Quiz 1 : MAC1303 แคลคูลัส 2

หัวข้อ ลำดับและอนุกรมของจำนวนจริง **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
เวลาสอบ 12:30 - 13:00 วันศุกร์ ที่ 24 ธันวาคม 2564 **ปีการศึกษา** 2/2564

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

ข้อ 1

1. (5 **คะแนน**) จงตรวจสอบว่าลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก

$$\left\{\frac{n(-2)^n}{n(2^n)+1}\right\}$$

1. (5 **คะแนน**) จงตรวจสอบว่าลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก

$$\left\{\frac{n(-3)^n}{n(3^n)+1}\right\}$$

1. (5 **คะแนน**) จงตรวจสอบว่าลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก

$$\left\{\frac{n(-5)^n}{n(5^n)+1}\right\}$$

1. (5 **คะแนน**) จงตรวจสอบว่าลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก

$$\left\{\frac{n(-7)^n}{n(7^n)+1}\right\}$$

1. (5 **คะแนน**) จงตรวจสอบว่าลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก

$$\left\{\frac{n(-11)^n}{n(11^n)+1}\right\}$$

ข้อ 2

2. **(5 คะแนน)** จงตรวจสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้ลู่เข้าหรือลู่ออก

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2-1}{n(n+1)}+\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}\right)$$

2. **(5 คะแนน)** จงตรวจสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้ลู่เข้าหรือลู่ออก

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2-4}{n(n+2)}+\frac{(n!)^2}{(2n-1)!}\right)$$

2. **(5 คะแนน)** จงตรวจสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้ลู่เข้าหรือลู่ออก

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2-9}{n(n+3)}+\frac{(n!)^2}{(2n+3)!}\right)$$

2. **(5 คะแนน)** จงตรวจสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้ลู่เข้าหรือลู่ออก

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+1}{n(n+1)}+\frac{(n!)^2}{(2n+5)!}\right)$$

2. **(5 คะแนน)** จงตรวจสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้ลู่เข้าหรือลู่ออก

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+4}{n(n+2)}+\frac{(n!)^2}{(2n+7)!}\right)$$

เฉลย Quiz 1 : MAC1303 แคลคูลัส 2

หัวข้อ ลำดับและอนุกรมของจำนวนจริง **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
เวลาสอบ 12:30 - 13:00 วันศุกร์ ที่ 24 ธันวาคม 2564 **ปีการศึกษา** 2/2564

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

ข้อ 1

1. (5 **คะแนน**) จงตรวจสอบว่าลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก

$$\left\{\frac{n(-2)^n}{n(2^n)+1}\right\}$$

วิธีทำ ให้

$$a_n = \frac{n(-2)^n}{n(2^n)+1} = \frac{n(-1)^n 2^n}{n(2^n)+1} = \frac{n(-1)^n 2^n}{n(2^n)(1+\frac{1}{n(2^n)})} = \frac{(-1)^n}{1+\frac{1}{n(2^n)}}$$

เลือกลำดับย่อย $b_k = a_{2k}$ จะได้ว่า

$$b_k = \frac{(-1)^{2k}}{1+\frac{1}{2k(2^{2k})}} = \frac{1}{1+\frac{1}{2k(2^{2k})}}$$

ฉะนั้น

$$\lim_{k\to\infty} b_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{2k(2^{2k})}} = 1$$

เลือกลำดับย่อย $c_k = a_{2k-1}$ จะได้ว่า

$$c_k = \frac{(-1)^{2k-1}}{1+\frac{1}{(2k-1)(2^{2k-1})}} = \frac{-1}{1+\frac{1}{(2k-1)(2^{2k-1})}}$$

ฉะนั้น

$$\lim_{k\to\infty} b_k = \lim_{k\to\infty} \frac{-1}{1+\frac{1}{(2k-1)(2^{2k-1})}} = -1$$

มี 2 ลำดับย่อยของ $\{a_n\}$ ที่ลิมิตมีค่าไม่เท่ากัน ดังนั้น $\left\{\frac{n(-2)^n}{n(2^n)+1}\right\}$ ลู่ออก #

1. **(5 คะแนน)** จงตรวจสอบว่าลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก

$$\left\{\frac{n(-3)^n}{n(3^n)+1}\right\}$$

วิธีทำ ให้

$$a_n = \frac{n(-3)^n}{n(3^n)+1} = \frac{n(-1)^n 3^n}{n(3^n)+1} = \frac{n(-1)^n 3^n}{n(3^n)(1+\frac{1}{n(3^n)})} = \frac{(-1)^n}{1+\frac{1}{n(3^n)}}$$

เลือกลำดับย่อย $b_k = a_{2k}$ จะได้ว่า

$$b_k = \frac{(-1)^{2k}}{1+\frac{1}{2k(3^{2k})}} = \frac{1}{1+\frac{1}{2k(3^{2k})}}$$

ฉะนั้น

$$\lim_{k\to\infty} b_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{2k(3^{2k})}} = 1$$

เลือกลำดับย่อย $c_k = a_{2k-1}$ จะได้ว่า

$$c_k = \frac{(-1)^{2k-1}}{1+\frac{1}{(2k-1)(3^{2k-1})}} = \frac{-1}{1+\frac{1}{(2k-1)(3^{2k-1})}}$$

ฉะนั้น

$$\lim_{k\to\infty} b_k = \lim_{k\to\infty} \frac{-1}{1+\frac{1}{(2k-1)(3^{2k-1})}} = -1$$

มี 2 ลำดับย่อยของ $\{a_n\}$ ที่ลิมิตมีค่าไม่เท่ากัน ดังนั้น $\left\{\frac{n(-3)^n}{n(3^n)+1}\right\}$ ลู่ออก #

1. **(5 คะแนน)** จงตรวจสอบว่าลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก

$$\left\{\frac{n(-5)^n}{n(5^n)+1}\right\}$$

วิธีทำ ให้

$$a_n = \frac{n(-5)^n}{n(5^n)+1} = \frac{n(-1)^n 5^n}{n(5^n)+1} = \frac{n(-1)^n 5^n}{n(5^n)(1+\frac{1}{n(5^n)})} = \frac{(-1)^n}{1+\frac{1}{n(5^n)}}$$

เลือกลำดับย่อย $b_k = a_{2k}$ จะได้ว่า

$$b_k = \frac{(-1)^{2k}}{1+\frac{1}{2k(5^{2k})}} = \frac{1}{1+\frac{1}{2k(5^{2k})}}$$

ฉะนั้น

$$\lim_{k\to\infty} b_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{2k(5^{2k})}} = 1$$

เลือกลำดับย่อย $c_k = a_{2k-1}$ จะได้ว่า

$$c_k = \frac{(-1)^{2k-1}}{1+\frac{1}{(2k-1)(5^{2k-1})}} = \frac{-1}{1+\frac{1}{(2k-1)(5^{2k-1})}}$$

ฉะนั้น

$$\lim_{k\to\infty} b_k = \lim_{k\to\infty} \frac{-1}{1+\frac{1}{(2k-1)(5^{2k-1})}} = -1$$

มี 2 ลำดับย่อยของ $\{a_n\}$ ที่ลิมิตมีค่าไม่เท่ากัน ดังนั้น $\left\{\frac{n(-5)^n}{n(5^n)+1}\right\}$ ลู่ออก #

1. **(5 คะแนน)** จงตรวจสอบว่าลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก

$$\left\{\frac{n(-7)^n}{n(7^n)+1}\right\}$$

วิธีทำ ให้

$$a_n = \frac{n(-7)^n}{n(7^n)+1} = \frac{n(-1)^n 7^n}{n(7^n)+1} = \frac{n(-1)^n 7^n}{n(7^n)(1+\frac{1}{n(7^n)})} = \frac{(-1)^n}{1+\frac{1}{n(7^n)}}$$

