Quiz 1 : MAC1302 แคลคูลัส 1

หัวข้อ ลิมิต ลิมิตของตรีโกณมิติ และลิมิตอนันต์ **คะแนน** 10 คะแนน **ข้อ** .....
เวลา สัปดาห์ที่ 3 ปีการศึกษา 1/2563
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
ชื่อ–สกุล.....**รหัสนักศึกษา**..... **หมู่เรียน** ..... **กลุ่ม** .....

Quiz 2 : MAC1302 แคลคูลัส 1

หัวข้อ อนุพันธ์ของฟังก์ชัน **คะแนน** 10 คะแนน **ข้อ** .....

เวลา สัปดาห์ที่ 5 ปีการศึกษา 1/2563

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

ชื่อ–สกุล.....**รหัสนักศึกษา**..... **หมู่เรียน** ..... **กลุ่ม** .....

Quiz 1 : MAC1302 แคลคูลัส 1

หัวข้อ ลิมิต ลิมิตของตรีโกณมิติ และลิมิตอนันต์ **กลุ่ม** S1B (17)

เวลา สัปดาห์ที่ 3 ปีการศึกษา 1/2563 **คะแนน** 10 คะแนน

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

จงหาลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+1)^2-(4x-2)^2}{x^3-1}$
2. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{4x^3+4x^2-x-1}{16x^4-1}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{2x}+3^{x+1}-4}{3^{2x}-1}$
4. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{|x+3|-|3-x^2|}{x^2-4}$
5. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{|x-1|-|2x^2-4|}{x^3+1}$
6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{||x|-2|-x^2}{x^2-1}$
7. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{2x^2-8}$
8. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{|x|}-1}{x+1}$
9. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{x+5}-2}{x-3}$
10. $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{1+|x|}-1}{|x|}$
11. $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{|x^2-5x+6|}{x^2-9}$
12. $\lim\limits_{x\to 0^-}\tan x\cdot\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$
13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x+\sin x}{x+\tan x}$
14. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\tan x}{\sec x-\csc x}$
15. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{(x+1)(2x-1)^2}{(2x+1)(x-1)^2}$
16. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{x^2-2x}-x\right)$
17. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)$

เฉลย Quiz 1 : MAC1302 แคลคูลัส 1 (S1B)

1.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)^2-(4x-2)^2}{x^3-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{(x^2+2x+1)-(16x^2-16x+4)^2}{(x-1)(x^2+x+1)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{-15x^2+18x-3}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{-(x-1)(15x-3)}{(x-1)(x^2+x+1)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{-(15x-3)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{12}{3} = 4\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{4x^3+4x^2-x-1}{16x^4-1} &= \lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{4x^2(x+1)-(x+1)}{(4x^2-1)(4x^2+1)}\\ &= \lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{(x+1)(4x^2-1)}{(4x^2-1)(4x^2+1)} = \lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{(x+1)}{4x^2+1} = \frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4}\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{3^{2x}+3^{x+1}-4}{3^{2x}-1} &= \lim_{x\to 0}\frac{(3^x)^2+3\cdot 3^x-4}{(3^x)^2-1}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{(3^x-1)(3^x+4)}{(3^x-1)(3^x+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{3^x+4}{3^x+1} = \frac{5}{2}\end{aligned}$$

4. เมื่อใกล้ ๆ -2 จะได้ว่า $x+3>0$ และ $3-x^2<0$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2}\frac{|x+3|-|3-x^2|}{x^2-4} &= \lim_{x\to -2}\frac{(x+3)+(3-x^2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to -2}\frac{-x^2+x+6}{(x-2)(x+2)}\\ &= \lim_{x\to -2}\frac{-(x+2)(x-3)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to -2}\frac{-(x-3)}{(x-2)} = -\frac{5}{4}\end{aligned}$$

5. เมื่อใกล้ ๆ -1 จะได้ว่า $x-1<0$ และ $2x^2-4<0$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1}\frac{|x-1|-|2x^2-4|}{x^3+1} &= \lim_{x\to -1}\frac{-(x-1)+(2x^2-4)}{(x+1)(x^2-x+1)} = \lim_{x\to -1}\frac{2x^2-x-3}{(x+1)(x^2-x+1)}\\ &= \lim_{x\to -1}\frac{(2x-3)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} = \lim_{x\to -1}\frac{2x-3}{x^2-x+1} = -\frac{5}{3}\end{aligned}$$

6. เมื่อใกล้ ๆ 1 จะได้ว่า $x>0$ และ $x-2<0$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{||x|-2|-x^2}{x^2-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{|x-2|-x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{-(x-2)-x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{-x^2-x+2}{(x+1)(x-1)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{-(x-1)(x+2)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{-(x+2)}{x+1} = -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{2x^2-8} &= \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{2(x^2-4)}\cdot\frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}+2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x+2)-4}{2(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2}+2)}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)}{2(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2}+2)} = \lim_{x\to 2}\frac{1}{2(x+2)(\sqrt{x+2}+2)} = \frac{1}{32}\end{aligned}$$

8. เมื่อใกล้ ๆ -1 จะได้ว่า $x<0$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{|x|}-1}{x+1} &= \lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{-x}-1}{x+1}\cdot\frac{\sqrt{-x}+1}{\sqrt{-x}+1} = \lim_{x\to -1}\frac{-x-1}{(x+1)(\sqrt{-x}+1)}\\ &= \lim_{x\to -1}\frac{-(x+1)}{(x+1)(\sqrt{-x}+1)} = \lim_{x\to -1}\frac{-1}{\sqrt{-x}+1} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt[3]{x+5}-2}{x-3} &= \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt[3]{x+5}-2}{x-3}\cdot\frac{(\sqrt[3]{x+5})^2+2\sqrt[3]{x+5}+4}{(\sqrt[3]{x+5})^2+2\sqrt[3]{x+5}+4}\\ &= \lim_{x\to 3}\frac{(x+5)-8}{(x-3)[(\sqrt[3]{x+5})^2+2\sqrt[3]{x+5}+4]}\\ &= \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)}{(x-3)[(\sqrt[3]{x+5})^2+2\sqrt[3]{x+5}+4]}\\ &= \lim_{x\to 3}\frac{1}{(\sqrt[3]{x+5})^2+2\sqrt[3]{x+5}+4} = \frac{1}{4+4+4} = \frac{1}{12}\end{aligned}$$

10. เมื่อ $x<0$ จะได้ว่า $|x|=-x$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1+|x|}-1}{|x|} &= \lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-x}-1}{-x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-x}-1}{-x}\cdot\frac{\sqrt{1-x}+1}{\sqrt{1-x}+1}\\ &= \lim_{x\to 0^-}\frac{(1-x)-1}{-x(\sqrt{1-x}+1)} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{-x(\sqrt{1-x}+1)}\\ &= \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{\sqrt{1-x}+1} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

11. เมื่อ $x>3$ จะได้ว่า $(x-3)(x-2)>0$ ดังนั้น

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{|x^2-5x+6|}{x^2-9} = \lim_{x\to 3^+}\frac{|(x-3)(x-2)|}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x\to 3^+}\frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x\to 3^+}\frac{(x-2)}{(x+3)} = \frac{1}{6}$$

12. เนื่องจาก $-1\le \sin\left(\frac{1}{x}\right)\le 1$ ทุก ๆ $x<0$ และ $\tan x<0$ ดังนั้น

$$-\tan x \ge \tan x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\ge \tan x$$

จะเห็นว่า $\lim\limits_{x\to 0^-}-\tan x = 0$ และ $\lim\limits_{x\to 0^-}\tan x = 0$ สรุปได้ว่า $\lim\limits_{x\to 0^-}\tan x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$

13.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x+\sin x}{x+\tan x} = \lim_{x\to 0}\frac{x(\cos x+\frac{\sin x}{x})}{x(1+\frac{\sin x}{x\cos x})} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x+\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}} = \frac{1+1}{1+1\cdot 1} = 1$$

14.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{1-\tan x}{\sec x-\csc x} &= \lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{1-\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos x}-\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\cos x-\sin x}{\cos x}}{\frac{\sin x-\cos x}{\cos x\sin x}} = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos x}\cdot\frac{\cos x\sin x}{\sin x-\cos x}\\ &= \lim_{x\to \frac{\pi}{4}}-\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

