Quiz 1 : MAC1302 แคลคูลัส 1

หัวข้อ ลิมิต และความต่อเนื่อง **คะแนน** 10 คะแนน
เวลา สัปดาห์ที่ 3 ปีการศึกษา 1/2564
ผู้สอน ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^3 + 2x^2 + 4x + 8}{8x^2 + x^5}$$

2. จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{3+\sqrt{x}} - 2}{x - 1}$$

3. จงหาตรวจสอบว่าค่าลิมิตต่อไปนี้มีค่าหรือไม่

$$\lim_{x\to 2} \frac{|2x^2 - 3| - |x^2 + 1|}{|x - 2|}$$

4. จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

$$\lim_{x\to \pi} \frac{\cos x + 1}{\sin x}$$

5. จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sec x - 1}{x \sin x}$$

6. จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

$$\lim_{x\to \infty} \left(x - \sqrt{x^2 + 3x}\right)$$

7. จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x} + x}{\sqrt{x^2 + x} - x}$$

8. จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{2}{x-1}\right)$$

9. จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$$

10. ให้ a, b เป็นจำนวนจริงบวกที่ไม่เท่ากัน ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนจำนวนจริง เมื่อ

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax^2-a}{x-1} & \text{เมื่อ } x<1\\ bx & \text{เมื่อ } x\geq 1\end{cases}$$

จงหาค่าของ $\dfrac{a+b}{a-b}$

เฉลย Quiz 1 : MAC1302 แคลคูลัส 1

หัวข้อ ลิมิต และความต่อเนื่อง **คะแนน** 10 คะแนน
เวลา สัปดาห์ที่ 3 ปีการศึกษา 1/2564
ผู้สอน ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+2x^2+4x+8}{8x^2+x^5}$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -2}\frac{x^3+2x^2+4x+8}{8x^2+x^5} &= \lim_{x\to -2}\frac{x^2(x+2)+4(x+2)}{x^2(8+x^3)}\\
&= \lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x^2+4)}{x^2(2+x)(4-2x+x^2)}\\
&= \lim_{x\to -2}\frac{x^2+4}{x^2(4-2x+x^2)}\\
&= \frac{8}{4(4+4+4)} = \frac{1}{6} \quad \#
\end{aligned}$$

2. จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3+\sqrt{x}}-2}{x-1}$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3+\sqrt{x}}-2}{x-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3+\sqrt{x}}-2}{x-1}\cdot\frac{\sqrt{3+\sqrt{x}}+2}{\sqrt{3+\sqrt{x}}+2}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{3+\sqrt{x}})^2-2^2}{(x-1)(\sqrt{3+\sqrt{x}}+2)}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{(3+\sqrt{x})-4}{(x-1)(\sqrt{3+\sqrt{x}}+2)}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{(x-1)(\sqrt{3+\sqrt{x}}+2)}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{(x-1)(\sqrt{3+\sqrt{x}}+2)}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x})^2-1^2}{(x-1)(\sqrt{3+\sqrt{x}}+2)(\sqrt{x}+1)}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{3+\sqrt{x}}+2)(\sqrt{x}+1)}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{1}{(\sqrt{3+\sqrt{x}}+2)(\sqrt{x}+1)}\\
&= \frac{1}{4(2)} = \frac{1}{8} \quad \#
\end{aligned}$$

3. จงหาตรวจสอบว่าค่าลิมิตต่อไปนี้มีค่าหรือไม่

$$\lim_{x\to 2}\frac{|2x^2-3|-|x^2+1|}{|x-2|}$$

วิธีทำ พิจารณา $x > 2$ จะได้ว่า $2x^2-3>0$, $x^2+1>0$ และ $x-2>0$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2^+}\frac{|2x^2-3|-|x^2+1|}{|x-2|} &= \lim_{x\to 2^+}\frac{(2x^2-3)-(x^2+1)}{(x-2)}\\ &= \lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-4}{(x-2)}\\ &= \lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}\\ &= \lim_{x\to 2^+}(x+2) = 4\end{aligned}$$

พิจารณา $x < 2$ จะได้ว่า $2x^2-3>0$, $x^2+1>0$ และ $x-2<0$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2^-}\frac{|2x^2-3|-|x^2+1|}{|x-2|} &= \lim_{x\to 2^-}\frac{(2x^2-3)-(x^2+1)}{-(x-2)}\\ &= \lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-4}{-(x-2)}\\ &= \lim_{x\to 2^-}\frac{(x-2)(x+2)}{-(x-2)}\\ &= \lim_{x\to 2^-}-(x+2) = -4\end{aligned}$$

จะเห็นว่าลิมิตทั้งสองด้านไม่เท่ากัน ดังนั้น $\lim_{x\to 2}\frac{|2x^2-3|-|x^2+1|}{|x-2|}$ ไม่มีลิมิต

4. จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\cos x+1}{\sin x}$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pi}\frac{\cos x+1}{\sin x} &= \lim_{x\to\pi}\frac{\cos x+1}{\sin x}\cdot\frac{1-\cos x}{1-\cos x}\\ &= \lim_{x\to\pi}\frac{1-\cos^2 x}{\sin x(1-\cos x)}\\ &= \lim_{x\to\pi}\frac{\sin^2 x}{\sin x(1-\cos x)}\\ &= \lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{1-\cos x} = \frac{0}{1+1} = 0 \qquad \#\end{aligned}$$

5. จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sec x - 1}{x \sin x}$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{\sec x - 1}{x \sin x} &= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\cos x} - 1}{x \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x \cos x} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x \cos x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \sin x \cos x (1 + \cos x)} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x \sin x \cos x (1 + \cos x)} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x \cos x (1 + \cos x)} \\
&= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right) \frac{1}{\cos x (1 + \cos x)} \\
&= 1 \cdot \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2} \quad \#
\end{aligned}$$

6. จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

$$\lim_{x \to \infty} \left(x - \sqrt{x^2 + 3x} \right)$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to \infty} \left(x - \sqrt{x^2 + 3x} \right) &= \lim_{x \to \infty} \left(x - \sqrt{x^2 + 3x} \right) \cdot \frac{x + \sqrt{x^2 + 3x}}{x + \sqrt{x^2 + 3x}} \\
&= \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - (x^2 + 3x)}{x + \sqrt{x^2 + 3x}} \\
&= \lim_{x \to \infty} \frac{-3x}{x + \sqrt{x^2 (1 + \frac{3}{x})}} \\
&= \lim_{x \to \infty} \frac{-3x}{x + |x| \sqrt{1 + \frac{3}{x}}} \\
&= \lim_{x \to \infty} \frac{-3x}{x \left(1 + \sqrt{1 + \frac{3}{x}} \right)} \\
&= \lim_{x \to \infty} \frac{-3}{1 + \sqrt{1 + \frac{3}{x}}} \\
&= \frac{-3}{1 + \sqrt{1 + 0}} = -\frac{3}{2} \quad \#
\end{aligned}$$

7. จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-x}+x}{\sqrt{x^2+x}-x}$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-x}+x}{\sqrt{x^2+x}-x} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2(1-\frac{1}{x})}+x}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x})}-x} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}}+x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{1-\frac{1}{x}}+x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}-1\right)}{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1-\frac{1}{x}}-1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} \\
&= \frac{\sqrt{1-0}-1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{0}{2} = 0 \quad \#
\end{aligned}$$

8. จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

$$\lim_{x\to1^+} \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{x-1}\right)$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to1^+} \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{x-1}\right) &= \lim_{x\to1^+} \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} - \frac{2}{x-1}\right) \\
&= \lim_{x\to1^+} \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}^2-1} - \frac{2}{x-1}\right) \\
&= \lim_{x\to1^+} \left(\frac{\sqrt{x}+1}{x-1} - \frac{2}{x-1}\right) \\
&= \lim_{x\to1^+} \frac{\sqrt{x}+1-2}{x-1} = \lim_{x\to1^+} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \\
&= \lim_{x\to1^+} \frac{\sqrt{x}+1-2}{x-1} = \lim_{x\to1^+} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} \\
&= \lim_{x\to1^+} \frac{\sqrt{x}+1-2}{x-1} = \lim_{x\to1^+} \frac{\sqrt{x}^2-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} \\
&= \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2} \quad \#
\end{aligned}$$

9. จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$$

วิธีทำ พิจารณา $x > 0$ เนื่องจาก $-1 \le \sin x \le 1$ จะได้ว่า

$$0 \le (\sin x)^2 \le 1$$

ดังนั้น $0 \cdot \dfrac{1}{x^2} \le (\sin x)^2 \cdot \dfrac{1}{x^2} \le 1 \cdot \dfrac{1}{x^2}$ นั่นคือ

$$0 \le \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \le \frac{1}{x^2}$$

เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to\infty} 0 = 0$ และ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$
โดยทฤษฎีบทประกบ สรุปได้ว่า $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2 = 0$

10. ให้ a, b เป็นจำนวนจริงบวกที่ไม่เท่ากัน ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนจำนวนจริง เมื่อ

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax^2 - a}{x-1} & \text{เมื่อ } x < 1 \\ bx & \text{เมื่อ } x \ge 1 \end{cases}$$

จงหาค่าของ $\dfrac{a+b}{a-b}$

วิธีทำ เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ 1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \lim_{x\to1^-} f(x) &= \lim_{x\to1^+} f(x) \\ \lim_{x\to1^-} \frac{ax^2-a}{x-1} &= \lim_{x\to1^+} bx \\ \lim_{x\to1^-} \frac{a(x^2-1)}{x-1} &= b \\ \lim_{x\to1^-} \frac{a(x-1)(x+1)}{x-1} &= b \\ \lim_{x\to1^-} a(x+1) &= b \\ 2a &= b \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{a+2a}{a-2a} = \frac{3a}{-a} = -3 \qquad \#$$

Quiz 2 : MAC1302 **แคลคูลัส 1**

หัวข้อ อนุพันธ์ของฟังก์ชัน กฎลูกโซ่ และอนุพันธ์ของฟังก์ชันอดิสัย **คะแนน** 10 คะแนน

เวลา สัปดาห์ที่ 5 ปีการศึกษา 1/2564

ผู้สอน ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้โดยใช้**บทนิยาม**

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

2. กำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x & \text{เมื่อ } x > -1 \\ -2 - x^2 & \text{เมื่อ } x \le -1 \end{cases}$$

จงหาอนุพันธ์ทางขวาและทางซ้ายของ f ที่ $x = -1$ (โดยใช้บทนิยาม)
แล้วใช้สรุปว่า f หาอนุพันธ์ได้ที่ $x = -1$ หรือไม่

3. กำหนดให้

$$f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}}$$

จงหา $f'(0)$

4. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่จุด $x = 0$ โดยที่ $g(0) = 1$ และ

$$f(x) = \frac{xg(x)}{\cos x}$$

จงหา $f'(0)$

5. ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ โดยที่

$$f(1 + \sqrt{x}) = \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$$

จงหา $f'(2)$

6. ให้ f เป็นฟังก์ชันที่กำหนดโดย

$$f(x) = \frac{2x}{x+2}$$

จงหา $f^{(2564)}(-1)$

7. จงหาอนุพันธ์ของ

$$y = \frac{(\cos^4 x)(e^{\sin x}) \ln^2 x}{\sqrt{1 + \sec x}}$$

8. จงหาอนุพันธ์ของ

$$y = \frac{(\tan^2 x)(e^{\sec x}) \ln^3 x}{\sqrt{1 + e^x}}$$

9. จงหาอนุพันธ์ของ

$$y = (x \tan x)^{\frac{1}{x}}$$

10. จงหาอนุพันธ์ของ

$$y = (\sec x)^{x \tan x}$$

เฉลย Quiz 2 : MAC1302 แคลคูลัส 1

หัวข้อ อนุพันธ์ของฟังก์ชัน กฎลูกโซ่ และอนุพันธ์ของฟังก์ชันอดิสัย **คะแนน** 10 คะแนน