เลือกลำดับย่อย $b_k = a_{2k}$ จะได้ว่า

$$b_k = \frac{(-1)^{2k}}{1+\frac{1}{2k(7^{2k})}} = \frac{1}{1+\frac{1}{2k(7^{2k})}}$$

ฉะนั้น

$$\lim_{k\to\infty} b_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{2k(7^{2k})}} = 1$$

เลือกลำดับย่อย $c_k = a_{2k-1}$ จะได้ว่า

$$c_k = \frac{(-1)^{2k-1}}{1+\frac{1}{(2k-1)(7^{2k-1})}} = \frac{-1}{1+\frac{1}{(2k-1)(7^{2k-1})}}$$

ฉะนั้น

$$\lim_{k\to\infty} b_k = \lim_{k\to\infty} \frac{-1}{1+\frac{1}{(2k-1)(7^{2k-1})}} = -1$$

มี 2 ลำดับย่อยของ $\{a_n\}$ ที่ลิมิตมีค่าไม่เท่ากัน ดังนั้น $\left\{\frac{n(-7)^n}{n(7^n)+1}\right\}$ ลู่ออก $\#$

1. (**5 คะแนน**) จงตรวจสอบว่าลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก

$$\left\{\frac{n(-11)^n}{n(11^n)+1}\right\}$$

วิธีทำ ให้

$$a_n = \frac{n(-11)^n}{n(11^n)+1} = \frac{n(-1)^n 11^n}{n(11^n)+1} = \frac{n(-1)^n 11^n}{n(11^n)(1+\frac{1}{n(11^n)})} = \frac{(-1)^n}{1+\frac{1}{n(11^n)}}$$

เลือกลำดับย่อย $b_k = a_{2k}$ จะได้ว่า

$$b_k = \frac{(-1)^{2k}}{1+\frac{1}{2k(11^{2k})}} = \frac{1}{1+\frac{1}{2k(11^{2k})}}$$

ฉะนั้น

$$\lim_{k\to\infty} b_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{2k(11^{2k})}} = 1$$

เลือกลำดับย่อย $c_k = a_{2k-1}$ จะได้ว่า

$$c_k = \frac{(-1)^{2k-1}}{1+\frac{1}{(2k-1)(11^{2k-1})}} = \frac{-1}{1+\frac{1}{(2k-1)(11^{2k-1})}}$$

ฉะนั้น

$$\lim_{k\to\infty} b_k = \lim_{k\to\infty} \frac{-1}{1+\frac{1}{(2k-1)(11^{2k-1})}} = -1$$

มี 2 ลำดับย่อยของ $\{a_n\}$ ที่ลิมิตมีค่าไม่เท่ากัน ดังนั้น $\left\{\frac{n(-11)^n}{n(11^n)+1}\right\}$ ลู่ออก #

ข้อ 2

2. **(5 คะแนน)** จงตรวจสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้ลู่เข้าหรือลู่ออก

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2-1}{n(n+1)}+\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}\right)$$

วิธีทำ พิจารณาอนุกรม $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-1}{n(n+1)}$ จะเห็นได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(1-\frac{1}{n^2})}{n^2(1+\frac{1}{n})}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}=1\neq 0$$

โดย Divergent Test สรุปได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-1}{n(n+1)}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ให้ $a_n=\dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!(n+1)!}{(2n+3)!}\cdot\frac{(2n+1)!}{n!n!}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)n!(n+1)n!}{(2n+3)(2n+2)(2n+1)!}\cdot\frac{(2n+1)!}{n!n!} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+1)}{(2n+3)(2n+2)} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n(1+\frac{1}{n})n(1+\frac{1}{n})}{n(2+\frac{3}{n})n(2+\frac{2}{n})} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n})}{(2+\frac{3}{n})(2+\frac{2}{n})} \\
&= \frac{(1+0)(1+0)}{(2+0)(2+0)}=\frac{1}{4}<1
\end{aligned}$$

จะได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า สรุปได้ว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2-1}{n(n+1)}+\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}\right)\text{ เป็นอนุกรมลู่ออก}\qquad\#$$

2. **(5 คะแนน)** จงตรวจสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้ลู่เข้าหรือลู่ออก

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2-4}{n(n+2)}+\frac{(n!)^2}{(2n-1)!}\right)$$

วิธีทำ พิจารณาอนุกรม $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-4}{n(n+2)}$ จะเห็นได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-4}{n(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(1-\frac{4}{n^2})}{n^2(1+\frac{2}{n})}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{4}{n^2}}{1+\frac{2}{n}}=1\neq 0$$

โดย Divergent Test สรุปได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-4}{n(n+2)}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ให้ $a_n=\dfrac{(n!)^2}{(2n-1)!}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!(n+1)!}{(2n+1)!}\cdot\frac{(2n-1)!}{n!n!}\right|\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)n!(n+1)n!}{(2n+1)(2n)(2n-1)!}\cdot\frac{(2n-1)!}{n!n!}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n)}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n(1+\frac{1}{n})n(1+\frac{1}{n})}{n(2+\frac{1}{n})2n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n})}{2(2+\frac{1}{n})}\\ &= \frac{(1+0)(1+0)}{2(2+0)}=\frac{1}{4}<1\end{aligned}$$

จะได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n-1)!}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า สรุปได้ว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2-4}{n(n+2)}+\frac{(n!)^2}{(2n-1)!}\right) \text{ เป็นอนุกรมลู่ออก} \qquad \#$$

2. **(5 คะแนน)** จงตรวจสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้ลู่เข้าหรือลู่ออก

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2-9}{n(n+3)}+\frac{(n!)^2}{(2n+3)!}\right)$$

วิธีทำ พิจารณาอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-9}{n(n+3)}$ จะเห็นได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-9}{n(n+3)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(1-\frac{9}{n^2})}{n^2(1+\frac{3}{n})}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{9}{n^2}}{1+\frac{3}{n}}=1\neq 0$$

โดย Divergent Test สรุปได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-9}{n(n+3)}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ให้ $a_n=\frac{(n!)^2}{(2n+3)!}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!(n+1)!}{(2n+5)!}\cdot\frac{(2n+3)!}{n!n!}\right|\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)n!(n+1)n!}{(2n+5)(2n+4)(2n+3)!}\cdot\frac{(2n+3)!}{n!n!}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+1)}{(2n+5)(2n+4)}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n(1+\frac{1}{n})n(1+\frac{1}{n})}{n(2+\frac{5}{n})n(2+\frac{3}{n})}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n})}{(2+\frac{5}{n})(2+\frac{3}{n})}\\
&= \frac{(1+0)(1+0)}{(2+0)(2+0)}=\frac{1}{4}<1
\end{aligned}$$

จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n+3)!}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า สรุปได้ว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2-9}{n(n+3)}+\frac{(n!)^2}{(2n+3)!}\right) \text{ เป็นอนุกรมลู่ออก} \qquad \#$$

2. **(5 คะแนน)** จงตรวจสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้ลู่เข้าหรือลู่ออก

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+1}{n(n+1)}+\frac{(n!)^2}{(2n+5)!}\right)$$

วิธีทำ พิจารณาอนุกรม $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n(n+1)}$ จะเห็นได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(1+\frac{1}{n^2})}{n^2(1+\frac{1}{n})}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}=1\neq 0$$

โดย Divergent Test สรุปได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-1}{n(n+1)}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ให้ $a_n=\dfrac{(n!)^2}{(2n+5)!}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!(n+1)!}{(2n+7)!}\cdot\frac{(2n+5)!}{n!n!}\right|\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)n!(n+1)n!}{(2n+7)(2n+6)(2n+5)!}\cdot\frac{(2n+5)!}{n!n!}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+1)}{(2n+7)(2n+6)}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n(1+\frac{1}{n})n(1+\frac{1}{n})}{n(2+\frac{7}{n})n(2+\frac{6}{n})}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n})}{(2+\frac{7}{n})(2+\frac{6}{n})}\\ &= \frac{(1+0)(1+0)}{(2+0)(2+0)}=\frac{1}{4}<1\end{aligned}$$