15.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)(2x-1)^2}{(2x+1)(x-1)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x(1+\frac{1}{x})[x(2+\frac{1}{x})]^2}{x(2+\frac{1}{x})x^2(1-\frac{1}{x})^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x(1+\frac{1}{x})x^2(2+\frac{1}{x})^2}{x(2+\frac{1}{x})x^2(1-\frac{1}{x})^2}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{x})(2+\frac{1}{x})^2}{(2+\frac{1}{x})(1-\frac{1}{x})^2}=\frac{(1+0)(2+0)^2}{(2+0)(1-0)^2}=2$$

16.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-2x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-2x}-x\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2-2x}+x}{\sqrt{x^2-2x}+x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2-2x)-x^2}{\sqrt{x^2-2x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x}{\sqrt{x^2(1-\frac{2}{x})}+x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x}{\sqrt{x^2}\sqrt{1-\frac{2}{x}}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x}{|x|\sqrt{1-\frac{2}{x}}+x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x}{x\sqrt{1-\frac{2}{x}}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x}{x(\sqrt{1-\frac{2}{x}}+1)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}+1}=\frac{-2}{\sqrt{1-0}+1}=-1$$

17. $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2+2x}-x}{\sqrt{x^2+2x}-x}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2+2x)-x^2}{\sqrt{x^2+2x}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2(1+\frac{2}{x})}-x}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{2}{x}}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}}-x}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-x(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1)}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}=\frac{-2}{\sqrt{1+0}+1}=-1$$

Quiz 1 : MAC1302 แคลคูลัส 1

หัวข้อ ลิมิต ลิมิตของตรีโกณมิติ และลิมิตอนันต์ **กลุ่ม** S2B (18)
เวลา สัปดาห์ที่ 3 ปีการศึกษา 1/2563 **คะแนน** 10 คะแนน
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

จงหาลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim_{x\to 2} \dfrac{(2x-3)^2-(x-1)^2}{x^3-8}$
2. $\lim_{x\to -1} \dfrac{(x-1)^3+2(3x+1)^2}{x+1}$
3. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x\cdot 5^x+5\cdot 5^x-(x+5)}{5^{2x}-1}$
4. $\lim_{x\to 1} \dfrac{|x-2|-|2x^2-1|}{3x-3}$
5. $\lim_{x\to -1} \dfrac{|x^2+1|-|1-x|}{x^2-1}$
6. $\lim_{x\to 2} \dfrac{||x|-1|-1}{x^3-8}$
7. $\lim_{x\to -2} \dfrac{x+2}{\sqrt{2-x}-\sqrt{-2x}}$
8. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2x-1}-1}{2x^2-2}$
9. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$
10. $\lim_{x\to -1^-} \dfrac{|x^2-x-2|}{4x^2-4}$
11. $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{\sqrt{1-2|x|}-1}{|x|}$
12. $\lim_{x\to 2^+} \dfrac{|1-|2-x||-1}{2x-4}$
13. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos 3x-\cos x}{x+\sin x}$
14. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sin(x-1)}{x^2-3x+2}$
15. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x-1}{\cos 2x+1}$
16. $\lim_{x\to -\infty} x^{-2}\sin(x^{-1})$
17. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+3}-x}{\sqrt{x^2+x}+3}$
18. $\lim_{x\to \infty} \left(\sqrt{4x^2-x}-2x\right)$

เฉลย Quiz 1 : MAC1302 แคลคูลัส 1 (S2B)

1.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{(2x-3)^2-(x-1)^2}{x^3-8} &= \lim_{x\to 2}\frac{(4x^2-12x+9)-(x^2-2x+1)}{(x-2)(x^2+2x+4)}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{3x^2-10x+8}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \lim_{x\to 2}\frac{(3x-4)(x-2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{3x-4}{x^2+2x+4} = \frac{2}{4+4+4} = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1}\frac{(x-1)^3+2(3x+1)^2}{x+1} &= \lim_{x\to -1}\frac{(x^3-3x^2+3x-1)+2(9x^2+6x+1)}{x+1}\\ &= \lim_{x\to -1}\frac{x^3+15x^2+15x+1}{x+1} = \lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2+14x+1)}{x+1}\\ &= \lim_{x\to -1}(x^2+14x+1) = 1-14+1 = -12\end{aligned}$$

3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot 5^x+5\cdot 5^x-(x+5)}{5^{2x}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{5^x(x+5)-(x+5)}{(5^x)^2-1} = \lim_{x\to 0}\frac{(x+5)(5^x-1)}{(5^x-1)(5^x+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{x+5}{5^x+1} = \frac{5}{2}$$

4. เมื่อใกล้ ๆ 1 จะได้ว่า $x-2<0$ และ $2x^2-1>0$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{|x-2|-|2x^2-1|}{3x-3} &= \lim_{x\to 1}\frac{-(x-2)-(2x^2-1)}{3(x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{-2x^2-x+3}{3(x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{-(2x+3)(x-1)}{3(x-1)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{-(2x+3)}{3} = -\frac{5}{2}\end{aligned}$$

5. เมื่อใกล้ ๆ -1 จะได้ว่า $1-x>0$ และ $x^2+1>0$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1}\frac{|x^2+1|-|1-x|}{x^2-1} &= \lim_{x\to -1}\frac{(x^2+1)-(1-x)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to -1}\frac{x^2+x}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to -1}\frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)}\\ &= \lim_{x\to -1}\frac{x}{x-1} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

6. เมื่อใกล้ ๆ 2 จะได้ว่า $x>0$ และ $x-1>0$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{||x|-1|-1}{x^3-8} &= \lim_{x\to 2}\frac{|x-1|-1}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-1)-1}{(x-2)(x^2+2x+4)}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2+2x+4} = \frac{1}{12}\end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{\sqrt{2-x}-\sqrt{-2x}} &= \lim_{x\to -2}\frac{x+2}{\sqrt{2-x}-\sqrt{-2x}}\cdot\frac{\sqrt{2-x}+\sqrt{-2x}}{\sqrt{2-x}+\sqrt{-2x}}\\ &= \lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(\sqrt{2-x}+\sqrt{-2x})}{(2-x)-(-2x)} = \lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(\sqrt{2-x}+\sqrt{-2x})}{(2-x)-(-2x)}\\ &= \lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(\sqrt{2-x}+\sqrt{-2x})}{(x+2)} = \lim_{x\to -2}(\sqrt{2-x}+\sqrt{-2x}) = 2+2 = 4\end{aligned}$$

8.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x-1}-1}{2x^2-2}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x-1}-1}{2(x^2-1)}\cdot\frac{\sqrt{2x-1}+1}{\sqrt{2x-1}+1}=\lim_{x\to 1}\frac{(2x-1)-1}{2(x-1)(x+1)(\sqrt{2x-1}+1)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)}{2(x-1)(x+1)(\sqrt{2x-1}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x+1)(\sqrt{2x-1}+1)}=\frac{1}{4}$$

9.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}\cdot\frac{(\sqrt[3]{x+1})^2+\sqrt[3]{x+1}+1}{(\sqrt[3]{x+1})^2+\sqrt[3]{x+1}+1}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)-1}{x[(\sqrt[3]{x+1})^2+\sqrt[3]{x+1}+1]}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x[(\sqrt[3]{x+1})^2+\sqrt[3]{x+1}+1]}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(\sqrt[3]{x+1})^2+\sqrt[3]{x+1}+1}=\frac{1}{3}$$

10. เมื่อ $x<-1$ จะได้ว่า $(x+1)(x-2)>0$ ดังนั้น

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{|x^2-x-2|}{4x^2-4}=\lim_{x\to -1^-}\frac{|(x+1)(x-2)|}{4(x^2-1)}=\lim_{x\to -1^-}\frac{(x+1)(x-2)}{4(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to -1^-}\frac{x-2}{4(x-1)}=\frac{3}{8}$$

11. เมื่อ $x<0$ จะได้ว่า $|x|=-x$ ดังนั้น

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-2|x|}-1}{|x|}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1+2x}-1}{-x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1+2x}-1}{-x}\cdot\frac{\sqrt{1+2x}+1}{\sqrt{1+2x}+1}$$
$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{(1+2x)-1}{-x(\sqrt{1+2x}+1)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2x}{-x(\sqrt{1+2x}+1)}$$
$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{2}{-(\sqrt{1+2x}+1)}=-1$$

12. เมื่อ x ใกล้ ๆ 2 ทางขวา จะได้ว่า $2-x<0$ และ $3-x>0$ ดังนั้น

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{|1-|2-x||-1}{2x-4}=\lim_{x\to 2^+}\frac{|1+(2-x)|-1}{2(x-2)}=\lim_{x\to 2^+}\frac{|3-x|-1}{2(x-2)}=\lim_{x\to 2^+}\frac{(3-x)-1}{2(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{(2-x)}{2(x-2)}=-\frac{1}{2}$$

