Quiz 1 (รอบเช้า 8:00)
MAC3310 พีชคณิตนามธรรม

หัวข้อ อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์และการดำเนินการทวิภาค **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
เวลา วันพุธที่ 26 กรกฎาคม 2566 เวลา 08:00-08:30 (สัปดาห์ที่ 3) ปีการศึกษา 1/2566
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
ชื่อ-สกุล ..... **รหัสนักศึกษา**.....**หมู่เรียน**.....

---

1. **(5 คะแนน)** จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1} \qquad \text{ทุก ๆ } n\in\mathbb{N}$$

2. **(5 คะแนน)** การดำเนินการทวิภาค $*$ บน $\mathbb{Z}_6=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5}\}$ นิยามโดย

$$\bar{a}*\bar{b}=\overline{a+b+3} \qquad \text{เมื่อ } \bar{a},\bar{b}\in\mathbb{Z}_6$$

จงสร้าง**ตารางเคย์เลย์** พร้อมหา**เอกลักษณ์ (identity)** และ**ตัวผกผัน(inverse)** ของสมาชิกทุกตัว (ให้เหตุผล)

เฉลย Quiz 1 (รอบเช้า 8:00)
MAC3310 พีชคณิตนามธรรม

หัวข้อ อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์และการดำเนินการทวิภาค **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
เวลา วันพุธที่ 26 กรกฎาคม 2566 เวลา 8:00-8:30 (สัปดาห์ที่ 3) ปีการศึกษา 1/2566
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. **(5 คะแนน)** จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1} \qquad \text{ทุก ๆ } n\in\mathbb{N}$$

Proof. Let $n\in\mathbb{N}$ and $P(n)$ represent the statement

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}.$$

For $n=1$, we obtain $\dfrac{1}{1\cdot 3}=\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{2\cdot 1+1}$. So, $P(1)$ is true.
Let $k\in\mathbb{N}$. Assume that $P(k)$ is ture. It follows that

$$\begin{aligned}\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)} &= \frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}\\ &= \frac{1}{2k+1}\left[k+\frac{1}{2k+3}\right]\\ &= \frac{1}{2k+1}\left[\frac{k(2k+3)+1}{2k+3}\right]\\ &= \frac{1}{2k+1}\left[\frac{2k^2+3k+1}{2k+3}\right]\\ &= \frac{1}{2k+1}\left[\frac{(2k+1)(k+1)}{2k+3}\right]\\ &= \frac{k+1}{2k+3}.\end{aligned}$$

It implies that $P(k+1)$ is true. By induction bypothesis, we conclude that

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1} \qquad \text{for all } n\in\mathbb{N}.$$

□

2. **(5 คะแนน)** การดำเนินการทวิภาค $*$ บน $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ นิยามโดย

$$\bar{a} * \bar{b} = \overline{a + b + 3} \qquad \text{เมื่อ } \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_6$$

จงสร้าง**ตารางเคย์เลย์** พร้อมหา**เอกลักษณ์ (identity)** และ**ตัวผกผัน(inverse)** ของสมาชิกทุกตัว (ให้เหตุผล)

Solution.

$*$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$
$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

By the above table, it is easy to see that

$$\bar{a} * \bar{3} = \bar{a} = \bar{3} * \bar{a} \qquad \text{for all } \bar{a} \in \mathbb{Z}_6.$$

Thus, $\bar{3}$ is the identity. The following table shows each inverse of elements in $\mathbb{Z}_6$ under $*$.

Elements	Inverses	Reasons
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0} * \bar{0} = \overline{3} = \bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{5}$	$\bar{1} * \bar{5} = \overline{9} = \bar{3}$
$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{2} * \bar{4} = \overline{9} = \bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{3} * \bar{3} = \overline{9} = \bar{3}$
$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{4} * \bar{2} = \overline{9} = \bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{1}$	$\bar{5} * \bar{1} = \overline{9} = \bar{3}$

Quiz 1 (รอบบ่าย 13:00)
MMAC3310 พีชคณิตนามธรรม

หัวข้อ อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์และการดำเนินการทวิภาค **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
เวลา วันพุธที่ 26 กรกฎาคม 2566 เวลา 13:00-13:30 (สัปดาห์ที่ 3) ปีการศึกษา 1/2566
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
ชื่อ-สกุล ..... **รหัสนักศึกษา**.....**หมู่เรียน**.....