เวลา สัปดาห์ที่ 5 ปีการศึกษา 1/2564

ผู้สอน ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้โดยใช้**บทนิยาม**

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{x+h}{x+h+1} - \dfrac{x}{x+1}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{(x+h)(x+1)-x(x+h+1)}{(x+h+1)(x+1)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)(x+1)-x(x+h+1)}{h(x+h+1)(x+1)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x^2+x+xh+h)-(x^2+xh+x)}{h(x+h+1)(x+1)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(x+h+1)(x+1)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{(x+h+1)(x+1)} \\
&= \frac{1}{(x+1)^2} \qquad \#
\end{aligned}$$

2. กำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} x^2+4x & \text{เมื่อ } x > -1 \\ -2-x^2 & \text{เมื่อ } x \le -1 \end{cases}$$

จงหาอนุพันธ์ทางขวาและทางซ้ายของ f ที่ $x=-1$ (โดยใช้บทนิยาม) แล้วใช้สรุปว่า f หาอนุพันธ์ได้ที่ $x=-1$ หรือไม่

วิธีทำ จะเห็นว่า $f(-1) = -2-(-1)^2 = -3$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
f'(-1^+) &= \lim_{x\to -1^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} \\
&= \lim_{x\to -1^+} \frac{(x^2+4x)+3}{x+1} \\
&= \lim_{x\to -1^+} \frac{(x+1)(x+3)}{x+1} \\
&= \lim_{x\to -1^+} (x+3) = 2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f'(-1^-) &= \lim_{x\to -1^-} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} \\
&= \lim_{x\to -1^-} \frac{(-2-x^2)+3}{x+1} \\
&= \lim_{x\to -1^-} \frac{1-x^2}{x+1} \\
&= \lim_{x\to -1^-} \frac{(1-x)(1+x)}{x+1} \\
&= \lim_{x\to -1^+} (1-x) = 2
\end{aligned}
$$

นั่นคือ $f'(-1^+) = 2 = f'(-1^-)$ ดังนั้น f หาอนุพันธ์ได้ที่ $x=-1$ และ $f'(-1)=2$ #

3. กำหนดให้

$$f(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}$$

จงหา $f'(0)$

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}\right)' \\
&= \frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}} \cdot \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+x}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(1+\sqrt{1+x}\right)' \\
&= \frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{1+x}}} \cdot \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1+x)' \\
&= \frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{1+x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \cdot (1)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
f'(0) &= \frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+0}}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{1+0}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+0}} \cdot (1) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{2}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8\sqrt{2+2\sqrt{2}}} \qquad \#
\end{aligned}
$$

4. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่จุด $x=0$ โดยที่ $g(0)=1$ และ

$$f(x) = \frac{xg(x)}{\cos x}$$

จงหา $f'(0)$

วิธีทำ พิจารณา

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\cos x[xg(x)]' - xg(x)(\cos x)'}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos x[x'g(x)+xg'(x)] - xg(x)(-\sin x)}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos x[g(x)+xg'(x)] + xg(x)\sin x}{\cos^2 x}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น

$$f'(0) = \frac{1[g(0)+0]+0}{1^2} = g(0) = 1 \qquad \#$$

5. ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ โดยที่

$$f(1+\sqrt{x}) = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$$

จงหา $f'(2)$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}
[f(1+\sqrt{x})]' &= \frac{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})' - (1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})'}{(1+\sqrt{x})^2} \\
f'(1+\sqrt{x})\cdot(1+\sqrt{x})' &= \frac{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})' - (1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})'}{(1+\sqrt{x})^2} \\
f'(1+\sqrt{x})\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} &= \frac{(1+\sqrt{x})\cdot\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) - (1-\sqrt{x})\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(1+\sqrt{x})^2} \\
f'(1+\sqrt{x})\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} &= \frac{\frac{-(1+\sqrt{x})-(1-\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}}{(1+\sqrt{x})^2} \\
f'(1+\sqrt{x})\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} &= \frac{\frac{-2}{2\sqrt{x}}}{(1+\sqrt{x})^2} \\
f'(1+\sqrt{x})\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} &= \frac{-1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} \\
f'(1+\sqrt{x}) &= \frac{-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} \\
f'(1+\sqrt{x}) &= \frac{-2}{(1+\sqrt{x})^2}
\end{aligned}$$

แทน $x = 1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
f'(1+\sqrt{1}) &= \frac{-2}{(1+\sqrt{1})^2} \\
f'(2) &= \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \qquad \#
\end{aligned}$$

6. ให้ f เป็นฟังก์ชันที่กำหนดโดย

$$f(x) = \frac{2x}{x+2}$$

จงหา $f^{(2564)}(-1)$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(x+2)(2x)' - 2x(x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{(x+2)(2)-2x(1)}{(x+2)^2} = \frac{2x+4-2x}{(x+2)^2} = \frac{4}{(x+2)^2} \\
f''(x) &= 4(-2)(x+2)^{-3}(1) = \frac{4(-2)}{(x+2)^3} \\
f'''(x) &= 4(-2)(-3)(x+2)^{-4}(1) = \frac{4(-2)(-3)}{(x+2)^4} \\
f^{(4)}(x) &= 4(-2)(-3)(-4)(x+2)^{-5}(1) = \frac{4(-2)(-3)(-4)}{(x+2)^5} \\
&\vdots \\
f^{(2564)}(x) &= 4(-2)(-3)\cdots(-2564)(x+2)^{-2565}(1) = \frac{4(-2)(-3)(-4)\cdots(-2564)}{(x+2)^{2565}}
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$f^{(2564)}(-1) = \frac{4(-2)(-3)(-4)\cdots(-2564)}{(-1+2)^{2565}} = -4(2564!) \qquad \#$$

