คณิตศาสตร์

Quiz 1 : ทฤษฎีจำนวน MAC2302

หัวข้อ อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ และขั้นตอนวิธีการหาร **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน

เวลา สัปดาห์ที่ 3 ปีการศึกษา 1/2565

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

ชื่อ–สกุล.. **รหัสนักศึกษา**.................................... **หมู่เรียน**............

---

1. **(4 คะแนน)** สำหรับจำนวนนับ n ใดๆ จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

$$\frac{1}{1^2+1}+\frac{1}{2^2+2}+\frac{1}{3^2+3}+\cdots+\frac{1}{n^2+n}=1-\frac{1}{n+1}$$

2. **(3 คะแนน)** จงหาเศษเหลือที่เกิดจากการหาร $1^{65}+2^{65}+3^{65}+4^{65}+5^{65}+6^{65}$ ด้วย 7

3. **(3 คะแนน)** ให้ n เป็นจำนวนเต็มใด ๆ จงพิสูจน์ว่า $4 \mid (n^2-1)(n^2-4)$

เฉลย Quiz 1 : ทฤษฎีจำนวน MAC2302

หัวข้อ อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ และขั้นตอนวิธีการหาร **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
เวลา สัปดาห์ที่ 3 ปีการศึกษา 1/2565
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. **(4 คะแนน)** สำหรับจำนวนนับ n ใดๆ จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

$$\frac{1}{1^2+1}+\frac{1}{2^2+2}+\frac{1}{3^2+3}+\cdots+\frac{1}{n^2+n}=1-\frac{1}{n+1}$$

บทพิสูจน์. ให้ $n \in \mathbb{N}$ และ $P(n)$ แทนข้อความ

$$\frac{1}{1^2+1}+\frac{1}{2^2+2}+\frac{1}{3^2+3}+\cdots+\frac{1}{n^2+n}=1-\frac{1}{n+1}$$

ขั้นฐาน : เนื่องจาก $\frac{1}{1^2+1}=\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{1+1}$ ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

ขั้นอุปนัย : ให้ $k \in \mathbb{N}$ สมมติ $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือ

$$\frac{1}{1^2+1}+\frac{1}{2^2+2}+\frac{1}{3^2+3}+\cdots+\frac{1}{k^2+k}=1-\frac{1}{k+1}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1^2+1}+\frac{1}{2^2+2}+\frac{1}{3^2+3}+\cdots+\frac{1}{k^2+k}+\frac{1}{(k+1)^2+(k+1)} &= 1-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(k+1)^2+(k+1)} \\
&= 1-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(k+1)[(k+1)+1]} \\
&= 1-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(k+1)[k+2]} \\
&= 1-\frac{1}{k+1}+\left[\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right] \\
&= 1-\frac{1}{k+2} \\
&= 1-\frac{1}{(k+1)+1}
\end{aligned}$$

ทำให้สรุปได้ว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เราสรุปได้ว่า

$$\frac{1}{1^2+1}+\frac{1}{2^2+2}+\frac{1}{3^2+3}+\cdots+\frac{1}{n^2+n}=1-\frac{1}{n+1}$$

สำหรับทุกจำนวนนับ n $\square$

2. **(3 คะแนน)** จงหาเศษเหลือที่เกิดจากการหาร $1^{65}+2^{65}+3^{65}+4^{65}+5^{65}+6^{65}$ ด้วย 7

วิธีทำ พิจารณา

7	หาร	4	เศษเหลือเท่ากับ	-3
7	หาร	4^{65}	เศษเหลือเท่ากับ	$(-3)^{65}=-3^{65}$
7	หาร	5	เศษเหลือเท่ากับ	-2
7	หาร	5^{65}	เศษเหลือเท่ากับ	$(-2)^{65}=-2^{65}$
7	หาร	6	เศษเหลือเท่ากับ	-1
7	หาร	6^{65}	เศษเหลือเท่ากับ	$(-1)^{65}=-1^{65}$

ดังนั้น 7 หาร $1^{65}+2^{65}+3^{65}+4^{65}+5^{65}+6^{65}$ เศษเหลือเท่ากับ

$$1^{65}+2^{65}+3^{65}-3^{65}-2^{65}-1^{65}=0 \quad \#$$

3. **(3 คะแนน)** ให้ n เป็นจำนวนเต็มใด ๆ จงพิสูจน์ว่า $4 \mid (n^2-1)(n^2-4)$

บทพิสูจน์. ให้ n เป็นจำนวนเต็ม โดยขั้นตอนวิธีการหารมีจำนวนเต็ม q ซึ่ง $n=2q$ หรือ $n=2q+1$

กรณี $n=2q$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(n^2-1)(n^2-4) &= [(2q)^2-1][(2q)^2-4]\\ &= (4q^2-1)(4q^2-4)\\ &= 4[(4q^2-1)(q^2-1)]\end{aligned}$$