จะได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n+5)!}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า สรุปได้ว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+1}{n(n+1)}+\frac{(n!)^2}{(2n+5)!}\right)\text{ เป็นอนุกรมลู่ออก}\qquad\#$$

2. **(5 คะแนน)** จงตรวจสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้ลู่เข้าหรือลู่ออก

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+4}{n(n+2)} + \frac{(n!)^2}{(2n+7)!} \right)$$

วิธีทำ พิจารณาอนุกรม $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4}{n(n+2)}$ จะเห็นได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+4}{n(n+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(1+\frac{4}{n^2})}{n^2(1+\frac{2}{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{4}{n^2}}{1+\frac{2}{n}} = 1 \neq 0$$

โดย Divergent Test สรุปได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4}{n(n+2)}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ให้ $a_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n+7)!}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!(n+1)!}{(2n+9)!} \cdot \frac{(2n+7)!}{n!n!} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n!(n+1)n!}{(2n+9)(2n+8)(2n+7)!} \cdot \frac{(2n+7)!}{n!n!} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+1)}{(2n+9)(2n+8)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n(1+\frac{1}{n})n(1+\frac{1}{n})}{n(2+\frac{9}{n})n(2+\frac{8}{n})} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n})}{(2+\frac{9}{n})(2+\frac{8}{n})} \\
&= \frac{(1+0)(1+0)}{(2+0)(2+0)} = \frac{1}{4} < 1
\end{aligned}$$

จะได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n+7)!}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า สรุปได้ว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+4}{n(n+2)} + \frac{(n!)^2}{(2n+7)!} \right) \text{ เป็นอนุกรมลู่ออก} \qquad \#$$

Quiz 2 : MAC1303 แคลคูลัส 2

หัวข้อ อนุกรมกำลัง **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
เวลาสอบ 12:15 - 12:50 วันศุกร์ ที่ 14 มกราคม 2565 **ปีการศึกษา** 2/2564

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

ข้อ 1

1. (5 **คะแนน**) จงหา**รัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้า**ของอนุกรม

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-3x)^n}{n(2^n)}$$

1. (5 **คะแนน**) จงหา**รัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้า**ของอนุกรม

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-3x)^n}{n(4^n)}$$

1. (5 **คะแนน**) จงหา**รัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้า**ของอนุกรม

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+3x)^n}{n(2^n)}$$

1. (5 **คะแนน**) จงหา**รัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้า**ของอนุกรม

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+3x)^n}{n(4^n)}$$

ข้อ 2

2. **(5 คะแนน)** จงใช้ตารางอนุกรมเทย์เลอร์(หน้า62) หา**ฟังก์ชันผลบวก** f พร้อมบอก**ช่วงแห่งการลู่เข้า** ของอนุกรม

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^{2n+1}}{(n-1)!}$$

2. **(5 คะแนน)** จงใช้ตารางอนุกรมเทย์เลอร์(หน้า62) หา**ฟังก์ชันผลบวก** f พร้อมบอก**ช่วงแห่งการลู่เข้า** ของอนุกรม

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x+1)^{3n+1}}{(n-1)!}$$

2. **(5 คะแนน)** จงใช้ตารางอนุกรมเทย์เลอร์(หน้า62) หา**ฟังก์ชันผลบวก** f พร้อมบอก**ช่วงแห่งการลู่เข้า** ของอนุกรม

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-2x)^{2n+1}}{(n-1)!}$$

2. **(5 คะแนน)** จงใช้ตารางอนุกรมเทย์เลอร์(หน้า62) หา**ฟังก์ชันผลบวก** f พร้อมบอก**ช่วงแห่งการลู่เข้า** ของอนุกรม

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-3x)^{3n+1}}{(n-1)!}$$

เฉลย Quiz 2 : MAC1303 แคลคูลัส 2

หัวข้อ อนุกรมกำลัง **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
เวลาสอบ 12:15 - 12:50 วันศุกร์ ที่ 14 มกราคม 2565 **ปีการศึกษา** 2/2564

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

ข้อ 1

1. (5 **คะแนน**) จงหา**รัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้า**ของอนุกรม

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-3x)^n}{n(2^n)}$$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(1-3x)^{n+1}}{(n+1)(2^{n+1})}\cdot\frac{n(2^n)}{(1-3x)^n}\right| &= |1-3x|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2(n+1)}\\ &= \frac{1}{2}|3x-1|<1\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}|3x-1|&<2\\ -2<3x-1&<2\\ -\frac{2}{3}<x-\frac{1}{3}&<\frac{2}{3}\\ -\frac{1}{3}<x&<1\end{aligned}$$

จะได้ว่ารัศมีแห่งการลู่เข้าคือ 4 ตรวจสอบการลู่เข้าเมื่อ

กรณี $x=-\frac{1}{3}$ จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-3x)^n}{n(2^n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ เป็นอนุกรมลู่ออก (เป็นอนุกรมพีซึ่ง $p=1<1$)

กรณี $x=1$ จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-3x)^n}{n(2^n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า (โดยใช้อนุกรมสลับ)

สรุปได้ว่า รัศมีแห่งการลู่เข้าคือ $\frac{2}{3}$ ช่วงแห่งการลู่เข้าคือ $(-\frac{1}{3},1]$ #

1. (5 **คะแนน**) จงหา**รัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้า**ของอนุกรม

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-3x)^n}{n(4^n)}$$

วิธีทำ พิจารณา

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(1-3x)^{n+1}}{(n+1)(4^{n+1})} \cdot \frac{n(4^n)}{(1-3x)^n} \right| = |1-3x| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{4(n+1)}$$
$$= \frac{1}{4}|3x-1| < 1$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |3x-1| &< 4 \\ -4 < 3x-1 &< 4 \\ -\frac{4}{3} < x - \frac{1}{3} &< \frac{4}{3} \\ -1 < x &< \frac{5}{3} \end{aligned}$$

จะได้ว่ารัศมีแห่งการลู่เข้าคือ 4 ตรวจสอบการลู่เข้าเมื่อ

กรณี $x = -1$ จะได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-3x)^n}{n(4^n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ เป็นอนุกรมลู่ออก (เป็นอนุกรมพีซึ่ง $p = 1 < 1$)

กรณี $x = \frac{5}{3}$ จะได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-3x)^n}{n(4^n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า (โดยใช้อนุกรมสลับ)

สรุปได้ว่า รัศมีแห่งการลู่เข้าคือ $\frac{4}{3}$ ช่วงแห่งการลู่เข้าคือ $(-1, \frac{5}{3}]$ #

1. (5 **คะแนน**) จงหา**รัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้า**ของอนุกรม

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+3x)^n}{n(2^n)}$$

วิธีทำ พิจารณา

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(1+3x)^{n+1}}{(n+1)(2^{n+1})} \cdot \frac{n(2^n)}{(1+3x)^n} \right| = |1-3x| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2(n+1)}$$
$$= \frac{1}{2}|3x+1| < 1$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |3x+1| &< 2 \\ -2 < 3x+1 &< 2 \\ -\frac{2}{3} < x + \frac{1}{3} &< \frac{2}{3} \\ -1 < x &< \frac{1}{3} \end{aligned}$$

จะได้ว่ารัศมีแห่งการลู่เข้าคือ 4 ตรวจสอบการลู่เข้าเมื่อ

กรณี $x = \frac{1}{3}$ จะได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+3x)^n}{n(2^n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ เป็นอนุกรมลู่ออก (เป็นอนุกรมพีซึ่ง $p = 1 < 1$)