7. จงหาอนุพันธ์ของ

$$y = \frac{(\cos^4 x)(e^{\sin x})\ln^2 x}{\sqrt{1+\sec x}}$$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}\ln y &= \ln\frac{(\cos^4 x)(e^{\sin x})\ln^2 x}{\sqrt{1+\sec x}} \\ &= \ln(\cos^4 x) + \ln(e^{\sin x}) + \ln(\ln^2 x) - \ln\sqrt{1+\sec x} \\ &= 4\ln(\cos x) + \sin x + 2\ln(\ln x) - \frac{1}{2}\ln(1+\sec x)\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\ln y) &= \frac{d}{dx}\left[4\ln(\cos x) + \sin x + 2\ln(\ln x) - \frac{1}{2}\ln(1+\sec x)\right] \\ \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= 4\cdot\frac{1}{\cos x}\cdot(\cos x)' + \cos x + 2\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot(\ln x)' - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\sec x}\cdot(1+\sec x)' \\ \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= \frac{4}{\cos x}\cdot(-\sin x) + \cos x + \frac{2}{\ln x}\cdot\frac{1}{x} - \frac{1}{2(1+\sec x)}\cdot(\sec x\tan x) \\ \frac{dy}{dx} &= y\left[-4\tan x + \cos x + \frac{2}{x\ln x} - \frac{\sec x\tan x}{2(1+\sec x)}\right]\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\cos^4 x)(e^{\sin x})\ln^2 x^2}{\sqrt{1+\sec x}}\left[-4\tan x + \cos x + \frac{2}{x\ln x} - \frac{\sec x\tan x}{2(1+\sec x)}\right] \qquad \#$$

8. จงหาอนุพันธ์ของ

$$y = \frac{(\tan^2 x)(e^{\sec x})\ln^3 x}{\sqrt{1+e^x}}$$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}\ln y &= \ln\frac{(\tan^2 x)(e^{\sec x})\ln^3 x}{\sqrt{1+e^x}} \\ &= \ln(\tan^2 x) + \ln(e^{\sec x}) + \ln(\ln^3 x) - \ln\sqrt{1+e^x} \\ &= 2\ln(\tan x) + \sec x + 3\ln(\ln x) - \frac{1}{2}\ln(1+e^x)\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\ln y) &= \frac{d}{dx}\left[2\ln(\tan x) + \sec x + 3\ln(\ln x) - \frac{1}{2}\ln(1+e^x)\right] \\ \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= 2\cdot\frac{1}{\tan x}\cdot(\tan x)' + \sec x\tan x + 3\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot(\ln x)' - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+e^x}\cdot(1+e^x)' \\ \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= \frac{2}{\tan x}\cdot(\sec^2 x) + \sec x\tan x + \frac{3}{\ln x}\cdot\frac{1}{x} - \frac{1}{2(1+e^x)}\cdot e^x \\ \frac{dy}{dx} &= y\left[2\cot x\sec^2 x + \cos x + \frac{3}{x\ln x} - \frac{e^x}{2(1+e^x)}\right]\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\tan^2 x)(e^{\sec x})\ln^3 x}{\sqrt{1+e^x}}\left[2\cot x\sec^2 x + \cos x + \frac{3}{x\ln x} - \frac{e^x}{2(1+e^x)}\right] \qquad \#$$

9. จงหาอนุพันธ์ของ

$$y = (x\tan x)^{\frac{1}{x}}$$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\ln y = \ln(x\tan x)^{\frac{1}{x}} &= \frac{1}{x}\cdot\ln(x\tan x) = x^{-1}[\ln x + \ln(\tan x)] \\
\frac{d}{dx}(\ln y) &= \frac{d}{dx}[x^{-1}[\ln x + \ln(\tan x)]] \\
\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= (x^{-1})'[\ln x + \ln(\tan x)] + x^{-1}[\ln x + \ln(\tan x)]' \\
\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= -x^{-2}[\ln x + \ln(\tan x)] + x^{-1}\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{\tan x}\cdot(\tan x)'\right] \\
\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{x^2}[\ln x + \ln(\tan x)] + \frac{1}{x}\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{\tan x}\cdot(\sec^2 x)\right] \\
\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{x^2}[\ln x + \ln(\tan x)] + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}\cdot\cot x\sec^2 x \\
\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{x^2}\left[-\ln x - \ln(\tan x) + 1 + \cot x\sec^2 x\right] \\
\frac{dy}{dx} &= y\cdot\frac{1}{x^2}\left(-\ln x - \ln(\tan x) + 1 + \cot x\sec^2 x\right)
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\frac{dy}{dx} = (x\tan x)^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}\left(-\ln x - \ln(\tan x) + 1 + \cot x\sec^2 x\right) \qquad \#$$

10. จงหาอนุพันธ์ของ

$$y = (\sec x)^{x\tan x}$$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\ln y = \ln(\sec x)^{x\tan x} &= x\tan x\cdot\ln(\sec x) \\
\frac{d}{dx}(\ln y) &= \frac{d}{dx}[x\tan x\cdot\ln(\sec x)] \\
\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= x'\tan x\ln(\sec x) + x(\tan x)'\ln(\sec x) + x\tan x\cdot[\ln(\sec x)]' \\
\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= 1\tan x\ln(\sec x) + x(\sec^2 x)\ln(\sec x) + x\tan x\cdot\frac{1}{\sec x}(\sec x)' \\
\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= \tan x\ln(\sec x) + x\sec^2 x\ln(\sec x) + x\tan x\cdot\frac{1}{\sec x}(\sec x\tan x) \\
\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= \tan x\ln(\sec x) + x\sec^2 x\ln(\sec x) + x\tan^2 x \\
\frac{dy}{dx} &= y\cdot\left(\tan x\ln(\sec x) + x\sec^2 x\ln(\sec x) + x\tan^2 x\right)
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\frac{dy}{dx} = (\sec x)^{x\tan x}\left(\tan x\ln(\sec x) + x\sec^2 x\ln(\sec x) + x\tan^2 x\right) \qquad \#$$