13.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos x}{x+\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin(2x)\sin x}{\sin x(\frac{x}{\sin x}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin(2x)}{\frac{x}{\sin x}+1}=\frac{0}{1+1}=0$$

14.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{(x-1)}\cdot\frac{1}{x-2}=1\cdot\frac{1}{-1}=-1$$

15.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-1}{\cos 2x+1}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-1}{(2\cos^2 x-1)+1}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-1}{2\cos^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-1}{2(1-\sin^2 x)}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-1}{2(1-\sin x)(1+\sin x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-1}{2(1+\sin x)}=-\frac{1}{4}$$

16. เนื่องจาก $-1 \leq \sin(x^{-1}) \leq 1$ ทุก ๆ $x > 0$ และ $x^{-2} > 0$ ดังนั้น

$$-x^{-2} \leq x^{-2}\sin(x^{-1}) \leq x^{-2}$$

จะเห็นว่า $\lim\limits_{x\to-\infty} -x^{-2} = 0$ และ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{-2} = 0$ สรุปได้ว่า $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{-2}\sin(x^{-1}) = 0$

17.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+3}-x}{\sqrt{x^2+x}+3} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2(1+\frac{3}{x^2})}-x}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x})}+3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}-x}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x}}+3} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}-x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}+3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}-x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}}+3} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}+1\right)}{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\frac{3}{x}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}+1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\frac{3}{x}} \\
&= \frac{\sqrt{1+0}+1}{\sqrt{1+0}-0} = 2
\end{aligned}$$

18.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{4x^2-x}-2x\right) &= \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{4x^2-x}-2x\right)\cdot\frac{\sqrt{4x^2-x}+2x}{\sqrt{4x^2-x}+2x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{(4x^2-x)-4x^2}{\sqrt{x^2(4-\frac{1}{x})}+2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2}\sqrt{4-\frac{1}{x}}+2x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{|x|\sqrt{4-\frac{1}{x}}+2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{x\sqrt{4-\frac{1}{x}}+2x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{x\left(\sqrt{4-\frac{1}{x}}+2\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{\sqrt{4-\frac{1}{x}}+2} \\
&= \frac{-1}{\sqrt{4-0}+2} = -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Quiz 1 : MAC1302 แคลคูลัส 1

หัวข้อ ลิมิต ลิมิตของตรีโกณมิติ และลิมิตอนันต์ **กลุ่ม** S1A (21)
เวลา สัปดาห์ที่ 3 ปีการศึกษา 1/2563 **คะแนน** 10 คะแนน
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

จงหาลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim_{x\to -1} \dfrac{4(x+2)^2-(x-1)^2}{x^3+1}$
2. $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^4+8x}{x^4-16}$
3. $\lim_{x\to 0} \dfrac{2^{2x+1}-2^x-1}{2^{2x}-1}$
4. $\lim_{x\to 2} \dfrac{|1-x|-|3-x^2|}{x^2-4}$
5. $\lim_{x\to -1} \dfrac{|x+2|-|x^2-2|}{x^3+x^2}$
6. $\lim_{x\to 5} \dfrac{||x+1|-4|-2x+8}{x^2-25}$
7. $\lim_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x^3-9x}$
8. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{\sqrt{x+7}-3}$
9. $\lim_{x\to -2} \dfrac{\sqrt{|x|-1}-1}{x+2}$
10. $\lim_{x\to -3} \dfrac{\sqrt[3]{x+2}+1}{x+3}$
11. $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x+1}-1}$
12. $\lim_{x\to 2^+} \dfrac{|8-2x-x^2|}{x^2-4}$
13. $\lim_{x\to 3^+} \dfrac{\sqrt{(3-x)^2}}{x^2-x-6}$
14. $\lim_{x\to 0^+} \tan x \cdot \cos\left(\dfrac{2}{x}\right)$
15. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\sec x}{x\sin x}$
16. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2+\sin^2 x}{1-\cos x}$
17. $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1-\cot x}{\sec x-\csc x}$
18. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{(x+2)(x-1)^2}{(2x+1)^2(x+1)}$
19. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^4+x}+x^2}{(2x-1)^2}$
20. $\lim_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)$
21. $\lim_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)$

เฉลย Quiz 1 : MAC1302 แคลคูลัส 1 (S1A)

1.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1}\frac{4(x+2)^2-(x-1)^2}{x^3+1} &= \lim_{x\to -1}\frac{4(x^2+4x+4)-(x^2-2x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}\\ &= \lim_{x\to -1}\frac{3x^2+18x+15}{(x+1)(x^2-x+1)} = \lim_{x\to -1}\frac{(3x+15)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}\\ &= \lim_{x\to -1}\frac{3x+15}{x^2-x+1} = \frac{12}{3} = 4\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2}\frac{x^4+8x}{x^4-16} &= \lim_{x\to -2}\frac{x(x^3+8)}{(x^2-4)(x^2+4)} = \lim_{x\to -2}\frac{x(x+2)(x^2-2x+4)}{(x-2)(x+2)(x^2+4)}\\ &= \lim_{x\to -2}\frac{x(x^2-2x+4)}{(x-2)(x^2+4)} = \frac{-2(12)}{-4(8)} = \frac{3}{4}\end{aligned}$$

3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^{2x+1}-2^x-1}{2^{2x}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cdot(2^x)^2-2^x-1}{(2^x)^2-1} = \lim_{x\to 0}\frac{(2\cdot 2^x+1)(2^x-1)}{(2^x-1)(2^x+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cdot 2^x+1}{2^x+1} = \frac{3}{2}$$

4. เมื่อ x ใกล้ ๆ 2 จะได้ว่า $1-x<0$ และ $3-x^2<0$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{|1-x|-|3-x^2|}{x^2-4} &= \lim_{x\to 2}\frac{-(1-x)+(3-x^2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2}\frac{-x^2+x+2}{(x-2)(x+2)}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{-(x+1)(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2}\frac{-(x+1)}{x+2} = -\frac{3}{4}\end{aligned}$$

5. เมื่อ x ใกล้ ๆ -1 จะได้ว่า $x+2>0$ และ $x^2-2<0$ ดังนั้น

$$\lim_{x\to -1}\frac{|x+2|-|x^2-2|}{x^3+x^2} = \lim_{x\to -1}\frac{(x+2)+(x^2-2)}{x^2(x+1)} = \lim_{x\to -1}\frac{x^2+x}{x^2(x+1)} = \lim_{x\to -1}\frac{x(x+1)}{x^2(x+1)} = \lim_{x\to -1}\frac{1}{x} = -1$$

6. เมื่อ x ใกล้ ๆ 5 จะได้ว่า $x+1>0$ และ $x-3>0$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 5}\frac{||x+1|-4|-2x+8}{x^2-25} &= \lim_{x\to 5}\frac{|(x+1)-4|-2x+8}{(x-5)(x+5)} = \lim_{x\to 5}\frac{|x-3|-2x+8}{(x-5)(x+5)}\\ &= \lim_{x\to 5}\frac{(x-3)-2x+8}{(x-5)(x+5)} = \lim_{x\to 5}\frac{-(x-5)}{(x-5)(x+5)} = \lim_{x\to 5}\frac{-1}{x+5} = -\frac{1}{10}\end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x^3-9x} &= \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x(x^2-9)}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2} = \lim_{x\to 3}\frac{(x+1)-4}{x(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}\\ &= \lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)} = \lim_{x\to 3}\frac{1}{x(x+3)(\sqrt{x+1}+2)} = \frac{1}{72}\end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\sqrt{x+7}-3} &= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{\sqrt{x+7}-3}\cdot\frac{\sqrt{x+7}+3}{\sqrt{x+7}+3} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+7}+3)}{(x+7)-9}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+7}+3)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2)(\sqrt{x+7}+3) = 24\end{aligned}$$

9. เมื่อ x ใกล้ ๆ -2 จะได้ว่า $x < 0$ ดังนั้น

$$\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{|x|-1}-1}{x+2} = \lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{-x-1}-1}{x+2} = \lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{-x-1}-1}{x+2}\cdot\frac{\sqrt{-x-1}+1}{\sqrt{-x-1}+1}$$
$$= \lim_{x\to -2}\frac{(-x-1)-1}{(x+2)(\sqrt{-x-1}+1)} = \lim_{x\to -2}\frac{-(x+2)}{(x+2)(\sqrt{-x-1}+1)}$$
$$\lim_{x\to -2}\frac{-1}{\sqrt{-x-1}+1} = -\frac{1}{2}$$

