Quiz 1 : MAC2302 ทฤษฎีจำนวน

หัวข้อ อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ และขั้นตอนวิธีการหาร **คะแนน** 10 คะแนน **ข้อ** ....

เวลา สัปดาห์ที่ 3 ปีการศึกษา 1/2563

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

ชื่อ–สกุล...**รหัสนักศึกษา**.................................... **หมู่เรียน** .... **กลุ่ม** ....

Quiz 2 : MAC2302 ทฤษฎีจำนวน

หัวข้อ สมบัติการหารลงตัว **คะแนน** 10 คะแนน **ข้อ** ....
เวลา สัปดาห์ที่ 5 ปีการศึกษา 1/2563
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
ชื่อ-สกุล..**รหัสนักศึกษา**.................................... **หมู่เรียน** .... **กลุ่ม** ....

Quiz 1 : MAC2302 ทฤษฎีจำนวน

หัวข้อ อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ และขั้นตอนวิธีการหาร **กลุ่ม** S1A

เวลา สัปดาห์ที่ 3 ปีการศึกษา 1/2563 **คะแนน** 10 คะแนน

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \quad \text{ทุก ๆ จำนวนนับ } n$$

2. จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ $3^n > n^2$ ทุก ๆ จำนวนนับ n ซึ่ง $n \geq 2$

3. ให้ n เป็นจำนวนเต็ม จงใช้ขั้นตอนวิธีการหารแสดงว่า $3 \mid n(n+1)(n+2)$

4. จงหา**หลักหน่วย**ของ 2563^{2020}

5. ให้ $a \in \mathbb{Z}$ จงพิสูจน์ว่า

$$\text{ถ้า} \quad 3 \mid (2a) \quad \text{แล้ว} \quad 3 \mid a$$

   โดยใช้วิธีขัดแย้ง จากนั้นใช้ขั้นตอนวิธีการหาร

เฉลย Quiz 1 : MAC2302 ทฤษฎีจำนวน (S1A)

1. จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3} \qquad \text{ทุก ๆ จำนวนนับ } n$$

***บทพิสูจน์*.** ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

ขั้นฐาน เนื่องจาก $1\cdot 2=\dfrac{1(2)(3)}{3}$ ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

ขั้นอุปนัย ให้ $k\in\mathbb{N}$ สมมติว่า $P(k)$ เป็นจริงนั่นคือ

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+k(k+1)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}[1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+k(k+1)]+(k+1)(k+2)&=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2)\\&=(k+1)(k+2)\left[\frac{k}{3}+1\right]\\&=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}\end{aligned}$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปได้ว่า $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$ ทุก ๆ จำนวนนับ n $\square$

2. จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ $3^n>n^2$ ทุก ๆ จำนวนนับ n ซึ่ง $n\geq 2$

***บทพิสูจน์*.** ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $3^n>n^2$

ขั้นฐาน เนื่องจาก $3^2=9>4=2^2$ ดังนั้น $P(2)$ เป็นจริง

ขั้นอุปนัย ให้ $k\in\mathbb{N}$ ซึ่ง $k\geq 2$ สมมติว่า $P(k)$ เป็นจริงนั่นคือ $3^k>k^2$ จะได้ว่า

$$3^{k+1}=3\cdot 3^k>3k^2=k^2+k^2+k^2$$

เนื่องจาก $k\geq 2$ แล้ว $k^2\geq 2k$ นั่นคือ $k^2\geq 2>1$ จะได้ว่า

$$3^{k+1}>k^2+2k+1=(k+1)^2$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปได้ว่า $3^n>n^2$ ทุก ๆ จำนวนนับ n ซึ่ง $n\geq 2$ $\square$

3. ให้ n เป็นจำนวนเต็ม จงใช้ขั้นตอนวิธีการหารแสดงว่า $3\mid n(n+1)(n+2)$

***บทพิสูจน์*.** ให้ n เป็นจำนวนเต็ม โดยขั้นตอนวิธีการหารจะได้ว่ามี $q,r\in\mathbb{Z}$ ซึ่ง $n=3q+r$ เมื่อ $0\leq r<3$

กรณี $n=3q$ จะได้ว่า

$$n(n+1)(n+2)=3q(3q+1)(3q+2)$$

ดังนั้น $3 \mid n(n+1)(n+2)$
กรณี $n = 3q+1$ จะได้ว่า

$$n(n+1)(n+2) = (3q+1)(3q+2)(3q+3) = 3(3q+1)(3q+2)(q+1)$$

ดังนั้น $3 \mid n(n+1)(n+2)$
กรณี $n = 3q+2$ จะได้ว่า

$$n(n+1)(n+2) = (3q+2)(3q+3)(3q+2) = 3(3q+2)(q+1)(3q+2)$$

ดังนั้น $3 \mid n(n+1)(n+2)$
สรุปได้ว่า $3 \mid n(n+1)(n+2)$ ทุก ๆ จำนวนเต็ม n □

4. จงหา**หลักหน่วย**ของ 2563^{2020}

วิธีทำ เนื่องจาก 10 หาร 2563 เศษเหลือเท่ากับ 3 ดังนั้น
10 หาร 2563^{2020} เศษเหลือเท่ากับ 10 หาร 3^{2020}
10 หาร $3^4 = 81$ เศษเหลือเท่ากับ 1
10 หาร $3^{2020} = (3^4)^{505}$ เศษเหลือเท่ากับ $1^{5050} = 1$
ดังนั้น**หลักหน่วย**ของ 2563^{2020} คือ 1

5. ให้ $a \in \mathbb{Z}$ จงพิสูจน์ว่า

$$\text{ถ้า} \quad 3 \mid (2a) \quad \text{แล้ว} \quad 3 \mid a$$

โดยใช้วิธีขัดแย้ง จากนั้นใช้ขั้นตอนวิธีการหาร

บทพิสูจน์. ให้ $a \in \mathbb{Z}$ สมมติว่า $3 \mid (2a)$ และ $3 \nmid a$ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม c ซึ่ง $2a = 3c$
โดยขั้นตอนวิธีการหารจะได้ว่ามี $q, r \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $a = 3q + r$ เมื่อ $0 < r < 3$
ถ้า $a = 3q+1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 3c = 2a = 2(3q+1) &= 6q+2 \\ 3c - 6q &= 2 \\ 3(c-2q) &= 2 \end{aligned}$$

ดังนั้น $3 \mid 2$ เป็นไปไม่ได้
ถ้า $a = 3q+2$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 3c = 2a = 2(3q+2) &= 6q+4 \\ 3c - 6q &= 4 \\ 3(c-2q) &= 4 \end{aligned}$$

ดังนั้น $3 \mid 4$ เป็นไปไม่ได้
สรุปได้ว่า ถ้า $3 \mid (2a)$ แล้ว $3 \mid a$ □

Quiz 1 : MAC2302 ทฤษฎีจำนวน

หัวข้อ อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ และขั้นตอนวิธีการหาร **กลุ่ม** S2A
เวลา สัปดาห์ที่ 3 ปีการศึกษา 1/2563 **คะแนน** 10 คะแนน
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

$$1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \frac{n(3n-1)}{2} \quad \text{ทุก ๆ จำนวนนับ } n$$