กรณี $x = -1$ จะได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+3x)^n}{n(2^n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า (โดยใช้อนุกรมสลับ)

สรุปได้ว่า รัศมีแห่งการลู่เข้าคือ $\frac{2}{3}$ ช่วงแห่งการลู่เข้าคือ $[1, \frac{1}{3})$ #

1. **(5 คะแนน)** จงหา**รัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้า**ของอนุกรม

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+3x)^n}{n(4^n)}$$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(1+3x)^{n+1}}{(n+1)(4^{n+1})} \cdot \frac{n(4^n)}{(1+3x)^n} \right| &= |1+3x| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{4(n+1)} \\ &= \frac{1}{4}|3x+1| < 1\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}|3x+1| &< 4 \\ -4 < 3x+1 &< 4 \\ -\frac{4}{3} < x + \frac{1}{3} &< \frac{4}{3} \\ -\frac{5}{3} < x &< 1\end{aligned}$$

จะได้ว่ารัศมีแห่งการลู่เข้าคือ 4 ตรวจสอบการลู่เข้าเมื่อ

กรณี $x = 1$ จะได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+3x)^n}{n(4^n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ เป็นอนุกรมลู่ออก (เป็นอนุกรมพีซึ่ง $p = 1 < 1$)

กรณี $x = -\frac{5}{3}$ จะได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+3x)^n}{n(4^n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า (โดยใช้อนุกรมสลับ)

สรุปได้ว่า รัศมีแห่งการลู่เข้าคือ $\frac{4}{3}$ ช่วงแห่งการลู่เข้าคือ $[-\frac{5}{3}, 1)$ #

ข้อ 2

2. **(5 คะแนน)** จงใช้ตารางอนุกรมเทย์เลอร์(หน้า62) หา**ฟังก์ชันผลบวก** f พร้อมบอก**ช่วงแห่งการลู่เข้า** ของอนุกรม

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^{2n+1}}{(n-1)!}$$

วิธีทำ พิจารณา

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R}$$

$$e^{(2x+1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((2x+1)^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+1)^{2n}}{n!} \qquad \text{เมื่อ } 2x+1 \in \mathbb{R}$$

$$\frac{d}{dx} e^{(2x+1)^2} = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+1)^{2n}}{n!} \qquad \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R}$$

$$e^{(2x+1)^2} \cdot 2(2x+1)2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(2x+1)^{2n-1} \cdot 2}{n!} \qquad \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R}$$

$$e^{(2x+1)^2} \cdot 4(2x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n(2x+1)^{2n-1}}{n!} \qquad \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R}$$

$$e^{(2x+1)^2} \cdot (2x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^{2n-1}}{(n-1)!} \qquad \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R}$$

$$e^{(2x+1)^2} \cdot (2x+1) \cdot (2x+1)^2 = (2x+1)^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^{2n-1}}{(n-1)!} \qquad \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R}$$

$$e^{(2x+1)^2} \cdot (2x+1)^3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^{2n+1}}{(n-1)!} \qquad \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R}$$

ดังนั้น $f(x) = e^{(2x+1)^2} \cdot (2x+1)^3$ เมื่อ $x \in \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันผลบวกของอนุกรม $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^{2n+1}}{(n-1)!}$

2. **(5 คะแนน)** จงใช้ตารางอนุกรมเทย์เลอร์(หน้า62) หา**ฟังก์ชันผลบวก** f พร้อมบอก**ช่วงแห่งการลู่เข้า** ของอนุกรม

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x+1)^{3n+1}}{(n-1)!}$$

วิธีทำ พิจารณา

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R}$$

$$e^{(3x+1)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((3x+1)^3)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x+1)^{3n}}{n!} \qquad \text{เมื่อ } 3x+1 \in \mathbb{R}$$

$$\frac{d}{dx} e^{(3x+1)^3} = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x+1)^{3n}}{n!} \qquad \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R}$$

$$e^{(3x+1)^3} \cdot 3(3x+1)^2 3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n(3x+1)^{3n-1} \cdot 3}{n!} \qquad \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R}$$

$$e^{(3x+1)^3} \cdot 9(3x+1)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9n(3x+1)^{3n-1}}{n!} \qquad \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R}$$

$$e^{(3x+1)^3} \cdot (3x+1)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x+1)^{3n-1}}{(n-1)!} \qquad \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R}$$

$$e^{(3x+1)^3} \cdot (3x+1)^2 \cdot (3x+1)^2 = (3x+1)^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x+1)^{3n-1}}{(n-1)!} \qquad \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R}$$

$$e^{(3x+1)^3} \cdot (3x+1)^4 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x+1)^{3n+1}}{(n-1)!} \qquad \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R}$$

ดังนั้น $f(x) = e^{(3x+1)^3} \cdot (3x+1)^4$ เมื่อ $x \in \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันผลบวกของอนุกรม $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x+1)^{3n+1}}{(n-1)!}$

2. **(5 คะแนน)** จงใช้ตารางอนุกรมเทย์เลอร์(หน้า62) หา**ฟังก์ชันผลบวก** f พร้อมบอก**ช่วงแห่งการลู่เข้า** ของอนุกรม

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-2x)^{2n+1}}{(n-1)!}$$

วิธีทำ พิจารณา

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R}$$

$$e^{(1-2x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((1-2x)^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-2x)^{2n}}{n!} \qquad \text{เมื่อ } 1-2x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{d}{dx} e^{(1-2x)^2} = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-2x)^{2n}}{n!} \qquad \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R}$$

$$e^{(1-2x)^2} \cdot 2(1-2x)(-2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(1-2x)^{2n-1} \cdot (-2)}{n!} \qquad \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R}$$

$$e^{(1-2x)^2} \cdot (-4)(1-2x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)n(1-2x)^{2n-1}}{n!} \qquad \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R}$$

$$e^{(1-2x)^2} \cdot (1-2x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-2x)^{2n-1}}{(n-1)!} \qquad \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R}$$

$$e^{(1-2x)^2} \cdot (1-2x) \cdot (1-2x)^2 = (1-2x)^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-2x)^{2n-1}}{(n-1)!} \qquad \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R}$$

$$e^{(1-2x)^2} \cdot (1-2x)^3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-2x)^{2n+1}}{(n-1)!} \qquad \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R}$$

ดังนั้น $f(x) = e^{(1-2x)^2} \cdot (1-2x)^3$ เมื่อ $x \in \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันผลบวกของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-2x)^{2n+1}}{(n-1)!}$

2. **(5 คะแนน)** จงใช้ตารางอนุกรมเทย์เลอร์(หน้า62) หา**ฟังก์ชันผลบวก** f พร้อมบอก**ช่วงแห่งการลู่เข้า** ของอนุกรม

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-3x)^{3n+1}}{(n-1)!}$$

วิธีทำ พิจารณา

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R}$$

$$e^{(1-3x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((1-3x)^3)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-3x)^{3n}}{n!} \qquad \text{เมื่อ } 1-3x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{d}{dx} e^{(1-3x)^3} = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-3x)^{3n}}{n!} \qquad \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R}$$

$$e^{(1-3x)^3} \cdot 3(1-3x)^2(-3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n(1-3x)^{3n-1} \cdot (-3)}{n!} \qquad \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R}$$

$$e^{(1-3x)^3} \cdot (-9)(3x+1)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-9)n(1-3x)^{3n-1}}{n!} \qquad \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R}$$

$$e^{(1-3x)^3} \cdot (1-3x)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-3x)^{3n-1}}{(n-1)!} \qquad \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R}$$

$$e^{(1-3x)^3} \cdot (1-3x)^2 \cdot (1-3x)^2 = (1-3x)^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-3x)^{3n-1}}{(n-1)!} \qquad \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R}$$

$$e^{(1-3x)^3} \cdot (1-3x)^4 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-3x)^{3n+1}}{(n-1)!} \qquad \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R}$$