10.

$$\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt[3]{x+2}+1}{x+3} = \lim_{x\to -3}\frac{\sqrt[3]{x+2}+1}{x+3}\cdot\frac{(\sqrt[3]{x+2})^2-\sqrt[3]{x+2}+1}{(\sqrt[3]{x+2})^2-\sqrt[3]{x+2}+1}$$
$$= \lim_{x\to -3}\frac{(x+2)+1}{(x+)3[(\sqrt[3]{x+2})^2-\sqrt[3]{x+2}+1]}$$
$$= \lim_{x\to -3}\frac{(x+3)}{(x+3)[(\sqrt[3]{x+2})^2-\sqrt[3]{x+2}+1]}$$
$$= \lim_{x\to -3}\frac{1}{(\sqrt[3]{x+2})^2-\sqrt[3]{x+2}+1} = \frac{1}{3}$$

11. เมื่อ $x < 0$ จะได้ว่า $|x| = -x$ ดังนั้น

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x+1}-1} = \lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{\sqrt{x+1}-1} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{\sqrt{x+1}-1} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{\sqrt{x+1}-1}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}$$
$$= \lim_{x\to 0^-}\frac{-x(\sqrt{x+1}+1)}{(x+1)-1} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-x(\sqrt{x+1}+1)}{x} = \lim_{x\to 0^-}-(\sqrt{x+1}+1) = -2$$

12. เมื่อ $x > 2$ จะได้ว่า $(4+x)(2-x) < 0$ ดังนั้น

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{|8-2x-x^2|}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^+}\frac{|(4+x)(2-x)|}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2^+}\frac{-(4+x)(2-x)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2^+}\frac{4+x}{x+2} = \frac{3}{2}$$

13. เมื่อ $x > 3$ จะได้ว่า $3-x < 0$ ดังนั้น

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{\sqrt{(3-x)^2}}{x^2-x-6} = \lim_{x\to 3^+}\frac{|3-x|}{(x-3)(x+2)} = \lim_{x\to 3^+}\frac{-(3-x)}{(x-3)(x+2)} = \lim_{x\to 3^+}\frac{1}{x+2} = \frac{1}{5}$$

14. เนื่องจาก $-1 \le \cos\left(\frac{1}{x}\right) \le 1$ ทุก ๆ $x > 0$ และ $\tan x > 0$ ดังนั้น

$$-\tan x \le \tan x\cos\left(\frac{1}{x}\right) \le \tan x$$

จะเห็นว่า $\lim_{x\to 0^+} -\tan x = 0$ และ $\lim_{x\to 0^+}\tan x = 0$ สรุปได้ว่า $\lim_{x\to 0^+}\tan x\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

15.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sec x}{x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{\cos x}}{x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x\sin x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x\sin x\cos x}\cdot\frac{\cos x+1}{\cos x+1}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x\sin x\cos x(\cos x+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{x\sin x\cos x(\cos x+1)}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{x\cos x(\cos x+1)} = \lim_{x\to 0}-\left(\frac{\sin x}{x}\right)\frac{1}{\cos x(\cos x+1)} = -1\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

16.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+\sin^2 x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(1+\frac{\sin^2 x}{x^2})}{1-\cos x}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(1+\frac{\sin^2 x}{x^2})(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(1+\frac{\sin^2 x}{x^2})(1+\cos x)}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\frac{\sin^2 x}{x^2})(1+\cos x)}{\frac{\sin^2 x}{x^2}}=\frac{(1+1^2)2}{1^2}=4$$

17.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cot x}{\sec x-\csc x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{\cos x}-\frac{1}{\sin x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\sin x-\cos x}{\sin x}}{\frac{\sin x-\cos x}{\sin x\cos x}}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\sin x}\cdot\frac{\sin x\cos x}{\sin x-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

18.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+2)(x-1)^2}{(2x+1)^2(x+1)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x(1+\frac{2}{x})[x(1-\frac{1}{x})]^2}{[x(2+\frac{1}{x})]^2x(1+\frac{1}{x})}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x(1+\frac{2}{x})x^2(1-\frac{1}{x})^2}{x^2(2+\frac{1}{x})^2x(1+\frac{1}{x})}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(1+\frac{2}{x})(1-\frac{1}{x})^2}{(2+\frac{1}{x})^2(1+\frac{1}{x})}=\frac{(1+0)(1-0)^2}{(2+0)^2(1+0)}=\frac{1}{4}$$

19.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^4+x}+x^2}{(2x-1)^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^4(1+\frac{1}{x^3})}+x^2}{[x(2-\frac{1}{x})]^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}+x^2}{x^2(2-\frac{1}{x})^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}+1\right)}{x^2(2-\frac{1}{x})^2}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}+1}{(2-\frac{1}{x})^2}=\frac{\sqrt{1+0}+1}{(2-0)^2}=\frac{1}{2}$$

20.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2+3x}+x}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+3x)-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2(1+\frac{3}{x})}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{3}{x}}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{|x|\sqrt{1+\frac{3}{x}}+x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{x\sqrt{1+\frac{3}{x}}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1}=\frac{3}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{3}{2}$$

21.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2+x+1}-x}{\sqrt{x^2+x+1}-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+x+1)-x^2}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}-x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x(1+\frac{1}{x})}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x(1+\frac{1}{x})}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x(1+\frac{1}{x})}{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{-(1+\frac{1}{x})}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}$$
$$=\frac{(1+0)}{\sqrt{1+0+0}+1}=\frac{1}{2}$$

Quiz 1 : MAC1302 แคลคูลัส 1

หัวข้อ ลิมิต ลิมิตของตรีโกณมิติ และลิมิตอนันต์ **กลุ่ม** S2A (19)

เวลา สัปดาห์ที่ 3 ปีการศึกษา 1/2563 **คะแนน** 10 คะแนน

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

จงหาลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim_{x\to 2} \dfrac{2(x-1)^2-(x-3)^2-1}{5x^2-20}$
2. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x}$
3. $\lim_{x\to 0} \dfrac{4^x+2^x-2}{2^{2x}-1}$
4. $\lim_{x\to -1} \dfrac{|x+2|-|2-x^2|}{2x^2-2}$
5. $\lim_{x\to 3} \dfrac{|x-2|-|x^2-10|}{3x^2-27}$
6. $\lim_{x\to -2} \dfrac{|1-|x||-x-3}{x^2-4}$
7. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2+2x-3}{\sqrt{x+3}-2}$
8. $\lim_{x\to -2} \dfrac{\sqrt{2|x|}-2}{x+2}$
9. $\lim_{x\to 1} \dfrac{1-x}{\sqrt[3]{x+7}-2}$
10. $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{\sqrt{1+|x|}-1}{|x|}$
11. $\lim_{x\to 2^+} \dfrac{|x^2-8x+12|}{2x^2-8}$
12. $\lim_{x\to 0} x^2e^x\cdot \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$
13. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2+\tan x}$
14. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos^2 x}{\sin x-1}$
15. $\lim_{x\to \infty} x\sin\left(\dfrac{\pi}{x-1}\right)$
16. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{(x+1)^3(4x-1)}{(2x+1)^2(x-1)^2}$
17. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x+x^2}-2x}{x-3}$
18. $\lim_{x\to \infty} \left(\sqrt{9x^2+x}-3x\right)$
19. $\lim_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+3x-1}+x\right)$

เฉลย Quiz 1 : MAC1302 แคลคูลัส 1 (S2A)

1.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{2(x-1)^2-(x-3)^2-1}{5x^2-20} &= \lim_{x\to 2}\frac{2(x^2-2x+1)-(x^2-6x+9)-1}{5(x^2-4)}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-8}{5(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2}\frac{(x+4)(x-2)}{5(x-2)(x+2)}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{x+4}{5(x+2)} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1}\frac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x} &= \lim_{x\to -1}\frac{x^2(x+3)-(x+3)}{x(x+1)} = \lim_{x\to -1}\frac{(x+3)(x^2-1)}{x(x+1)}\\ &= \lim_{x\to -1}\frac{(x+3)(x-1)(x+1)}{x(x+1)} = \lim_{x\to -1}\frac{(x+3)(x-1)}{x} = 4\end{aligned}$$

3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{4^x+2^x-2}{2^{2x}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{(2^x)^2+2^x-2}{(2^x)^2-1} = \lim_{x\to 0}\frac{(2^x-1)(2^x+2)}{(2^x-1)(2^x+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{2^x+2}{2^x+1} = \frac{3}{2}$$