2. จงหาจำนวนนับ n เริ่มต้นที่ทำให้ข้อความนี้เป็นจริง $n! > 2^n$ พร้อมพิสูจน์โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์
3. ให้ n เป็นจำนวนเต็ม จงใช้ขั้นตอนวิธีการหารแสดงว่า $4 \mid (n^2 - 1)(n^2 + 2n)$
4. จงหา**หลักหน่วย**ของ 2527^{1984}
5. ให้ $a \in \mathbb{Z}$ ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไข

$$5 \text{ หาร } a + b \text{ เศษเหลือเท่ากับ } 1 \quad \text{และ} \quad 5 \text{ หาร } a - b \text{ เศษเหลือเท่ากับ } 2$$

จงแสดงว่า $5 \mid 2(a^2 + b^2)$

เฉลย Quiz 1 : MAC2302 ทฤษฎีจำนวน (S2A)

1. จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

$$1+4+7+\cdots+(3n-2)=\frac{n(3n-1)}{2} \qquad \text{ทุก ๆ จำนวนนับ } n$$

บทพิสูจน์. ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $1+4+7+\cdots+(3n-2)=\dfrac{n(3n-1)}{2}$

ขั้นฐาน เนื่องจาก $1=\dfrac{1(2)}{2}=\dfrac{1(3\cdot 1-1)}{2}$ ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

ขั้นอุปนัย ให้ $k\in\mathbb{N}$ สมมติว่า $P(k)$ เป็นจริงนั่นคือ

$$1+4+7+\cdots+(3k-2)=\frac{k(3k-1)}{2}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
[1+4+7+\cdots+(3k-2)]+3(k+1)-2 &= \frac{k(3k-1)}{2}+3(k+1)-2\\
&= \frac{k(3k-1)}{2}+3k+1\\
&= \frac{3k^2-k+2(3k+1)}{2}\\
&= \frac{3k^2+5k+2}{2}\\
&= \frac{(k+1)(3k+2)}{2}\\
&= \frac{(k+1)(3(k+1)-1)}{2}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปได้ว่า $1+4+7+\cdots+(3n-2)=\dfrac{n(3n-1)}{2}$ ทุก ๆ จำนวนนับ n □

2. จงหาจำนวนนับ n เริ่มต้นที่ทำให้ข้อความนี้เป็นจริง $n!>2^n$ พร้อมพิสูจน์โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

วิธีทำ จะเห็นว่า

$$\begin{array}{llll}
1!=1>2=2^1 & F & \qquad 2!=2>4=2^2 & F\\
3!=6>8=2^3 & F & \qquad 4!=24>16=2^4 & T
\end{array}$$

ดังนั้น $n!>2^n$ ทุก ๆ จำนวนนับ n เมื่อ $n\geq 4$

บทพิสูจน์. ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $n!>2^n$

ขั้นฐาน เนื่องจาก $4!=24>16=2^4$ ดังนั้น $P(4)$ เป็นจริง

ขั้นอุปนัย ให้ $k\in\mathbb{N}$ ซึ่ง $k\geq 4$ สมมติว่า $P(k)$ เป็นจริงนั่นคือ $k!>2^k$ จะได้ว่า $(k+1)k!>(k+1)2^k$ เนื่องจาก $k\geq 4$ ดังนั้น $k+1\geq 5>2$ จะได้ว่า

$$(k+1)!=(k+1)k!>(k+1)2^k>2\cdot 2^k=2^{k+1}$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปได้ว่า $n!>2^n$ ทุก ๆ จำนวนนับ n เมื่อ $n\geq 4$ □

3. ให้ n เป็นจำนวนเต็ม จงใช้ขั้นตอนวิธีการหารแสดงว่า $\quad 4 \mid (n^2-1)(n^2+2n)$

บทพิสูจน์. ให้ n เป็นจำนวนเต็ม โดยขั้นตอนวิธีการหารจะได้ว่ามี $q, r \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $n = 4q + r$ เมื่อ $0 \leq r < 4$
กรณี $n = 4q$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(n^2-1)(n^2+2n) &= ((4q)^2-1)((4q)^2+2(4q)) = (16q^2-1)(16q^2+8q) \\ &= 4(16q^2-1)(4q^2+2q)\end{aligned}$$

ดังนั้น $4 \mid (n^2-1)(n^2+2n)$
กรณี $n = 4q+1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(n^2-1)(n^2+2n) &= ((4q+1)^2-1)((4q+1)^2+2(4q+1)) \\ &= (16q^2+8q+1-1)((4q+1)^2+2(4q+1)) \\ &= (16q^2+8q)((4q+1)^2+2(4q+1)) \\ &= 4(4q^2+2q)((4q+1)^2+2(4q+1))\end{aligned}$$

ดังนั้น $4 \mid (n^2-1)(n^2+2n)$
กรณี $n = 4q+2$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(n^2-1)(n^2+2n) &= ((4q+2)^2-1)((4q+2)^2+2(4q+2)) \\ &= ((4q+2)^2-1)((16q^2+16q+4)+8q+4)) \\ &= ((4q+2)^2-1)(16q^2+24q+8)) \\ &= 4((4q+2)^2-1)(4q^2+6q+2))\end{aligned}$$

ดังนั้น $4 \mid (n^2-1)(n^2+2n)$
กรณี $n = 4q+3$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(n^2-1)(n^2+2n) &= ((4q+3)^2-1)((4q+3)^2+2(4q+3)) \\ &= (16q^2+24q+9-1)((4q+3)^2+2(4q+3)) \\ &= (16q^2+24q+8)((4q+3)^2+2(4q+3)) \\ &= 4(4q^2+6q+2)((4q+3)^2+2(4q+3))\end{aligned}$$

ดังนั้น $4 \mid (n^2-1)(n^2+2n)$
สรุปได้ว่า $4 \mid (n^2-1)(n^2+2n)$ ทุก ๆ จำนวนเต็ม n $\square$

4. จงหา**หลักหน่วย**ของ $\quad 2527^{1984}$

วิธีทำ เนื่องจาก 10 หาร 2527 เศษเหลือเท่ากับ 7 ดังนั้น
10 หาร 2527^{1984} เศษเหลือเท่ากับ 10 หาร 7^{1984}
10 หาร $7^4 = 2401$ เศษเหลือเท่ากับ 1
10 หาร $7^{1984} = (7^4)^{496}$ เศษเหลือเท่ากับ $1^{496} = 1$
ดังนั้น**หลักหน่วย**ของ $\quad 2527^{1984}$ คือ 1

5. ให้ $a, b \in \mathbb{Z}$ ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไข

5 หาร $a+b$ เศษเหลือเท่ากับ 1 และ 5 หาร $a-b$ เศษเหลือเท่ากับ 2

จงแสดงว่า $5 \mid 2(a^2+b^2)$
วิธีทำ จะได้ว่า

5 หาร $(a+b)^2$ เศษเหลือเท่ากับ $1^2 = 1$ และ 5 หาร $(a-b)^2$ เศษเหลือเท่ากับ $2^2 = 4$

