คณิตศาสตร์

Quiz 1 : พีชคณิตนามธรรม MAC3310

หัวข้อ อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ และบทนิยามกรุป **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน

เวลา สัปดาห์ที่ 3 ปีการศึกษา 1/2565

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

ชื่อ–สกุล .... **รหัสนักศึกษา**.................................**หมู่เรียน**............

---

1. **(5 คะแนน)** สำหรับจำนวนนับ n ใด ๆ จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

$$\frac{1^2}{2^1}+\frac{2^2}{2^2}+\frac{3^2}{2^3}+\cdots+\frac{n^2}{2^n}=6-\frac{1}{2^n}(n^2+4n+6)$$

2. **(5 คะแนน)** กำหนดให้

$$a*b=\sqrt{2a^2b^2} \quad \text{เมื่อ } a,b\in\mathbb{R}^+$$

จงตรวจสอบว่า $(\mathbb{R}^+,*)$ เป็นกรุปหรือไม่

เฉลย Quiz 1 : พีชคณิตนามธรรม MAC3310

หัวข้อ อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ และบทนิยามกรุป **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
เวลา สัปดาห์ที่ 3 ปีการศึกษา 1/2565
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. **(5 คะแนน)** สำหรับจำนวนนับ n ใด ๆ จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

$$\frac{1^2}{2^1}+\frac{2^2}{2^2}+\frac{3^2}{2^3}+\cdots+\frac{n^2}{2^n}=6-\frac{1}{2^n}(n^2+4n+6)$$

บทพิสูจน์. ให้ $n \in \mathbb{N}$ และ $P(n)$ แทนข้อความ

$$\frac{1^2}{2^1}+\frac{2^2}{2^2}+\frac{3^2}{2^3}+\cdots+\frac{n^2}{2^n}=6-\frac{1}{2^n}(n^2+4n+6)$$

ขั้นฐาน : เนื่องจาก $\frac{1^1}{2^1}=\frac{1}{2}=6-\frac{11}{2}=6-\frac{1}{2}(1^2+4(1)+6)$ ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

ขั้นอุปนัย : ให้ $k \in \mathbb{N}$ สมมติ $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือ

$$\frac{1^2}{2^1}+\frac{2^2}{2^2}+\frac{3^2}{2^3}+\cdots+\frac{k^2}{2^k}=6-\frac{1}{2^k}(k^2+4k+6)$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\frac{1^2}{2^1}+\frac{2^2}{2^2}+\frac{3^2}{2^3}+\cdots+\frac{k^2}{2^k}+\frac{(k+1)^2}{2^{k+1}} &= 6-\frac{1}{2^k}(k^2+4k+6)+\frac{(k+1)^2}{2^{k+1}}\\
&= 6-\frac{2}{2^{k+1}}(k^2+4k+6)+\frac{1}{2^{k+1}}[k^2+2k+1]\\
&= 6-\frac{1}{2^{k+1}}(2k^2+8k+12)+\frac{1}{2^{k+1}}[k^2+2k+1]\\
&= 6-\frac{1}{2^{k+1}}\left[(2k^2+8k+12)-(k^2+2k+1)\right]\\
&= 6-\frac{1}{2^{k+1}}\left[k^2+6k+11\right]\\
&= 6-\frac{1}{2^{k+1}}\left[(k^2+2k+1)+(4k+4)+6\right]\\
&= 6-\frac{1}{2^{k+1}}\left[(k+1)^2+4(k+1)+6\right]
\end{aligned}$$

ทำให้สรุปได้ว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เราสรุปได้ว่า

$$\frac{1^2}{2^1}+\frac{2^2}{2^2}+\frac{3^2}{2^3}+\cdots+\frac{n^2}{2^n}=6-\frac{1}{2^n}(n^2+4n+6)$$