4. เมื่อใกล้ ๆ -1 จะได้ว่า $x+2>0$ และ $2-x^2>0$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1}\frac{|x+2|-|2-x^2|}{2x^2-2} &= \lim_{x\to -1}\frac{(x+2)-(2-x^2)}{2(x^2-1)} = \lim_{x\to -1}\frac{x^2+x}{2(x-1)(x+1)}\\ &= \lim_{x\to -1}\frac{x(x+1)}{2(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to -1}\frac{x}{2(x-1)} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

5. เมื่อใกล้ ๆ 3 จะได้ว่า $x-2>0$ และ $x^2-10<0$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3}\frac{|x-2|-|x^2-10|}{3x^2-27} &= \lim_{x\to 3}\frac{(x-2)+(x^2-10)}{3(x^2-9)} = \lim_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{3(x-3)(x+3)}\\ &= \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+4)}{3(x-3)(x+3)} = \lim_{x\to 3}\frac{x+4}{3(x+3)} = \frac{7}{18}\end{aligned}$$

6. เมื่อใกล้ ๆ -2 จะได้ว่า $x<0$ และ $1+x<0$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2}\frac{|1-|x||-x-3}{x^2-4} &= \lim_{x\to -2}\frac{|1+x|-x-3}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to -2}\frac{-(1+x)-x-3}{(x-2)(x+2)}\\ &= \lim_{x\to -2}\frac{-2(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to -2}\frac{-2}{x-2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{\sqrt{x+3}-2} &= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+3)}{\sqrt{x+3}-2}\cdot\frac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x+3}+2}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+3)(\sqrt{x+3}+2)}{(x+3)-4}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+3)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1}\\ &= \lim_{x\to 1}(x+3)(\sqrt{x+3}+2) = 4(4) = 16\end{aligned}$$

8. เมื่อใกล้ ๆ -2 จะได้ว่า $x < 0$ นั่นคือ $|x| = -x$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{2|x|}-2}{x+2} &= \lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{-2x}-2}{x+2} = \lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{-2x}-2}{x+2}\cdot\frac{\sqrt{-2x}+2}{\sqrt{-2x}+2}\\ &= \lim_{x\to -2}\frac{-2x-4}{(x+2)(\sqrt{-2x}+2)} = \lim_{x\to -2}\frac{-2(x+2)}{(x+2)(\sqrt{-2x}+2)}\\ &= \lim_{x\to -2}\frac{-2}{\sqrt{-2x}+2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\sqrt[3]{x+7}-2} &= \lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\sqrt[3]{x+7}-2}\cdot\frac{(\sqrt[3]{x+7})^2+2\sqrt[3]{x+7}+4}{(\sqrt[3]{x+7})^2+2\sqrt[3]{x+7}+4}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{(1-x)[(\sqrt[3]{x+7})^2+2\sqrt[3]{x+7}+4]}{(x+7)-8}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{(1-x)[(\sqrt[3]{x+7})^2+2\sqrt[3]{x+7}+4]}{x-1}\\ &= \lim_{x\to 1}-[(\sqrt[3]{x+7})^2+2\sqrt[3]{x+7}+4] = -(4+4+4) = -12\end{aligned}$$

10. เมื่อใกล้ ๆ $x < 0$ จะได้ว่า $|x| = -x$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1+|x|}-1}{|x|} &= \lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-x}-1}{-x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-x}-1}{-x}\cdot\frac{\sqrt{1-x}+1}{\sqrt{1-x}+1}\\ &= \lim_{x\to 0^-}\frac{(1-x)-1}{-x(\sqrt{1-x}+1)} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{-x(\sqrt{1-x}+1)} = \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{\sqrt{1-x}+1} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

11. เมื่อใกล้ ๆ 2 ทางขวา จะได้ว่า $(x-2)(x-6) < 0$ ดังนั้น

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{|x^2-8x+12|}{2x^2-8} = \lim_{x\to 2^+}\frac{|(x-6)(x-2)|}{2(x^2-4)} = \lim_{x\to 2^+}\frac{-(x-6)(x-2)}{2(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2^+}\frac{-(x-6)}{2(x+2)} = \frac{4}{2(4)} = \frac{1}{2}$$

12. เนื่องจาก $-1 \le \sin\left(\frac{1}{x}\right) \le 1$ ทุก ๆ $x \neq 0$ และ $x^2e^x > 0$ ดังนั้น

$$-x^2e^x \le x^2e^x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right) \le x^2e^x$$

จะเห็นว่า $\lim_{x\to 0} -x^2e^x = 0$ และ $\lim_{x\to 0} x^2e^x = 0$ สรุปได้ว่า $\lim_{x\to 0} x^2e^x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

13.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2+\tan x} = \lim_{x\to 0}\frac{x(\cos x-\frac{\sin x}{x})}{x^2+\frac{\sin x}{\cos x}} = \lim_{x\to 0}\frac{x(\cos x-\frac{\sin x}{x})}{x(x+\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x})} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\frac{\sin x}{x}}{x+\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}} = \frac{1-1}{0+1} = 0$$

14.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{\sin x-1} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2 x}{\sin x-1} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{\sin x-1} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}-(1+\sin x) = -2$$

15.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x\sin\left(\frac{\pi}{x-1}\right) &= \lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{x-1}\right)}{\frac{\pi}{x-1}}\cdot\frac{\pi x}{x-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{x-1}\right)}{\frac{\pi}{x-1}}\cdot\frac{\pi x}{x(1-\frac{1}{x})}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{x-1}\right)}{\frac{\pi}{x-1}}\cdot\frac{\pi}{1-\frac{1}{x}} = 1\cdot\frac{\pi}{1-0} = \pi\end{aligned}$$

16.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)^3(4x-1)}{(2x+1)^2(x-1)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{[x(1+\frac{1}{x})]^3x(4-\frac{1}{x})}{[x(2+\frac{1}{x})]^2[x(1-\frac{1}{x})]^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3(1+\frac{1}{x})^3x(4-\frac{1}{x})}{x^2(2+\frac{1}{x})^2x^2(1-\frac{1}{x})^2}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{x})^3(4-\frac{1}{x})}{(2+\frac{1}{x})^2(1-\frac{1}{x})^2}=\frac{(1+0)^3(4-0)}{(2+0)^2(1-0)^2}=1$$

17.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x+x^2}-2x}{x-3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2(\frac{1}{x}+1)}-2x}{x(1-\frac{3}{x})}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2}\sqrt{\frac{1}{x}+1}-2x}{x(1-\frac{3}{x})}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{\frac{1}{x}+1}-2x}{x(1-\frac{3}{x})}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{\frac{1}{x}+1}-2x}{x(1-\frac{3}{x})}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\left(\sqrt{\frac{1}{x}+1}+2\right)}{x(1-\frac{3}{x})}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\left(\sqrt{\frac{1}{x}+1}+2\right)}{1-\frac{3}{x}}$$
$$=\frac{-\left(\sqrt{0+1}+2\right)}{1-0}=-3$$

18.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+x}-3x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+x}-3x\right)\cdot\frac{\sqrt{9x^2+x}+3x}{\sqrt{9x^2+x}+3x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(9x^2+x)-9x^2}{\sqrt{9x^2+x}+3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2(9+\frac{1}{x})}+3x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2}\sqrt{9+\frac{1}{x}}+3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{9+\frac{1}{x}}+3x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x\sqrt{9+\frac{1}{x}}+3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x\left(\sqrt{9+\frac{1}{x}}+3\right)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{9+\frac{1}{x}}+3}=\frac{1}{\sqrt{9+0}+3}=\frac{1}{6}$$

19.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-1}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-1}+x\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2+3x-1}-x}{\sqrt{x^2+3x-1}-x}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2+3x-1)-x^2}{\sqrt{x^2+3x-1}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-1}{\sqrt{x^2(1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2})}-x}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x(3-\frac{1}{x})}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x(3-\frac{1}{x})}{|x|\sqrt{1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}-x}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x(3-\frac{1}{x})}{-x\sqrt{1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x(3-\frac{1}{x})}{-x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}+1\right)}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{3-\frac{1}{x}}{-\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}+1\right)}=\frac{3-0}{-\left(\sqrt{1+0-0}+1\right)}=-\frac{3}{2}$$