ดังนั้น 5 หาร $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$ เศษเหลือเท่ากับ $1+4=5$ หรือเศษเหลือเท่ากับ 0
สรุปได้ว่า $5 \mid 2(a^2+b^2)$

Quiz 1 : MAC2302 ทฤษฎีจำนวน

หัวข้อ อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ และขั้นตอนวิธีการหาร **กลุ่ม** S1B

เวลา สัปดาห์ที่ 3 ปีการศึกษา 1/2563 **คะแนน** 10 คะแนน

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1 \quad \text{ทุก ๆ จำนวนนับ } n$$

2. จงหาจำนวนนับ n เริ่มต้นที่ทำให้ข้อความนี้เป็นจริง $n! > 3^n$ พร้อมพิสูจน์โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

3. ให้ n เป็นจำนวนเต็ม จงใช้ขั้นตอนวิธีการหารแสดงว่า $3 \mid n(n+1)(2n+1)$

4. จงหา**หลักหน่วย**ของ 2544^{2001}

5. ให้ $a \in \mathbb{Z}$ จงพิสูจน์ว่า

$$\text{ถ้า} \quad 2 \mid (3a) \quad \text{แล้ว} \quad 2 \mid a$$

โดยใช้วิธีขัดแย้ง จากนั้นใช้ขั้นตอนวิธีการหาร

เฉลย Quiz 1 : MAC2302 ทฤษฎีจำนวน (S1B)

1. จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1 \qquad \text{ทุก ๆ จำนวนนับ } n$$

บทพิสูจน์. ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$

ขั้นฐาน เนื่องจาก $1 \cdot 1! = 1 = 2 - 1 = 2! - 1 = (1+1)! - 1$ ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

ขั้นอุปนัย ให้ $k \in \mathbb{N}$ สมมติว่า $P(k)$ เป็นจริงนั่นคือ

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + k \cdot k! = (k+1)! - 1$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}[1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + k \cdot k!] + (k+1) \cdot (k+1)! &= (k+1)! - 1 + (k+1) \cdot (k+1)! \\ &= [1 + (k+1)](k+1)! - 1 \\ &= (k+2)(k+1)! - 1 \\ &= (k+2)! - 1\end{aligned}$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปได้ว่า $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$ ทุก ๆ จำนวนนับ n □

2. จงหาจำนวนนับ n เริ่มต้นที่ทำให้ข้อความนี้เป็นจริง $n! > 3^n$ พร้อมพิสูจน์โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

วิธีทำ จะเห็นว่า

$$\begin{array}{ll} 1! = 1 > 3 = 3^1 \quad F & 2! = 2 > 9 = 3^2 \quad F \\ 3! = 6 > 27 = 3^3 \quad F & 4! = 24 > 81 = 3^4 \quad F \\ 5! = 120 > 243 = 3^5 \quad F & 6! = 720 > 729 = 3^6 \quad F \\ 7! = 5040 > 2187 = 3^7 \quad T & \end{array}$$

ดังนั้น $n! > 3^n$ ทุก ๆ จำนวนนับ n เมื่อ $n \geq 7$

บทพิสูจน์. ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $n! > 3^n$

ขั้นฐาน เนื่องจาก $7! = 5040 > 2187 = 3^7$ ดังนั้น $P(7)$ เป็นจริง

ขั้นอุปนัย ให้ $k \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $k \geq 7$ สมมติว่า $P(k)$ เป็นจริงนั่นคือ $k! > 3^k$ จะได้ว่า $(k+1)k! > (k+1)3^k$ เนื่องจาก $k \geq 7$ ดังนั้น $k+1 \geq 8 > 3$ จะได้ว่า

$$(k+1)! = (k+1)k! > (k+1)3^k > 3 \cdot 3^k = 3^{k+1}$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปได้ว่า $n! > 3^n$ ทุก ๆ จำนวนนับ n เมื่อ $n \geq 7$ □

3. ให้ n เป็นจำนวนเต็ม จงใช้ขั้นตอนวิธีการหารแสดงว่า $3 \mid n(n+1)(2n+1)$

***บทพิสูจน์*.** ให้ n เป็นจำนวนเต็ม โดยขั้นตอนวิธีการหารจะได้ว่ามี $q, r \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $n = 3q + r$ เมื่อ $0 \leq r < 3$
กรณี $n = 3q$ จะได้ว่า

$$n(n+1)(2n+1) = 3q(3q+1)(6q+1)$$

ดังนั้น $3 \mid n(n+1)(2n+1)$
กรณี $n = 3q+1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} n(n+1)(2n+2) &= (3q+1)(3q+2)(2(3q+1)+1) = (3q+1)(3q+2)(6q+3) \\ &= 3(3q+1)(3q+2)(2q+1) \end{aligned}$$

ดังนั้น $3 \mid n(n+1)(2n+1)$
กรณี $n = 3q+2$ จะได้ว่า

$$n(n+1)(2n+1) = (3q+2)(3q+3)(2(3q+2)+1) = 3(3q+2)(q+1)(2(3q+2)+1)$$

ดังนั้น $3 \mid n(n+1)(2n+1)$
สรุปได้ว่า $3 \mid n(n+1)(2n+1)$ ทุก ๆ จำนวนเต็ม n $\square$

4. จงหา**หลักหน่วย**ของ 2544^{2001}
วิธีทำ เนื่องจาก 10 หาร 2554 เศษเหลือเท่ากับ 4 ดังนั้น
10 หาร 2544^{2001} เศษเหลือเท่ากับ 10 หาร 4^{2001}
10 หาร $4^5 = 1024$ เศษเหลือเท่ากับ 4
10 หาร $4^{2001} = (4^5)^{400} \cdot 4$ เศษเหลือเท่ากับ $4^{400} \cdot 4$
10 หาร $4^{400} \cdot 4 = (4^5)^{80} \cdot 4$ เศษเหลือเท่ากับ $4^{80} \cdot 4$
10 หาร $4^{80} \cdot 4 = (4^5)^{16} \cdot 4$ เศษเหลือเท่ากับ $4^{16} \cdot 4$
10 หาร $4^{16} \cdot 4 = (4^4)^4 \cdot 4$ เศษเหลือเท่ากับ $4^4 \cdot 4 = 1024$
ดังนั้น**หลักหน่วย**ของ 2544^{2001} คือ 4

5. ให้ $a \in \mathbb{Z}$ จงพิสูจน์ว่า

$$\text{ถ้า} \quad 2 \mid (3a) \quad \text{แล้ว} \quad 2 \mid a$$

โดยใช้วิธีขัดแย้ง จากนั้นใช้ขั้นตอนวิธีการหาร

***บทพิสูจน์*.** ให้ $a \in \mathbb{Z}$ สมมติว่า $2 \mid (3a)$ และ $2 \nmid a$ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม c ซึ่ง $3a = 2c$
โดยขั้นตอนวิธีการหารจะได้ว่ามี $q, r \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $a = 2q + r$ เมื่อ $0 < r < 2$
นั่นคือ $a = 2q + 1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 2c = 3a = 3(2q+1) &= 6q + 3 \\ 2c - 6q &= 3 \\ 2(c - 2q) &= 3 \end{aligned}$$