Quiz 3 : MAC1302 แคลคูลัส 1

หัวข้อ ปฏิยานุพันธ์ ทฤษฎีบทหลักมูลแคลคูลัส และปริพันธ์ที่ละส่วน **คะแนน** 10 คะแนน
เวลา สัปดาห์ที่ 11 ปีการศึกษา 1/2564
ผู้สอน ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. จงหาค่าของ
$$\int_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}} x\sin(x|x|)\,dx$$
2. จงหาปริพันธ์ของ
$$\int \frac{(x+\sqrt{x}+1)^2}{x}\,dx$$
3. จงหาปริพันธ์ของ
$$\int \sin x\sin 2x\sin 3x\,dx$$
4. จงหาค่าของ
$$\int_{-1}^{0} x\sqrt[3]{x+1}\,dx$$
5. จงหาค่าของ
$$\int \frac{\tan^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$$
6. กำหนดให้ $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = 5$ จงหา
$$\int_{-1}^{1} f\left(\frac{x-1}{2}\right)+\frac{x+1}{2}\,dx$$
7. กำหนดให้ $\displaystyle F(x)=\int_{\pi}^{\sin x}\sin(e^t)\,dt$ จงหา $F''(0)$
8. ให้ $f(x)=4-x^2$ เมื่อ $x\in[0,2]$ จงหา $U(P,f)$ เมื่อ
$$P=\left\{0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2\right\}$$
โดยวาดกราฟประกอบ
9. จงแสดงว่า
$$\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$$
10. จงหาปริพันธ์ของ
$$\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx$$

เฉลย Quiz 3 : MAC1302 แคลคูลัส 1

หัวข้อ ปฏิยานุพันธ์ ทฤษฎีบทหลักมูลแคลคูลัส และปริพันธ์ที่ละส่วน **คะแนน** 10 คะแนน
เวลา สัปดาห์ที่ 11 ปีการศึกษา 1/2564
ผู้สอน ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. จงหาค่าของ

$$\int_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}} x\sin(x|x|)\,dx$$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}} x\sin(x|x|)\,dx &= \int_{-\sqrt{\pi}}^{0} x\sin(x|x|)\,dx + \int_{0}^{\sqrt{\pi}} x\sin(x|x|)\,dx \\
&= \int_{-\sqrt{\pi}}^{0} x\sin(-x^2)\,dx + \int_{0}^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^2)\,dx \\
&= \int_{-\sqrt{\pi}}^{0} \sin(-x^2)\,d(\frac{x^2}{2}) + \int_{0}^{\sqrt{\pi}} \sin(x^2)\,d(\frac{x^2}{2}) \\
&= -\frac{1}{2}\int_{-\sqrt{\pi}}^{0} \sin(-x^2)\,d(-x^2) + \frac{1}{2}\int_{0}^{\sqrt{\pi}} \sin(x^2)\,d(x^2) \\
&= \left[\frac{1}{2}\cos(-x^2)\right]_{-\sqrt{\pi}}^{0} + \left[-\frac{1}{2}\cos(x^2)\right]_{0}^{\sqrt{\pi}} \\
&= \left[\frac{1}{2}\cos(0) - \frac{1}{2}\cos(-\pi)\right] + \left[-\frac{1}{2}\cos(\pi) + \frac{1}{2}\cos 0\right] \\
&= \left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right] + \left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right] = 2 \qquad \#
\end{aligned}$$

2. จงหาปริพันธ์ของ

$$\int \frac{(x+\sqrt{x}+1)^2}{x}\,dx$$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int \frac{(x+\sqrt{x}+1)^2}{x}\,dx &= \int \frac{x^2+x+1+2x\sqrt{x}+2x+2\sqrt{x}}{x}\,dx \\
&= \int \frac{x^2+3x+2x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+1}{x}\,dx \\
&= \int x+3+2x^{\frac{1}{2}}+2x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{x}\,dx \\
&= \frac{1}{2}x^2+3x+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+4x^{\frac{1}{2}}+\ln|x|+C \qquad \#
\end{aligned}$$

3. จงหาปริพันธ์ของ

$$\int \sin x \sin 2x \sin 3x \, dx$$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int \sin x \sin 2x \sin 3x \, dx &= \int -\frac{1}{2}[\cos 3x - \cos x] \sin 3x \, dx \\
&= -\frac{1}{2} \int \sin 3x \cos 3x - \sin 3x \cos x \, dx \\
&= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{2} \sin 6x - \frac{1}{2}[\sin 4x + \sin 2x] \, dx \\
&= -\frac{1}{4} \int \sin 6x - \sin 4x - \sin 2x \, dx \\
&= -\frac{1}{4} \left[-\frac{1}{6} \cos 6x + \frac{1}{4} \cos 4x + \frac{1}{2} \cos 2x \right] + C \\
&= \frac{1}{24} \cos 6x - \frac{1}{16} \cos 4x - \frac{1}{8} \cos 2x + C \qquad \#
\end{aligned}$$

4. จงหาค่าของ

$$\int_{-1}^{0} x \sqrt[3]{x+1} \, dx$$

วิธีทำ ให้ $u = x + 1$ จะได้ว่า $du = dx$ และ $x = u - 1$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{0} x \sqrt[3]{x+1} \, dx &= \int_{u(-1)}^{u(0)} (u-1) \sqrt[3]{u} \, du \\
&= \int_{0}^{1} u^{\frac{4}{3}} - u^{\frac{1}{3}} \, du \\
&= \left[\frac{3}{7} u^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{4} u^{\frac{4}{3}} \right]_{0}^{1} \\
&= \frac{3}{7} - \frac{3}{4} = -\frac{9}{28} \qquad \#
\end{aligned}$$