สำหรับทุกจำนวนนับ n $\square$

2. **(5 คะแนน)** กำหนดให้

$$a * b = \sqrt{2a^2b^2} \quad \text{เมื่อ } a, b \in \mathbb{R}^+$$

จงตรวจสอบว่า $(\mathbb{R}^+, *)$ เป็นกรุปหรือไม่

บทพิสูจน์. ให้ $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
a * (b * c) &= a * \left(\sqrt{2b^2c^2}\right) = \sqrt{2a^2(\sqrt{2b^2c^2})^2} \\
&= \sqrt{2a^2(2b^2c^2)} = \sqrt{2(2a^2b^2)c^2} \\
&= \sqrt{2(\sqrt{2a^2b^2})^2c^2} \\
&= \left(\sqrt{2a^2b^2}\right) * c = (a * b) * c
\end{aligned}$$

ดังนั้น $*$ มีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม เนื่องจาก $a > 0$ จะได้ว่า $|a| = a$ ฉะนั้น

$$\begin{aligned}
a * \frac{1}{\sqrt{2}} &= \sqrt{2a^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{2a^2\left(\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{a^2} = |a| = a \\
\frac{1}{\sqrt{2}} * a &= \sqrt{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 a^2} = \sqrt{2\left(\frac{1}{2}\right)a^2} = \sqrt{a^2} = |a| = a
\end{aligned}$$

นั้นคือ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ เป็นเอกลักษณ์ใน $\mathbb{R}^+$ และสำหรับ $a \in \mathbb{Q}^+$ แล้ว

$$\begin{aligned}
a * \left(\frac{1}{4a}\right) &= \sqrt{2a \cdot \frac{1}{4a}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
\left(\frac{1}{4a}\right) * a &= \sqrt{2\frac{1}{4a} \cdot a} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

ฉะนั้น $\dfrac{1}{4a}$ เป็นตัวผกผันของ a

สรุปได้ว่า $(\mathbb{R}^+, *)$ เป็นกรุป $\square$

Quiz 1 (v.2) : พีชคณิตนามธรรม MAC3310

หัวข้อ อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ และบทนิยามกรุป **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน

เวลา สัปดาห์ที่ 3 ปีการศึกษา 1/2565

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

ชื่อ–สกุล.. **รหัสนักศึกษา**.....................................**หมู่เรียน**............

---

1. **(5 คะแนน)** สำหรับจำนวนนับ n ใด ๆ จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

$$\frac{1^2}{2^1}+\frac{3^2}{2^2}+\frac{5^2}{2^3}+\cdots+\frac{(2n-1)^2}{2^n}=17-\frac{1}{2^n}(4n^2+12n+17)$$

2. **(5 คะแนน)** กำหนดให้

$$a*b=-\sqrt{2a^2b^2} \quad \text{เมื่อ } a,b\in\mathbb{R}^-$$

จงตรวจสอบว่า $(\mathbb{R}^-,*)$ เป็นกรุปหรือไม่

คณิตศาสตร์

เฉลย Quiz 1 (v.2) : พีชคณิตนามธรรม MAC3310

หัวข้อ อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ และบทนิยามกรุป **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
เวลา สัปดาห์ที่ 3 ปีการศึกษา 1/2565
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. **(5 คะแนน)** สำหรับจำนวนนับ n ใด ๆ จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

$$\frac{1^2}{2^1}+\frac{3^2}{2^2}+\frac{5^2}{2^3}+\cdots+\frac{(2n-1)^2}{2^n}=17-\frac{1}{2^n}(4n^2+12n+17)$$

บทพิสูจน์. ให้ $n\in\mathbb{N}$ และ $P(n)$ แทนข้อความ

$$\frac{1^2}{2^1}+\frac{3^2}{2^2}+\frac{5^2}{2^3}+\cdots+\frac{(2n-1)^2}{2^n}=17-\frac{1}{2^n}(4n^2+12n+17)$$

ขั้นฐาน : เนื่องจาก $\dfrac{1^2}{2^2}=\dfrac{1}{2}=17-\dfrac{33}{2}=17-\dfrac{1}{2}(4\cdot 1^2+12(1)+17)$ ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