ดังนั้น $2 \mid 3$ เป็นไปไม่ได้
สรุปได้ว่า ถ้า $2 \mid (3a)$ แล้ว $2 \mid a$ $\square$

Quiz 1 : MAC2302 ทฤษฎีจำนวน

หัวข้อ อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ และขั้นตอนวิธีการหาร **กลุ่ม** S2B

เวลา สัปดาห์ที่ 3 ปีการศึกษา 1/2563 **คะแนน** 10 คะแนน

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. ให้ $x \in \mathbb{R}$ เป็นจำนวนจริงซึ่ง $x \neq 1$ จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \quad \text{ทุก ๆ จำนวนนับ } n$$

2. จงหาจำนวนนับ n เริ่มต้นที่ทำให้ข้อความนี้เป็นจริง $n^2 \geq 2n + 1$ พร้อมพิสูจน์โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์
3. ให้ n เป็นจำนวนเต็ม จงใช้ขั้นตอนวิธีการหารแสดงว่า $3 \mid (n^2 - 1)(n^2 + 2n)$
4. จงหา**หลักหน่วย**ของ 2558^{2015}
5. ให้ $a, b \in \mathbb{Z}$ ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไข

$$7 \text{ หาร } a + 3 \text{ เศษเหลือเท่ากับ } 4 \quad \text{และ} \quad 7 \text{ หาร } b + 5 \text{ เศษเหลือเท่ากับ } 4$$

จงแสดงว่า $7 \mid (a^{2563} + b^{2563})$

เฉลย Quiz 1 : MAC2302 ทฤษฎีจำนวน (S2B)

1. ให้ $x \in \mathbb{R}$ เป็นจำนวนจริงซึ่ง $x \neq 1$ จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \qquad \text{ทุก ๆ จำนวนนับ } n$$

บทพิสูจน์. ให้ $x \in \mathbb{R}$ เป็นจำนวนจริงซึ่ง $x \neq 1$ และให้ $P(n)$ แทนข้อความ $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \dfrac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$

ขั้นฐาน เนื่องจาก $1 + x = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

ขั้นอุปนัย ให้ $k \in \mathbb{N}$ สมมติว่า $P(k)$ เป็นจริงนั่นคือ

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^k = \frac{x^{k+1} - 1}{x - 1}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\left[1 + x + x^2 + \cdots + x^k\right] + x^{k+1} &= \frac{x^{k+1} - 1}{x - 1} + x^{k+1} \\
&= \frac{x^{k+1} - 1 + (x-1)x^{k+1}}{x - 1} \\
&= \frac{x^{k+1} - 1 + x \cdot x^{k+1} - x^{k+1}}{x - 1} \\
&= \frac{x^{k+2} - 1}{x - 1}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปได้ว่า $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \dfrac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$ ทุก ๆ จำนวนนับ n □

2. จงหาจำนวนนับ n เริ่มต้นที่ทำให้ข้อความนี้เป็นจริง $n^2 \geq 2n + 1$ พร้อมพิสูจน์โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

วิธีทำ จะเห็นว่า

$$\begin{array}{llll}
1^2 = 1 \geq 3 = 2(1) + 1 & F & \qquad 2^2 = 4 \geq 5 = 2(2) + 1 & F \\
3^2 = 9 \geq 7 = 2(3) + 1 & T & \qquad 4^2 = 16 \geq 9 = 2(4) + 1 & T
\end{array}$$

ดังนั้น $n^2 \geq 2n + 1$ ทุก ๆ จำนวนนับ n เมื่อ $n \geq 3$

บทพิสูจน์. ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $n^2 \geq 2n + 1$

ขั้นฐาน เนื่องจาก $3^2 = 9 \geq 7 = 2(3) + 1$ ดังนั้น $P(3)$ เป็นจริง

ขั้นอุปนัย ให้ $k \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $k \geq 3$ สมมติว่า $P(k)$ เป็นจริงนั่นคือ $k^2 \geq 2k + 1$ จะได้ว่า

$$(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1 \geq (2k + 1) + 2k + 1 = 2k + (2k + 2)$$

เนื่องจาก $k \geq 3$ นั่นคือ $2k \geq 6$ แล้ว $2k + 2 \geq 8 > 3$ จะได้ว่า

$$(k+1)^2 \geq 2k + (2k + 2) > 2k + 3 = 2(k+1) + 1$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปได้ว่า $n^2 \geq 2n + 1$ ทุก ๆ จำนวนนับ n เมื่อ $n \geq 3$ □

3. ให้ n เป็นจำนวนเต็ม จงใช้ขั้นตอนวิธีการหารแสดงว่า $3 \mid (n^2-1)(n^2+2n)$

บทพิสูจน์. ให้ n เป็นจำนวนเต็ม โดยขั้นตอนวิธีการหารจะได้ว่ามี $q, r \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $n = 3q + r$ เมื่อ $0 \leq r < 3$
กรณี $n = 3q$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(n^2-1)(n^2+2n) &= ((3q)^2-1)((3q)^2+2(3q)) = ((3q)^2-1)(9q^2+6q) \\ &= 3((3q)^2-1)(3q^2+2q)\end{aligned}$$

ดังนั้น $3 \mid (n^2-1)(n^2+2n)$
กรณี $n = 3q+1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(n^2-1)(n^2+2n) &= ((3q+1)^2-1)((3q+1)^2+2(3q+1)) \\ &= (9q^2+6q+1-1)((3q+1)^2+2(3q+1)) \\ &= (9q^2+6q)((3q+1)^2+2(3q+1)) \\ &= 3(3q^2+2q)((3q+1)^2+2(3q+1))\end{aligned}$$

ดังนั้น $3 \mid (n^2-1)(n^2+2n)$
กรณี $n = 3q+2$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(n^2-1)(n^2+2n) &= ((3q+2)^2-1)((3q+2)^2+2(3q+2)) \\ &= ((9q^2+12q+4)-1)((3q+2)^2+2(3q+2)) \\ &= (9q^2+12q+3)((3q+2)^2+2(3q+2)) \\ &= 3(3q^2+4q+1)((3q+2)^2+2(3q+2))\end{aligned}$$

ดังนั้น $3 \mid (n^2-1)(n^2+2n)$
สรุปได้ว่า $3 \mid (n^2-1)(n^2+2n)$ ทุก ๆ จำนวนเต็ม n $\square$

4. จงหา**หลักหน่วย**ของ 2558^{2015}

วิธีทำ เนื่องจาก 10 หาร 2558 เศษเหลือเท่ากับ 8 ดังนั้น
10 หาร 2558^{2015} เศษเหลือเท่ากับ 10 หาร 8^{2015}
10 หาร $8^3 = 2^9 = 512$ เศษเหลือเท่ากับ 2
10 หาร $8^{2015} = (8^3)^{671} \cdot 8^2$ เศษเหลือเท่ากับ $2^{671} \cdot 2^6 = 2^{677}$
10 หาร $2^{677} = (2^9)^{75} \cdot 2^2$ เศษเหลือเท่ากับ $2^{75} \cdot 2^2 = 2^{77}$
10 หาร $2^{77} = (2^9)^8 \cdot 2^5$ เศษเหลือเท่ากับ $2^8 \cdot 2^5 = 2^{13}$
10 หาร $2^{13} = 2^9 \cdot 2^4$ เศษเหลือเท่ากับ $2 \cdot 2^4 = 32$
ดังนั้น**หลักหน่วย**ของ 2558^{2015} คือ 2