ดังนั้น $4 \mid (n^2-1)(n^2-4)$

กรณี $n=2q+1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(n^2-1)(n^2-4) &= [(2q+1)^2-1][(2q+1)^2-4]\\ &= (4q^2+4q+1-1)(4q^2+4q+1-4)\\ &= (4q^2+4q)(4q^2+4q-3)\\ &= 4[(q^2+q)(4q^2+4q-3)]\end{aligned}$$

ดังนั้น $4 \mid (n^2-1)(n^2-4)$

$\square$

คณิตศาสตร์

Quiz 1 (v.2) : ทฤษฎีจำนวน MAC2302

หัวข้อ อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ และขั้นตอนวิธีการหาร **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน

เวลา สัปดาห์ที่ 3 ปีการศึกษา 1/2565

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

ชื่อ–สกุล.. **รหัสนักศึกษา**.................................... **หมู่เรียน**............

---

1. **(4 คะแนน)** สำหรับจำนวนนับ n ใดๆ จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

$$\frac{2}{4\cdot 1^2-1}+\frac{2}{4\cdot 2^2-1}+\frac{2}{4\cdot 3^2-1}+\cdots+\frac{2}{4n^2-1}=1-\frac{1}{2n+1}$$

2. **(3 คะแนน)** จงหาเศษเหลือที่เกิดจากการหาร $2^{2565}+4^{2565}+5^{2565}+7^{2565}$ ด้วย 9

3. **(3 คะแนน)** ให้ n เป็นจำนวนเต็มใด ๆ จงพิสูจน์ว่า $3 \mid (n^2-1)(n^2+5n+6)$

เฉลย Quiz 1 (v.2) : ทฤษฎีจำนวน MAC2302

หัวข้อ อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ และขั้นตอนวิธีการหาร **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
เวลา สัปดาห์ที่ 3 ปีการศึกษา 1/2565
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. **(4 คะแนน)** สำหรับจำนวนนับ n ใดๆ จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

$$\frac{2}{4\cdot 1^2-1}+\frac{2}{4\cdot 2^2-1}+\frac{2}{4\cdot 3^2-1}+\cdots+\frac{2}{4n^2-1}=1-\frac{1}{2n+1}$$

บทพิสูจน์. ให้ $n\in\mathbb{N}$ และ $P(n)$ แทนข้อความ

$$\frac{2}{4\cdot 1^2-1}+\frac{2}{4\cdot 2^2-1}+\frac{2}{4\cdot 3^2-1}+\cdots+\frac{2}{4n^2-1}=1-\frac{1}{2n+1}$$

ขั้นฐาน : เนื่องจาก $\dfrac{2}{4\cdot 1^2-1}=\dfrac{2}{3}=1-\dfrac{1}{3}=1-\dfrac{1}{2(1)+1}$ ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

ขั้นอุปนัย : ให้ $k\in\mathbb{N}$ สมมติ $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือ

$$\frac{2}{4\cdot 1^2-1}+\frac{2}{4\cdot 2^2-1}+\frac{2}{4\cdot 3^2-1}+\cdots+\frac{2}{4k^2-1}=1-\frac{1}{2k+1}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\frac{2}{4\cdot 1^2-1}+\frac{2}{4\cdot 2^2-1}+\frac{2}{4\cdot 3^2-1}+\cdots+\frac{2}{4k^2-1}+\frac{2}{4(k+1)^2-1}&=1-\frac{1}{2k+1}+\frac{2}{4(k+1)^2-1}\\&=1-\frac{1}{2k+1}+\frac{2}{[2(k+1)-1][2(k+1)+1]}\\&=1-\frac{1}{2k+1}+\frac{2}{(2k+1)(2k+3)}\\&=1-\frac{1}{2k+1}+\left[\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+3}\right]\\&=1-\frac{1}{2k+3}\\&=1-\frac{1}{2(k+1)+1}\end{aligned}$$

ทำให้สรุปได้ว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เราสรุปได้ว่า

$$\frac{2}{4\cdot 1^2-1}+\frac{2}{4\cdot 2^2-1}+\frac{2}{4\cdot 3^2-1}+\cdots+\frac{2}{4n^2-1}=1-\frac{1}{2n+1}$$

สำหรับทุกจำนวนนับ n $\square$

2. **(3 คะแนน)** จงหาเศษเหลือที่เกิดจากการหาร $2^{2565} + 4^{2565} + 5^{2565} + 7^{2565}$ ด้วย 9

วิธีทำ พิจารณา

9	หาร	5	เศษเหลือเท่ากับ	-4
9	หาร	5^{2565}	เศษเหลือเท่ากับ	$(-4)^{2565} = -4^{2565}$
9	หาร	7	เศษเหลือเท่ากับ	-2
9	หาร	7^{2565}	เศษเหลือเท่ากับ	$(-2)^{2565} = -2^{2565}$