ขั้นอุปนัย : ให้ $k\in\mathbb{N}$ สมมติ $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือ

$$\frac{1^2}{2^1}+\frac{3^2}{2^2}+\frac{5^2}{2^3}+\cdots+\frac{(2k-1)^2}{2^k}=17-\frac{1}{2^k}(4k^2+12k+17)$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\frac{1^2}{2^1}+\frac{3^2}{2^2}+\frac{5^2}{2^3}+\cdots+\frac{(2k-1)^2}{2^k}+\frac{(2k+1)^2}{2^{k+1}}&=17-\frac{1}{2^k}(4k^2+12k+113)+\frac{(2k+1)^2}{2^{k+1}}\\&=17-\frac{2}{2^{k+1}}(4k^2+12k+17)+\frac{1}{2^{k+1}}[4k^2+4k+1]\\&=17-\frac{1}{2^{k+1}}(8k^2+24k+34)+\frac{1}{2^{k+1}}[4k^2+4k+1]\\&=17-\frac{1}{2^{k+1}}\left[(8k^2+24k+34)-(4k^2+4k+1)\right]\\&=17-\frac{1}{2^{k+1}}\left[4k^2+20k+33\right]\\&=17-\frac{1}{2^{k+1}}\left[(4k^2+8k+4)+12k+12+17\right]\\&=17-\frac{1}{2^{k+1}}\left[4(k^2+2k+1)+12(k+1)+17\right]\\&=17-\frac{1}{2^{k+1}}\left[4(k+1)^2+12(k+1)+17\right]\end{aligned}$$

ทำให้สรุปได้ว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เราสรุปได้ว่า

$$\frac{1^2}{2^1}+\frac{3^2}{2^2}+\frac{5^2}{2^3}+\cdots+\frac{(2n-1)^2}{2^n}=17-\frac{1}{2^n}(4n^2+12n+17)$$

สำหรับทุกจำนวนนับ n $\square$

2. **(5 คะแนน)** กำหนดให้

$$a * b = -\sqrt{2a^2b^2} \quad \text{เมื่อ } a, b \in \mathbb{R}^-$$

จงตรวจสอบว่า $(\mathbb{R}^-, *)$ เป็นกรุปหรือไม่

บทพิสูจน์. ให้ $a, b, c \in \mathbb{R}^-$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} a * (b * c) &= a * \left(-\sqrt{2b^2c^2}\right) = \sqrt{2a^2(-\sqrt{2b^2c^2})^2} \\ &= \sqrt{2a^2(2b^2c^2)} = \sqrt{2(2a^2b^2)c^2} \\ &= \sqrt{2(-\sqrt{2a^2b^2})^2c^2} \\ &= \left(-\sqrt{2a^2b^2}\right) * c = (a * b) * c \end{aligned}$$

ดังนั้น $*$ มีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม เนื่องจาก $a < 0$ จะได้ว่า $|a| = -a$ ฉะนั้น

$$\begin{aligned} a * \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= -\sqrt{2a^2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = -\sqrt{2a^2\left(\frac{1}{2}\right)} = -\sqrt{a^2} = -|a| = -(-a) = a \\ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) * a &= -\sqrt{2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 a^2} = -\sqrt{2\left(\frac{1}{2}\right)a^2} = -\sqrt{a^2} = -|a| = -(-a) = a \end{aligned}$$

นั้นคือ $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ เป็นเอกลักษณ์ใน $\mathbb{R}^+$ และสำหรับ $a \in \mathbb{Q}^+$ แล้ว

$$\begin{aligned} a * \left(\frac{1}{4a}\right) &= -\sqrt{2a \cdot \frac{1}{4a}} = -\sqrt{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \left(\frac{1}{4a}\right) * a &= -\sqrt{2\frac{1}{4a} \cdot a} = -\sqrt{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

ฉะนั้น $\dfrac{1}{4a}$ เป็นตัวผกผันของ a

สรุปได้ว่า $(\mathbb{R}^-, *)$ เป็นกรุป $\square$

Quiz 2 : พีชคณิตนามธรรม MAC3310

หัวข้อ อันดับสมาชิก และกรุปย่อย **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน

เวลา สัปดาห์ที่ 5 ปีการศึกษา 1/2565

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

ชื่อ–สกุล.. **รหัสนักศึกษา**.......................................**หมู่เรียน**.............