Quiz 2 : MAC1302 แคลคูลัส 1

หัวข้อ อนุพันธ์ของฟังก์ชัน **กลุ่ม** S1A
เวลา สัปดาห์ที่ 5 ปีการศึกษา 1/2563 **คะแนน** 10 คะแนน
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = \sqrt{x+1}$ โดยใช้**บทนิยาม**
2. จงหาสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = e^{\sin x} \cdot \cos x$ ที่จุด $(0, 1)$
3. กำหนดให้ $f(1 + \tan x) = \sec^2 x$ เมื่อ $0 < x < \frac{\pi}{2}$ จงหา $f'(2)$
4. ให้ f, u, v เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ โดยที่ $u(0) = v(0) = 1$ และ $u'(0) = v'(0) = 2$ ถ้า

$$f(x) = \frac{u(x) \cdot e^x}{v(x) + \sin x}$$

   จงหา $f'(0)$
5. จงหาอนุพันธ์ของ $y = (\tan x)^{\ln x}$

เฉลย Quiz 2 : MAC1302 แคลคูลัส 1 (S1A)

1. จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = \sqrt{x+1}$ โดยใช้**บทนิยาม**

   วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h+1}-\sqrt{x+1}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h+1}-\sqrt{x+1}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1}} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h+1)-(x+1)}{h(\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1})} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1})} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \end{aligned}$$

2. จงหาสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = e^{\sin x} \cdot \cos x$ ที่จุด $(0,1)$

   วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= e^{\sin x} \cdot (\cos x)' + (e^{\sin x})' \cdot \cos x \\ &= e^{\sin x} \cdot (-\sin x) + e^{\sin x} \cdot (\sin x)' \cdot \cos x \\ &= -e^{\sin x} \cdot \sin x + e^{\sin x} \cdot (\cos x) \cdot \cos x \\ &= -e^{\sin x} \cdot \sin x + e^{\sin x} \cdot \cos^2 x \end{aligned}$$

   ถ้า $x = 0$ จะได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} = -e^{\sin 0} \cdot \sin 0 + e^{\sin 0} \cdot \cos^2 0 = 1$$

   สมการสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้งคือ $y - 1 = 1(x-0)$ หรือ $y = x+1$

3. กำหนดให้ $f(1+\tan x) = \sec^2 x$ เมื่อ $0 < x < \frac{\pi}{2}$ จงหา $f'(2)$

   วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} [f(1+\tan x)]' &= (\sec^2 x)' \\ f'(1+\tan x) \cdot (1\tan x)' &= 2\sec x \cdot (\sec x)' \\ f'(1+\tan x) \cdot \sec^2 x &= 2\sec x \cdot (\sec x \tan x) \\ f'(1+\tan x) \cdot \sec^2 x &= 2\sec^2 x \tan x \end{aligned}$$

   แทน $x = \frac{\pi}{4}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f'\left(1+\tan\frac{\pi}{4}\right) \cdot \sec^2\frac{\pi}{4} &= 2\sec^2\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{4} \\ f'(2) \cdot 2 &= 2 \cdot 2 \cdot 1 \\ f'(2) &= 2 \end{aligned}$$

4. ให้ f, u, v เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ โดยที่ $u(0) = v(0) = 1$ และ $u'(0) = v'(0) = 2$ ถ้า

$$f(x) = \frac{u(x) \cdot e^x}{v(x) + \sin x}$$

   จงหา $f'(0)$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{[v(x)+\sin x][u(x)\cdot e^x]' - [u(x)\cdot e^x][v(x)+\sin x]'}{[v(x)+\sin x]^2} \\
f'(x) &= \frac{[v(x)+\sin x][u(x)e^x + u'(x)e^x] - [u(x)\cdot e^x][v'(x)+\cos x]}{[v(x)+\sin x]^2} \\
f'(0) &= \frac{[v(0)+\sin 0][u(0)e^0 + u'(0)e^0] - [u(0)\cdot e^0][v'(0)+\cos 0]}{[v(0)+\sin 0]^2} \\
&= \frac{[1+0][1+2] - [1\cdot 1][2+1]}{[1+0]^2} = 0
\end{aligned}$$

5. จงหาอนุพันธ์ของ $y = (\tan x)^{\ln x}$

วิธีทำ จะได้ว่า $\ln y = \ln(\tan x)^{\ln x}$ นั่นคือ $\ln y = \ln x \cdot \ln(\tan x)$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
(\ln y)' &= \ln x \cdot (\ln(\tan x))' + (\ln x)' \cdot \ln(\tan x) \\
\frac{1}{y}\cdot y' &= \ln x \cdot \frac{1}{\tan x}\cdot(\tan x)' + \frac{1}{x}\cdot\ln(\tan x) \\
y' &= y\left[\ln x \cdot \frac{1}{\tan x}\cdot\sec^2 x + \frac{1}{x}\cdot\ln(\tan x)\right] \\
&= (\tan x)^{\ln x}\left[\ln x\cdot\cot x\sec^2 x + \frac{1}{x}\cdot\ln(\tan x)\right]
\end{aligned}$$

Quiz 2 : MAC1302 แคลคูลัส 1

หัวข้อ อนุพันธ์ของฟังก์ชัน **กลุ่ม** S2A
เวลา สัปดาห์ที่ 5 ปีการศึกษา 1/2563 **คะแนน** 10 คะแนน
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. จงตรวจสอบว่า $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{เมื่อ } x \leq 1 \\ 1 + 2x & \text{เมื่อ } x > 1 \end{cases}$ มีอนุพันธ์ที่ $x = 1$ หรือไม่

2. จงหาสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = \tan(\sin x) + e^x$ ที่จุด $(0, 1)$

3. กำหนดให้ $f(1 + \sqrt{x}) = \dfrac{\ln x}{e^x}$ จงหา $f'(2)$

4. ให้ f, u เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ โดยที่ $u(0) = 1$ และ $u'(0) = -1$ ถ้า

$$f(x) = (\sin x + u(x))(\cos x + u(x))$$

จงหา $f'(0)$

5. จงหาอนุพันธ์ของ $y = (\ln x)^{\sin x}$

เฉลย Quiz 2 : MAC1302 แคลคูลัส 1 (S2A)

1. จงตรวจสอบว่า $f(x)=\begin{cases}x^2+2 & \text{เมื่อ } x\le 1\\ 1+2x & \text{เมื่อ } x>1\end{cases}$ มีอนุพันธ์ที่ $x=1$ หรือไม่

   วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}f'(1^+)&=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(1+2x)-3}{x-1}\\&=\lim_{x\to 1^+}\frac{2(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}2=2\\f'(1^-)&=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x^2+2)-3}{x-1}\\&=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}(x+1)=2\end{aligned}$$

   ดังนั้น $f'(1)=2$ นั่นคือ f มีอนุพันธ์ที่ $x=1$

2. จงหาสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y=\tan(\sin x)+e^x$ ที่จุด $(0,1)$

   วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\sec^2(\sin x)\cdot(\sin x)'+e^x\\&=\sec^2(\sin x)\cdot\cos x+e^x\end{aligned}$$

   ถ้า $x=0$ จะได้ว่า

$$\frac{dy}{dx}=\sec^2(\sin 0)\cdot\cos 0+e^0=1+1=2$$

   สมการสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้งคือ $y-1=2(x-0)$ หรือ $y=2x+1$

3. กำหนดให้ $f(1+\sqrt{x})=\dfrac{\ln x}{e^x}$ จงหา $f'(2)$

   วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}[f(1+\sqrt{x})]'&=\frac{e^x(\ln x)'-\ln x\cdot(e^x)'}{[e^x]^2}\\f'(1+\sqrt{x})\cdot(1+\sqrt{x})'&=\frac{e^x\cdot\frac{1}{x}-\ln x\cdot(e^x)}{e^{2x}}\\f'(1+\sqrt{x})\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}&=\frac{e^x\cdot\frac{1}{x}-\ln x\cdot(e^x)}{e^{2x}}\end{aligned}$$

   แทน $x=1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}f'(2)\cdot\frac{1}{2}&=\frac{e-0}{e^2}\\f'(2)&=\frac{2}{e}\end{aligned}$$

4. ให้ f,u เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ โดยที่ $u(0)=1$ และ $u'(0)=-1$ ถ้า

$$f(x)=(\sin x+u(x))(\cos x+u(x))$$

   จงหา $f'(0)$

   วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}f'(x)&=(\sin x+u(x))'(\cos x+u(x))+(\sin x+u(x))(\cos x+u(x))'\\f'(x)&=(\cos x+u'(x))(\cos x+u(x))+(\sin x+u(x))(-\sin x+u'(x))\\f'(0)&=(1+u'(0))(1+u(0))+(0+u(0))(0+u'(0))\\&=(1+-1)(1+1)+(0+1)(0+-1)=-1\end{aligned}$$