---

1. **(5 คะแนน)** จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1} \qquad \text{ทุก ๆ } n\in\mathbb{N}$$

2. **(5 คะแนน)** การดำเนินการทวิภาค $*$ บน $\mathbb{Z}_7^*=\{\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5},\bar{6}\}$ นิยามโดย

$$\bar{a}*\bar{b}=\overline{3ab} \qquad \text{เมื่อ } \bar{a},\bar{b}\in\mathbb{Z}_7^*$$

จงสร้าง**ตารางเคย์เลย์** พร้อมหา**เอกลักษณ์ (identity)** และ**ตัวผกผัน(inverse)** ของสมาชิกทุกตัว (ให้เหตุผล)

เฉลย Quiz 1 (รอบบ่าย 13:00)
MAC3310 พีชคณิตนามธรรม

หัวข้อ อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์และการดำเนินการทวิภาค **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
เวลา วันพุธที่ 26 กรกฎาคม 2566 เวลา 08:00-08:30 (สัปดาห์ที่ 3) ปีการศึกษา 1/2566
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. **(5 คะแนน)** จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1} \qquad \text{ทุก ๆ } n\in\mathbb{N}$$

Proof. Let $n\in\mathbb{N}$ and $P(n)$ represent the statement

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}.$$

For $n=1$, we obtain $\dfrac{1}{1\cdot 4}=\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{3\cdot 1+1}$. So, $P(1)$ is true.
Let $k\in\mathbb{N}$. Assume that $P(k)$ is ture. It follows that

$$\begin{aligned}\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}+\frac{1}{(3k+1)(3k+4)} &= \frac{k}{3k+1}+\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}\\ &= \frac{1}{3k+1}\left[k+\frac{1}{3k+4}\right]\\ &= \frac{1}{3k+1}\left[\frac{k(3k+4)+1}{3k+4}\right]\\ &= \frac{1}{3k+1}\left[\frac{3k^2+4k+1}{3k+4}\right]\\ &= \frac{1}{3k+1}\left[\frac{(3k+1)(k+1)}{3k+4}\right]\\ &= \frac{k+1}{3k+4}.\end{aligned}$$

It implies that $P(k+1)$ is true. By induction bypothesis, we conclude that

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1} \qquad \text{for all } n\in\mathbb{N}.$$

□

2. **(5 คะแนน)** การดำเนินการทวิภาค $*$ บน $\mathbb{Z}_7^* = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$ นิยามโดย

$$\bar{a} * \bar{b} = \overline{3ab} \qquad \text{เมื่อ } \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_7^*$$

จงสร้าง**ตารางเคย์เลย์** พร้อมหา**เอกลักษณ์ (identity)** และ**ตัวผกผัน(inverse)** ของสมาชิกทุกตัว (ให้เหตุผล)

Solution

$*$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$
$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{5}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$

By the above table, it is easy to see that

$$\bar{a} * \bar{5} = \bar{a} = \bar{5} * \bar{a} \qquad \text{for all } \bar{a} \in \mathbb{Z}_7^*.$$

Thus, $\bar{3}$ is the identity. The following table shows each inverse of elements in $\mathbb{Z}_6$ under $*$.

Elements	Inverses	Reasons
$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{1} * \bar{4} = \overline{12} = \bar{5}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2} * \bar{2} = \overline{12} = \bar{5}$
$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{3} * \bar{6} = \overline{54} = \bar{5}$
$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{4} * \bar{1} = \overline{12} = \bar{5}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{5} * \bar{5} = \overline{75} = \bar{5}$
$\bar{6}$	$\bar{3}$	$\bar{6} * \bar{3} = \overline{54} = \bar{5}$

Quiz 2 (รอบเช้า 8:00)
MAC3310 พีชคณิตนามธรรม

หัวข้อ กรุปการเรียงสับเปลี่ยนและกรุปย่อย **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
เวลา วันพุธที่ 9 สิงหาคม 2566 เวลา 08:00-08:30 (สัปดาห์ที่ 5) ปีการศึกษา 1/2566
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
ชื่อ-สกุล ..... **รหัสนักศึกษา**.....**หมู่เรียน**.....

---

1. **(5 คะแนน)** ให้ α และ β เป็นวัฏจักรที่ไม่มีส่วนร่วม (disjoint cycle) ใน S_6 โดยที่

$$(2\ 3\ 5)\alpha\beta(2\ 5\ 3) = (2\ 5\ 6)(6\ 2\ 3)$$

ถ้า α และ β ไม่ใช่เอกลักษณ์ จงหา **อันดับ (order)** ของ α และ β

2. **(5 คะแนน)** จงตรวจสอบว่า H เป็น**กรุปย่อย(subgroup)** ของ $GL_2(\mathbb{R})$ หรือไม่

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} : a \neq 0 \right\}$$

เฉลย Quiz 2 (รอบเช้า 8:00)
MAC3310 พีชคณิตนามธรรม

หัวข้อ กรุปการเรียงสับเปลี่ยนและกรุปย่อย **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
เวลา วันพุธที่ 9 สิงหาคม 2566 เวลา 08:00-08:30 (สัปดาห์ที่ 5) ปีการศึกษา 1/2566
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
ชื่อ-สกุล ..... **รหัสนักศึกษา**.....**หมู่เรียน**.....