---

1. **(5 คะแนน)** จงหา **อันดับ (order)** ของ

$$\alpha = (1\,2\,3)^{-2565}[(1\,2\,3)(2\,3\,5)]^{2565}(2\,3\,5)^{-2565} \quad \text{ซึ่งเป็นสมาชิกใน} \quad S_5$$

2. **(5 คะแนน)** ให้ $H \subseteq \mathbb{C}^*$ กำหนดโดย

$$H = \{x + yi : x^2 + y^2 = 1\}$$

จงตรวจสอบว่า H เป็น**กรุปย่อย (subgroup)** ของ $\mathbb{C}^*$ ภายใต้การคูณ

เฉลย Quiz 2 : พีชคณิตนามธรรม MAC3310

หัวข้อ อันดับสมาชิก และกรุปย่อย **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
เวลา สัปดาห์ที่ 5 ปีการศึกษา 1/2565
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. **(5 คะแนน)** จงหา **อันดับ** (order) ของ

$$\alpha = (1\,2\,3)^{-2565}[(1\,2\,3)(2\,3\,5)]^{2565}(2\,3\,5)^{-2565} \quad \text{ซึ่งเป็นสมาชิกใน} \quad S_5$$

แนวคำตอบ เนื่องจาก $(1\,2\,3)(2\,3\,5) = (1\,2)(3\,5)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\alpha &= [(1\,2\,3)^3]^{-855}[(1\,2)(3\,5)]^{2565}[(2\,3\,5)^3]^{-855} \\
&= (1)^{-855}(1\,2)^{2565}(3\,5)^{2565}(1)^{-855} \\
&= (1)(1\,2)^{1282\cdot 2+1}(3\,5)^{1282\cdot 2+1}(1) \\
&= [(1\,2)^2]^{1282}(1\,2)[(3\,5)^2]^{1282}(3\,5) \\
&= (1)^{1282}(1\,2)(1)^{1282}(3\,5) \\
&= (1)(1\,2)(1)(3\,5) \\
&= (1\,2)(3\,5)
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\circ(\alpha) = \ell\text{cm}(2, 2) = 2 \quad \#$$

2. **(5 คะแนน)** ให้ $H \subseteq \mathbb{C}^*$ กำหนดโดย

$$H = \{x + yi : x^2 + y^2 = 1\}$$

จงตรวจสอบว่า H เป็น**กรุปย่อย** (subgraup) ของ $\mathbb{C}^*$ ภายใต้การคูณ

บทพิสูจน์. เลือก $x = 1$ และ $y = 0$ ซึ่ง $x^2 + y^2 = 1^2 + 0^2 = 1$ จะได้ว่า $1 = 1 + 0i \in H$
ให้ $x + y$ และ $a + bi$ เป็นสมาชิกของ H จะได้ว่า $x^2 + y^2 = 1$ และ $a^2 + b^2 = 1$ พิจารณา

$$\begin{aligned}
(x + yi)(a + bi)^{-1} &= \frac{x + yi}{a + bi} = \frac{x + yi}{a + bi} \cdot \frac{a - bi}{a - bi} \\
&= \frac{xa - xbi + yai + by}{a^2 + b^2} = \frac{(xa + by) + (ya - xb)i}{1} \\
&= (xa + by) + (ya - xb)i
\end{aligned}$$

จะเห็นว่า

$$\begin{aligned}
(xa + by)^2 + (ya - xb)^2 &= x^2a^2 + 2abxy + b^2y^2 + y^2a^2 - 2abxy + x^2b^2 \\
&= (x^2a^2 + x^2b^2) + (y^2a^2 + b^2y^2) \\
&= x^2(a^2 + b^2) + y^2(a^2 + b^2) \\
&= x^2 \cdot 1 + y^2 \cdot 1 = x^2 + y^2 = 1
\end{aligned}$$

ดังนั้น $(x + yi)(a + bi)^{-1} \in H$ สรุปได้ว่า $H \leq \mathbb{C}^*$ $\square$

คณิตศาสตร์

Quiz 3 : พีชคณิตนามธรรม MAC3310

หัวข้อ ฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน และหน่วย **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน

เวลา สัปดาห์ที่ 10 ปีการศึกษา 1/2565

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

ชื่อ–สกุล.. **รหัสนักศึกษา**....................................**หมู่เรียน**............