5. จงหาอนุพันธ์ของ $y = (\ln x)^{\sin x}$

วิธีทำ จะได้ว่า $\ln y = \ln(\ln x)^{\sin x}$ นั่นคือ $\ln y = \sin x \cdot \ln(\ln x)$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
(\ln y)' &= \sin x \cdot (\ln(\ln x))' + (\sin x)' \cdot \ln(\ln x) \\
\frac{1}{y} \cdot y' &= \sin x \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot (\ln x)' + \cos x \cdot \ln(\ln x) \\
y' &= y \left[\sin x \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} + \cos x \cdot \ln(\ln x) \right] \\
&= (\ln x)^{\sin x} \left[\frac{\sin x}{x \ln x} + \cos x \cdot \ln(\ln x) \right]
\end{aligned}$$

Quiz 2 : MAC1302 แคลคูลัส 1

หัวข้อ อนุพันธ์ของฟังก์ชัน **กลุ่ม** S1B

เวลา สัปดาห์ที่ 5 ปีการศึกษา 1/2563 **คะแนน** 10 คะแนน

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ โดยใช้**บทนิยาม**

2. จงหาสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = \cos(\ln(\cos x)) + \sin x$ ที่จุด $(0, 1)$

3. กำหนดให้ $f(1+g(x)) = \dfrac{e^x}{g(x)}$ ถ้า $g(0) = 1$ และ $g'(0) = -1$ จงหา $f'(2)$

4. จงหา $f^{(2563)}(x)$ เมื่อกำหนดให้
$$f(x) = \cos x$$

5. จงหาอนุพันธ์ของ $y = x^{e^x}$

เฉลย Quiz 2 : MAC1302 แคลคูลัส 1 (S1B)

1. จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ โดยใช้**บทนิยาม**

   วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h-1}-\sqrt{x-1}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h-1}-\sqrt{x-1}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h-1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+h-1}+\sqrt{x-1}} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h-1)-(x-1)}{h(\sqrt{x+h-1}+\sqrt{x-1})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h-1}+\sqrt{x-1})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h-1}+\sqrt{x-1}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x-1}}
\end{aligned}$$

2. จงหาสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = \cos(\ln(\cos x)) + \sin x$ ที่จุด $(0,1)$

   วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= -\sin(\ln(\cos x)) \cdot (\ln(\cos x))' + \cos x \\
&= -\sin(\ln(\cos x)) \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot (\cos x)' + \cos x \\
&= -\sin(\ln(\cos x)) \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) + \cos x
\end{aligned}$$

   ถ้า $x = 0$ จะได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} = -\sin(\ln(\cos 0)) \cdot \frac{1}{\cos 0} \cdot (-\sin 0) + \cos 0 = 1$$

   สมการสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้งคือ $y - 1 = 1(x-0)$ หรือ $y = x + 1$

3. กำหนดให้ $f(1+g(x)) = \dfrac{e^x}{g(x)}$ ถ้า $g(0) = 1$ และ $g'(0) = -1$ จงหา $f'(2)$

   วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
[f(1+g(x))]' &= \frac{g(x)(e^x)' - e^x \cdot g'(x)}{[g(x)]^2} \\
f'(1+g(x)) \cdot (1+g(x))' &= \frac{g(x) \cdot e^x - e^x \cdot g'(x)}{[g(x)]^2} \\
f'(1+g(x)) \cdot g'(x) &= \frac{g(x) \cdot e^x - e^x \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}
\end{aligned}$$

   แทน $x = 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
f'(1+g(0)) \cdot g'(0) &= \frac{g(0) \cdot e^0 - e^0 \cdot g'(0)}{[g(0)]^2} \\
f'(1+1) \cdot (-1) &= \frac{1(1) - 1(-1)}{1^2} = 2 \\
f'(2) &= -2
\end{aligned}$$

4. จงหา $f^{(2563)}(x)$ เมื่อกำหนดให้

$$f(x) = \cos x$$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin x \\ f''(x) &= -\cos x \\ f'''(x) &= \sin x \\ f^{(4)}(x) &= \cos x \\ f^{(5)}(x) &= -\sin x \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$f^{(2563)}(x) = f^{(640\cdot 4+3)}(x) = \sin x$$

5. จงหาอนุพันธ์ของ $y = x^{e^x}$

วิธีทำ จะได้ว่า $\ln y = \ln x^{e^x}$ นั่นคือ $\ln y = e^x \cdot \ln x$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} (\ln y)' &= e^x \cdot (\ln x)' + (e^x)' \cdot \ln x \\ \frac{1}{y} \cdot y' &= e^x \cdot \frac{1}{x} + e^x \cdot \ln x \\ y' &= y\left[\frac{e^x}{x} + e^x \ln x\right] \\ &= x^{e^x}\left[\frac{e^x}{x} + e^x \ln x\right] \end{aligned}$$

Quiz 2 : MAC1302 แคลคูลัส 1

หัวข้อ อนุพันธ์ของฟังก์ชัน **กลุ่ม** S2B

เวลา สัปดาห์ที่ 5 ปีการศึกษา 1/2563 **คะแนน** 10 คะแนน

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. จงตรวจสอบว่า $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{เมื่อ } x \leq 1 \\ 2x & \text{เมื่อ } x > 1 \end{cases}$ มีอนุพันธ์ที่ $x = 1$ หรือไม่

2. จงหาสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = e^{\tan x} \cdot \cos x$ ที่จุด $(0, 1)$

3. กำหนดให้ $f(x + \cos x) = \dfrac{\tan x}{\cos x}$ จงหา $f'(2)$

4. จงหา $f^{(2563)}(x)$ เมื่อกำหนดให้

$$f(x) = \sin x$$

5. จงหาอนุพันธ์ของ $y = (\ln x)^{e^x}$

เฉลย Quiz 2 : MAC1302 แคลคูลัส 1 (S2B)

1. จงตรวจสอบว่า $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{เมื่อ } x \leq 1 \\ 2x & \text{เมื่อ } x > 1 \end{cases}$ มีอนุพันธ์ที่ $x = 1$ หรือไม่

   วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned} f'(1^+) &= \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2x - 2}{x - 1} \\ &= \lim_{x\to 1^+} \frac{2(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} 2 = 2 \\ f'(1^-) &= \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x^2 + x) - 2}{x - 1} \\ &= \lim_{x\to 1^-} \frac{(x+2)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} (x+2) = 3 \end{aligned}$$

   จะเห็นว่า $f'(1^+) \neq f'(1^-)$ ดังนั้น f ไม่มีอนุพันธ์ที่ $x = 1$

2. จงหาสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = e^{\tan x} \cdot \cos x$ ที่จุด $(0, 1)$

   วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= e^{\tan x} \cdot (\cos x)' + (e^{\tan x})' \cdot \cos x \\ &= e^{\tan x} \cdot (-\sin x) + e^{\tan x} \cdot (\tan x)' \cdot \cos x \\ &= e^{\tan x} \cdot (-\sin x) + e^{\tan x} \cdot \sec^2 x \cdot \cos x \end{aligned}$$

   ถ้า $x = 0$ จะได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} = e^{\tan 0} \cdot (-\sin 0) + e^{\tan 0} \cdot \sec^2 0 \cdot \cos 0 = 1$$

   สมการสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้งคือ $y - 1 = 1(x - 0)$ หรือ $y = x + 1$

3. กำหนดให้ $f(x + \cos x) = \dfrac{\tan x}{\cos x}$ จงหา $f'(2)$ **แก้ไข จงหา** $f'(1)$

   วิธีทำ จะได้ว่า $f(x + \cos x) = \tan x \sec x$ นั่นคือ

$$\begin{aligned} [f(x + \cos x))]' &= \tan x(\sec x)' + (\tan x)' \sec x \\ f'(x + \cos x) \cdot (x + \cos x)' &= \tan x(\sec x \tan x) + (\sec^2 x) \sec x \\ f'(x + \cos x) \cdot (1 - \sin x) &= \tan^2 x \sec x + \sec^3 x \end{aligned}$$

   แทน $x = 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f'(0 + \cos 0) \cdot (1 - \sin 0) &= \tan^2 0 \sec 0 + \sec^3 0 \\ f'(0 + 1) \cdot (1 - 0) &= 0 + 1 \\ f'(1) &= 1 \end{aligned}$$

4. จงหา $f^{(2563)}(x)$ เมื่อกำหนดให้

$$f(x) = \sin x$$

   วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x \\ f''(x) &= -\sin x \\ f'''(x) &= -\cos x \\ f^{(4)}(x) &= \sin x \\ f^{(5)}(x) &= \cos x \end{aligned}$$

