Quiz 1 : MAC3310 **พีชคณิตนามธรรม**

หัวข้อ คณิตศาสตร์พื้นฐาน การดำเนินการทวิภาค และกรุป **คะแนน** 10 คะแนน

เวลา สัปดาห์ที่ 3 ปีการศึกษา 1/2564

ผู้สอน ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ธนัชยศ จำปาหวาย
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้ โดยใช้**อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์**

$$1 + 11 + 111 + \cdots + \frac{10^n - 1}{9} = \frac{10}{9}\left(\frac{10^n - 1}{9}\right) - \frac{n}{9} \qquad \text{ทุก ๆ จำนวนนับ } n$$

2. ให้ a, b, c เป็นจำนวนเต็ม จง**พิสูจน์ว่า**

$$\text{ถ้า} \quad a \mid bc \quad \text{และ} \quad \gcd(a^2, b^2) = 1 \quad \text{แล้ว} \quad a \mid c^2$$

3. สำหรับจำนวนนับ n นิยาม

$$A_n = \{a \in \mathbb{Z} : 0 < a < n \text{ เมื่อ } \gcd(a, n) = 1\}$$

จง**แจกแจงสมาชิก**ของ A_6, A_7 และหา**จำนวนสมาชิก**ของ $A_{10!}$

4. ให้ $a, b \in \mathbb{Z}$ และ

$$a\,R\,b \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad 2 \mid (a+b)^2$$

จง**พิสูจน์**ว่า R เป็นความสัมพันธ์สมมูล และหาชั้นสมมูล

5. ให้ f เป็นฟังก์ชันใน A เมื่อ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ นิยาม $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (n ตัว) ถ้า

$$f^2 = f \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

จงหา f^{2564}

6. ให้ $*$ เป็นการดำเนินทวิภาคบนจำนวนจริงบวก ที่สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

(ก) $a * a = a^2 + 1$

(ข) $a * b = b * a$

(ค) $a * (a + b) = \dfrac{a+b}{a}(a * b)$

จงหา $100 * 40$

7. กำหนดให้ $G = [0, , \infty)$ และ

$$a * b = |a - b| \quad \text{เมื่อ } a, b \in G$$

จงตรวจสอบว่า $*$ มีสมบัติใดบ้างบน G
1. การสลับที่ 2. การเปลี่ยนกลุ่ม 3. เอกลักษณ์ และ 4. ตัวผกผัน

8. กำหนดให้

$$\bar{a} * \bar{b} = \overline{10ab} \qquad \text{เมื่อ } \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_{11}^{*}$$

จงตรวจสอบว่า $(\mathbb{Z}_{11}^{*}, *)$ เป็นกรุปอาบีเลียนหรือไม่

9. กำหนดให้ $G = (-1, 1)$ และ

$$a * b = \frac{2a + 2b}{ab + 2} \quad \text{เมื่อ } a, b \in G$$

จงแสดงว่า $(G, *)$ เป็นกรุป

10. ถ้ามี $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_{101}^{*}$ (กรุปการคูณของมอดุโล 101) ซึ่ง

$$\bar{a} \cdot \overline{55} = \bar{1} \qquad \text{และ} \qquad \bar{b} \cdot \overline{66} = \bar{1}$$

จงหา $\bar{a}$ และ $\bar{b}$

เฉลย Quiz 1 : MAC3310 พีชคณิตนามธรรม

หัวข้อ คณิตศาสตร์พื้นฐาน การดำเนินการทวิภาค และกรุป **คะแนน** 10 คะแนน

เวลา สัปดาห์ที่ 3 ปีการศึกษา 1/2564

ผู้สอน ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ธนัชยศ จำปาหวาย
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. ***บทพิสูจน์.*** สำหรับ $n \in \mathbb{N}$ กำหนดให้ $P(n)$ แทนประโยค

$$1 + 11 + 111 + \cdots + \frac{10^n - 1}{9} = \frac{10}{9}\left(\frac{10^n - 1}{9}\right) - \frac{n}{9} \qquad \text{ทุก ๆ จำนวนนับ } n$$

จะเห็นว่า $1 = \frac{9}{9} = \frac{10}{9} - \frac{1}{9} = \frac{10}{9}(1) - \frac{1}{9} = \frac{10}{9}\left(\frac{10^1 - 1}{9}\right) - \frac{1}{9}$ ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง
ให้ $k \in \mathbb{N}$ สมมติ $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือ

$$1 + 11 + 111 + \cdots + \frac{10^k - 1}{9} = \frac{10}{9}\left(\frac{10^k - 1}{9}\right) - \frac{k}{9}$$

โดยสมมติฐาน จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\left(1 + 11 + 111 + \cdots + \frac{10^k - 1}{9}\right) + \frac{10^{k+1} - 1}{9} &= \frac{10}{9}\left(\frac{10^k - 1}{9}\right) - \frac{k}{9} + \frac{10^{k+1} - 1}{9} \\
&= \frac{10}{9}\left(\frac{10^k - 1}{9}\right) - \frac{k}{9} + \frac{10^k \cdot 10}{9} - \frac{1}{9} \\
&= \frac{10}{9}\left[\left(\frac{10^k - 1}{9}\right) + 10^k\right] - \frac{k+1}{9} \\
&= \frac{10}{9}\left(\frac{10^k - 1 + 9 \cdot 10^k}{9}\right) - \frac{k+1}{9} \\
&= \frac{10}{9}\left(\frac{10 \cdot 10^k - 1}{9}\right) - \frac{k+1}{9} \\
&= \frac{10}{9}\left(\frac{10^{k+1} - 1}{9}\right) - \frac{k+1}{9}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง โดยอุปนัยเชิงคณิตสรุปได้ว่า

$$1 + 11 + 111 + \cdots + \frac{10^n - 1}{9} = \frac{10}{9}\left(\frac{10^n - 1}{9}\right) - \frac{n}{9} \qquad \text{ทุก ๆ จำนวนนับ } n$$

$\square$

2. ***บทพิสูจน์.*** ให้ $a, b, c \in \mathbb{Z}$ สมมติว่า $a \mid bc$ และ $\gcd(a^2, b^c) = 1$ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม k, x, y ซึ่ง

$$bc = ak \quad \text{และ} \quad 1 = a^2x + b^2y$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
1(c^2) = (a^2x + b^2y)c^2 &= a^2c^2x + b(bc)cy \\
c^2 &= a^2c^2x + b(ak)cy \\
c^2 &= a(ac^2x + bkcy)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $a \mid c^2$

$\square$

3. **วิธีทำ**

$$A_6 = \{1, 5\}$$
$$A_7 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

จากนิยามของเซต
$$A_n = \{a \in \mathbb{Z} : 0 < a < n \text{ เมื่อ } \gcd(a, n) = 1\}$$
จะเห็นว่าจำนวนสมาชิกของ A_n เท่ากับ $\phi(n)$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
|A_{10!}| &= \phi(10!) \\
&= \phi(1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10) \\
&= \phi(2^8 \times 3^4 \times 5^2 \times 7) \\
&= (2^8 - 2^7)(3^4 - 3^3)(5^2 - 5^1)(7 - 1) \\
&= 128(54)(20)6 \\
&= 829440 \quad \#
\end{aligned}$$

4. ให้ $a, b \in \mathbb{Z}$ และ

$$a \, R \, b \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad 2 \mid (a + b)^2$$