---

1. **(5 คะแนน)** กำหนดให้ $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{12}$ นิยามโดย

$$\varphi(x) = \overline{(4x)^3}$$

จงตรวจสอบว่า φ เป็น **ฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน** (homomorphisim) หรือไม่ พร้อมหา **เคอร์เนล** (kernel)

2. **(5 คะแนน)** จงหาสมาชิก u ทั้งหมดที่เป็นไปได้ ที่เป็น **หน่วย** (unit) ในริง $M_{22}(\mathbb{Z})$ เมื่อ

$$u = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

หมายเหตุ : ริง $M_{22}(\mathbb{Z})$ มีสมาชิกในเมทริกซ์เป็นจำนวนเต็ม

คณิตศาสตร์

เฉลย Quiz 3 : พีชคณิตนามธรรม MAC3310

หัวข้อ ฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน และหน่วย **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน

เวลา สัปดาห์ที่ 10 ปีการศึกษา 1/2565

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. **(5 คะแนน)** กำหนดให้ $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{12}$ นิยามโดย

$$\varphi(x) = \overline{(4x)^3}$$

จงตรวจสอบว่า φ เป็น **ฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน** (homomorphisim) หรือไม่ พร้อมหา **เคอร์เนล** (kernel)

แนวคำตอบ ให้ $x, y \in \mathbb{Z}$ แล้ว

$$\begin{aligned}
\varphi(x+y) &= \overline{(4(x+y))^3} = \overline{(4x+4y)^3} \\
&= \overline{(4x)^3 + 3(4x)^2(4y) + 3(4x)(4y)^2 + (4y)^3} \\
&= \overline{(4x)^3 + 12(4x)^2(y) + 12(x)(4y)^2 + (4y)^3} \\
&= \overline{(4x)^3} + \overline{12(4x)^2(y)} + \overline{12(x)(4y)^2} + \overline{(4y)^3} \\
&= \overline{(4x)^3} + \bar{0} + \bar{0} + \overline{(4y)^3} \\
&= \overline{(4x)^3} + \overline{(4y)^3} \\
&= \varphi(x) + \varphi(y)
\end{aligned}$$

ดังนั้น φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน และจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\text{Ker}(\varphi) &= \{x \in \mathbb{Z} : \varphi(x) = \bar{0}\} \\
&= \{x \in \mathbb{Z} : \overline{(4x)^3} = \bar{0}\} \\
&= \{x \in \mathbb{Z} : 12 \mid (4x)^3\} \\
&= \{x \in \mathbb{Z} : 12 \mid 64x^3\} \\
&= \{x \in \mathbb{Z} : 3 \mid 16x^3\} \\
&= \{x \in \mathbb{Z} : 3 \mid x^3\} \\
&= \{x \in \mathbb{Z} : 3 \mid x\} \\
&= 3\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

2. **(5 คะแนน)** จงหาสมาชิก u ทั้งหมดที่เป็นไปได้ ที่เป็น **หน่วย** (unit) ในริง $M_{22}(\mathbb{Z})$ เมื่อ

$$u = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

หมายเหตุ : ริง $M_{22}(\mathbb{Z})$ มีสมาชิกในเมทริกซ์เป็นจำนวนเต็ม

แนวคำตอบ เนื่องจาก u เป็นหน่วยใน $M_{22}(\mathbb{Z})$ ดังนั้น u มีตัวผกผันซึ่งเป็นสมาชิกใน $M_{22}(\mathbb{Z})$ นั่นคือ

$$u^{-1} = \frac{1}{ab}\begin{bmatrix} b & -1 \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{b} & -\frac{1}{ab} \\ 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \in M_{22}(\mathbb{Z})$$