   ดังนั้น

$$f^{(2563)}(x) = f^{(640 \cdot 4 + 3)}(x) = -\cos x$$

5. จงหาอนุพันธ์ของ $y = (\ln x)^{e^x}$

วิธีทำ จะได้ว่า $\ln y = \ln(\ln x)^{e^x}$ นั่นคือ $\ln y = e^x \cdot \ln(\ln x)$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
(\ln y)' &= e^x \cdot (\ln(\ln x))' + (e^x)' \cdot \ln(\ln x) \\
\frac{1}{y} \cdot y' &= e^x \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot (\ln x)' + e^x \cdot \ln(\ln x) \\
&= e^x \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} + e^x \cdot \ln(\ln x) \\
y' &= y \left[\frac{e^x}{x \ln x} + e^x \ln(\ln x) \right] \\
&= (\ln x)^{e^x} \left[\frac{e^x}{x \ln x} + e^x \ln(\ln x) \right]
\end{aligned}$$

Quiz 3 : MAC1302 แคลคูลัส 1

หัวข้อ ปฏิยานุพันธ์ ปริพันธ์โดยการแทนค่า และปริพันธ์ที่ละส่วน **คะแนน** 10 คะแนน
เวลา สัปดาห์ที่ 11 ปีการศึกษา 1/2563
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
ชื่อ-สกุล.....**รหัสนักศึกษา**..... **หมู่เรียน** .....

จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

1. **(4 คะแนน)** จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

   (1) $\int e^x + \sin x - \sec x(\sec x + \tan x)\,dx$

   (2) $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$

2. **(3 คะแนน)** จงหา $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$

3. **(3 คะแนน)** จงหาปริพันธ์ $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

เฉลย Quiz 3 : MAC1302 แคลคูลัส 1

หัวข้อ ปฏิยานุพันธ์ ปริพันธ์โดยการแทนค่า และปริพันธ์ที่ละส่วน **คะแนน** 10 คะแนน
เวลา สัปดาห์ที่ 11 ปีการศึกษา 1/2563
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
ชื่อ–สกุล.....**รหัสนักศึกษา**..... **หมู่เรียน** .....

---

1. **(4 คะแนน)** จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

   (1) $\int e^x + \sin x - \sec x(\sec x + \tan x)\,dx$

   วิธีทำ

$$\begin{aligned}\int e^x + \sin x - \sec x(\sec x + \tan x)\,dx &= \int e^x + \sin x - \sec^2 x - \sec x \tan x\,dx \\ &= e^x - \cos x - \tan x - \sec x + C \quad \#\end{aligned}$$

   (2) $\int \left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$

   วิธีทำ

$$\begin{aligned}\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx &= \int x + 2 \cdot \sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}\,dx \\ &= \int x + 2 + \frac{1}{x}\,dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 + 2x + \ln|x| + C \quad \#\end{aligned}$$

2. **(3 คะแนน)** จงหา $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$

   วิธีทำ ให้ $u = x + 1$ จะได้ว่า $x = u - 1$ และ $du = dx$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx &= \int_{u(0)}^{u(3)} \frac{u-1}{\sqrt{u}}\,du \\ &= \int_1^4 u^{\frac{1}{2}} - u^{-\frac{1}{2}}\,du \\ &= \left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}}\right]_1^4 \\ &= \left[\frac{2}{3} \cdot 4^{\frac{3}{2}} - 2 \cdot 4^{\frac{1}{2}}\right] - \left[\frac{2}{3} - 2\right] \\ &= \left[\frac{2}{3} \cdot 8 - 2(2)\right] - \left[\frac{2}{3} - 2\right] = \frac{8}{3} \quad \#\end{aligned}$$

3. **(3 คะแนน)** จงหาปริพันธ์ $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

   วิธีทำ ให้ $u = \ln x$ และ $dv = \dfrac{1}{x^2}dx$ จะได้ว่า

$$du = \frac{1}{x}dx \qquad \text{และ} \qquad v = -\frac{1}{x}$$

   ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx &= -\frac{1}{x} \cdot \ln x - \int -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}\,dx \\ &= -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2}\,dx \\ &= -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C \quad \#\end{aligned}$$

Quiz 4 : MAC1302 แคลคูลัส 1

หัวข้อ ปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชันตรรกยะ ปริพันธ์ฟังก์ชันรูปแยยกรณ์ และตรีโกณมิติ **คะแนน** 10 คะแนน
เวลา สัปดาห์ที่ 13 ปีการศึกษา 1/2563
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
ชื่อ-สกุล.....**รหัสนักศึกษา**..... **หมู่เรียน** .....

จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

1. **(4 คะแนน)** จงหาปริพันธ์ $\int \frac{2}{(x+1)(x^2+1)}\,dx$
2. **(3 คะแนน)** จงหา $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}\,dx$
3. **(3 คะแนน)** จงหาปริพันธ์ $\int \cos^2 x(\sec x - \tan x)^2\,dx$

เฉลย Quiz 4 : MAC1302 แคลคูลัส 1

หัวข้อ ปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชันตรรกยะ ปริพันธ์ฟังก์ชันรูปแยยกรณ์ และตรีโกณมิติ **คะแนน** 10 คะแนน
เวลา สัปดาห์ที่ 13 ปีการศึกษา 1/2563
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
ชื่อ–สกุล.....**รหัสนักศึกษา**..... **หมู่เรียน** .....

จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

1. **(4 คะแนน)** จงหาปริพันธ์ $\displaystyle\int \frac{2}{(x+1)(x^2+1)}\,dx$

   วิธีทำ พิจารณา

   $$\frac{2}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

   นั่นคือ

   $$\begin{aligned} & 2 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x+1) \\ x=-1; \quad & 2 = 2A + 0 \qquad \therefore A = 1 \\ x=0; \quad & 2 = A + C = 1 + C \qquad \therefore C = 1 \\ x=1; \quad & 2 = 2A + (B+C)2 = 2A + 2B + 2C = 2(1) + 2B + 2(1) \qquad \therefore B = -1 \end{aligned}$$

   ดังนั้น

   $$\begin{aligned} \int \frac{2}{(x+1)(x^2+1)}\,dx &= \int \frac{1}{x+1} + \frac{-x+1}{x^2+1}\,dx \\ &= \int \frac{1}{x+1} - \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\,dx \\ &= \ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + \arctan x + C \quad \# \end{aligned}$$

2. **(3 คะแนน)** จงหา $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}\,dx$

   วิธีทำ ให้ $u = \sqrt{\sqrt{x}+1}$ แล้ว $u^2 = \sqrt{x}+1$ นั่นคือ $u^2 - 1 = \sqrt{x}$ จะได้ว่า

   $$\begin{aligned} du &= \frac{1}{2}(\sqrt{x}+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx \\ &= \frac{1}{4(\sqrt{x}+1)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}dx \\ &= \frac{1}{4u} \cdot \frac{1}{u^2-1}dx \\ \therefore \quad 4u(u^2-1)du &= dx \end{aligned}$$

   ดังนั้น

   $$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}\,dx &= \int \frac{u^2-1}{u} \cdot 4u(u^2-1)du \\ &= 4\int (u^2-1)^2 du \\ &= 4\int u^4 - 2u^2 + 1\,du \\ &= 4\left[\frac{1}{5}u^5 - \frac{2}{3}u^3 + u\right] + C \\ &= \frac{4}{5}(\sqrt{x}+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{8}{3}(\sqrt{x}+1)^{\frac{3}{2}} + 4(\sqrt{x}+1)^{\frac{1}{2}} + C \quad \# \end{aligned}$$

3. **(3 คะแนน)** จงหาปริพันธ์ $\int \cos^2 x(\sec x - \tan x)^2\,dx$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\int \cos^2 x(\sec x - \tan x)^2\,dx &= \int \cos^2 x(\sec^2 x - 2\sec x\tan x + \tan^2 x)\,dx \\
&= \int \cos^2 x\sec^2 x - 2\cos^2 x\sec x\tan x + \cos^2 x\tan^2 x\,dx \\
&= \int 1 - 2\sin x + \sin^2 x\,dx \\
&= \int 1 - 2\sin x + \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\,dx \\
&= \int 1 - 2\sin x + \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\,dx \\
&= \int \frac{3}{2} - 2\sin x - \frac{1}{2}\cos 2x\,dx \\
&= \frac{3}{2}x + 2\cos x - \frac{1}{4}\sin 2x + C \qquad \#
\end{aligned}$$