---

1. **(5 คะแนน)** ให้ α และ β เป็นวัฏจักรที่ไม่มีส่วนร่วม (disjoint cycle) ใน S_6 โดยที่

$$(2\ 3\ 5)\alpha\beta(2\ 5\ 3) = (2\ 5\ 6)(6\ 2\ 3)$$

ถ้า α และ β ไม่ใช่เอกลักษณ์ จงหา **อันดับ (order)** ของ α และ β

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}(2\ 3\ 5)^{-1}(2\ 3\ 5)\alpha\beta(2\ 5\ 3)(2\ 5\ 3)^{-1} &= (2\ 3\ 5)^{-1}(2\ 5\ 6)(6\ 2\ 3)(2\ 5\ 3)^{-1}\\ (1)\alpha\beta(1) &= (5\ 3\ 2)(2\ 5\ 6)(6\ 2\ 3)(3\ 5\ 2)\\ \alpha\beta &= \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&5&6&4&2&3\end{pmatrix} = (2\ 5)(3\ 6)\end{aligned}$$

จะได้ว่า $\circ(\alpha\beta) = \circ((2\ 5)(3\ 6)) = \ell\text{cm}(2,2) = 2$
จาก α และ β เป็นวัฏจักรที่ไม่มีส่วนร่วม ทำให้ได้ว่า

$$\circ(\alpha\beta) = \ell\text{cm}(\circ(\alpha), \circ(\beta)) = 2$$

เนื่องจาก α และ β ไม่ใช่เอกลักษณ์ นั่นคือ $\circ(\alpha) \neq 1$ และ $\circ(\beta) \neq 1$ สรุปได้ว่า $\circ(\alpha) = 2$ และ $\circ(\beta) = 2$

2. **(5 คะแนน)** จงตรวจสอบว่า H เป็น**กรุปย่อย(subgroup)** ของ $GL_2(\mathbb{R})$ หรือไม่

$$H = \left\{ \begin{bmatrix}1&0\\0&a\end{bmatrix} : a \neq 0 \right\}$$

แนวคำตอบ สำหรับ $a = 1$ เห็นได้ชัดว่า $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} \in H$

ให้ $A = \begin{bmatrix}1&0\\0&a\end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix}1&0\\0&b\end{bmatrix}$ เป็นสมาชิกใน H นั่นคือ $a \neq 0$ และ $b \neq 0$ จะได้ว่า

$$AB^{-1} = \begin{bmatrix}1&0\\0&a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&b\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}1&0\\0&a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&\frac{1}{b}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0\\0&\frac{a}{b}\end{bmatrix} \in H$$

เนื่องจาก $\frac{a}{b} \neq 0$ จะได้ว่า $AB^{-1} \in H$ ดังนั้น H เป็นกรุปย่อยของ $GL_2(\mathbb{R})$

Quiz 2 (รอบบ่าย 13:00)
MAC3310 พีชคณิตนามธรรม

หัวข้อ กรุปการเรียงสับเปลี่ยนและกรุปย่อย **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
เวลา วันพุธที่ 9 สิงหาคม 2566 เวลา 13:00-13:30 (สัปดาห์ที่ 5) ปีการศึกษา 1/2566
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
ชื่อ-สกุล ..... **รหัสนักศึกษา**.....**หมู่เรียน**.....

---

1. **(5 คะแนน)** ให้ α และ β เป็นวัฏจักรที่ไม่มีส่วนร่วม (disjoint cycle) ใน S_6 โดยที่

$$\alpha(2\ 3\ 5)(2\ 5\ 3)\beta = (2\ 5\ 6)(6\ 2\ 3)$$

ถ้า α และ β ไม่ใช่เอกลักษณ์ จงหา **อันดับ (order)** ของ α และ β

2. **(5 คะแนน)** จงตรวจสอบว่า H เป็น**กรุปย่อย(subgroup)** ของ $GL_2(\mathbb{R})$ หรือไม่

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{a}{b} & 0 \\ 0 & \frac{b}{a} \end{bmatrix} : a > 0 \text{ และ } b > 0 \right\}$$

เฉลย Quiz 2 (รอบบ่าย 13:00)
MAC3310 พีชคณิตนามธรรม

หัวข้อ กรุปการเรียงสับเปลี่ยนและกรุปย่อย **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
เวลา วันพุธที่ 9 สิงหาคม 2566 เวลา 13:00-13:30 (สัปดาห์ที่ 5) ปีการศึกษา 1/2566
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
ชื่อ-สกุล ..... **รหัสนักศึกษา**.....**หมู่เรียน**.....