ดังนั้น $f(x) = e^{(1-3x)^3} \cdot (1-3x)^4$ เมื่อ $x \in \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันผลบวกของอนุกรม $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-3x)^{3n+1}}{(n-1)!}$

Quiz 3 : MAC1303 **แคลคูลัส 2**

หัวข้อ อนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันสองตัวแปร **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
เวลาสอบ 09:30 - 10:00 วันอาทิตย์ ที่ 6 มีนาคม 2565 **ปีการศึกษา** 2/2564

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. กำหนดให้ $f(x,y) = \dfrac{x}{x+y}$ จงใช้**บทนิยาม**หาอนุพันธ์ย่อย $f_x(x,y)$ และ $f_y(x,y)$

2. กำหนดให้ $f(x,y) = \dfrac{y}{x+y}$ จงใช้**บทนิยาม**หาอนุพันธ์ย่อย $f_x(x,y)$ และ $f_y(x,y)$

3. กำหนดให้ $f(x,y) = \dfrac{x}{x-y}$ จงใช้**บทนิยาม**หาอนุพันธ์ย่อย $f_x(x,y)$ และ $f_y(x,y)$

4. กำหนดให้ $f(x,y) = \dfrac{y}{x-y}$ จงใช้**บทนิยาม**หาอนุพันธ์ย่อย $f_x(x,y)$ และ $f_y(x,y)$

5. กำหนดให้ $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x+y}}$ จงใช้**บทนิยาม**หาอนุพันธ์ย่อย $f_x(x,y)$ และ $f_y(x,y)$

6. กำหนดให้ $f(x,y) = (1+x)^y(1+y)^x$ ถ้า $f_x(0,a) = \ln(1+a)+1$ จงหา $f_y(a,a)$

7. กำหนดให้ $f(x,y) = \dfrac{(1+x)^y}{(1+y)^x}$ จงหา $f_x(a,0)$ และ $f_y(a,0)$ เมื่อ $a > 0$

8. กำหนดให้ $f(x,y) = x \cdot y^x + y \cdot x^y$ จงหา $f_x(a,1) + f_y(1,a)$ เมื่อ $a > 0$

9. กำหนดให้ $f(x,y) = xy\sin(x\cos(xy))$ จงหา $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ และ $\dfrac{\partial f}{\partial y}$

10. กำหนดให้ $f(x,y) = \tan^2(\tan x \cdot \tan(xy))$ จงหา $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ และ $\dfrac{\partial f}{\partial y}$

เฉลย Quiz 3 : MAC1303 แคลคูลัส 2

หัวข้อ อนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันสองตัวแปร **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
เวลาสอบ 09:30 - 10:00 วันอาทิตย์ ที่ 6 มีนาคม 2565 **ปีการศึกษา** 2/2564

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. กำหนดให้ $f(x,y) = \dfrac{x}{x+y}$ จงใช้บทนิยามหาอนุพันธ์ย่อย $f_x(x,y)$ และ $f_y(x,y)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x+h}{x+h+y} - \frac{x}{x+y}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)(x+y) - x(x+h+y)}{h(x+h+y)(x+y)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^2+xy+hx+hy-(x^2+hx+xy)}{h(x+h+y)(x+y)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{hy}{h(x+h+y)(x+y)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{y}{(x+h+y)(x+y)} = \frac{y}{(x+y)^2} \quad \#
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_y(x,y) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x}{x+y+h} - \frac{x}{x+y}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x(x+y) - x(x+y+h)}{h(x+y+h)(x+y)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^2+xy-(x^2+xy+hx)}{h(x+y+h)(x+y)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-hx}{h(x+y+h)(x+y)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-x}{(x+y+h)(x+y)} = -\frac{x}{(x+y)^2} \quad \#
\end{aligned}$$

2. กำหนดให้ $f(x,y)=\dfrac{y}{x+y}$ จงใช้บทนิยามหาอนุพันธ์ย่อย $f_x(x,y)$ และ $f_y(x,y)$

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
f_x(x,y) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{y}{x+h+y}-\frac{y}{x+y}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{y(x+y)-y(x+h+y)}{h(x+h+y)(x+y)} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{yx+y^2-(yx+hy+y^2)}{h(x+h+y)(x+y)} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-hy}{h(x+h+y)(x+y)} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-y}{(x+h+y)(x+y)} = -\frac{y}{(x+y)^2} \qquad \# \\
f_y(x,y) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{y+h}{x+y+h}-\frac{y}{x+y}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(y+h)(x+y)-y(x+y+h)}{h(x+y+h)(x+y)} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{yx+y^2+hx+hy-(yx+y^2+yh)}{h(x+y+h)(x+y)} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{hx}{h(x+y+h)(x+y)} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x}{(x+y+h)(x+y)} = \frac{x}{(x+y)^2} \qquad \#
\end{aligned}
$$

3. กำหนดให้ $f(x,y) = \dfrac{x}{x-y}$ จงใช้บทนิยามหาอนุพันธ์ย่อย $f_x(x,y)$ และ $f_y(x,y)$

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
f_x(x,y) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x+h}{x+h-y} - \frac{x}{x-y}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)(x-y) - x(x+h-y)}{h(x+h-y)(x-y)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 - xy + hx - hy - (x^2 + hx - xy)}{h(x+h-y)(x-y)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-hy}{h(x+h-y)(x-y)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-y}{(x+h-y)(x-y)} = -\frac{y}{(x-y)^2} \qquad \# \\
f_y(x,y) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x}{x-(y-h)} - \frac{x}{x-y}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x(x-y) - x(x-y-h)}{h(x-y-h)(x-y)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 - xy - (x^2 - xy - hx)}{h(x-y-h)(x-y)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{hx}{h(x+y-h)(x-y)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x}{(x-y-h)(x-y)} = -\frac{x}{(x-y)^2} \qquad \#
\end{aligned}
$$

4. กำหนดให้ $f(x,y) = \dfrac{y}{x-y}$ จงใช้บทนิยามหาอนุพันธ์ย่อย $f_x(x,y)$ และ $f_y(x,y)$

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
f_x(x,y) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{y}{x+h-y} - \frac{y}{x-y}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{y(x-y) - y(x+h-y)}{h(x+h-y)(x-y)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{yx - y^2 - (yx + hy - y^2)}{h(x+h-y)(x-y)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-hy}{h(x+h-y)(x-y)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-y}{(x+h-y)(x-y)} = -\frac{y}{(x-y)^2} \qquad \# \\
f_y(x,y) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{y+h}{x-(y-h)} - \frac{y}{x-y}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(y+h)(x-y) - y(x-y-h)}{h(x-y-h)(x-y)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{yx - y^2 + hx - hy - (yx - y^2 - hy)}{h(x-y-h)(x-y)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{hx}{h(x+y-h)(x-y)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x}{(x-y-h)(x-y)} = -\frac{x}{(x-y)^2} \qquad \#
\end{aligned}
$$

5. กำหนดให้ $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x+y}}$ จงใช้บทนิยามหาอนุพันธ์ย่อย $f_x(x,y)$ และ $f_y(x,y)$