จง**พิสูจน์**ว่า R เป็นความสัมพันธ์สมมูล และหาชั้นสมมูล

บทพิสูจน์. จะแสดงว่า R มีสมบัติ 3 ข้อต่อไปนี้

1. **สมบัติสะท้อน**
   สำหรับจำนวนเต็ม x ใด ๆ จะได้ว่า $(x + x)^2 = 4x^2 = 2(2x^2)$ ดังนั้น $2 \mid (x + x)^2$ สรุปได้ว่า $x \, R \, x$
2. **สมบัติสมมาตร**
   ให้ $x, y \in \mathbb{Z}$ สมมติว่า $x \, R \, y$ นั่นคือ $2 \mid (x + y)^2$ แล้ว $2 \mid (y + x)^2$ สรุปได้ว่า $y \, R \, x$
3. **สมบัติถ่ายทอด**
   ให้ $x, y, z \in \mathbb{Z}$ สมมติว่า $x \, R \, y$ และ $y \, R \, z$ จะได้ว่า $2 \mid (x + y)^2$ และ $2 \mid (y + z)^2$ จะได้ว่า $2 \mid [(x + y)^2 + (y + z)^2]$ พิจารณา

$$\begin{aligned}
(x + y)^2 + (y + z)^2 &= (x^2 + 2xy + y^2) + (y^2 + 2yz + z^2) \\
&= (x^2 + z^2) + 2(xy + yz + y^2) + 2xz - 2xz \\
&= (x + z)^2 + 2(xy + yz + y^2 - xz)
\end{aligned}$$

   ดังนั้น $2 \mid (x + z)^2$ สรุปได้ว่า $x \, R \, z$

ดังนั้น R เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน $\mathbb{Z}$ □

พิจารณาชั้นสมมูลต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
[0] &= \{a : 2 \mid (a + 0)^2\} = \{0, \pm 2, \pm 4, ...\} \\
[1] &= \{a : 2 \mid (a + 1)^2\} = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, ...\} \\
[2] &= \{a : 2 \mid (a + 2)^2\} = \{0, \pm 2, \pm 4, ...\} \\
[3] &= \{a : 2 \mid (a + 3)^2\} = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, ...\}
\end{aligned}$$

ดังนั้นชั้นสมมูลมี 2 แบบคือเซตของจำนวนคู่และเซตของจำนวนคี่ ดังนั้น $\mathbb{Z}/R = \{[0], [1]\}$

5. **วิธีทำ** ให้ f เป็นฟังก์ชันใน A เมื่อ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ นิยาม $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (n ตัว) ถ้า

$$f^2 = f \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

จงหา f^{2564}

$$\begin{aligned}
f^4 &= f^2 \circ f^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\
f^6 &= f^2 \circ f^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = i_A \\
f^8 &= f^2 \circ f^6 = f^2 \circ i_A = f^2 \\
f^{10} &= f^2 \circ f^8 = f^2 \circ f^2 = f^4
\end{aligned}$$

จากการสังเกต จะได้ว่า $f^2, f^4, f^6, f^8, \ldots$ หมายถึง $f^2, f^4, f^6, f^2, f^4, f^6, \ldots.$ ตามลำดับ ซึ่งเป็นแบบรูปที่ซ้ำกันที่ละ 3 ตัว โดยนำ 6 ไปหาร n ได้เศษเหลือเท่ากับ 2, 4, 0 เนื่องจาก

$$2564 = 6(427) + 2$$

ดังนั้น

$$f^{2564} = f^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \#$$

6. ให้ $*$ เป็นการดำเนินทวิภาคบนจำนวนจริงบวก ที่สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

   (ก) $a * a = a^2 + 1$

   (ข) $a * b = b * a$

   (ค) $a * (a + b) = \dfrac{a+b}{a}(a * b)$

   จงหา $100 * 40$

$$\begin{aligned}
100 * 40 &= 40 * 100 && \text{(ข)} \\
&= 40 * (40 + 60) \\
&= \frac{40+60}{40} \cdot (40 * 60) && \text{(ค)} \\
&= \frac{5}{2} \cdot (40 * 60) = \frac{5}{2} \cdot (40 * (40 + 20)) \\
&= \frac{5}{2} \cdot \frac{40+20}{40}(40 * 20) && \text{(ค)} \\
&= \frac{15}{4} \cdot (40 * 20) = \frac{15}{4} \cdot (20 * 40) && \text{(ข)} \\
&= \frac{15}{4} \cdot (20 * (20 + 20)) \\
&= \frac{15}{4} \cdot \frac{20+20}{20} \cdot (20 * 20) && \text{(ค)} \\
&= \frac{15}{4} \cdot 2 \cdot (20^2 + 1) && \text{(ก)} \\
&= \frac{6015}{2} \qquad \#
\end{aligned}$$

7. กำหนดให้ $G = [0, , \infty)$ และ

$$a * b = |a - b| \quad \text{เมื่อ } a, b \in G$$

จงตรวจสอบว่า $*$ มีสมบัติใดบ้างบน G
1. การสลับที่ 2. การเปลี่ยนกลุ่ม 3. เอกลักษณ์ และ 4. ตัวผกผัน

วิธีทำ ให้ $a, b \in G$ จะได้ว่า

$$a * b = |a - b| = |b - a| = b * a$$

ดังนั้น $*$ มีสมบัติการสลับที่ จะเห็นว่า

$$1 * (2 * 3) = 1 * |2 - 3| = 1 * 1 = |1 - 1| = 0$$
$$(1 * 2) * 3 = |1 - 2| * 3 = 1 * 3 = |1 - 3| = 2$$

นั่นคือ $1 * (2 * 3) \neq (1 * 2) * 3$ ดังนั้น $*$ ไม่มีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม

เนื่องจาก $a \geq 0$ และ $0 \in G$ ซึ่ง

$$a * 0 = |a - 0| = |a| = a = |a| = |-a| = |0 - a| = 0 * a$$

ดังนั้น 0 เป็นเอกลักษณ์ของ $*$
เห็นได้ชัดว่า

$$a * a = |a - a| = 0$$

ดังนั้น a เป็นตัวผกผันของ a

8. กำหนดให้

$$\bar{a} * \bar{b} = \overline{10ab} \qquad \text{เมื่อ } \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_{11}^*$$

จงตรวจสอบว่า $(\mathbb{Z}_{11}^*, *)$ เป็นกรุปอาบีเลียนหรือไม่

บทพิสูจน์. ให้ $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_{11}^*$ จะได้ว่า

$$(\bar{a} * \bar{b}) * \bar{c} = (\overline{10ab}) * \bar{c} = \overline{10(10ab)c} = \overline{10a(10bc)} = \bar{a} * \overline{10bc} = \bar{a} * (\bar{b} * \bar{c})$$
$$\bar{a} * \bar{b} = \overline{10ab} = \overline{10ba} = \bar{b} * \bar{a}$$

ดังนั้น $*$ มีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม และสมบัติสลับที่
เนื่องจาก $\overline{100} = \bar{1}$ จะได้ว่า

$$\bar{a} * \bar{10} = \overline{10a(10)} = \overline{100a} = \bar{a} = \overline{100a} = \overline{10(10)a} = \bar{10} * \bar{a}$$

ดังนั้น $\bar{10}$ เป็นเอกลักษณ์ของ $\mathbb{Z}_{11}^*$

เซตและสมาชิก	ตัวผกผัน	เหตุผล
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1} * \bar{1} = \overline{10(1)(1)} = \overline{10}$
$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{2} * \bar{6} = \overline{10(2)(6)} = \overline{120} = \overline{10}$
$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{3} * \bar{4} = \overline{10(3)(4)} = \overline{120} = \overline{10}$
$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{4} * \bar{3} = \overline{10(4)(3)} = \overline{120} = \overline{10}$
$\bar{5}$	$\bar{9}$	$\bar{5} * \bar{9} = \overline{10(5)(9)} = \overline{-45} = \overline{10}$
$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{6} * \bar{2} = \overline{10(6)(2)} = \overline{120} = \overline{10}$
$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{7} * \bar{8} = \overline{10(7)(8)} = \overline{-56} = \overline{10}$
$\bar{8}$	$\bar{7}$	$\bar{8} * \bar{7} = \overline{10(8)(7)} = \overline{-56} = \overline{10}$
$\bar{9}$	$\bar{5}$	$\bar{9} * \bar{5} = \overline{10(9)(5)} = \overline{-45} = \overline{10}$
$\bar{10}$	$\bar{10}$	$\bar{10} * \bar{10} = \overline{10(10)(10)} = \overline{-1} = \overline{10}$