5. จงหาค่าของ

$$\int \frac{\tan^2 \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx$$

วิธีทำ ให้ $u = \sqrt{x}$ จะได้ว่า $du = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} dx$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\tan^2 \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx &= 2 \int \tan^2 \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \, dx \\
&= 2 \int \tan^2 u \, du \\
&= 2 \int \sec^2 u - 1 \, du \\
&= 2 \tan u - 2u + C \\
&= 2 \tan \sqrt{x} - 2\sqrt{x} + C \qquad \#
\end{aligned}$$

6. กำหนดให้ $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = 5$ จงหา

$$\int_{-1}^{1} f\left(\frac{x-1}{2}\right) + \frac{x+1}{2}\,dx$$

วิธีทำ ให้ $u = \dfrac{x-1}{2}$ จะได้ว่า $du = \dfrac{1}{2}dx$ นั่นคือ

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} f\left(\frac{x-1}{2}\right) + \frac{x+1}{2}\,dx &= \int_{-1}^{1} f\left(\frac{x-1}{2}\right)\,dx + \int_{-1}^{1} \frac{x+1}{2}\,dx \\
&= \int_{u(-1)}^{u(1)} f(u)\;2du + \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} x+1\,dx \\
&= 2\int_{-1}^{0} f(u)\;du + \left[\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x\right]_{-1}^{1} \\
&= 2(5) + \left[\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right] - \left[\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right] \\
&= 11 \quad \#
\end{aligned}$$

7. กำหนดให้ $F(x) = \int_{\pi}^{\sin x} \sin(e^t)\,dt$ จงหา $F''(0)$

วิธีทำ โดยทฤษฎีบทหลักมูลแคลคูลัสข้อที่ 1

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_{\pi}^{\sin x} \sin(e^t)\,dt = \sin(e^{\sin x})\cdot(\sin x)' = \sin(e^{\sin x})\cdot(\cos x)$$

จะได้ว่า

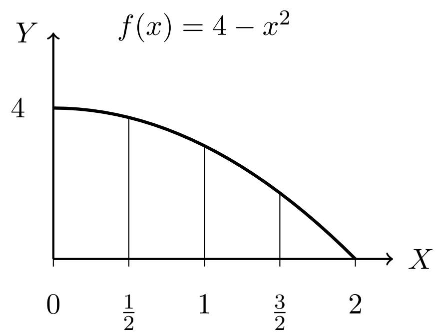
$$\begin{aligned}
F''(x) &= \sin(e^{\sin x})\cdot(\cos x)' + (\sin(e^{\sin x}))'\cdot(\cos x) \\
&= \sin(e^{\sin x})\cdot(-\sin x) + \cos(e^{\sin x})\cdot(e^{\sin x})'\cdot(\cos x) \\
&= \sin(e^{\sin x})\cdot(-\sin x) + \cos(e^{\sin x})\cdot e^{\sin x}\cdot(\sin x)'\cdot(\cos x) \\
&= \sin(e^{\sin x})\cdot(-\sin x) + \cos(e^{\sin x})\cdot e^{\sin x}\cdot(\cos x)\cdot(\cos x) \\
F''(0) &= 0 + \cos(1)\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = \cos 1 \quad \#
\end{aligned}$$

8. ให้ $f(x) = 4 - x^2$ เมื่อ $x \in [0,2]$ จงหา $U(P,f)$ เมื่อ

$$P = \left\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\right\}$$

โดยวาดกราฟประกอบ

วิธีทำ พิจารณากราฟ $y = 4 - x^2$



ดังนั้น

$$\begin{aligned}
U(P,f) &= \frac{1}{2}f\left(0\right) + \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}f\left(1\right) + \frac{1}{2}f\left(\frac{3}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(4 + \frac{15}{4} + 3 + \frac{7}{4}\right) \\
&= \frac{25}{4} \quad \#
\end{aligned}$$

9. จงแสดงว่า

$$\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

วิธีทำ ให้ $u = \arcsin x$ และ $dv = dx$ ดังนั้น

$$du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \qquad \text{และ} \qquad v = x$$

แล้ว

$$\begin{aligned}
\int \arcsin x \, dx &= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\
&= x \arcsin x - \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \, d(\frac{1}{2}x^2) \\
&= x \arcsin x - \frac{1}{2} \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \, d(x^2) \\
&= x \arcsin x + \frac{1}{2} \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \, d(-x^2) \\
&= x \arcsin x + \frac{1}{2} \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \, d(1-x^2) \\
&= x \arcsin x + (1-x^2)^{\frac{1}{2}} + C \\
&= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C \quad \#
\end{aligned}$$

10. จงหาปริพันธ์ของ

$$\int \frac{\ln x}{x^3} \, dx$$

วิธีทำ ให้ $u = \ln x$ และ $dv = x^{-3}$ ดังนั้น

$$du = \frac{1}{x}dx \qquad \text{และ} \qquad v = -\frac{1}{2}x^{-2} = -\frac{1}{2x^2}$$

แล้ว

$$\begin{aligned}
\int \frac{\ln x}{x^3} \, dx &= -\frac{1}{2x^2} \ln x - \int -\frac{1}{2}x^{-2} \cdot \frac{1}{x} \, dx \\
&= -\frac{1}{2x^2} \ln x + \frac{1}{2} \int x^{-3} \, dx \\
&= -\frac{1}{2x^2} \ln x + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^{-2}\right) + C \\
&= -\frac{1}{2x^2} \ln x - \frac{1}{4x^2} + C \quad \#
\end{aligned}$$