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
f_x(x,y) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{x+h+y}}-\frac{1}{\sqrt{x+y}}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+y}-\sqrt{x+h+y}}{h\sqrt{x+h+y}\cdot\sqrt{x+y}} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+y}-\sqrt{x+h+y}}{h\sqrt{x+h+y}\cdot\sqrt{x+y}} \cdot \frac{\sqrt{x+y}+\sqrt{x+h+y}}{\sqrt{x+y}+\sqrt{x+h+y}} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+y})^2-(\sqrt{x+h+y})^2}{h\sqrt{x+h+y}\cdot\sqrt{x+y}(\sqrt{x+y}+\sqrt{x+h+y})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+y)-(x+h+y)}{h\sqrt{x+h+y}\cdot\sqrt{x+y}(\sqrt{x+y}+\sqrt{x+h+y})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h\sqrt{x+h+y}\cdot\sqrt{x+y}(\sqrt{x+y}+\sqrt{x+h+y})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{\sqrt{x+h+y}\cdot\sqrt{x+y}(\sqrt{x+y}+\sqrt{x+h+y})} \\
&= -\frac{1}{2(x+y)\sqrt{x+y}} \\
f_y(x,y) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{x+y+h}}-\frac{1}{\sqrt{x+y}}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+y}-\sqrt{x+y+h}}{h\sqrt{x+y+h}\cdot\sqrt{x+y}} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+y}-\sqrt{x+y+h}}{h\sqrt{x+y+h}\cdot\sqrt{x+y}} \cdot \frac{\sqrt{x+y}+\sqrt{x+y+h}}{\sqrt{x+y}+\sqrt{x+y+h}} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+y})^2-(\sqrt{x+y+h})^2}{h\sqrt{x+y+h}\cdot\sqrt{x+y}(\sqrt{x+y}+\sqrt{x+y+h})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+y)-(x+y+h)}{h\sqrt{x+y+h}\cdot\sqrt{x+y}(\sqrt{x+y}+\sqrt{x+y+h})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h\sqrt{x+y+h}\cdot\sqrt{x+y}(\sqrt{x+y}+\sqrt{x+y+h})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{\sqrt{x+y+h}\cdot\sqrt{x+y}(\sqrt{x+y}+\sqrt{x+y+h})}
\end{aligned}
$$

6. กำหนดให้ $f(x,y) = (1+x)^y(1+y)^x$ ถ้า $f_x(0,a) = \ln(1+a)+1$ จงหา $f_y(a,a)$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}(1+x)^y \cdot (1+y)^x + (1+x)^y \frac{\partial}{\partial x}(1+y)^x \\
f_x(x,y) &= y(1+x)^{y-1} \cdot (1+y)^x + (1+x)^y \cdot (1+y)^x \ln(1+y) \\
f_x(0,a) &= a(1+0)^{a-1} \cdot (1+a)^0 + (1+0)^a \cdot (1+a)^0 \ln(1+a) \\
\ln(1+a)+1 &= a + \ln(1+a) \\
a &= 1
\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
f_y(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}(1+x)^y \cdot (1+y)^x + (1+x)^y \frac{\partial}{\partial y}(1+y)^x \\
f_y(x,y) &= (1+x)^y \ln(1+x) \cdot (1+y)^x + (1+x)^y \cdot x(1+y)^{x-1} \\
f_y(a,a) = f_y(1,1) &= (1+1)^1 \ln(1+1) \cdot (1+1)^1 + (1+1)^1 \cdot 1(1+1)^{1-1} \\
&= 4\ln 2 + 2 \quad \#
\end{aligned}$$

7. กำหนดให้ $f(x,y) = \dfrac{(1+x)^y}{(1+y)^x}$ จงหา $f_x(a,0)$ และ $f_y(a,0)$ เมื่อ $a > 0$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= \frac{(1+y)^x \cdot \frac{\partial}{\partial x}(1+x)^y - (1+x)^y \cdot \frac{\partial}{\partial x}(1+y)^x}{(1+y)^{2x}} \\
f_x(x,y) &= \frac{(1+y)^x \cdot y(1+x)^{y-1} - (1+x)^y \cdot (1+y)^x \ln(1+y)}{(1+y)^{2x}} \\
f_x(a,0) &= \frac{(1+0)^a \cdot 0(1+a)^{0-1} - (1+a)^0 \cdot (1+0)^a \ln(1+0)}{(1+0)^{2a}} = 0 \quad \#
\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}
f_y(x,y) &= \frac{(1+y)^x \cdot \frac{\partial}{\partial y}(1+x)^y - (1+x)^y \cdot \frac{\partial}{\partial y}(1+y)^x}{(1+y)^{2x}} \\
f_x(x,y) &= \frac{(1+y)^x \cdot (1+x)^y \ln(1+x) - (1+x)^y \cdot x(1+y)^{x-1}}{(1+y)^{2x}} \\
f_x(a,0) &= \frac{(1+0)^a \cdot (1+a)^0 \ln(1+a) - (1+0)^a \cdot 0(1+a)^{0-1}}{(1+0)^{2a}} = \ln(1+a) \quad \#
\end{aligned}$$

8. กำหนดให้ $f(x,y) = x \cdot y^x + y \cdot x^y$ จงหา $f_x(a,1) + f_y(1,a)$ เมื่อ $a > 0$

วิธีทำ พิจารณา

$$
\begin{aligned}
f_x(x,y) &= x \cdot \frac{\partial}{\partial x} y^x + y^x \cdot \frac{\partial}{\partial x} x + y \cdot \frac{\partial}{\partial x} x^y \\
f_x(x,y) &= x \cdot y^x \ln y + y^x \cdot 1 + y \cdot y x^{y-1} \\
f_x(a,1) &= a \cdot 1^a \ln 1 + 1^a \cdot 1 + 1 \cdot 1 a^{1-1} \\
&= 0 + 1 + 1 = 2 \\
f_y(x,y) &= x \cdot \frac{\partial}{\partial y} y^x + y \cdot \frac{\partial}{\partial y} x^y + x^y \cdot \frac{\partial}{\partial y} y \\
f_x(x,y) &= x \cdot x y^{x-1} + y \cdot x^y \ln x + x^y \cdot 1 \\
f_x(1,a) &= 1 \cdot a^{1-1} + a \cdot 1^a \ln 1 + 1^a \cdot 1 \\
&= 1 + 0 + 1 = 2
\end{aligned}
$$

ดังนั้น

$$
f_x(a,1) + f_x(1,a) = 2 + 2 = 4 \quad \#
$$

9. กำหนดให้ $f(x,y) = xy\sin(x\cos(xy))$ จงหา $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ และ $\dfrac{\partial f}{\partial y}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}xy \cdot \sin(x\cos(xy)) + xy \cdot \frac{\partial}{\partial x}\sin(x\cos(xy)) \\
&= y \cdot \sin(x\cos(xy)) + xy\cos(x\cos(xy)) \cdot \frac{\partial}{\partial x}x\cos(xy) \\
&= y\sin(x\cos(xy)) + xy\cos(x\cos(xy))\left[\frac{\partial}{\partial x}x \cdot \cos(xy) + x \cdot \frac{\partial}{\partial x}\cos(xy)\right] \\
&= y\sin(x\cos(xy)) + xy\cos(x\cos(xy))\left[1 \cdot \cos(xy) + x \cdot (-\sin(xy))\frac{\partial}{\partial x}(xy)\right] \\
&= y\sin(x\cos(xy)) + xy\cos(x\cos(xy))\left[\cos(xy) - x\sin(xy) \cdot y\right] \\
&= y\sin(x\cos(xy)) + xy\cos(x\cos(xy))\left[\cos(xy) - xy\sin(xy)\right]
\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}xy \cdot \sin(x\cos(xy)) + xy \cdot \frac{\partial}{\partial y}\sin(x\cos(xy)) \\
&= x \cdot \sin(x\cos(xy)) + xy\cos(x\cos(xy)) \cdot \frac{\partial}{\partial y}x\cos(xy) \\
&= x\sin(x\cos(xy)) + xy\cos(x\cos(xy))\left[x(-\sin(xy))\frac{\partial}{\partial y}xy\right] \\
&= x\sin(x\cos(xy)) + xy\cos(x\cos(xy))\left[-x\sin(xy) \cdot x\right] \\
&= x\sin(x\cos(xy)) - x^3y\cos(x\cos(xy)) \cdot \sin(xy)
\end{aligned}$$