จะเห็นว่าสมาชิกทุกตัว $\mathbb{Z}_{11}^*$ มีตัวผกผัน สรุปได้ว่า $(\mathbb{Z}_{11}^*, *)$ เป็นกรุปอาบีเลียน $\square$

9. กำหนดให้ $G = (-1, 1)$ และ

$$a * b = \frac{2a+2b}{ab+2} \quad \text{เมื่อ } a, b \in G$$

จงแสดงว่า $(G, *)$ เป็นกรุป

วิธีทำ ให้ $a, b, c \in G$

$$\begin{aligned}
a * (b * c) &= a * \left(\frac{2b+2c}{bc+2}\right) \\
&= \frac{2a + 2\left(\frac{2b+2c}{bc+2}\right)}{a\left(\frac{2b+2c}{bc+2}\right) + 2} \\
&= \frac{2a(bc+2) + 2(2b+2c)}{a(2b+2c) + 2(bc+2)} \\
&= \frac{2abc + 4a + 4b + 4c}{2ab + 2ac + 2bc + 4} \\
&= \frac{2(2a+2b) + 2c(ab+2)}{(2a+2b)c + 2(ab+2)} \\
&= \frac{2\left(\frac{2a+2b}{ab+2}\right) + 2c}{\left(\frac{2a+2b}{ab+2}\right)c + 2} \\
&= \left(\frac{2a+2b}{ab+2}\right) * c \\
&= (a * b) * c
\end{aligned}$$

ดังนั้น $*$ มีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่มบนเซต G เนื่องจาก

$$a * 0 = \frac{2a + 2(0)}{a0 + 2} = a = \frac{2(0) + 2a}{0a + 2} = 0 * a$$

จะได้ว่า 0 เป็นเอกลักษณ์ใน G ให้ $a \in G$ แล้ว

$$a * (-a) = \frac{2a + 2(-a)}{a(-a) + 2} = 0 = \frac{2(-a) + 2a}{-a(a) + 2} = (-a) * a$$

นั่นคือ $-a$ เป็นตัวผกผันของ a สรุปได้ว่า $(G, *)$ เป็นกรุป

10. ถ้ามี $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_{101}^*$ (กรุปการคูณของมอดุโล 101) ซึ่ง

$$\bar{a} \cdot \overline{55} = \bar{1} \qquad \text{และ} \qquad \bar{b} \cdot \overline{66} = \bar{1}$$

จงหา $\bar{a}$ และ $\bar{b}$

จะเห็นว่า $\bar{a}$ เป็นตัวผกผันของ $\overline{55}$ ใน $\mathbb{Z}_{101}^*$

พิจารณาเมตริกซ์ในการหา $\gcd(55, 101) = 1$

$$\begin{array}{rrrl}
101 & 1 & 0 & R_1 \\
55 & 0 & 1 & R_2 \\
46 & 1 & -1 & R_3 = R_1 - R_2 \\
9 & -1 & 2 & R_4 = R_2 - R_3 \\
1 & 6 & -11 & R_5 = R_3 - 5R_4
\end{array}$$

ดังนั้น $1 = 6(101) + 55(-11)$ จะได้ว่า

$$\bar{1} = \overline{101(6) + 55(-11)} = \overline{55} \cdot \overline{-11}$$

ดังนั้น $\bar{a} = \overline{-11} = \overline{90}$ เป็นตัวผกผันการคูณของ $\overline{55}$ ใน $\mathbb{Z}_{101}^*$

จะเห็นว่า $\bar{b}$ เป็นตัวผกผันของ $\overline{66}$ ใน $\mathbb{Z}_{101}^*$

พิจารณาเมตริกซ์ในการหา $\gcd(66, 101) = 1$

$$\begin{array}{rrrl}
101 & 1 & 0 & R_1 \\
66 & 0 & 1 & R_2 \\
35 & 1 & -1 & R_3 = R_1 - R_2 \\
31 & -1 & 2 & R_4 = R_2 - R_3 \\
4 & 2 & -3 & R_5 = R_3 - 5R_4 \\
3 & -15 & 23 & R_6 = R_4 - 7R_5 \\
1 & 17 & -26 & R_7 = R_5 - R_6
\end{array}$$

ดังนั้น $1 = 17(101) + 66(-26)$ จะได้ว่า

$$\bar{1} = \overline{101(17) + 66(-26)} = \overline{66} \cdot \overline{-26}$$

ดังนั้น $\bar{b} = \overline{-26} = \overline{75}$ เป็นตัวผกผันการคูณของ $\overline{66}$ ใน $\mathbb{Z}_{101}^*$

Quiz 2 : MAC3310 **พีชคณิตนามธรรม**

หัวข้อ สมบัติของกรุป กรุปการเรียงสับเปลี่ยน และกรุปย่อย **คะแนน** 10 คะแนน

เวลา สัปดาห์ที่ 5 ปีการศึกษา 1/2564

ผู้สอน ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ธนัชยศ จำปาหวาย
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. ให้ $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ และนิยาม
$$(a, b) * (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$
จงตรวจสอบว่า $*$ มี **สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม (associative)** ใน G หรือไม่

2. จงหา **อันดับ (order)** ของ $(\bar{7}, \overline{11})$ ใน $\mathbb{Z}_{16}^{\times} \times \mathbb{Z}_{21}^{\times}$

3. จงหา **อันดับ (order)** ของ $(\bar{5}, \bar{8})$ ใน $\mathbb{Z}_{13}^{\times} \times \mathbb{Z}_{31}^{\times}$

4. จงหา **อันดับ (order)** ของ α ใน S_{100} เมื่อ
$$\alpha = (1\ 2)^2(2\ 3)^3(3\ 4)^4 \cdots (99\ 100)^{100}$$

5. ให้ α และ β เป็นวัฏจักรต่างสมาชิกกัน (disjoint cycle) โดยที่
ความยาว (length) ของ α มากกว่า β และ $\circ(\alpha\beta) = 12$
จงหา **อันดับ (order)**ของ α และ β ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

6. จงตรวจสอบว่า H เป็นกรุปย่อยของ $GL_2(\mathbb{R})$ หรือไม่
$$H = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} : ab = 1 \right\}$$

7. จงตรวจสอบว่า H เป็นกรุปย่อยของ $GL_2(\mathbb{R})$ หรือไม่
$$H = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} : ab \geq 1 \right\}$$

8. ให้ H และ K เป็น กรุปย่อย (subgroup) ของกรุป G จงตรวจสอบว่า
$H \cup K$ เป็น**กรุปย่อย**ของ G หรือไม่
(ถ้าจริงจงพิสูจน์ ถ้าไม่จริงจงยกตัวอย่างค้าน)

9. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ เป็นสมาชิกใน $GL_2(\mathbb{R})$ จงเขียน $\langle A \rangle$ ในรูปแบบมีเงื่อนไข

เฉลย Quiz 2 : MAC3310 พีชคณิตนามธรรม

หัวข้อ สมบัติของกรุป กรุปการเรียงสับเปลี่ยน และกรุปย่อย **คะแนน** 10 คะแนน

เวลา สัปดาห์ที่ 5 ปีการศึกษา 1/2564

ผู้สอน ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ธนัชยศ จำปาหวาย
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. ให้ $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ และนิยาม

$$(a, b) * (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

จงตรวจสอบว่า $*$ มี **สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม** (associative) ใน G หรือไม่

ให้ $(a, b), (c, d), (x, y) \in G$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
(a, b) * [(c, d) * (x, y)] &= (a, b) * (cx - dy, cy + dx) \\
&= (a(cx - dy) - b(cy + dx), a(cy + dx) + b(cx - dy)) \\
&= (acx - ady - bcy - bdx, acy + adx + bcx - bdy) \\
&= ((acx - bdx) - ady - bcy, (acy - bdy) + adx + bcx) \\
&= ((ac - bd)x - (ad + by)y, (ac - bd)y + (ad + by)x) \\
&= (ac - bd, ad + by) * (x, y) \\
&= [(a, b) * (c, d)] * (x, y)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $*$ มีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม

2. จงหา **อันดับ** (order) ของ $(\bar{7}, \overline{11})$ ใน $\mathbb{Z}_{16}^{\times} \times \mathbb{Z}_{21}^{\times}$

วิธีทำ หาอันดับของ $\bar{7}$ ใน $\mathbb{Z}_{16}^{\times}$ พิจารณา

$$\begin{array}{lcccc}
(\bar{7})^1 & & & = & \bar{7} \\
(\bar{7})^2 & = & \overline{49} & = & \bar{1}
\end{array}$$

หาอันดับของ $\overline{11}$ ใน $\mathbb{Z}_{21}^{\times}$ พิจารณา

$$\begin{array}{lcccccr}
(\overline{11})^1 & & & & & = & \overline{11} \\
(\overline{11})^2 & & & = & \overline{121} & = & \overline{-5} \\
(\overline{11})^3 & = & (\overline{11})(\overline{11})^2 & = & \overline{-55} & = & \bar{8} \\
(\overline{11})^4 & = & (\overline{11})(\overline{11})^3 & = & \overline{88} & = & \bar{4} \\
(\overline{11})^5 & = & (\overline{11})(\overline{11})^4 & = & \overline{44} & = & \bar{2} \\
(\overline{11})^6 & = & (\overline{11})(\overline{11})^5 & = & \overline{22} & = & \bar{1}
\end{array}$$

ดังนั้น $\circ(\bar{7}) = 2$ และ $\circ(\overline{11}) = 6$ จะได้ว่า

$$\circ((\bar{7}, \overline{11})) = \ell\text{cm}(2, 6) = 6 \quad \#$$

3. จงหา **อันดับ** (order) ของ $(\bar{5}, \bar{8})$ ใน $\mathbb{Z}_{13}^{\times} \times \mathbb{Z}_{31}^{\times}$

วิธีทำ หาอันดับของ $\bar{5}$ ใน $\mathbb{Z}_{13}^{\times}$ พิจารณา

$$\begin{array}{lclclcr} (\bar{5})^1 & & & & & = & \bar{5} \\ (\bar{5})^2 & & & = & \overline{25} & = & \overline{-1} \\ (\bar{5})^3 & = & (\bar{5})(\bar{5})^2 & = & \overline{-5} & = & \overline{-5} \\ (\bar{5})^4 & = & (\bar{5})^2(\bar{5})^2 & = & \overline{(-1)(-1)} & = & \bar{1} \end{array}$$

หาอันดับของ $\bar{8}$ ใน $\mathbb{Z}_{31}^{\times}$ พิจารณา

$$\begin{array}{lclclcr} (\bar{8})^1 & & & & & = & \bar{8} \\ (\bar{8})^2 & & & = & \overline{64} & = & \bar{2} \\ (\bar{8})^3 & = & (\bar{8})(\bar{8})^2 & = & \overline{16} & = & \overline{16} \\ (\bar{8})^4 & = & (\bar{8})^2(\bar{8})^2 & = & \overline{2(2)} & = & \bar{4} \\ (\bar{8})^5 & = & (\bar{8})(\bar{8})^4 & = & \overline{32} & = & \bar{1} \end{array}$$

ดังนั้น $\circ(\bar{5}) = 4$ และ $\circ(\bar{8}) = 5$ จะได้ว่า

$$\circ((\bar{5}, \bar{8})) = \ell\text{cm}(4, 5) = 20 \quad \#$$

4. จงหา **อันดับ** (order) ของ α ใน S_{100} เมื่อ

$$\alpha = (1\ 2)^2(2\ 3)^3(3\ 4)^4 \cdots (99\ 100)^{100}$$

วิธีทำ เนื่องจาก $(1\ 2)^2 = (3\ 4)^4 = \cdots = (99\ 100)^{100} = (1)$ และ

$$(2\ 3)^3 = (2\ 3),\ (4\ 5)^5 = (4\ 5),\ \ldots\ ,\ (98\ 99)^{99} = (98\ 99)$$

จะได้ว่า

$$\alpha = (2\ 3)(4\ 5)(6\ 7) \cdots (98\ 99)$$

นั่นคือ α เป็นผลคูณของวัฏจักรที่ต่างสมาชิก ที่มีอันดับ 2 ทุกวัฏจักร ดังนั้น

$$\circ(\alpha) = \ell\text{cm}(2, 2, 2, ..., 2) = 2$$

5. ให้ α และ β เป็นวัฏจักรต่างสมาชิกกัน (disjoint cycle) โดยที่

ความยาว (length) ของ α มากกว่า β และ $\circ(\alpha\beta) = 12$

จงหา **อันดับ** (order)ของ α และ β ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

วิธีทำ เนื่องจาก α และ β เป็นวัฏจักรต่างสมาชิกกัน นั่นคือ

$$12 = \circ(\alpha\beta) = \ell\text{cm}(\circ(\alpha), \circ(\beta))$$

จาก ความยาว (length) ของ α มากกว่า β ฉะนั้น $\circ(\alpha) > \circ(\beta)$ สรุปอันดับได้ดังตาราง

$\circ(\alpha)$	$\circ(\beta)$	$\circ(\alpha\beta)$
12	1	12
12	2	12
12	3	12
12	4	12
12	6	12
6	4	12

6. จงตรวจสอบว่า H เป็นกรุปย่อยของ $GL_2(\mathbb{R})$ หรือไม่

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} : ab = 1 \right\}$$

วิธีทำ ถ้า $a = b = 1$ แล้ว $ab = 1(1) = 1$ ดังนั้น $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ เป็นสมาชิกใน H

ให้ $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}$ เป็นสมาชิกใน H นั่นคือ $ab = 1$ และ $xy = 1$ แล้ว

$$\begin{aligned} AB^{-1} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}^{-1} &= \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{xy} \begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ay & 0 \\ 0 & bx \end{bmatrix} \end{aligned}$$

จะได้ว่า $(ay)(bx) = (ab)(xy) = 1(1) = 1$ ดังนั้น $AB^{-1} \in H$
ดังนั้น $H \leq GL_2(\mathbb{R})$

7. จงตรวจสอบว่า H เป็นกรุปย่อยของ $GL_2(\mathbb{R})$ หรือไม่

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} : ab \geq 1 \right\}$$

วิธีทำ เลือก $a = b = 2$ แล้ว $ab = 4 \geq 1$ จะเห็นว่า $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ จะได้ว่า

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

จะเห็นว่า $(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} < 1$ ดังนั้น $A^{-1} \notin H$ สรุปได้ว่า H ไม่เป็นกรุปย่อยของ $\leq GL_2(\mathbb{R})$

8. ให้ H และ K เป็น กรุปย่อย (subgroup) ของกรุป G จงตรวจสอบว่า

$$H \cup K \quad \text{เป็น}\textbf{กรุปย่อย}\text{ของ} \quad G \quad \text{หรือไม่}$$

(ถ้าจริงจงพิสูจน์ ถ้าไม่จริงจงยกตัวอย่างค้าน)

วิธีทำ ไม่จริง พิจารณา $G = \mathbb{Z}_6$ เลือกกรุปย่อย $H = \langle \bar{2} \rangle = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ และ $K = \langle \bar{3} \rangle = \{\bar{0}, \bar{3}\}$ จะเห็นว่า

$$H \cup K = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$$

เนื่องจาก $\bar{2} + \bar{3} = \bar{5} \notin H \cup K$ นั่นคือ $H \cup K$ ไม่มีสมบัติปิด ดังนั้น $H \cup K$ ไม่เป็นกรุปย่อยของ $\mathbb{Z}_6$

9. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ เป็นสมาชิกใน $GL_2(\mathbb{R})$ จงเขียน $\langle A \rangle$ ในรูปแบบมีเงื่อนไข