---

1. **(5 คะแนน)** ให้ α และ β เป็นวัฏจักรที่ไม่มีส่วนร่วม (disjoint cycle) ใน S_6 โดยที่

$$\alpha(2\ 3\ 5)(2\ 5\ 3)\beta = (2\ 5\ 6)(6\ 2\ 3)$$

ถ้า α และ β ไม่ใช่เอกลักษณ์ จงหา **อันดับ (order)** ของ α และ β

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\alpha(2\ 3\ 5)(2\ 5\ 3)\beta = (2\ 5\ 6)(6\ 2\ 3)$$
$$\alpha(1)\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} = (2\ 3)(5\ 6)$$

จะได้ว่า $\circ(\alpha\beta) = \circ((2\ 3)(5\ 6)) = \ell\text{cm}(2,2) = 2$
จาก α และ β เป็นวัฏจักรที่ไม่มีส่วนร่วม ทำให้ได้ว่า

$$\circ(\alpha\beta) = \ell\text{cm}(\circ(\alpha), \circ(\beta)) = 2$$

เนื่องจาก α และ β ไม่ใช่เอกลักษณ์ นั่นคือ $\circ(\alpha) \neq 1$ และ $\circ(\beta) \neq 1$ สรุปได้ว่า $\circ(\alpha) = 2$ และ $\circ(\beta) = 2$

2. **(5 คะแนน)** จงตรวจสอบว่า H เป็น**กรุปย่อย(subgroup)** ของ $GL_2(\mathbb{R})$ หรือไม่

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{a}{b} & 0 \\ 0 & \frac{b}{a} \end{bmatrix} : a > 0 \text{ และ } b > 0 \right\}$$

แนวคำตอบ สำหรับ $a = b = 1$ เห็นได้ชัดว่า $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in H$

ให้ $A = \begin{bmatrix} \frac{a}{b} & 0 \\ 0 & \frac{b}{a} \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} \frac{x}{y} & 0 \\ 0 & \frac{y}{x} \end{bmatrix}$ เป็นสมาชิกใน H นั่นคือ $a, b > 0$, และ $x, y > 0$ จะได้ว่า

$$AB^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{a}{b} & 0 \\ 0 & \frac{b}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{x}{y} & 0 \\ 0 & \frac{y}{x} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{a}{b} & 0 \\ 0 & \frac{b}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{y}{x} & 0 \\ 0 & \frac{x}{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{ay}{bx} & 0 \\ 0 & \frac{bx}{ay} \end{bmatrix} \in H$$

เนื่องจาก $ay > 0$ และ $bx > 0$ จะได้ว่า $AB^{-1} \in H$ ดังนั้น H เป็นกรุปย่อยของ $GL_2(\mathbb{R})$

Quiz 2 (เพิ่มเติม)
MAC3310 พีชคณิตนามธรรม

หัวข้อ กรุปการเรียงสับเปลี่ยนและกรุปย่อย **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
เวลา 30 นาที (สัปดาห์ที่ 5) ปีการศึกษา 1/2566
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
ชื่อ-สกุล ..... **รหัสนักศึกษา**.....**หมู่เรียน**.....

---

1. **(5 คะแนน)** ให้ α และ β เป็นวัฏจักรที่ไม่มีส่วนร่วม (disjoint cycle) ใน S_6 โดยที่

$$(1\ 2\ 3)\alpha(2\ 3\ 5)(2\ 5\ 3)\beta(1\ 3\ 2) = (1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6)$$

ถ้า α และ β ไม่ใช่เอกลักษณ์ จงหา **อันดับ (order)** ของ α และ β

2. **(5 คะแนน)** จงตรวจสอบว่า H เป็น**กรุปย่อย(subgroup)** ของ $GL_2(\mathbb{R})$ หรือไม่

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$$

เฉลย Quiz 2 (เพิ่มเติม)
MAC3310 พีชคณิตนามธรรม

หัวข้อ กรุปการเรียงสับเปลี่ยนและกรุปย่อย **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
เวลา 30 นาที (สัปดาห์ที่ 5) ปีการศึกษา 1/2566
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
ชื่อ-สกุล ..... **รหัสนักศึกษา**.....**หมู่เรียน**.....