ดังนั้น $a \mid 1$, $b \mid 1$ และ $ab \mid 1$ ทำให้ได้ว่า $a, b = \pm 1$ สรุปได้ว่า u เป็นไปทั้งหมด 4 แบบคือ

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Quiz 3 (v.2) : พีชคณิตนามธรรม MAC3310

หัวข้อ ฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน และหน่วย **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
เวลา สัปดาห์ที่ 10 ปีการศึกษา 1/2565
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
ชื่อ–สกุล... **รหัสนักศึกษา**.................................... **หมู่เรียน**............

---

1. **(5 คะแนน)** กำหนดให้ $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ นิยามโดย

$$\varphi(x) = \frac{\cos x + i \sin x}{\cos x - i \sin x}$$

จงตรวจสอบว่า φ เป็น **ฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน** (homomorphisim) หรือไม่ พร้อมหา **เคอร์เนล** (kernel)

2. **(5 คะแนน)** จงหาสมาชิก u ทั้งหมดที่เป็นไปได้ ที่เป็น **หน่วย** (unit) ในริง $M_{22}(\mathbb{Z})$ เมื่อ

$$u = \begin{bmatrix} a & 2 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

หมายเหตุ : ริง $M_{22}(\mathbb{Z})$ มีสมาชิกในเมทริกซ์เป็นจำนวนเต็ม

เฉลย Quiz 3 (V.2): พีชคณิตนามธรรม MAC3310

หัวข้อ ฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน และหน่วย **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
เวลา สัปดาห์ที่ 10 ปีการศึกษา 1/2565
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. **(5 คะแนน)** กำหนดให้ $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ นิยามโดย

$$\varphi(x) = \frac{\cos x + i\sin x}{\cos x - i\sin x}$$

จงตรวจสอบว่า φ เป็น **ฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน** (homomorphisim) หรือไม่ พร้อมหา **เคอร์เนล** (kernel)

แนวคำตอบ ให้ $x \in \mathbb{R}$ พิจารณา

$$\frac{\cos x + i\sin x}{\cos x - i\sin x} = \frac{\cos x + i\sin x}{\cos x - i\sin x} \cdot \frac{\cos x + i\sin x}{\cos x + i\sin x} = \frac{(\cos x + i\sin x)^2}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{(\text{cis}x)^2}{1} = \text{cis}(2x)$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\varphi(x+y) &= \text{cis}(2(x+y)) = \text{cis}(2x+2y) \\ &= \text{cis}(2x)\cdot\text{cis}(2y) \\ &= \varphi(x)\varphi(y)\end{aligned}$$

ดังนั้น φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน และจะได้ว่า

$$\begin{aligned}\text{Ker}(\varphi) &= \{x \in \mathbb{Z} : \varphi(x) = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : \cos 2x + i\sin 2x = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : \cos 2x = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : 2x = 2k\pi\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x = k\pi\} \\ &= \langle \pi \rangle\end{aligned}$$

2. **(5 คะแนน)** จงหาสมาชิก u ทั้งหมดที่เป็นไปได้ ที่เป็น **หน่วย** (unit) ในริง $M_{22}(\mathbb{Z})$ เมื่อ

$$u = \begin{bmatrix} a & 2 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

หมายเหตุ : ริง $M_{22}(\mathbb{Z})$ มีสมาชิกในเมทริกซ์เป็นจำนวนเต็ม

แนวคำตอบ เนื่องจาก u เป็นหน่วยใน $M_{22}(\mathbb{Z})$ ดังนั้น u มีตัวผกผันซึ่งเป็นสมาชิกใน $M_{22}(\mathbb{Z})$ นั่นคือ

$$u^{-1} = \frac{1}{ab}\begin{bmatrix} b & -2 \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{b} & -\frac{2}{ab} \\ 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \in M_{22}(\mathbb{Z})$$