5. ให้ $a, b \in \mathbb{Z}$ ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไข

7 หาร $a+3$ เศษเหลือเท่ากับ 4 และ 7 หาร $b+5$ เศษเหลือเท่ากับ 4

จงแสดงว่า $7 \mid (a^{2563} + b^{2563})$

วิธีทำ สมมติ 7 หาร $a+3$ เศษเหลือเท่ากับ 4 และ 7 หาร $b+5$ เศษเหลือเท่ากับ 4 จะได้ว่ามี $p, q \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง

$$\begin{aligned} a+3 &= 7p+4 \qquad \text{และ} \qquad & b+5 &= 7q+4 \\ a &= 7p+1 & b &= 7q-1 \end{aligned}$$

จะได้ว่า 7 หาร a เศษเหลือเท่ากับ 1 และ 7 หาร b เศษเหลือเท่ากับ -1
ดังนั้น 7 หาร a^{2563} เศษเหลือเท่ากับ $1^{2563} = 1$ และ 7 หาร b^{2563} เศษเหลือเท่ากับ $(-1)^{2563} = -1$
ฉะนั้น 7 หาร $a^{2563} + b^{2563}$ เศษเหลือเท่ากับ $1 + (-1) = 0$
สรุปได้ว่า $7 \mid (a^{2563} + b^{2563})$

Quiz 2 : MAC2302 ทฤษฎีจำนวน

หัวข้อ สมบัติการหารลงตัว **กลุ่ม** S1A

เวลา สัปดาห์ที่ 5 ปีการศึกษา 1/2563 **คะแนน** 10 คะแนน

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. จงหาจำนวนเต็มบวก a ทั้งหมดที่ทำให้ $(3a+1)] \mid (9a^2+11)$

2. ให้ a, b เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่า

$$\text{ถ้า} \quad a \mid (a+b)^2 \quad \text{แล้ว} \quad a \mid (a-b)^2$$

3. ให้ $abcd$ เป็นจำนวนเต็มบวกสี่หลัก โดยที่ a, b, c และ d เป็นค่าประจำหลัก จงพิสูจน์ว่า

$$11 \mid abcd \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad 11 \mid (d-c+b-a)$$

4. ให้ $N = ab13$ เป็นจำนวนเต็มบวกสี่หลัก ถ้า $11 \mid N$ และ 9 หาร N เศษเหลือเท่ากับ 3 จงหา a และ b ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

5. ให้ $n \in \mathbb{N}$ จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ $13 \mid (12^{n+1} + 5^{2n})$

เฉลย Quiz 2 : MAC2302 ทฤษฎีจำนวน (S1A)

1. จงหาจำนวนเต็มบวก a ทั้งหมดที่ทำให้ $(3a+1)] \mid (9a^2+11)$

วิธีทำ เนื่องจาก $(3a+1) \mid (9a^2+11)$ และ

$$9a^2+11 = [(3a+1)-1]^2+11 = (3a+1)^2 - 2(3a+1)+12$$

ดังนั้น $(3a+1) \mid 12$ ทำให้ได้ว่า $3a+1 = 1,2,3,4,6,12$ นั่นคือ $a=1$

2. ให้ a, b เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่า

$$\text{ถ้า} \quad a \mid (a+b)^2 \quad \text{แล้ว} \quad a \mid (a-b)^2$$

บทพิสูจน์. ให้ a, b เป็นจำนวนเต็ม สมมติว่า $a \mid (a+b)^2$ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $(a+b)^2 = ak$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} a^2+2ab+b^2 &= ak \\ a^2-2ab+b^2 &= ak-4ab \\ (a-b)^2 &= a(k-4b) \end{aligned}$$

ดังนั้น $a \mid (a-b)^2$ □

3. ให้ $abcd$ เป็นจำนวนเต็มบวกสี่หลัก โดยที่ a, b, c และ d เป็นค่าประจำหลัก จงพิสูจน์ว่า

$$11 \mid abcd \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad 11 \mid (d-c+b-a)$$

บทพิสูจน์. ให้$abcd$ เป็นจำนวนเต็มบวกสี่หลัก จะได้ว่า

$$\begin{aligned} abcd &= a\cdot 10^3 + b\cdot 10^2 + c\cdot 10 + d \\ &= a(1001-1) + b(99+1) + c(11-1) + d \\ &= 1001a - a + 99b + b + 11c - c + d \\ &= 11(91a+11b+c) + (d-c+b-a) \end{aligned}$$

สรุปได้ว่า $11 \mid abcd$ ก็ต่อเมื่อ $11 \mid (d-c+b-a)$ □

4. ให้ $N = ab13$ เป็นจำนวนเต็มบวกสี่หลัก ถ้า $11 \mid N$ และ 9 หาร N เศษเหลือเท่ากับ 3
จงหา a และ b ที่เป็นไปได้ทั้งหมด
วิธีทำ เนื่องจาก $11 \mid N$ ดังนั้น $11 \mid (3-1+b-a)$ นั่นคือ $b-a=-2, 9$
เนื่องจาก 9 หาร N เศษเหลือเท่ากับ 3 ดังนั้น $a+b+1+3 = a+b+4$ นั่นคือ $a+b = 8, 17$
จะได้ว่า $2b=6$ สรุปได้ว่า $b=3$ และ $a=5$

5. ให้ $n \in \mathbb{N}$ จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ $13 \mid (12^{n+1}+5^{2n})$

บทพิสูจน์. ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $13 \mid (12^{n+1}+5^{2n})$

ขั้นฐาน เนื่องจาก $12^{1+1}+5^{2(1)} = 144+25 = 169 = 13\cdot 13$ นั่นคือ $13 \mid (12^{1+1}+5^{2(1)})$ ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

ขั้นอุปนัย ให้ $k \in \mathbb{N}$ สมมติว่า $P(k)$ เป็นจริงนั่นคือ $13 \mid (12^{k+1}+5^{2k})$ จะได้ว่ามี $m \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $12^{k+1}+5^{2k} = 13m$ หรือ $12^{k+1} = 13m - 5^{2k}$ และ

$$\begin{aligned} 12^{k+1+1}+5^{2(k+1)} &= 12\cdot 12^{k+1} + 5^{2k+2} = 12\cdot 12^{k+1} + 5^2\cdot 5^{2k} \\ &= 12(13m-5^{2k}) + 25\cdot 5^{2k+2} = 12\cdot 13m - 12\cdot 5^{2k} + 25\cdot 5^{2k} \\ &= 12\cdot 13m + 13\cdot 5^{2k} = 13(12m+5^{2k}) \end{aligned}$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปได้ว่า $13 \mid (12^{n+1}+5^{2n})$ ทุก ๆ จำนวนนับ n □

Quiz 2 : MAC2302 ทฤษฎีจำนวน

หัวข้อ สมบัติการหารลงตัว **กลุ่ม** S2A

เวลา สัปดาห์ที่ 5 ปีการศึกษา 1/2563 **คะแนน** 10 คะแนน

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. จงหาจำนวนเต็มบวก a ทั้งหมดที่ทำให้ $(2a+1) \mid (4a^2+4a+4)^2$