---

1. **(5 คะแนน)** ให้ α และ β เป็นวัฏจักรที่ไม่มีส่วนร่วม (disjoint cycle) ใน S_6 โดยที่

$$(1\ 2\ 3)\alpha(2\ 3\ 5)(2\ 5\ 3)\beta(1\ 3\ 2) = (1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6)$$

ถ้า α และ β ไม่ใช่เอกลักษณ์ จงหา **อันดับ (order)** ของ α และ β

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}(1\ 2\ 3)\alpha(2\ 3\ 5)(2\ 5\ 3)\beta(1\ 3\ 2) &= (1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6)\\ (1\ 2\ 3)\alpha(1)\beta(1\ 3\ 2) &= (1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6)\\ (1\ 2\ 3)^{-1}(1\ 2\ 3)\alpha\beta(1\ 3\ 2)(1\ 3\ 2)^{-1} &= (1\ 2\ 3)^{-1}(1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6)(1\ 3\ 2)^{-1}\\ (1)\alpha\beta(1) &= (3\ 2\ 1)(1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6)(2\ 3\ 1)\\ \alpha\beta &= \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&5&2&6&3&1\end{pmatrix} = (1\ 4\ 6)(2\ 5\ 3)\end{aligned}$$

จะได้ว่า $\circ(\alpha\beta) = \circ((1\ 4\ 6)(2\ 5\ 3)) = \ell\mathrm{cm}(3,3) = 3$
จาก α และ β เป็นวัฏจักรที่ไม่มีส่วนร่วม ทำให้ได้ว่า

$$\circ(\alpha\beta) = \ell\mathrm{cm}(\circ(\alpha), \circ(\beta)) = 3$$

เนื่องจาก α และ β ไม่ใช่เอกลักษณ์ นั่นคือ $\circ(\alpha) \neq 1$ และ $\circ(\beta) \neq 1$ สรุปได้ว่า $\circ(\alpha) = 3$ และ $\circ(\beta) = 3$

2. **(5 คะแนน)** จงตรวจสอบว่า H เป็น**กรุปย่อย(subgroup)** ของ $GL_2(\mathbb{R})$ หรือไม่

$$H = \left\{ \begin{bmatrix}1&a\\0&1\end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$$

แนวคำตอบ สำหรับ $a = 1$ เห็นได้ชัดว่า $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} \in H$

ให้ $A = \begin{bmatrix}1&a\\0&1\end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix}1&b\\0&1\end{bmatrix}$ เป็นสมาชิกใน H นั่นคือ $a, b \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

$$AB^{-1} = \begin{bmatrix}1&a\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&b\\0&1\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}1&a\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-b\\0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&a-b\\0&1\end{bmatrix} \in H$$

เนื่องจาก $a - b \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า $AB^{-1} \in H$ ดังนั้น H เป็นกรุปย่อยของ $GL_2(\mathbb{R})$

Quiz 3 (รอบเช้า 8:00)
MAC3310 พีชคณิตนามธรรม

หัวข้อ ฟังก์ชันสาทิสสัณฐานและริง **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
เวลา วันพุธที่ 20 กันยายน 2566 เวลา 08:00-08:30 (สัปดาห์ที่ 11) ปีการศึกษา 1/2566
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
ชื่อ-สกุล ..... **รหัสนักศึกษา**.....**หมู่เรียน**.....

---

1. **(5 คะแนน)** กำหนดให้ $\varphi : (\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{R}^+, \cdot)$ โดย

$$\varphi(x + yi) = e^{x-y}$$

จงตรวจสอบว่า φ เป็น**ฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน (homomorphism)** หรือไม่ พร้อมทั้งหา **เคอร์เนล (kernel)**

2. **(5 คะแนน)** นิยามการดำเนินการทวิภาคบนจำนวนจริงโดย

$$a \oplus b = a + b$$
$$a \odot b = 3ab$$

จงตรวจสอบว่า $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ มี **สมบัติการแจกแจง (distrubutive)** หรือไม่

เฉลย Quiz 3 (รอบเช้า 8:00)
MAC3310 พีชคณิตนามธรรม

หัวข้อ ฟังก์ชันสาทิสสัณฐานและริง **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
เวลา วันพุธที่ 20 กันยายน 2566 เวลา 08:00-08:30 (สัปดาห์ที่ 11) ปีการศึกษา 1/2566
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. **(5 คะแนน)** กำหนดให้ $\varphi : (\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{R}^+, \cdot)$ โดย

$$\varphi(x + yi) = e^{x-y}$$

จงตรวจสอบว่า φ เป็น**ฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน (homomorphism)** หรือไม่ พร้อมทั้งหา **เคอร์เนล (kernel)**