Quiz 4 : MAC1302 **แคลคูลัส 1**

หัวข้อ ปริพันธ์ของฟังก์ชันตรรกยะ กรณฑ์ และตรีโกณมิติ **คะแนน** 10 คะแนน
เวลา สัปดาห์ที่ 14 ปีการศึกษา 1/2564
ผู้สอน ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. จงหาปริพันธ์ของ
$$\int \frac{x+4}{x(x^2+4)}\,dx$$
2. จงหาค่าของ
$$\int_2^3 \frac{2}{x^3-x}\,dx$$
3. จงหาค่าของ
$$\int_2^3 \frac{1}{x^2-x^3}\,dx$$
4. จงหาปริพันธ์ของ
$$\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\,dx$$
5. จงหาปริพันธ์ของ
$$\int \sqrt[3]{1+\sqrt{x}}\,dx$$
6. จงหาปริพันธ์ของ
$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}+1}\,dx$$
7. จงหาปริพันธ์ของ
$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\,dx$$
8. จงหาปริพันธ์ของ
$$\int \sin^{2021} x\cos^3 x\,dx$$
9. จงหาปริพันธ์ของ
$$\int \sec^8 x\,dx$$
10. จงหาปริพันธ์ของ
$$\int \sec^{2021} x\tan^3 x\,dx$$

เฉลย Quiz 4 : MAC1302 แคลคูลัส 1

หัวข้อ ปริพันธ์ของฟังก์ชันตรรกยะ กรณฑ์ และตรีโกณมิติ **คะแนน** 10 คะแนน
เวลา สัปดาห์ที่ 14 ปีการศึกษา 1/2564
ผู้สอน ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. จงหาปริพันธ์ของ

$$\int \frac{x+4}{x(x^2+4)}\,dx$$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\frac{x+4}{x(x^2+4)} &= \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4} \\
x+4 &= A(x^2+4) + (Bx+C)x \\
x=0 \quad & 4 = 4A \qquad \therefore A = 1 \\
x=1; \quad & 5 = 5A + (B+C) = 5(1) + B + C \qquad \text{หรือ } B = -C \\
x=-1; \quad & 3 = 5A + B - C = 5(1) + B - C = 5 - C - C = 5 - 2C \qquad \text{หรือ } C = 1 \text{ และ } B = -1
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+4}{x(x^2+4)}\,dx &= \int \frac{1}{x} + \frac{-x+1}{x^2+4}\,dx \\
&= \int \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+4} + \frac{1}{x^2+4}\,dx \\
&= \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{x}{x^2+4}\,dx + \int \frac{1}{x^2+4}\,dx \\
&= \ln|x| - \int \frac{1}{x^2+4}\,d(\frac{1}{2}x^2) + \int \frac{1}{4(\frac{x^2}{4}+1)}\,dx \\
&= \ln|x| - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+4}\,d(x^2) + \frac{1}{4}\int \frac{1}{(\frac{x}{2})^2+1}\,dx \\
&= \ln|x| - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+4}\,d(x^2+4) + \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) \\
&= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) \qquad \#
\end{aligned}$$

2. จงหาค่าของ

$$\int_2^3 \frac{2}{x^3 - x}\,dx$$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\frac{2}{x^3-x} &= \frac{2}{x(x^2-1)} \\
&= \frac{2}{x(x-1)(x+1)} \\
&= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rll}
\therefore & 2 = A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1) & \\
x = 0 & 2 = -A & \therefore A = -2 \\
x = 1; & 2 = 2B & \therefore B = 1 \\
x = -1; & 2 = 2C & \therefore C = 1
\end{array}$$

ฉะนั้น

$$\begin{aligned}
\int \frac{2}{x^3-x}\,dx &= \int -\frac{2}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\,dx \\
&= -2\ln|x| + \ln|x-1| + \ln|x+1| + C
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int_2^3 \frac{2}{x^3-x}\,dx &= [-2\ln|x| + \ln|x-1| + \ln|x+1|]_2^3 \\
&= [-2\ln 3 + \ln 2 + \ln 4] - [-2\ln 2 + \ln 1 + \ln 3] \\
&= [-2\ln 3 + \ln 2 + 2\ln 2] - [-2\ln 2 + 0 + \ln 3] \\
&= 5\ln 2 - 3\ln 3 \quad \#
\end{aligned}$$

3. จงหาค่าของ

$$\int_2^3 \frac{1}{x^2 - x^3}\,dx$$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2 - x^3} &= \frac{1}{x^2(1-x)} \\
&= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{1-x} \\
\therefore \quad & 1 = Ax(1-x) + B(1-x) + Cx^2 \\
x = 0 \quad & 1 = B \qquad \therefore B = 1 \\
x = 1; \quad & 1 = C \qquad \therefore C = 1 \\
x = -1; \quad & 1 = -2A + 2B + C = -2A + 2(1) + 1 \qquad \therefore A = 1
\end{aligned}$$

ฉะนั้น

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2 - x^2}\,dx &= \int \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1-x}\,dx \\
&= \ln|x| - \frac{1}{x} - \ln|1-x| + C
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int_2^3 \frac{1}{x^2 - x^3}\,dx &= \left[\ln|x| - \frac{1}{x} - \ln|1-x|\right]_2^3 \\
&= \left[\ln 3 - \frac{1}{3} - \ln 2\right] - \left[\ln 2 - \frac{1}{2} - \ln 1\right] \\
&= \left[\ln 3 - \frac{1}{3} - \ln 2\right] - \left[\ln 2 - \frac{1}{2} - 0\right] \\
&= \ln 3 - 2\ln 2 + \frac{1}{6} \qquad \#
\end{aligned}$$