2. ให้ a, b เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่า

$$\text{ถ้า} \quad a \mid (2a+b)^2 \quad \text{แล้ว} \quad a \mid (a+2b)^2$$

3. ให้ $abcd$ เป็นจำนวนเต็มบวกสี่หลัก โดยที่ a, b, c และ d เป็นค่าประจำหลัก จงพิสูจน์ว่า

$$7 \mid abcd \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad 7 \mid (d+3c+2b-a)$$

4. ให้ $N = 9a9a$ เป็นจำนวนเต็มบวกสี่หลัก ถ้า $3 \mid N$ แต่ $9 \nmid N$ จงหา a ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

5. ให้ $n \in \mathbb{N}$ จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ $9 \mid (2^{3n+2} + 5(-1)^n)$

เฉลย Quiz 2 : MAC2302 ทฤษฎีจำนวน (S2A)

1. จงหาจำนวนเต็มบวก a ทั้งหมดที่ทำให้ $(2a+1) \mid (4a^2+4a+4)^2$

   วิธีทำ เนื่องจาก $(2a+1) \mid (4a^2+4a+4)^2$ และ

$$\begin{aligned}(4a^2+4a+4)^2 &= [4a^2+4a+1+3]^2 = [(2a+1)^2+3]^2 \\ &= (2a+1)^4 + 6(2a+1)^2 + 9\end{aligned}$$

   ดังนั้น $(2a+1) \mid 9$ ทำให้ได้ว่า $2a+1 = 1, 3, 9$ นั่นคือ $a = 1, 4$

2. ให้ a, b เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่า

$$\text{ถ้า} \quad a \mid (2a+b)^2 \quad \text{แล้ว} \quad a \mid (a+2b)^2$$

   บทพิสูจน์. ให้ a, b เป็นจำนวนเต็ม สมมติว่า $a \mid (2a+b)^2$ เนื่องจาก

$$(2a+b)^2 = 4a^2 + 4ab + b^2 = a(4a^2+4b) + b^2$$

   นั่นคือ $a \mid b^2$ จะได้ว่า $a \mid 4b^2$ และ

$$(a+2b)^2 = a^2 + 4ab + 4b^2 = a(a+4b) + 4b^2$$

   สรุปได้ว่า $a \mid (a+2b)^2$ □

3. ให้ $abcd$ เป็นจำนวนเต็มบวกสี่หลัก โดยที่ a, b, c และ d เป็นค่าประจำหลัก จงพิสูจน์ว่า

$$7 \mid abcd \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad 7 \mid (d+3c+2b-a)$$

   บทพิสูจน์. ให้$abcd$ เป็นจำนวนเต็มบวกสี่หลัก จะได้ว่า

$$\begin{aligned}abcd &= a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d \\ &= a(1001-1) + b(98+2) + c(7+3) + d \\ &= 1001a - a + 98b + b + 7c + 3c + d \\ &= 7(143a + 14b + c) + (d + 3c + 2b - a)\end{aligned}$$

   สรุปได้ว่า $7 \mid abcd$ ก็ต่อเมื่อ $7 \mid (d+3c+2b-a)$ □

4. ให้ $N = 9a9a$ เป็นจำนวนเต็มบวกสี่หลัก ถ้า $3 \mid N$ แต่ $9 \nmid N$ จงหา a ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

   วิธีทำ เนื่องจาก $3 \mid N$ จะได้ว่า $3 \mid (9+a+a+9)$ หรือ $2a = 12, 18$ แต่ $9 \nmid N$ ดังนั้น $9 \nmid (9+a+b+9)$ นั่นคือ $2a = 12$ ดังนั้น $a = 6$

5. ให้ $n \in \mathbb{N}$ จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ $9 \mid (2^{3n+2} + 5(-1)^n)$

   บทพิสูจน์. ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $9 \mid (2^{3n+2} + 5(-1)^n)$

   ขั้นฐาน เนื่องจาก $2^{3(1)+2} + 5(-1)^1 = 32 - 5 = 27 = 9 \cdot 3$ นั่นคือ $9 \mid (2^{3(1)+2} + 5(-1)^1)$ ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

   ขั้นอุปนัย ให้ $k \in \mathbb{N}$ สมมติว่า $P(k)$ เป็นจริงนั่นคือ $9 \mid (2^{3k+2} + 5(-1)^k)$ จะได้ว่ามี $m \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $2^{3k+2} + 5(-1)^k = 9m$ หรือ $2^{3k+2} = 9m - 5(-1)^k$ และ

$$\begin{aligned}2^{3(k+1)+1} + 5(-1)^{k+1} &= 2^{3k+3+1} + 5(-1)^k(-1) = 2^3 \cdot 2^{3k+1} - 5(-1)^k \\ &= 8(9m - 5(-1)^k) - 5(-1)^k = 72m - 40(-1)^k - 5(-1)^k \\ &= 72m - 45(-1)^k = 9(8m - 5(-1)^k)\end{aligned}$$

   ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

   สรุปได้ว่า $9 \mid (2^{3n+2} + 5(-1)^n)$ ทุก ๆ จำนวนนับ n □

Quiz 2 : MAC2302 ทฤษฎีจำนวน

หัวข้อ สมบัติการหารลงตัว **กลุ่ม** S1B

เวลา สัปดาห์ที่ 5 ปีการศึกษา 1/2563 **คะแนน** 10 คะแนน

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. จงหาจำนวนเต็มบวก a ทั้งหมดที่ทำให้ $(2a-1) \mid (2a+5)^2$
2. ให้ a, b, c เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่า

$$\text{ถ้า} \quad a \mid b \quad \text{และ} \quad b \mid c \quad \text{แล้ว} \quad a \mid (b+c)$$

3. ให้ a, b, c เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่า

$$\text{ถ้า} \quad a \mid (2b-2c) \quad \text{และ} \quad a \mid (2c-b) \quad \text{แล้ว} \quad a \mid b^2$$

4. ให้ $N = ab34$ เป็นจำนวนเต็มบวกสี่หลัก ถ้า $99 \mid N$ จงหา a และ b ที่เป็นไปได้ทั้งหมด
5. ให้ $n \in \mathbb{N}$ จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ $6 \mid (14^n - 2^{3n})$

เฉลย Quiz 2 : MAC2302 ทฤษฎีจำนวน (S1B)

1. จงหาจำนวนเต็มบวก a ทั้งหมดที่ทำให้ $(2a-1) \mid (2a+5)^2$

   วิธีทำ เนื่องจาก $(2a-1) \mid (2a+5)^2$ และ

$$(2a+5)^2 = [(2a-1)+6]^2 = (2a-1)^2 + 12(2a-1) + 36$$

   ดังนั้น $(2a-1) \mid 36$ ทำให้ได้ว่า $2a-1 = 1, 3, 9$ นั่นคือ $a = 1, 2, 5$

2. ให้ a, b, c เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่า

$$\text{ถ้า} \quad a \mid b \quad \text{และ} \quad b \mid c \quad \text{แล้ว} \quad a \mid (b+c)$$