แนวคำตอบ ให้ $x + yi$ และ $a + bi$ เป็นสมาชิกของ $\mathbb{C}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\varphi((x + yi) + (a + bi)) &= \varphi((x + a) + (y + b)i) = e^{(x+a)-(y+b)} = e^{(x-y)+(a-b)} \\ &= e^{x-y} \cdot e^{a-b} = \varphi(x + yi) \cdot \varphi(a + bi)\end{aligned}$$

ดังนั้น φ เป็นฟลก์ชันสาทิสสัณฐาน พิจารณา

$$\begin{aligned}Ker(\varphi) &= \{x + yi \in \mathbb{C} : \varphi(x + yi) = 1\} \\ &= \{x + yi \in \mathbb{C} : e^{x-y} = 1\} \\ &= \{x + yi \in \mathbb{C} : x - y = 0\} \\ &= \{x + yi \in \mathbb{C} : y = x\} \\ &= \{x + xi : x \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

2. **(5 คะแนน)** นิยามการดำเนินการทวิภาคบนจำนวนจริงโดย

$$\begin{aligned}a \oplus b &= a + b \\ a \odot b &= 3ab\end{aligned}$$

จงตรวจสอบว่า $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ มี **สมบัติการแจกแจง (distrubutive)** หรือไม่

แนวคำตอบ ให้ $a, b, c \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}a \odot (b \oplus c) &= a \odot (b + c) \\ &= 3a(b + c) \\ &= 3ab + 3ac \\ &= (3ab) \oplus (3ac) \\ &= (a \odot b) \oplus (a \odot c) \\ (b \oplus c) \odot a &= (b + c) \odot a \\ &= 3(b + c)a \\ &= 3ba + 3ca \\ &= (3ba) \oplus (3ca) \\ &= (b \odot a) \oplus (c \odot a)\end{aligned}$$

ดังนั้น $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ มีสมบัติการแจกแจง

Quiz 3 (รอบบ่าย 13:00)
MAC3310 พีชคณิตนามธรรม

หัวข้อ ฟังก์ชันสาทิสสัณฐานและริง **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
เวลา วันพุธที่ 20 กันยายน 2566 เวลา 13:00-13:30 (สัปดาห์ที่ 11) ปีการศึกษา 1/2566
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
ชื่อ-สกุล ..... **รหัสนักศึกษา**.....**หมู่เรียน**.....

---

1. **(5 คะแนน)** กำหนดให้ $\varphi : (\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{R}^+, \cdot)$ โดย

$$\varphi(x + yi) = \frac{1}{e^{2x+y}}$$

จงตรวจสอบว่า φ เป็น**ฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน (homomorphism)** หรือไม่ พร้อมทั้งหา **เคอร์เนล (kernel)**

2. **(5 คะแนน)** นิยามการดำเนินการทวิภาคบนจำนวนจริงโดย

$$a \oplus b = 3a - 3b$$
$$a \odot b = 2ab$$

จงตรวจสอบว่า $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ มี **สมบัติการแจกแจง (distrubutive)** หรือไม่

เฉลย Quiz 3 (รอบบ่าย 13:00)
MAC3310 พีชคณิตนามธรรม

หัวข้อ ฟังก์ชันสาทิสสัณฐานและริง **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
เวลา วันพุธที่ 20 กันยายน 2566 เวลา 13:00-13:30 (สัปดาห์ที่ 11) ปีการศึกษา 1/2566
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. **(5 คะแนน)** กำหนดให้ $\varphi : (\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{R}^+, \cdot)$ โดย

$$\varphi(x+yi) = \frac{1}{e^{2x+y}}$$

จงตรวจสอบว่า φ เป็น**ฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน (homomorphism)** หรือไม่ พร้อมทั้งหา **เคอร์เนล (kernel)**

แนวคำตอบ ให้ $x+yi$ และ $a+bi$ เป็นสมาชิกของ $\mathbb{C}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\varphi((x+yi)+(a+bi)) &= \varphi((x+a)+(y+b)i) = \frac{1}{e^{2(x+a)+(y+b)}} = \frac{1}{e^{(2x+y)+(2a+b)}} \\ &= \frac{1}{e^{2x+y}} \cdot \frac{1}{e^{2a+b}} = \varphi(x+yi)\cdot\varphi(a+bi)\end{aligned}$$