4. จงหาปริพันธ์ของ

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\,dx$$

วิธีทำ ให้ $u = 1-\sqrt{x}$ จะได้ว่า $\sqrt{x} = 1-u$ แล้ว

$$\begin{aligned}\frac{du}{dx} &= -\frac{1}{2}(x)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2(1-u)} = \frac{1}{2(u-1)}\\ 2(u-1)du &= dx\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\,dx &= \int \frac{1-u}{u}\cdot 2(u-1)du\\ &= 2\int \frac{(1-u)(u-1)}{u}du\\ &= 2\int \frac{-1+2u-u^2}{u}du\\ &= 2\int \frac{-1}{u}+\frac{2u}{u}-\frac{u^2}{u}du\\ &= 2\int -\frac{1}{u}+2-u\,du\\ &= -2\ln|u|+4u-u^2+C\\ &= -2\ln|1-\sqrt{x}|+4(1-\sqrt{x})-(1-\sqrt{x})^2+C\\ &= -2\ln|1-\sqrt{x}|+4-4\sqrt{x}-(1-2\sqrt{x}+x)+C\\ &= -2\ln|1-\sqrt{x}|+3-2\sqrt{x}-x+C \quad \#\end{aligned}$$

5. จงหาปริพันธ์ของ

$$\int \sqrt[3]{1+\sqrt{x}}\,dx$$

วิธีทำ ให้ $u = (1+\sqrt{x})^{\frac{1}{3}}$ จะได้ว่า $u^3 = 1+\sqrt{x}$ หรือ $u^3-1 = \sqrt{x}$ แล้ว

$$\begin{aligned}\frac{du}{dx} &= \frac{1}{3}(1+\sqrt{x})^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{2}(x)^{-\frac{1}{2}}\\ &= \frac{1}{6(1+\sqrt{x})^{\frac{2}{3}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\\ &= \frac{1}{6u^2(u^3-1)}\\ 6u^2(u^3-1)du &= dx\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int \sqrt[3]{1+\sqrt{x}}\,dx &= \int u\cdot 6u^2(u^3-1)\,du\\ &= 6\int u^6-u^3du\\ &= \frac{6}{7}u^7-\frac{6}{4}u^4+C\\ &= \frac{6}{7}(1+\sqrt{x})^{\frac{7}{3}}-\frac{3}{2}(1+\sqrt{x})^{\frac{4}{3}}+C \quad \#\end{aligned}$$

6. จงหาปริพันธ์ของ

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}+1}\,dx$$

วิธีทำ ให้ $u = \sqrt{x}+1$ จะได้ว่า $\sqrt{x} = u-1$ หรือ $x = (u-1)^2$ แล้ว

$$\begin{aligned}\frac{du}{dx} &= \frac{1}{2}(x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2(u-1)}\\ 2(u-1)du &= dx\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{\sqrt{x}+1}\,dx &= \int \frac{(u-1)^2+1}{u}\cdot 2(u-1)\,du\\ &= 2\int \frac{(u^2-2u+2)(u-1)}{u}\,du\\ &= 2\int \frac{u^3-3u^2+4u-2}{u}\,du\\ &= 2\int \frac{u^3}{u}-\frac{3u^2}{u}+\frac{4u}{u}-\frac{2}{u}\,du\\ &= 2\int u^2-3u+4-\frac{2}{u}\,du\\ &= \frac{2}{3}u^3-3u^2+8u-4\ln|u|+C\\ &= \frac{2}{3}(\sqrt{x}+1)^3-3(\sqrt{x}+1)^2+8(\sqrt{x}+1)-4\ln|\sqrt{x}+1|+C \quad \#\end{aligned}$$

7. จงหาปริพันธ์ของ

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\,dx$$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\,dx &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\cdot \sin x\,dx\\ &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,d(-\cos x)\\ &= -\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,d(\cos x)\\ &= -\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,d(\cos x)\\ &= -\int \frac{1}{\cos^2 x}-\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}\,d(\cos x)\\ &= \int -\cos^{-2} x+1\,d(\cos x)\\ &= \cos^{-1} x+\cos x+C\\ &= \sec x+\cos x+C \quad \#\end{aligned}$$

8. จงหาปริพันธ์ของ

$$\int \sin^{2021} x \cos^3 x \, dx$$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int \sin^{2021} x \cos^3 x \, dx &= \int \sin^{2021} x \cos^2 x \cdot \cos x \, dx \\
&= \int \sin^{2021} x \cos^2 x \, d(\sin x) \\
&= \int \sin^{2021} x (1 - \sin^2 x) \, d(\sin x) \\
&= \int \sin^{2021} x - \sin^{2023} x \, d(\sin x) \\
&= \frac{1}{2022} \sin^{2022} x - \frac{1}{2024} \sin^{2024} x + C \qquad \#
\end{aligned}$$

9. จงหาปริพันธ์ของ

$$\int \sec^8 x \, dx$$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int \sec^8 x \, dx &= \int \sec^6 x \cdot \sec^2 x \, dx \\
&= \int (\sec^2 x)^3 \, d(\tan x) \\
&= \int (1 + \tan^2 x)^3 \, d(\tan x) \\
&= \int 1 + 3\tan^2 x + 3\tan^4 x + \tan^6 x \, d(\tan x) \\
&= \tan x + \tan^3 x + \frac{3}{5} \tan^5 x + \frac{1}{7} \tan^7 x + C \qquad \#
\end{aligned}$$

10. จงหาปริพันธ์ของ

$$\int \sec^{2021} x \tan^3 x \, dx$$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int \sec^{2021} x \tan^3 x \, dx &= \int \sec^{2020} x \tan^2 x \cdot \sec x \tan x \, dx \\
&= \int \sec^{2020} x \tan^2 x \, d(\sec x) \\
&= \int \sec^{2020} x (\sec^2 x - 1) \, d(\sec x) \\
&= \int \sec^{2022} x - \sec^{2020} x \, d(\sec x) \\
&= \frac{1}{2023} \sec^{2023} x - \frac{1}{2021} \sec^{2021} x + C \qquad \#
\end{aligned}$$