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
A^2 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\
A^3 &= A^2 A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \\
A^4 &= A^2 A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 10 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \\
A^5 &= A^4 A = \begin{bmatrix} 11 & 10 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 22 \\ 11 & 10 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

จากการสังเกตรูปแบบของ A^n จะเห็นได้ว่าเขียนในรูปแบบทั่วไปได้ยาก ดังนั้น

$$\langle A \rangle = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n : n \in \mathbb{Z} \right\}$$

Quiz 3 : MAC3310 **พีชคณิตนามธรรม**

หัวข้อ สมสัณฐาน และริง **คะแนน** 10 คะแนน

เวลา สัปดาห์ที่ 11 ปีการศึกษา 1/2564

ผู้สอน ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ธนัชยศ จำปาหวาย
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. กำหนดให้ $\varphi : (\mathbb{C}^*, \cdot) \to (\mathbb{R}^+, \cdot)$ นิยามโดย

$$\varphi(x+yi) = \frac{1}{x^2+y^2}$$

จงตรวจสอบว่า φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน (homomorphism) หรือไม่

2. กำหนดให้ $\varphi : (\mathbb{C}^*, \cdot) \to (\mathbb{R}, +)$ นิยามโดย

$$\varphi(x+yi) = \ln(x^2+y^2)$$

จงตรวจสอบว่า φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน (homomorphism) หรือไม่

3. กำหนดให้ $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ นิยามโดย

$$\varphi(x) = (\overline{x^2}, \overline{x^3}) \qquad \text{เมื่อ } x \in \mathbb{Z}$$

จงพิสูจน์ว่า φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน (homomorphism)
และใช้ทฤษฎีบทฟังก์ชันสมสัณฐานบทที่หนึ่ง แสดงว่า $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$

4. จงหากรุปการเรียงสับเปลี่ยนที่สมสัณฐาน (isomorphic) กับ $\mathbb{Z}_8^\times$ และเป็นกรุปย่อย (subgroup) ของ S_4

5. จงหากรุปการเรียงสับเปลี่ยนที่สมสัณฐาน (isomorphic) กับ $\mathbb{Z}_{10}^\times$ และเป็นกรุปย่อย (subgroup) ของ S_4

6. ให้ $(a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2$ นิยามการดำเนินการ

$$(a,b) \oplus (c,d) = (a+c, b+d)$$
$$(a,b) \odot (c,d) = (ac-bd, ad+bc)$$

จงตรวจสอบว่า $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ มีสมบัติการแจกแจงหรือไม่

7. ให้ $(a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2$ นิยามการดำเนินการ

$$(a,b) \oplus (c,d) = (a+c, b+d)$$
$$(a,b) \odot (c,d) = (ac-2bd, ad+bc)$$

จงตรวจสอบว่า $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ มีสมบัติการแจกแจงหรือไม่

8. ให้ $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$ นิยามการดำเนินการ

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$(a, b) \odot (c, d) = (ac + 2bd, ad + bc)$$

จงตรวจสอบว่า $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ มีสมบัติการแจกแจงหรือไม่

เฉลย Quiz 3 : MAC3310 พีชคณิตนามธรรม

หัวข้อ สมสัณฐาน และริง **คะแนน** 10 คะแนน

เวลา สัปดาห์ที่ 11 ปีการศึกษา 1/2564

ผู้สอน ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ธนัชยศ จำปาหวาย
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. กำหนดให้ $\varphi : (\mathbb{C}^*, \cdot) \to (\mathbb{R}^+, \cdot)$ นิยามโดย

$$\varphi(x+yi) = \frac{1}{x^2+y^2}$$

จงตรวจสอบว่า φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน (homomorphism) หรือไม่

วิธีทำ ให้ $x+yi$ และ $a+bi$ เป็นสมาชิกใน $\mathbb{C}^*$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\varphi((x+yi)(a+bi)) &= \varphi((xa-yb)+(xb+ya)i) \\
&= \frac{1}{(xa-yb)^2+(xb+ya)^2} \\
&= \frac{1}{x^2a^2-2xayb+y^2b^2+x^2b^2+2xayb+y^2a^2} \\
&= \frac{1}{x^2a^2+y^2b^2+x^2b^2+y^2a^2} \\
&= \frac{1}{x^2(a^2+b^2)+y^2(a^2+b^2)} \\
&= \frac{1}{(x^2+y^2)(a^2+b^2)} \\
&= \frac{1}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{a^2+b^2} \\
&= \varphi(x+yi)\varphi(a+bi)
\end{aligned}$$

ดังนั้น φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน

2. กำหนดให้ $\varphi : (\mathbb{C}^*, \cdot) \to (\mathbb{R}, +)$ นิยามโดย

$$\varphi(x+yi) = \ln(x^2+y^2)$$

จงตรวจสอบว่า φ เป็นฟังก์ชันสมสัณฐาน (homomorphism) หรือไม่

วิธีทำ ให้ $x+yi$ และ $a+bi$ เป็นสมาชิกใน $\mathbb{C}^*$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\varphi((x+yi)(a+bi)) &= \varphi((xa-yb)+(xb+ya)i) \\
&= \ln((xa-yb)^2+(xb+ya)^2) \\
&= \ln(x^2a^2-2xayb+y^2b^2+x^2b^2+2xayb+y^2a^2) \\
&= \ln(x^2a^2+y^2b^2+x^2b^2+y^2a^2) \\
&= \ln(x^2+y^2)(a^2+b^2) \\
&= \ln(x^2+y^2)+\ln(a^2+b^2) \\
&= \varphi(x+yi)+\varphi(a+bi)
\end{aligned}$$

ดังนั้น φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน

3. กำหนดให้ $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ นิยามโดย

$$\varphi(x) = (\overline{x^2}, \overline{x^3}) \qquad \text{เมื่อ } x \in \mathbb{Z}$$

จงพิสูจน์ว่า φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน (homomorphism)
และใช้ทฤษฎีบทฟังก์ชันสมสัณฐานบทที่หนึ่ง แสดงว่า $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$

วิธีทำ ให้ $x, y \in \mathbb{Z}$ แล้ว

$$\begin{aligned}
\varphi(x+y) &= (\overline{(x+y)^2}, \overline{(x+y)^3}) \\
&= (\overline{x^2+2xy+y^2}, \overline{x^3+3x^2y+3xy^2+y^3}) \\
&= (\overline{x^2}+\overline{2xy}+\overline{y^2}, \overline{x^3}+\overline{3x^2y}+\overline{3xy^2}+\overline{y^3}) \\
&= (\overline{x^2}+\bar{0}+\overline{y^2}, \overline{x^3}+\bar{0}+\bar{0}+\overline{y^3}) \\
&= (\overline{x^2}+\overline{y^2}, \overline{x^3}+\overline{y^3}) \\
&= (\overline{x^2}, \overline{x^3}) + (\overline{y^2}, \overline{y^3}) \\
&= \varphi(x) + \varphi(y)
\end{aligned}$$

ดังนั้น φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน

$$\begin{aligned}
\text{Ker}(\varphi) &= \{x \in \mathbb{Z} : \varphi(x) = (\bar{0}, \bar{0})\} \\
&= \{x \in \mathbb{Z} : (\overline{x^2}, \overline{x^3}) = (\bar{0}, \bar{0})\} \\
&= \{x \in \mathbb{Z} : \overline{x^2} = \bar{0} \text{ และ } \overline{x^3} = \bar{0}\} \\
&= \{x \in \mathbb{Z} : 2 \mid x^2 \text{ และ } 3 \mid x^3\} \\
&= \{x \in \mathbb{Z} : 2 \mid x \text{ และ } 3 \mid x\} \\
&= \{x \in \mathbb{Z} : 6 \mid x\} \\
&= 6\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\varphi(0) = (\bar{0}, \bar{0})$, $\varphi(1) = (\bar{1}, \bar{1})$, $\varphi(2) = (\bar{4}, \bar{8}) = (\bar{0}, \bar{2})$, $\varphi(3) = (\bar{9}, \overline{27}) = (\bar{1}, \bar{0})$, $\varphi(4) = (\overline{16}, \overline{64}) = (\bar{0}, \bar{1})$ และ $\varphi(5) = (\overline{25}, \overline{125}) = (\bar{1}, \bar{2})$

$$\text{Ran}(\varphi) = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$$

โดยทฤษฎีบทฟังก์ชันสมสันฐานบทที่หนึ่ง จะได้ว่า $\mathbb{Z}/\text{Ker}(\varphi) \cong \text{Ran}(\varphi)$ นั่นคือ

$$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$$

4. จงหากรุปการเรียงสับเปลี่ยนที่สมสัณฐาน (isomorphic) กับ $\mathbb{Z}_8^\times$ และเป็นกรุปย่อย (subgroup) ของ S_4