ดังนั้น $a \mid 1$, $b \mid 1$ และ $ab \mid 2$ ทำให้ได้ว่า $a, b = \pm 1$ สรุปได้ว่า u เป็นไปทั้งหมด 4 แบบคือ

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

คณิตศาสตร์

Quiz 4 : พีชคณิตนามธรรม MAC3310

หัวข้อ ไอดีล และตัวหารศูนย์ **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน

เวลา สัปดาห์ที่ 12 ปีการศึกษา 1/2565

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

ชื่อ–สกุล .... **รหัสนักศึกษา**.................................**หมู่เรียน**............

---

1. **(5 คะแนน)** จงตรวจสอบว่า
$$I = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & x & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & z & 0 \end{bmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$
เป็น **ไอดีลขวา (right ideal)** และ/หรือ **ไอดีลซ้าย (left ideal)** ของ $M_{33}(\mathbb{R})$ หรือไม่

2. **(5 คะแนน)** ให้ p และ q เป็นจำนวนเฉพาะซึ่ง $p < q$ โดยที่
$$q - p \text{ เป็นจำนวนเต็มมากสุดที่ทำให้ } \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q \text{ มีตัวหารศูนย์ 22 ตัว}$$
จงหา **ตัวหารศูนย์ (zero divisor)** ของ $\mathbb{Z}_{q-p}$

เฉลย Quiz 4: พีชคณิตนามธรรม MAC3310

หัวข้อ ไอดีล และตัวหารศูนย์ **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน

เวลา สัปดาห์ที่ 12 ปีการศึกษา 1/2565

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. **(5 คะแนน)** จงตรวจสอบว่า

$$I = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & x & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & z & 0 \end{bmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

เป็น **ไอดีลขวา (right ideal)** และ/หรือ **ไอดีลซ้าย (left ideal)** ของ $M_{33}(\mathbb{R})$ หรือไม่

แนวคำตอบ ให้ $\begin{bmatrix} 0 & x & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & z & 0 \end{bmatrix} \in I$ และ $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \in M_{33}(\mathbb{R})$ จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & x & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & z & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a_1x + a_2y + a_3z & 0 \\ 0 & b_1x + b_2y + b_3z & 0 \\ 0 & c_1x + c_2y + c_3z & 0 \end{bmatrix} \in I$$

ดังนั้น I เป็นไอดีลขวา (right ideal) ของ $M_{33}(\mathbb{R})$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \notin I$$

ดังนั้น I ไม่เป็นไอดีลซ้าย (left ideal) ของ $M_{33}(\mathbb{R})$

2. **(5 คะแนน)** ให้ p และ q เป็นจำนวนเฉพาะซึ่ง $p < q$ โดยที่

$q - p$ เป็นจำนวนเต็มมากสุดที่ทำให้ $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ มีตัวหารศูนย์ 22 ตัว

จงหา **ตัวหารศูนย์ (zero divisor)** ของ $\mathbb{Z}_{q-p}$

แนวคำตอบ พิจารณา

ตัวหารศูนย์	เงื่อนไข	จำนวนตัวหารศูนย์
$(\bar{0}, \bar{x})$	$x = 1, 2, 3, ..., q-1$	$q - 1$
$(\bar{x}, \bar{0})$	$x = 1, 2, 3, ..., p-1$	$p - 1$

จะได้ว่าจำนวนตัวหารศูนย์ของ $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ เท่ากับ $(p-1) + (q-1) = p + q - 2 = 22$ ดังนั้น $p + q = 24$

พิจารณา $q - p$ เป็นจำนวนเต็มมากสุด โดยที่ $p < q$ ดังตาราง

p	q	$p+q$	$q-p$	หมายเหตุ
2	22	24	20	เป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก q ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ
3	21	24	18	เป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก q ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ
5	19	24	14	
7	17	24	10	
11	13	24	2	

ฉะนั้น $q - p = 14$ ตัวหารศูนย์ของ $\mathbb{Z}_{14}$ คือ $\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{12}$ #