ดังนั้น φ เป็นฟลก์ชันสาทิสสัณฐาน พิจารณา

$$\begin{aligned}Ker(\varphi) &= \{x+yi \in \mathbb{C} : \varphi(x+yi) = 1\} \\ &= \left\{x+yi \in \mathbb{C} : \frac{1}{e^{2x+y}} = 1\right\} \\ &= \{x+yi \in \mathbb{C} : 2x+y = 0\} \\ &= \{x+yi \in \mathbb{C} : y = -2x\} \\ &= \{x-2xi : x \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

2. **(5 คะแนน)** นิยามการดำเนินการทวิภาคบนจำนวนจริงโดย

$$\begin{aligned}a \oplus b &= 3a - 3b \\ a \odot b &= 2ab\end{aligned}$$

จงตรวจสอบว่า $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ มี **สมบัติการแจกแจง (distrubutive)** หรือไม่

แนวคำตอบ ให้ $a, b, c \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}a \odot (b \oplus c) &= a \odot (3b - 3c) \\ &= 2a(3b-3c) = 6ab - 6ac \\ &= 3(2ab) - 3(2ac) \\ &= (2ab) \oplus (2ac) \\ &= (a \odot b) \oplus (a \odot c) \\ (b \oplus c) \odot a &= (3b - 3c) \odot a \\ &= 2(3b-3c)a = 6ba - 6ca \\ &= 3(2ba) - 3(2ca) \\ &= (2ba) \oplus (2ca) \\ &= (b \odot a) \oplus (c \odot a)\end{aligned}$$

ดังนั้น $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ มีสมบัติการแจกแจง

Quiz 4 (รอบเช้า 8:00)
MAC3310 พีชคณิตนามธรรม

หัวข้อ ไอดีลและตัวหารศูนย์ **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
เวลา วันพฤหัสบดีที่ 5 ตุลาคม 2566 เวลา 08:00-08:30 (สัปดาห์ที่ 13) ปีการศึกษา 1/2566
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
ชื่อ-สกุล ..... **รหัสนักศึกษา**.....**หมู่เรียน**.....

---

1. **(5 คะแนน)** กำหนดให้

$$I = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

จงตรวจสอบว่า I เป็น**ไอดีลขวา (right ideal)** และ/หรือ **ไอดีลซ้าย (left ideal)** ของ $M_{33}(\mathbb{R})$ หรือไม่

2. **(5 คะแนน)** ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ ถ้า

$$\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_8 \text{ มี ตัวหารศูนย์ (zero divisor) ทั้งหมด 11 ตัว}$$

จงหา**จำนวนตัวหารศูนย์**ของ $\mathbb{Z}_{3p^2}$

เฉลย Quiz 4 (รอบเช้า 8:00)
MAC3310 พีชคณิตนามธรรม

หัวข้อ ไอดีลและตัวหารศูนย์ **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
เวลา วันพฤหัสบดีที่ 5 ตุลาคม 2566 เวลา 08:00-08:30 (สัปดาห์ที่ 13) ปีการศึกษา 1/2566
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. **(5 คะแนน)** กำหนดให้

$$I = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

จงตรวจสอบว่า I เป็น**ไอดีลขวา (right ideal)** และ/หรือ **ไอดีลซ้าย (left ideal)** ของ $M_{33}(\mathbb{R})$ หรือไม่

แนวคำตอบ ให้ $a, b, c, x, y, z, s, t, d, u, v, w \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y & z \\ s & t & d \\ u & v & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ ax + bs + cu & ay + bt + cv & az + bd + cw \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in I$$

ดังนั้น I เป็นไอดีลขวาของ $M_{33}(\mathbb{R})$ แต่

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \notin I$$

ดังนั้น I ไม่เป็นไอดีลซ้ายของ $M_{33}(\mathbb{R})$

2. **(5 คะแนน)** ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ ถ้า

$$\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_8 \text{ มี ตัวหารศูนย์ (zero divisor) ทั้งหมด 11 ตัว}$$

จงหา**จำนวนตัวหารศูนย์**ของ $\mathbb{Z}_{3p^2}$

แนวคำตอบ กรณี $p = 2$ ตัวหารศูนย์ของ $\mathbb{Z}_8$ คือ $\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}$ พิจารณา

ตัวหารศูนย์	เงื่อนไข	จำนวนตัว
$(\bar{0}, \bar{x})$	$x = 1, 2, ..., 7$	7
$(\bar{x}, \bar{0})$	$x = 1$	1
$(\bar{x}, \bar{2})$	$x = 1$	1
$(\bar{x}, \bar{4})$	$x = 1$	1
$(\bar{x}, \bar{6})$	$x = 1$	1