วิธีทำ จะเห็นว่า $\mathbb{Z}_8^\times = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}\}$ สำหรับ $x \in \mathbb{Z}_8^\times$ จะได้ว่า

$$T_{\bar{1}}(x) = \bar{1} \cdot x, \qquad T_{\bar{3}}(x) = \bar{3} \cdot x, \qquad T_{\bar{5}}(x) = \bar{5} \cdot x \qquad \text{และ} \qquad T_{\bar{7}}(x) = \bar{7} \cdot x$$

ดังนั้น $K = \{T_{\bar{1}}, T_{\bar{3}}, T_{\bar{5}}, T_{\bar{7}}\}$ เป็นกรุปวิธีเรียงสับเปลี่ยน จะเห็นได้ชัดว่า

$$\begin{aligned}
K &= \left\{ \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{3} & \bar{5} & \bar{7} \\ \bar{1} & \bar{3} & \bar{5} & \bar{7} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{3} & \bar{5} & \bar{7} \\ \bar{3} & \bar{1} & \bar{7} & \bar{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{3} & \bar{5} & \bar{7} \\ \bar{5} & \bar{7} & \bar{1} & \bar{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{3} & \bar{5} & \bar{7} \\ \bar{7} & \bar{5} & \bar{3} & \bar{1} \end{pmatrix} \right\} \\
&\cong \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

ฉะนั้น $K \cong \{(1), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(3\ 2)\} = H$ ดังนั้น $\mathbb{Z}_8^\times \cong H$ ซึ่ง $H \leq S_4$

5. จงหากรุปการเรียงสับเปลี่ยนที่สมสัณฐาน (isomorphic) กับ $\mathbb{Z}_{10}^{\times}$ และเป็นกรุปย่อย (subgroup) ของ S_4

วิธีทำ จะเห็นว่า $\mathbb{Z}_{10}^{\times} = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{7}, \bar{9}\}$ สำหรับ $x \in \mathbb{Z}_{10}^{\times}$ จะได้ว่า

$$T_{\bar{1}}(x) = \bar{1} \cdot x, \qquad T_{\bar{3}}(x) = \bar{3} \cdot x, \qquad T_{\bar{7}}(x) = \bar{7} \cdot x \qquad \text{และ} \qquad T_{\bar{9}}(x) = \bar{9} \cdot x$$

ดังนั้น $K = \{T_{\bar{1}}, T_{\bar{3}}, T_{\bar{5}}, T_{\bar{7}}\}$ เป็นกรุปวิวิธีเรียงสับเปลี่ยน จะเห็นได้ชัดว่า

$$\begin{aligned} K &= \left\{ \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{3} & \bar{7} & \bar{9} \\ \bar{1} & \bar{3} & \bar{7} & \bar{9} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{3} & \bar{7} & \bar{9} \\ \bar{3} & \bar{9} & \bar{1} & \bar{7} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{3} & \bar{7} & \bar{9} \\ \bar{7} & \bar{1} & \bar{9} & \bar{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{3} & \bar{7} & \bar{9} \\ \bar{9} & \bar{7} & \bar{3} & \bar{1} \end{pmatrix} \right\} \\ &\cong \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

ฉะนั้น $K \cong \{(1), (1\ 2\ 4\ 3), (1\ 3\ 4\ 2), (1\ 4)(2\ 3)\} = H$ ดังนั้น $\mathbb{Z}_{10}^{\times} \cong H$ ซึ่ง $H \leq S_4$

6. ให้ $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$ นิยามการดำเนินการ

$$\begin{aligned} (a, b) \oplus (c, d) &= (a + c, b + d) \\ (a, b) \odot (c, d) &= (ac - bd, ad + bc) \end{aligned}$$

จงตรวจสอบว่า $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ มีสมบัติการแจกแจงหรือไม่

วิธีทำ ให้ $(a, b), (c, d), (x, y) \in \mathbb{R}^2$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} (a, b) \odot [(c, d) \oplus (x, y)] &= (a, b) \odot (c + x, d + y) \\ &= (a(c + x) - b(d + y), a(d + y) + b(c + x)) \\ &= (ac + ax - bd - by, ad + ay + bc + bx) \\ &= ((ac - bd) + (ax - by), (ad + bc) + (ay + bx)) \\ &= (ac - bd, ad + bc) \oplus (ax - by, ay + bx) \\ &= [(a, b) \odot (c, d)] \oplus [(a, b) \odot (x, y)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [(c, d) \oplus (x, y)] \odot (a, b) &= (c + x, d + y) \odot (a, b) \\ &= ((c + x)a - (d + y)b, (c + x)b + (d + y)a) \\ &= (ca + xa - db - yb, cb + xb + da + ya) \\ &= ((ca - db) + (xa - yb), (cb + da) + (xb + ya)) \\ &= (ca - db, cb + da) \oplus (xa - yb, xb + ya) \\ &= [(c, d) \odot (a, b)] \oplus [(x, y) \odot (a, b)] \end{aligned}$$

ดังนั้น $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ มีสมบัติการแจกแจง

7. ให้ $(a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2$ นิยามการดำเนินการ

$$\begin{aligned}(a,b) \oplus (c,d) &= (a+c, b+d)\\ (a,b) \odot (c,d) &= (ac-2bd, ad+bc)\end{aligned}$$

จงตรวจสอบว่า $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ มีสมบัติการแจกแจงหรือไม่

วิธีทำ ให้ $(a,b),(c,d),(x,y) \in \mathbb{R}^2$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(a,b) \odot [(c,d) \oplus (x,y)] &= (a,b) \odot (c+x, d+y)\\ &= (a(c+x)-2b(d+y), a(d+y)+b(c+x))\\ &= (ac+ax-2bd-2by, ad+ay+bc+bx)\\ &= ((ac-2bd)+(ax-2by), (ad+bc)+(ay+bx))\\ &= (ac-2bd, ad+bc) \oplus (ax-2by, ay+bx)\\ &= [(a,b) \odot (c,d)] \oplus [(a,b) \odot (x,y)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[(c,d) \oplus (x,y)] \odot (a,b) &= (c+x, d+y) \odot (a,b)\\ &= ((c+x)a-2(d+y)b, (c+x)b+(d+y)a)\\ &= (ca+xa-2db-2yb, cb+xb+da+ya)\\ &= ((ca-2db)+(xa-2yb), (cb+da)+(xb+ya))\\ &= (ca-2db, cb+da) \oplus (xa-2yb, xb+ya)\\ &= [(c,d) \odot (a,b)] \oplus [(x,y) \odot (a,b)]\end{aligned}$$

ดังนั้น $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ มีสมบัติการแจกแจง

8. ให้ $(a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2$ นิยามการดำเนินการ

$$\begin{aligned}(a,b) \oplus (c,d) &= (a+c, b+d) \\ (a,b) \odot (c,d) &= (ac+2bd, ad+bc)\end{aligned}$$

จงตรวจสอบว่า $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ มีสมบัติการแจกแจงหรือไม่

