปได้ว่า $d = 3$, $x = 55$, และ $y = -96$

QUIZ 3 : MAT2203 NUMBER THEORY

TOPIC L.C.M & Primes **SCORE** 10 points
QUIZ TIME Tue 11 Oct 2016, 9th Week, Semester 1/2016
TEACHER Thanatyod Jampawai, Ph.D., Faculty of Education, Suan Sunandha Rajabhat University
NAME.. **ID**.. **SECTION**..............................

จงแสดงวิธีทำโดยละเอียดเพื่อหาคำตอบต่อไปนี้

1. จงหา n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มีค่าน้อยสุด ซึ่งหารด้วย 7 แล้วเศษเหลือเท่ากับ 4 ถ้า 9 และ 11 ต่างหาร $n-2$ ลงตัว (3 คะแนน)
2. จงเขียนจำนวน $25!$ ในรูปแบบบัญญัติ (canonical form) (4 คะแนน)
3. จงตรวจสอบว่า 881 เป็นจำนวนเฉพาะหรือไม่ (3 คะแนน)

QUIZ 3 : MAT2203 NUMBER THEORY

TOPIC L.C.M & Primes **SCORE** 10 points
QUIZ TIME Tue 11 Oct 2016, 9th Week, Semester 1/2016
TEACHER Thanatyod Jampawai, Ph.D., Faculty of Education, Suan Sunandha Rajabhat University
NAME.. **ID**.. **SECTION**...............................

จงแสดงวิธีทำโดยละเอียดเพื่อหาคำตอบต่อไปนี้

1. ให้ $a, b \in \mathbb{Z}$ จงหา $\gcd(a, b)$ ที่เป็นไปได้ทั้งหมด ถ้า $\ell cm(a, b) = 600$ (4 คะแนน)
2. จงเขียนจำนวน $22!$ ในรูปแบบบัญญัติ (canonical form) (3 คะแนน)
3. จงตรวจสอบว่า 919 เป็นจำนวนเฉพาะหรือไม่ (3 คะแนน)