จะได้จำนวนตัวหารศูนย์ของ $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_8$ มี 11 ตัว ดังนั้น $p = 2$ จะได้ว่าตัวหารศูนย์ของ $\mathbb{Z}_{3p^2} = \mathbb{Z}_{12}$ เท่ากับ

$$(12 - 1) - \phi(12) = 11 - (2^2 - 2)(3 - 1) = 11 - 4 = 7 \quad \#$$

กรณี $p > 2$ จะได้ว่า $\gcd(p, 8) = 1$ ทำให้ได้ว่า $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_8 \cong \mathbb{Z}_{8p}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} (8p - 1) - \phi(8p) = (8p - 1) - (2^3 - 2^2)(p - 1) &= 11 \\ 8p - 1 - 4p + 4 &= 11 \\ 4p &= 8 \\ p &= 2 \quad (\text{ ขัดแย้งกับเงื่อนไข } p > 2) \end{aligned}$$

Quiz 4 (รอบบ่าย 13:00)
MAC3310 พีชคณิตนามธรรม

หัวข้อ ไอดีลและตัวหารศูนย์ **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
เวลา วันพฤหัสบดีที่ 5 ตุลาคม 2566 เวลา 13:00-13:30 (สัปดาห์ที่ 13) ปีการศึกษา 1/2566
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
ชื่อ-สกุล ..... **รหัสนักศึกษา**.....**หมู่เรียน**.....

---

1. **(5 คะแนน)** กำหนดให้

$$I = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

จงตรวจสอบว่า I เป็น**ไอดีลขวา (right ideal)** และ/หรือ **ไอดีลซ้าย (left ideal)** ของ $M_{33}(\mathbb{R})$ หรือไม่

2. **(5 คะแนน)** ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะซึ่ง $p > 2$ ถ้า

$\mathbb{Z}_{2p^2}$ มี ตัวหารศูนย์ (zero divisor) ทั้งหมด 11 ตัว

จงหา**จำนวนตัวหารศูนย์**ของ $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{23}$

เฉลย Quiz 4 (รอบบ่าย 13:00)
MAC3310 พีชคณิตนามธรรม

หัวข้อ ไอดีลและตัวหารศูนย์ **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
เวลา วันพฤหัสบดีที่ 5 ตุลาคม 2566 เวลา 13:00-13:30 (สัปดาห์ที่ 13) ปีการศึกษา 1/2566
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. **(5 คะแนน)** กำหนดให้

$$I = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

จงตรวจสอบว่า I เป็น**ไอดีลขวา (right ideal)** และ/หรือ **ไอดีลซ้าย (left ideal)** ของ $M_{33}(\mathbb{R})$ หรือไม่

แนวคำตอบ ให้ $a, b, c, x, y, z, s, t, d, u, v, w \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} x & y & z \\ s & t & d \\ u & v & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & xa+yb+zc \\ 0 & 0 & sa+tb+dc \\ 0 & 0 & ua+vb+wc \end{bmatrix} \in I$$

ดังนั้น I เป็นไอดีลซ้ายของ $M_{33}(\mathbb{R})$ แต่

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \notin I$$

ดังนั้น I ไม่เป็นไอดีลขวาของ $M_{33}(\mathbb{R})$

2. **(5 คะแนน)** ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะซึ่ง $p > 2$ ถ้า

$$\mathbb{Z}_{2p^2} \text{ มี ตัวหารศูนย์ (zero divisor) ทั้งหมด 11 ตัว}$$

จงหา**จำนวนตัวหารศูนย์**ของ $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{23}$

แนวคำตอบ เนื่องจาก p เป็นจำนวนเฉพาะซึ่ง $p > 2$ ดังนั้น $\gcd(2, p) = 1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} (2p^2 - 1) - \phi(2p^2) &= 11 \\ 2p^2 - 1 - \phi(2)\phi(p^2) &= 11 \\ 2p^2 - 1 - (2-1)(p^2 - p) &= 11 \\ 2p^2 - 1 - p^2 + p &= 11 \\ p^2 + p - 12 &= 0 \\ (p-3)(p+4) &= 0 \end{aligned}$$

ฉะนั้น $p = 3$ จะเห็นว่า $\gcd(3, 23) = 1$ ทำให้ได้ว่า $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{23} = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{23} \cong \mathbb{Z}_{3 \cdot 23}$ ดังนั้นจำนวนตัวหารศูนย์ของ $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{23}$ เท่ากับ

$$\begin{aligned} (3 \cdot 23 - 1) - \phi(3 \cdot 23) &= (69 - 1) - (3-1)(23-1) \\ &= 68 - (2)(22) = 68 - 44 = 24 \quad \# \end{aligned}$$