วิธีทำ ให้ $(a,b),(c,d),(x,y) \in \mathbb{R}^2$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(a,b) \odot [(c,d) \oplus (x,y)] &= (a,b) \odot (c+x, d+y) \\ &= (a(c+x)+2b(d+y), a(d+y)+b(c+x)) \\ &= (ac+ax+2bd+2by, ad+ay+bc+bx) \\ &= ((ac+2bd)+(ax+2by), (ad+bc)+(ay+bx)) \\ &= (ac+2bd, ad+bc) \oplus (ax+2by, ay+bx) \\ &= [(a,b) \odot (c,d)] \oplus [(a,b) \odot (x,y)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[(c,d) \oplus (x,y)] \odot (a,b) &= (c+x, d+y) \odot (a,b) \\ &= ((c+x)a+2(d+y)b, (c+x)b+(d+y)a) \\ &= (ca+xa+2db+2yb, cb+xb+da+ya) \\ &= ((ca+2db)+(xa+2yb), (cb+da)+(xb+ya)) \\ &= (ca+2db, cb+da) \oplus (xa+2yb, xb+ya) \\ &= [(c,d) \odot (a,b)] \oplus [(x,y) \odot (a,b)]\end{aligned}$$

ดังนั้น $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ มีสมบัติการแจกแจง

Quiz 4 : MAC3310 **พีชคณิตนามธรรม**

หัวข้อ ริงย่อย ไอดีล สมสัณฐานของริง และโดเมนเชิงจำนวนเต็ม **คะแนน** 10 คะแนน

เวลา สัปดาห์ที่ 13 ปีการศึกษา 1/2564

ผู้สอน ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ธนัชยศ จำปาหวาย
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. ให้ R, S เป็นริง และ $\varphi : R \to S$ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของริง จงพิสูจน์ว่า

   Ker(φ) เป็นไอดีลทางซ้าย

2. ให้ R, S เป็นริง และ $\varphi : R \to S$ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของริง จงพิสูจน์ว่า

   Ker(φ) เป็นไอดีลทางขวา

3. ให้ R, S เป็นริง และ $\varphi : R \to S$ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของริง จงพิสูจน์ว่า

   ถ้า 1_R เป็นหนึ่งของ R แล้ว $\varphi(1_R)$ เป็นหนึ่งของ Ran(φ)

4. จงตรวจสอบว่า
$$I = \left\{ \begin{bmatrix} x & a & b \\ 0 & x & c \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$
   เป็น **ริงย่อย** หรือ **ไอดีล** ของ $M_{33}(\mathbb{R})$ หรือไม่

5. จงตรวจสอบว่า
$$I = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ a & x & 0 \\ b & c & x \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$
   เป็น **ริงย่อย** หรือ **ไอดีล** ของ $M_{33}(\mathbb{R})$ หรือไม่

6. ให้ $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{10}$ นิยามโดย
$$\varphi(x) = \overline{5x^2}$$
   จงตรวจสอบว่า φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสันฐานของริงหรือไม่ พร้อมหา Ker(φ)

7. ให้ $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{14}$ นิยามโดย
$$\varphi(x) = \overline{7x^2}$$
   จงตรวจสอบว่า φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสันฐานของริงหรือไม่ พร้อมหา Ker(φ)

8. ให้ $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{18}$ นิยามโดย
$$\varphi(x) = \overline{9x^2}$$
   จงตรวจสอบว่า φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสันฐานของริงหรือไม่ พร้อมหา Ker(φ)

9. ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ $\mathbb{Z}_{p^2}$ มี ตัวหารศูนย์ (zero divisor) ทั้งหมด 10 ตัว

จงหา p และตัวหารศูนย์ทั้ง 10 ตัวนั้น

10. ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ $\mathbb{Z}_{p^2}$ มี ตัวหารศูนย์ (zero divisor) ทั้งหมด 12 ตัว

จงหา p และตัวหารศูนย์ทั้ง 12 ตัวนั้น

เฉลย Quiz 4 : MAC3310 พีชคณิตนามธรรม

หัวข้อ ริงย่อย ไอดีล สมสัณฐานของริง และโดเมนเชิงจำนวนเต็ม **คะแนน** 10 คะแนน

เวลา สัปดาห์ที่ 13 ปีการศึกษา 1/2564

ผู้สอน ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ธนัชยศ จำปาหวาย
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. ให้ R, S เป็นริง และ $\varphi : R \to S$ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของริง จงพิสูจน์ว่า

$$\text{Ker}(\varphi) \text{ เป็นไอดีลทางซ้าย}$$

บทพิสูจน์. จะแสดงว่า $R\text{Ker}(\varphi) \subseteq \text{Ker}(\varphi)$
ให้ $rx \in R\text{Ker}(\varphi)$ เมื่อ $r \in R$ และ $x \in \text{Ker}(\varphi)$ จะได้ว่า $\varphi(x) = 0_S$ และ

$$\varphi(rx) = \varphi(r)\varphi(x) = \varphi(r)0_S = 0_S$$

ดังนั้น $rx \in \text{Ker}(\varphi)$
สรุปได้ว่า $\text{Ker}(\varphi)$ เป็นไอดีลทางซ้ายของ R □

2. ให้ R, S เป็นริง และ $\varphi : R \to S$ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของริง จงพิสูจน์ว่า

$$\text{Ker}(\varphi) \text{ เป็นไอดีลทางขวา}$$

บทพิสูจน์. จะแสดงว่า $\text{Ker}(\varphi)R \subseteq \text{Ker}(\varphi)$
ให้ $xr \in \text{Ker}(\varphi)R$ เมื่อ $r \in R$ และ $x \in \text{Ker}(\varphi)$ จะได้ว่า $\varphi(x) = 0_S$ และ

$$\varphi(xr) = \varphi(x)\varphi(r) = 0_S\varphi(r) = 0_S$$

ดังนั้น $xr \in \text{Ker}(\varphi)$
สรุปได้ว่า $\text{Ker}(\varphi)$ เป็นไอดีลทางขวาของ R □

3. ให้ R, S เป็นริง และ $\varphi : R \to S$ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของริง จงพิสูจน์ว่า

$$\text{ถ้า } 1_R \text{ เป็นหนึ่งของ } R \text{ แล้ว } \varphi(1_R) \text{ เป็นหนึ่งของ Ran}(\varphi)$$

บทพิสูจน์. ให้ R, S เป็นริง และ $\varphi : R \to S$ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของริง
สมมติว่า 1_R เป็นหนึ่งของ R ให้ $b \in \text{Ran}(\varphi)$ จะได้ว่ามี $a \in R$ ซึ่ง $\varphi(a) = b$

$$b\varphi(1_R) = \varphi(a)\varphi(1_R) = \varphi(a1_R) = \varphi(a) = b$$
$$\varphi(1_R)b = \varphi(1_R)\varphi(a) = \varphi(1_Ra) = \varphi(a) = b$$

ดังนั้น $\varphi(1_R)$ เป็นหนึ่งของ $\text{Ran}(\varphi)$ □

4. จงตรวจสอบว่า

$$I = \left\{ \begin{bmatrix} x & a & b \\ 0 & x & c \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

เป็น **ริงย่อย** หรือ **ไอดีล** ของ $M_{33}(\mathbb{R})$ หรือไม่

วิธีทำ ให้ $\begin{bmatrix} x & a & b \\ 0 & x & c \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} y & s & t \\ 0 & y & w \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix}$ เป็นสมาชิกใน I จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} x & a & b \\ 0 & x & c \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y & s & t \\ 0 & y & w \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-y & a-s & b-t \\ 0 & x-y & c-w \\ 0 & 0 & x-y \end{bmatrix} \in I$$

$$\begin{bmatrix} x & a & b \\ 0 & x & c \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y & s & t \\ 0 & y & w \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xy & xs+ay & xt+aw+by \\ 0 & xy & xw+cy \\ 0 & 0 & xy \end{bmatrix} \in I$$

ดังนั้น I เป็นริงย่อยของ $M_{33}(\mathbb{R})$
จะเห็นว่า

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \notin I$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \notin I$$