   ***บทพิสูจน์*.** ให้ a, b, c เป็นจำนวนเต็ม สมมติว่า $a \mid b$ และ $b \mid c$
   จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม k และ q ซึ่ง $b = ak$ และ $c = bq$ จะได้ว่า

$$b + c = ak + bq = ak + (ak)q = a(k + kq)$$

   ดังนั้น $a \mid (b+c)$ $\square$

3. ให้ a, b, c เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่า

$$\text{ถ้า} \quad a \mid (2b-2c) \quad \text{และ} \quad a \mid (2c-b) \quad \text{แล้ว} \quad a \mid b^2$$

   ***บทพิสูจน์*.** ให้ a, b, c เป็นจำนวนเต็ม สมมติว่า $a \mid (2b-2c)$ และ $a \mid (2c-b)$
   จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม k และ q ซึ่ง $2b-2c = ak$ และ $2c-b = aq$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(2b-2c)+(2c-b) &= ak + aq \\ b &= a(k+q) \\ b^2 &= ab(k+q)\end{aligned}$$

   ดังนั้น $a \mid b^2$ $\square$

4. ให้ $N = ab34$ เป็นจำนวนเต็มบวกสี่หลัก ถ้า $99 \mid N$ จงหา a และ b ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

   วิธีทำ เนื่องจาก $99 \mid N$ ดังนั้น $9 \mid N$ และ $11 \mid N$ จะได้ว่า

$$9 \mid (a+b+3+4) \text{ และ } 11 \mid (4-3+b-a)$$

   ดังนั้น $a+b = 2, 11$ และ $b-a = -1$ สรุปได้ว่า $a = 6$ และ $b = 5$

5. ให้ $n \in \mathbb{N}$ จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ $6 \mid (14^n - 2^{3n})$

   ***บทพิสูจน์*.** ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $6 \mid (14^n - 2^{3n})$

   ขั้นฐาน เนื่องจาก $14^1 - 2^{3(1)} = 14 - 8 = 6$ นั่นคือ $6 \mid (14^1 - 2^{3(1)})$ ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

   ขั้นอุปนัย ให้ $k \in \mathbb{N}$ สมมติว่า $P(k)$ เป็นจริงนั่นคือ $6 \mid (14^k - 2^{3k})$ จะได้ว่ามี $m \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $14^k - 2^{3k} = 6m$ หรือ $14^k = 6m + 2^{3k}$ และ

$$\begin{aligned}14^{k+1} - 2^{3(k+1)} &= 14 \cdot 14^k - 2^{3k+3} = 14 \cdot 14^k - 2^3 \cdot 2^{3k} \\ &= 14(6m + 2^{3k}) - 8 \cdot 2^{3k} = 14 \cdot 6m + 14 \cdot 2^{3k} - 8 \cdot 2^{3k} \\ &= 14 \cdot 6m + 6 \cdot 2^{3k} = 6(14m + 2^{3k})\end{aligned}$$

   ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

   สรุปได้ว่า $6 \mid (14^n - 2^{3n})$ ทุก ๆ จำนวนนับ n $\square$

Quiz 2 : MAC2302 ทฤษฎีจำนวน

หัวข้อ สมบัติการหารลงตัว **กลุ่ม** S2B

เวลา สัปดาห์ที่ 5 ปีการศึกษา 1/2563 **คะแนน** 10 คะแนน

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. จงหาจำนวนเต็มบวก a ทั้งหมดที่ทำให้ $(a+1) \mid (a^2+1)^2$
2. ให้ a, b, c เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่า

$$\text{ถ้า} \quad a \mid b \quad \text{และ} \quad a \mid c \quad \text{แล้ว} \quad a \mid (b^2 - c^2)$$

3. จงหาจำนวนเต็มสี่หลักที่สร้างจาก 2, 3, 4, 5 โดยแต่ละหลักไม่ซ้ำกัน และ 55 หารลงตัว
4. ให้ $N = 12aa3b$ เป็นจำนวนเต็มบวกหกหลัก ถ้า $33 \mid N$ จงหา a และ b ที่เป็นไปได้ทั้งหมด
5. ให้ $n \in \mathbb{N}$ จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ $7 \mid (2^{2n+1} + 5 \cdot 11^n)$

เฉลย Quiz 2 : MAC2302 ทฤษฎีจำนวน (S2B)

1. จงหาจำนวนเต็มบวก a ทั้งหมดที่ทำให้ $(a+1) \mid (a^2+1)^2$

วิธีทำ เนื่องจาก $(a+1) \mid (a^2+1)^2$ และ

$$\begin{aligned}(a^2+1)^2 &= (a^2-1+2)^2 = [(a+1)(a-1)+2]^2 \\ &= (a+1)^2(a-1)^2 + 2(a+1)(a-1) + 4\end{aligned}$$

ดังนั้น $(a+1) \mid 4$ ทำให้ได้ว่า $a+1 = 2, 4$ นั่นคือ $a = 1, 3$

2. ให้ a, b, c เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่า

$$\text{ถ้า} \quad a \mid b \quad \text{และ} \quad a \mid c \quad \text{แล้ว} \quad a \mid (b^2 - c^2)$$

บทพิสูจน์. ให้ a, b, c เป็นจำนวนเต็ม สมมติว่า $a \mid b$ และ $a \mid c$
จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม k และ q ซึ่ง $b = ak$ และ $c = aq$ จะได้ว่า

$$b^2 - c^2 = (ak)^2 - (aq)^2 = a(ak^2 - aq^2)$$

ดังนั้น $a \mid (b^2 - c^2)$ □

3. จงหาจำนวนเต็มสี่หลักที่สร้างจาก 2, 3, 4, 5 โดยแต่ละหลักไม่ซ้ำกัน และ 55 หารลงตัว

วิธีทำ จำนวนเต็มสี่หลักที่ 5 หารลงตัวคือ

2345, 2435, 3425, 3245, 4325 และ 4235

จะเห็นว่า $5-4+2-3=0$ และ $5-3+2-4=0$ นั้นคือ 11 หาร 3245 และ 4235 ลงตัว
ดังนั้น 55 หาร 3245 และ 4235 ลงตัว

4. ให้ $N = 12aa3b$ เป็นจำนวนเต็มบวกหกหลัก ถ้า $33 \mid N$ จงหา a และ b ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

วิธีทำ เนื่องจาก $33 \mid N$ ดังนั้น $3 \mid N$ และ $11 \mid N$ จะได้ว่า

$$3 \mid (1+2+a+a+3+b) \text{ และ } 11 \mid (b-3+a-a+2-1)$$

ดังนั้น $b-2=0$ นั่นคือ $b=2$ และ $2a+b = 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27$ นั่นคือ

$$2a+2 = 6, 12, 18$$

สรุปได้ว่า $a = 2, 5, 8$

5. ให้ $n \in \mathbb{N}$ จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ $7 \mid (2^{2n+1} + 5 \cdot 11^n)$

บทพิสูจน์. ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $7 \mid (2^{2n+1} + 5 \cdot 11^n)$