10. กำหนดให้ $f(x,y) = \tan^2(\tan x \cdot \tan(xy))$ จงหา $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ และ $\dfrac{\partial f}{\partial y}$

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= 2\tan(\tan x \cdot \tan(xy)) \cdot \frac{\partial}{\partial x}\tan(\tan x \cdot \tan(xy)) \\
&= 2\tan(\tan x \cdot \tan(xy)) \cdot \sec^2(\tan x \cdot \tan(xy)) \cdot \frac{\partial}{\partial x}(\tan x \cdot \tan(xy)) \\
&= 2\tan(\tan x \cdot \tan(xy)) \cdot \sec^2(\tan x \cdot \tan(xy)) \left[\tan x \cdot \frac{\partial}{\partial x}\tan(xy) + \tan(xy) \cdot \frac{\partial}{\partial x}\tan x\right] \\
&= 2\tan(\tan x \cdot \tan(xy)) \cdot \sec^2(\tan x \cdot \tan(xy)) \left[\tan x \cdot \sec^2(xy) \cdot \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \tan(xy) \cdot \sec^2 x\right] \\
&= 2\tan(\tan x \cdot \tan(xy)) \cdot \sec^2(\tan x \cdot \tan(xy)) \left[\tan x \cdot \sec^2(xy) \cdot y + \tan(xy)\sec^2 x\right]
\end{aligned}
$$

และ

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= 2\tan(\tan x \cdot \tan(xy)) \cdot \frac{\partial}{\partial y}\tan(\tan x \cdot \tan(xy)) \\
&= 2\tan(\tan x \cdot \tan(xy)) \cdot \sec^2(\tan x \cdot \tan(xy)) \cdot \frac{\partial}{\partial y}(\tan x \cdot \tan(xy)) \\
&= 2\tan(\tan x \cdot \tan(xy)) \cdot \sec^2(\tan x \cdot \tan(xy)) \cdot \tan x \cdot \frac{\partial}{\partial y}\tan(xy) \\
&= 2\tan(\tan x \cdot \tan(xy)) \cdot \sec^2(\tan x \cdot \tan(xy)) \tan x \cdot \sec^2(xy) \cdot \frac{\partial}{\partial y}(xy) \\
&= 2\tan(\tan x \cdot \tan(xy)) \cdot \sec^2(\tan x \cdot \tan(xy)) \tan x \cdot \sec^2(xy) \cdot x
\end{aligned}
$$

Quiz 4 : MAC1303 **แคลคูลัส** 2

หัวข้อ อนุพันธ์อันดับสูง **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน

เวลาสอบ 09:30 - 10:00 วันอาทิตย์ ที่ 13 มีนาคม 2565 **ปีการศึกษา** 2/2564

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. จงหาอนุพันธ์ย่อยอันดับสองของฟังก์ชัน $f(x,y) = \sin(\cos(xy))$
2. จงหาอนุพันธ์ย่อยอันดับสองของฟังก์ชัน $f(x,y) = \cos(\sin(xy))$
3. ให้ $z = f(x,y)$ โดยที่ $x = st$ และ $y = s + t$ จงหา $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}$
4. ให้ $z = f(x,y)$ โดยที่ $x = st$ และ $y = s + t$ จงหา $\dfrac{\partial^2 z}{\partial s^2}$
5. ให้ $z = f(x,y)$ โดยที่ $x = st$ และ $y = s - t$ จงหา $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}$
6. ให้ $z = f(x,y)$ โดยที่ $x = st$ และ $y = t - s$ จงหา $\dfrac{\partial^2 z}{\partial s^2}$

เฉลย Quiz 4 : MAC1303 แคลคูลัส 2

หัวข้อ อนุพันธ์อันดับสูง **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
เวลาสอบ 09:30 - 10:00 วันอาทิตย์ ที่ 13 มีนาคม 2565 **ปีการศึกษา** 2/2564

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. จงหาอนุพันธ์ย่อยอันดับสองของฟังก์ชัน $f(x,y) = \sin(\cos(xy))$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
f_x(x,y) &= \cos(\cos(xy)) \cdot \frac{\partial}{\partial x}\cos(xy) = \cos(\cos(xy)) \cdot (-\sin(xy)) \cdot \frac{\partial}{\partial x}(xy) \\
&= -y\cos(\cos(xy)) \cdot \sin(xy) \\
f_{xx}(xy) &= -y\cos(\cos(xy)) \cdot \frac{\partial}{\partial x}\sin(xy) - \frac{\partial}{\partial x}(y\cos(\cos(xy))) \cdot \sin(xy) \\
&= -y\cos(\cos(xy)) \cdot \cos(xy) \cdot y + (y\sin(\cos(xy)))\frac{\partial}{\partial x}\cos(xy) \cdot \sin(xy) \\
&= -y^2\cos(\cos(xy))\cos(xy) + (y\sin(\cos(xy)))(-\sin(xy) \cdot y) \cdot \sin(xy) \\
&= -y^2\cos(\cos(xy))\cos(xy) - y^2\sin(\cos(xy))\sin^2(xy) \\
f_{xy}(xy) &= -\frac{\partial}{\partial y}y \cdot \cos(\cos(xy)) \cdot \sin(xy) - y \cdot \frac{\partial}{\partial y}\cos(\cos(xy)) \cdot \sin(xy) - y\cos(\cos(xy)) \cdot \frac{\partial}{\partial y}\sin(xy) \\
&= -1 \cdot \cos(xy) \cdot \sin(xy) - y \cdot (-\sin(\cos(xy))) \cdot \frac{\partial}{\partial y}\cos(xy) \cdot \sin(xy) - y\cos(\cos(xy)) \cdot \cos(xy) \cdot x \\
&= \cos(xy)\sin(xy) + y\sin(\cos(xy)) \cdot (-\sin(xy)) \cdot x \cdot \sin(xy) - yx\cos(\cos(xy))\cos(xy) \\
&= \cos(xy)\sin(xy) - xy\sin(\cos(xy))\sin^2(xy) - yx\cos(\cos(xy))\cos(xy)
\end{aligned}
$$

และ

$$
\begin{aligned}
f_y(x,y) &= \cos(\cos(xy)) \cdot \frac{\partial}{\partial y}\cos(xy) = \cos(\cos(xy)) \cdot (-\sin(xy)) \cdot \frac{\partial}{\partial y}(xy) \\
&= -x\cos(\cos(xy))\sin(xy) \\
f_{yy}(xy) &= -x\cos(\cos(xy)) \cdot \frac{\partial}{\partial y}\sin(xy) - \frac{\partial}{\partial y}(x\cos(\cos(xy))) \cdot \sin(xy) \\
&= -x\cos(\cos(xy)) \cdot \cos(xy) \cdot x + (x\sin(\cos(xy)))\frac{\partial}{\partial y}\cos(xy) \cdot \sin(xy) \\
&= -x^2\cos(\cos(xy))\cos(xy) + (x\sin(\cos(xy)))(-\sin(xy) \cdot x) \cdot \sin(xy) \\
&= -x^2\cos(\cos(xy))\cos(xy) - x^2\sin(\cos(xy))\sin^2(xy) \\
f_{yx}(xy) &= f_{xy}(x,y) \\
&= \cos(xy)\sin(xy) - xy\sin(\cos(xy))\sin^2(xy) - yx\cos(\cos(xy))\cos(xy)
\end{aligned}
$$