นั่นคือ I ไม่เป็นไอดีลขวา และไอดีลซ้าย $M_{33}(\mathbb{R})$ ดังนั้น I ไม่เป็นไอดีลของ $M_{33}(\mathbb{R})$

5. จงตรวจสอบว่า

$$I = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ a & x & 0 \\ b & c & x \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

เป็น **ริงย่อย** หรือ **ไอดีล** ของ $M_{33}(\mathbb{R})$ หรือไม่

วิธีทำ ให้ $\begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ a & x & 0 \\ b & c & x \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} y & 0 & 0 \\ s & y & 0 \\ t & w & y \end{bmatrix}$ เป็นสมาชิกใน I จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ a & x & 0 \\ b & c & x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y & 0 & 0 \\ s & y & 0 \\ t & w & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-y & 0 & 0 \\ a-s & x-y & 0 \\ b-t & c-w & x-y \end{bmatrix} \in I$$

$$\begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ a & x & 0 \\ b & c & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y & 0 & 0 \\ s & y & 0 \\ t & w & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xy & 0 & 0 \\ ay+xs & xy & 0 \\ by+cs+xt & cy+xw & xy \end{bmatrix} \in I$$

ดังนั้น I เป็นริงย่อยของ $M_{33}(\mathbb{R})$
จะเห็นว่า

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \notin I$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \notin I$$

นั่นคือ I ไม่เป็นไอดีลขวา และไอดีลซ้าย $M_{33}(\mathbb{R})$ ดังนั้น I ไม่เป็นไอดีลของ $M_{33}(\mathbb{R})$

6. ให้ $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{10}$ นิยามโดย

$$\varphi(x) = \overline{5x^2}$$

จงตรวจสอบว่า φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของริงหรือไม่ พร้อมหา Ker(φ)

วิธีทำ ให้ $x, y \in \mathbb{Z}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\varphi(x+y) &= \overline{5(x+y)^2} = \overline{5(x^2+2xy+y^2)} = \overline{5x^2+10xy+5y^2} \\
&= \overline{5x^2} + \overline{10xy} + \overline{5y^2} = \overline{5x^2} + \overline{0} + \overline{5y^2} = \varphi(x) + \varphi(y) \\
\varphi(xy) &= \overline{5(xy)^2} = \overline{25x^2y^2} = \overline{5x^2} \cdot \overline{5y^2} = \varphi(x)\varphi(y) \qquad (\because \overline{5} = \overline{25})
\end{aligned}$$

ดังนั้น φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของริง

$$\begin{aligned}
\text{Ker}(\varphi) &= \{x \in \mathbb{Z} : \varphi(x) = \overline{0}\} \\
&= \{x \in \mathbb{Z} : \overline{5x^2} = \overline{0}\} \\
&= \{x \in \mathbb{Z} : 10 \mid (5x^2)\} \\
&= \{x \in \mathbb{Z} : 2 \mid x^2\} \\
&= \{x \in \mathbb{Z} : 2 \mid x\} \\
&= 2\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

7. ให้ $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{14}$ นิยามโดย

$$\varphi(x) = \overline{7x^2}$$

จงตรวจสอบว่า φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของริงหรือไม่ พร้อมหา Ker(φ)

วิธีทำ ให้ $x, y \in \mathbb{Z}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\varphi(x+y) &= \overline{5(x+y)^2} = \overline{7(x^2+2xy+y^2)} = \overline{7x^2+14xy+7y^2} \\
&= \overline{7x^2} + \overline{14xy} + \overline{7y^2} = \overline{7x^2} + \overline{0} + \overline{7y^2} = \varphi(x) + \varphi(y) \\
\varphi(xy) &= \overline{7(xy)^2} = \overline{49x^2y^2} = \overline{7x^2} \cdot \overline{7y^2} = \varphi(x)\varphi(y) \qquad (\because \overline{7} = \overline{49})
\end{aligned}$$

ดังนั้น φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของริง

$$\begin{aligned}
\text{Ker}(\varphi) &= \{x \in \mathbb{Z} : \varphi(x) = \overline{0}\} \\
&= \{x \in \mathbb{Z} : \overline{7x^2} = \overline{0}\} \\
&= \{x \in \mathbb{Z} : 14 \mid (7x^2)\} \\
&= \{x \in \mathbb{Z} : 2 \mid x^2\} \\
&= \{x \in \mathbb{Z} : 2 \mid x\} \\
&= 2\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

8. ให้ $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{18}$ นิยามโดย

$$\varphi(x) = \overline{9x^2}$$

จงตรวจสอบว่า φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐานของริงหรือไม่ พร้อมหา Ker(φ)

วิธีทำ ให้ $x, y \in \mathbb{Z}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\varphi(x+y) &= \overline{9(x+y)^2} = \overline{9(x^2+2xy+y^2)} = \overline{9x^2+18xy+9y^2} \\
&= \overline{9x^2} + \overline{18xy} + \overline{9y^2} = \overline{9x^2} + \overline{0} + \overline{9y^2} = \varphi(x) + \varphi(y) \\
\varphi(xy) &= \overline{9(xy)^2} = \overline{81x^2y^2} = \overline{9x^2} \cdot \overline{9y^2} = \varphi(x)\varphi(y) \qquad (\because \overline{9} = \overline{81})
\end{aligned}$$

ดังนั้น φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสันฐานของริง

$$\begin{aligned}\text{Ker}(\varphi) &= \{x \in \mathbb{Z} : \varphi(x) = \bar{0}\\ &= \{x \in \mathbb{Z} : \overline{9x^2} = \bar{0}\}\\ &= \{x \in \mathbb{Z} : 18 \mid (9x^2)\}\\ &= \{x \in \mathbb{Z} : 2 \mid x^2\}\\ &= \{x \in \mathbb{Z} : 2 \mid x\}\\ &= 2\mathbb{Z}\end{aligned}$$

9. ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ $\mathbb{Z}_{p^2}$ มีตัวหารศูนย์ทั้งหมด 10 ตัว

จงหา p และตัวหารศูนย์ทั้ง 10 ตัวนั้น

วิธีทำ จากจำนวนตัวหารศูนย์ทั้งหมดเท่ากับ $(p^2-1)-\varphi(p^2)=10$

$$\begin{aligned}(p^2-1)-(p^2-p) &= 10\\ p-1 &= 10\\ p &= 11 \quad \#\end{aligned}$$

ให้ a ตัวหารศูนย์ของ $\mathbb{Z}_{p^2}=\mathbb{Z}_{11^2}=\mathbb{Z}_{121}$ เมื่อ $\gcd(a,121)\neq 1$ ดังนั้น a ทั้งหมดที่เป็นไปได้คือ

$\overline{11}, \overline{22}, \overline{33}, \overline{44}, \overline{55}, \overline{66}, \overline{77}, \overline{88}, \overline{99}$ และ $\overline{110}$

10. ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ $\mathbb{Z}_{p^2}$ มีตัวหารศูนย์ทั้งหมด 12 ตัว

จงหา p และตัวหารศูนย์ทั้ง 12 ตัวนั้น

วิธีทำ จากจำนวนตัวหารศูนย์ทั้งหมดเท่ากับ $(p^2-1)-\varphi(p^2)=12$

$$\begin{aligned}(p^2-1)-(p^2-p) &= 12\\ p-1 &= 12\\ p &= 13 \quad \#\end{aligned}$$

ให้ a ตัวหารศูนย์ของ $\mathbb{Z}_{p^2}=\mathbb{Z}_{13^2}=\mathbb{Z}_{169}$ เมื่อ $\gcd(a,169)\neq 1$ ดังนั้น a ทั้งหมดที่เป็นไปได้คือ

$\overline{13}, \overline{26}, \overline{39}, \overline{52}, \overline{65}, \overline{78}, \overline{91}, \overline{104}, \overline{117}, \overline{130}, \overline{143}$ และ $\overline{156}$