ขั้นฐาน เนื่องจาก $2^{2(1)+1} + 5 \cdot 11^1 = 8 + 55 = 63 = 7 \cdot 9$ นั่นคือ $7 \mid (2^{2(1)+1} + 5 \cdot 11^1)$ ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

ขั้นอุปนัย ให้ $k \in \mathbb{N}$ สมมติว่า $P(k)$ เป็นจริงนั่นคือ $7 \mid (2^{2k+1} + 5 \cdot 11^k)$ จะได้ว่ามี $m \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $2^{2k+1} + 5 \cdot 11^k = 7m$ หรือ $2^{2k+1} = 7m - 5 \cdot 11^k$ และ

$$\begin{aligned}2^{2(k+1)+1} + 5 \cdot 11^{k+1} &= 2^{2k+2+1} + 5 \cdot 11 \cdot 11^k = 2^2 \cdot 2^{2k+1} + 55 \cdot 11^k \\ &= 4(7m - 5 \cdot 11^k) + 55 \cdot 11^k = 28m - 20 \cdot 11^k + 55 \cdot 11^k \\ &= 28m - 35 \cdot 11^k \\ &= 7(4m - 5 \cdot 11^k)\end{aligned}$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปได้ว่า $7 \mid (2^{2n+1} + 5 \cdot 11^n)$ ทุก ๆ จำนวนนับ n □

Quiz 3 : MAC2302 ทฤษฎีจำนวน

หัวข้อ สมภาค **คะแนน** 10 คะแนน
เวลา สัปดาห์ที่ 11 ปีการศึกษา 1/2563
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
ชื่อ–สกุล..**รหัสนักศึกษา**............................ **หมู่เรียน** ....

จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

1. **(3 คะแนน)** จงหา**เศษเหลือ**ที่เกิดจากการหาร 403^{100} ด้วย 11 โดยใช้ **สมภาค (congruence)**
2. **(3 คะแนน)** จงหาคำตอบในรูปทั่วไปของสมการสมภาค $99x \equiv 100 \pmod{101}$
3. **(4 คะแนน)** ในการจัดอบรมเชิงปฏิบัติการเรื่องเรขาคณิตให้กับนักเรียนของโรงเรียนแห่งหนึ่ง วิทยากรเตรียมจัดกิจกรรมกลุ่มให้นักเรียน พบว่าเมื่อแบ่งกลุ่ม ๆ ละ 5 คน จะเหลือนักเรียน 2 คน และเมื่อแบ่งกลุ่ม ๆ ละ 7 คน จะเหลือนักเรียน 3 คน

   3.1 อยากทราบว่านักเรียนที่เข้าอบรมในครั้งนี้มีกี่คน (จำนวนนักเรียนต้องไม่เกิน 60 คน)

   3.2 วิทยากรสามารถแบ่งกลุ่มได้ลงตัวหรือไม่อย่างไร จงแสดงวิธีแบ่ง ถ้าต้องการกลุ่มที่มากกว่า 2 คน แต่ไม่เกิน 10 คน

เฉลย Quiz 3 : MAC2302 ทฤษฎีจำนวน

หัวข้อ สมภาค **คะแนน** 10 คะแนน
เวลา สัปดาห์ที่ 11 ปีการศึกษา 1/2563
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
ชื่อ–สกุล..**รหัสนักศึกษา**............................ **หมู่เรียน** ....

จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

1. **(3 คะแนน)** จงหา**เศษเหลือ**ที่เกิดจากการหาร 403^{100} ด้วย 11 โดยใช้ **สมภาค** (congruence)

วิธีทำ พิจารณา $403 = 13 \cdot 31$ จะเห็นว่า $13 \equiv 2 \pmod{11}$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} 13^5 &\equiv 2^5 && \pmod{11} \\ 13^5 &\equiv 32 && \pmod{11} \\ 13^5 &\equiv -1 && \pmod{11} \\ (13^5)^{20} &\equiv (-1)^{20} && \pmod{11} \\ 13^{100} &\equiv 1 && \pmod{11} \end{aligned}$$

และเห็นว่า $31 \equiv -2 \pmod{11}$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} 31^5 &\equiv (-2)^5 && \pmod{11} \\ 31^5 &\equiv -32 && \pmod{11} \\ 31^5 &\equiv 1 && \pmod{11} \\ (31^5)^{20} &\equiv (1)^{20} && \pmod{11} \\ 31^{100} &\equiv 1 && \pmod{11} \end{aligned}$$

นั่นคือ

$$\begin{aligned} 13^{100} \cdot 31^{100} &\equiv 1 \cdot 1 && \pmod{11} \\ 403^{100} &\equiv 1 && \pmod{11} \end{aligned}$$

สรุปได้ว่าเศษเหลือที่เกิดจากการหาร 403^{100} ด้วย 11 เท่ากับ 1 #

2. **(3 คะแนน)** จงหาคำตอบในรูปทั่วไปของสมการสมภาค $99x \equiv 100 \pmod{101}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\gcd(99, 101) = 1$ และ $1 \mid 100$ ดังนั้นสมการนี้มีคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned} 99x &\equiv 100 && \pmod{101} \\ -2x &\equiv -1 && \pmod{101} \\ -2x \cdot 50 &\equiv -50 && \pmod{101} \\ -100x &\equiv 51 && \pmod{101} \\ x &\equiv 51 && \pmod{101} \end{aligned}$$

3. **(4 คะแนน)** ในการจัดอบรมเชิงปฏิบัติการเรื่องเรขาคณิตให้กับนักเรียนของโรงเรียนแห่งหนึ่ง วิทยากรเตรียมจัดกิจกรรมกลุ่มให้นักเรียน พบว่าเมื่อแบ่งกลุ่ม ๆ ละ 5 คน จะเหลือนักเรียน 2 คน และเมื่อแบ่งกลุ่ม ๆ ละ 7 คน จะเหลือนักเรียน 3 คน

3.1 อยากทราบว่านักเรียนที่เข้าอบรมในครั้งนี้มีกี่คน (จำนวนนักเรียนต้องไม่เกิน 60 คน)

วิธีทำ ให้ x แทนจำนวนนักเรียนในห้องนี้ จะได้ว่า

$$x \equiv 2 \pmod 5$$
$$x \equiv 3 \pmod 7$$

พิจารณา

$$7x \equiv 1 \pmod 5 \quad \longrightarrow \quad x_1 = 3$$
$$5x \equiv 1 \pmod 7 \quad \longrightarrow \quad x_2 = 3$$

นั่นคือ

$$x_0 = 7(3)(2) + 5(3)(3) = 42 + 45 = 87 \equiv 17 \equiv 52 \pmod{35}$$

ดังนั้นนักเรียนที่เข้าอบรมในครั้งนี้มีจำนวน 17 หรือ 52 คน

3.2 วิทยากรสามารถแบ่งกลุ่มได้ลงตัวหรือไม่อย่างไร จงแสดงวิธีแบ่ง ถ้าต้องการกลุ่มที่มากกว่า 2 คน แต่ไม่เกิน 10 คน

วิธีทำ กรณี 17 คน แบ่งได้ไม่ลงตัว กรณี 52 แบ่งได้ลงตัวคือกลุ่มละ 4 คน จำนวน 13 กลุ่ม