2. จงหาอนุพันธ์ย่อยอันดับสองของฟังก์ชัน $f(x,y)=\cos(\sin(xy))$

วิธีทำ จะได้ว่า

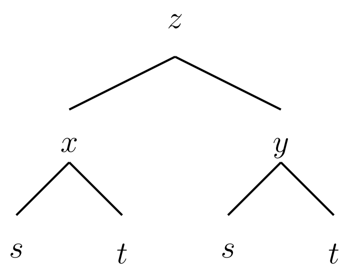
$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= -\sin(\sin(xy))\cdot\frac{\partial}{\partial x}\sin(xy) = -\sin(\sin(xy))\cdot(\cos(xy))\cdot\frac{\partial}{\partial x}(xy)\\
&= -y\sin(\sin(xy))\cos(xy)\\
f_{xx}(xy) &= -y\sin(\sin(xy))\cdot\frac{\partial}{\partial x}\cos(xy) - \frac{\partial}{\partial x}(y\sin(\sin(xy)))\cdot\cos(xy)\\
&= -y\sin(\sin(xy))\cdot(-\sin(xy))\cdot y - (y\cos(\sin(xy)))\frac{\partial}{\partial x}\sin(xy)\cdot\cos(xy)\\
&= y^2\sin(\sin(xy))\sin(xy) - (y\cos(\sin(xy)))\cos(xy)\cdot y\cdot\cos(xy)\\
&= y^2\sin(\sin(xy))\sin(xy) - y^2\cos(\sin(xy))\cos^2(xy)\\
f_{xy}(xy) &= -\frac{\partial}{\partial y}y\cdot\sin(\sin(xy))\cdot\cos(xy) - y\cdot\frac{\partial}{\partial y}\sin(\sin(xy))\cdot\cos(xy) - y\sin(\sin(xy))\cdot\frac{\partial}{\partial y}\cos(xy)\\
&= -1\cdot\sin(\sin(xy))\cdot\cos(xy) - y\cdot\cos(\sin(xy))\frac{\partial}{\partial y}\sin(xy)\cdot\cos(xy) - y\sin(\sin(xy))\cdot(-\sin(xy))x\\
&= -\sin(\sin(xy))\cos(xy) - y\cdot\cos(\sin(xy))\cos(xy)x\cdot\cos(xy) + xy\sin(\sin(xy))\sin(xy)\\
&= -\sin(\sin(xy))\cos(xy) - xy\cos(\sin(xy))\cos^2(xy) + xy\sin(\sin(xy))\sin(xy)
\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}
f_y(x,y) &= \sin(\sin(xy))\cdot\frac{\partial}{\partial y}\sin(xy) = \sin(\sin(xy))\cdot(\cos(xy))\cdot\frac{\partial}{\partial y}(xy)\\
&= x\sin(\sin(xy))\cos(xy)\\
f_{yy}(xy) &= x\sin(\sin(xy))\cdot\frac{\partial}{\partial y}\cos(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(x\sin(\sin(xy)))\cdot\cos(xy)\\
&= x\sin(\sin(xy))\cdot(-\sin(xy)x) + x\cos(\sin(xy))\frac{\partial}{\partial y}\sin(xy)\cdot\cos(xy)\\
&= -x^2\sin(\sin(xy))\sin(xy) + x\cos(\sin(xy))\cos(xy)x\cdot\cos(xy)\\
&= -x^2\sin(\sin(xy))\sin(xy) + x^2\cos(\sin(xy))\cos^2(xy)\\
f_{yx}(xy) &= f_{xy}(x,y)\\
&= -\sin(\sin(xy))\cos(xy) - xy\cos(\sin(xy))\cos^2(xy) + xy\sin(\sin(xy))\sin(xy)
\end{aligned}$$

3. ให้ $z = f(x, y)$ โดยที่ $x = st$ และ $y = s + t$ จงหา $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}$

วิธีทำ พิจารณาแผนภาพ



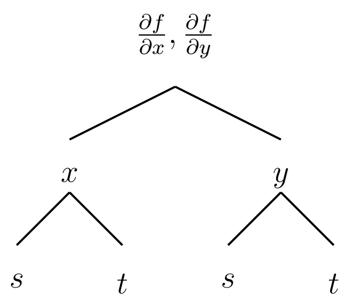
$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

จะได้ว่า

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot s + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot 1 = s \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) = s \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

พิจารณาแผนภาพ

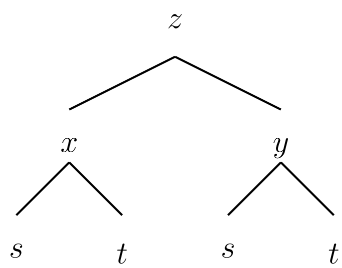


ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= s\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}\right] + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}\right] \\
&= s\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot s + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \cdot 1\right] + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot s + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot 1\right] \\
&= s^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + s \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + s \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad \#
\end{aligned}$$

4. ให้ $z = f(x, y)$ โดยที่ $x = st$ และ $y = s + t$ จงหา $\dfrac{\partial^2 z}{\partial s^2}$

วิธีทำ พิจารณาแผนภาพ

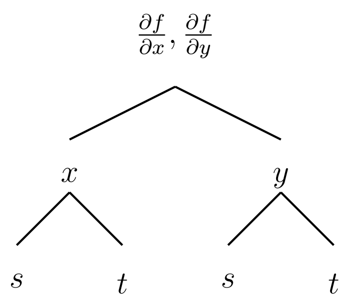


$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$

จะได้ว่า

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot t + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot 1 = t \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}$$
$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right) = t \cdot \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

พิจารณาแผนภาพ

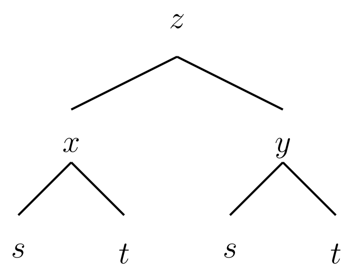


ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} &= t\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}\right] + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}\right] \\
&= t\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot t + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \cdot 1\right] + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot t + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot 1\right] \\
&= t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + t\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + t\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \qquad \#
\end{aligned}$$

5. ให้ $z = f(x, y)$ โดยที่ $x = st$ และ $y = s - t$ จงหา $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}$

วิธีทำ พิจารณาแผนภาพ



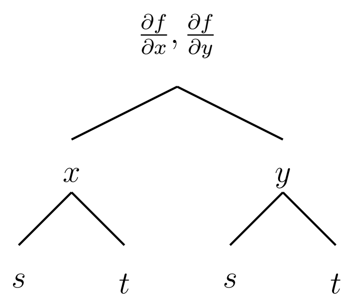
$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

จะได้ว่า

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot s + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot (-1) = s \cdot \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) = s \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

พิจารณาแผนภาพ

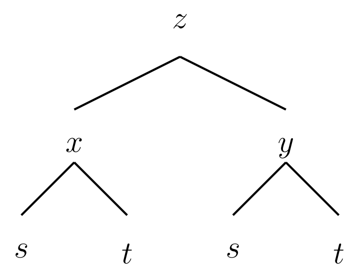


ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= s\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}\right] - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}\right] \\
&= s\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot s + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \cdot (-1)\right] - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot s + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot (-1)\right] \\
&= s^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - s\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - s\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad \#
\end{aligned}$$

6. ให้ $z = f(x, y)$ โดยที่ $x = st$ และ $y = t - s$ จงหา $\dfrac{\partial^2 z}{\partial s^2}$

วิธีทำ พิจารณาแผนภาพ



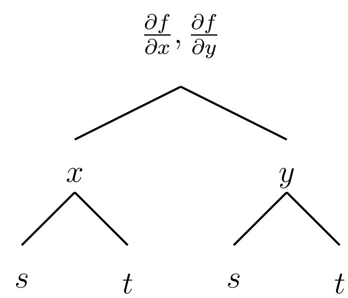
$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$

จะได้ว่า

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot t + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot (-1) = t \cdot \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right) = t \cdot \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

พิจารณาแผนภาพ



ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} &= t\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}\right] - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}\right] \\
&= t\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot t + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \cdot (-1)\right] + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot t + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot (-1)\right] \\
&= t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - t\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - t\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \qquad \#
\end{aligned}$$