ดังนั้น 9 หาร $2^{2565} + 4^{2565} + 5^{2565} + 7^{2565}$ เศษเหลือเท่ากับ

$$2^{2565} + 4^{2565} - 4^{2565} - 5^{2565} = 0 \quad \#$$

3. **(3 คะแนน)** ให้ n เป็นจำนวนเต็มใด ๆ จงพิสูจน์ว่า $3 \mid (n^2-1)(n^2+5n+6)$

***บทพิสูจน์*.** ให้ n เป็นจำนวนเต็ม โดยขั้นตอนวิธีการหารมีจำนวนเต็ม q ซึ่ง $n = 3q$ หรือ $n = 3q+1$ หรือ $n = 3q+2$

กรณี $n = 3q$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(n^2-1)(n^2+5n+6) &= [(3q)^2-1][(3q)^2+5(3q)+6] \\ &= (9q^2-1)(9q^2+15q+6) \\ &= (9q^2-1)3(3q^2+5q+2) \\ &= 3[(9q^2-1)(3q^2+5q+2)]\end{aligned}$$

ดังนั้น $3 \mid (n^2-1)(n^2+5n+6)$

กรณี $n = 3q+1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(n^2-1)(n^2+5n+6) &= [(3q+1)^2-1][(3q+1)^2+5(3q+1)+6] \\ &= (9q^2+6q+1-1)(9q^2+6q+1+15q+5+6) \\ &= (9q^2+6q)(9q^2+21q+12) \\ &= 3[(3q^2+2q)(9q^2+21q+12)]\end{aligned}$$

ดังนั้น $3 \mid (n^2-1)(n^2+5n+6)$

กรณี $n = 3q+2$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(n^2-1)(n^2+5n+6) &= [(3q+2)^2-1][(3q+2)^2+5(3q+2)+6] \\ &= (9q^2+12q+4-1)(9q^2+12q+4+15q+10+6) \\ &= (9q^2+12q+3)(9q^2+27q+20) \\ &= 3[(3q^2+4q+1)(9q^2+27q+20)]\end{aligned}$$

ดังนั้น $3 \mid (n^2-1)(n^2+5n+6)$

$\square$

Quiz 1 (v.3) : ทฤษฎีจำนวน MAC2302

หัวข้อ อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ และขั้นตอนวิธีการหาร **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน

เวลา สัปดาห์ที่ 3 ปีการศึกษา 1/2565

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

ชื่อ–สกุล.. **รหัสนักศึกษา**...................................**หมู่เรียน**............

---

1. **(4 คะแนน)** สำหรับจำนวนนับ n ใดๆ จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

$$\frac{2}{4\cdot 1^2-1}+\frac{2}{4\cdot 2^2-1}+\frac{2}{4\cdot 3^2-1}+\cdots+\frac{2}{4n^2-1}=1-\frac{1}{2n+1}$$

2. **(3 คะแนน)** จงหาเศษเหลือที่เกิดจากการหาร $3^{2565}+4^{2565}+5^{2565}+6^{2565}$ ด้วย 9

3. **(3 คะแนน)** ให้ n เป็นจำนวนเต็มใด ๆ จงพิสูจน์ว่า $3 \mid (n^2-1)(n^2-5n+6)$

เฉลย Quiz 1 (v.3) : ทฤษฎีจำนวน MAC2302

หัวข้อ อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ และขั้นตอนวิธีการหาร **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
เวลา สัปดาห์ที่ 3 ปีการศึกษา 1/2565
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. **(4 คะแนน)** สำหรับจำนวนนับ n ใดๆ จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

$$\frac{2}{4\cdot 1^2-1}+\frac{2}{4\cdot 2^2-1}+\frac{2}{4\cdot 3^2-1}+\cdots+\frac{2}{4n^2-1}=1-\frac{1}{2n+1}$$

บทพิสูจน์. ให้ $n \in \mathbb{N}$ และ $P(n)$ แทนข้อความ

$$\frac{2}{4\cdot 1^2-1}+\frac{2}{4\cdot 2^2-1}+\frac{2}{4\cdot 3^2-1}+\cdots+\frac{2}{4n^2-1}=1-\frac{1}{2n+1}$$

ขั้นฐาน : เนื่องจาก $\dfrac{2}{4\cdot 1^2-1}=\dfrac{2}{3}=1-\dfrac{1}{3}=1-\dfrac{1}{2(1)+1}$ ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

ขั้นอุปนัย : ให้ $k \in \mathbb{N}$ สมมติ $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือ

$$\frac{2}{4\cdot 1^2-1}+\frac{2}{4\cdot 2^2-1}+\frac{2}{4\cdot 3^2-1}+\cdots+\frac{2}{4k^2-1}=1-\frac{1}{2k+1}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\frac{2}{4\cdot 1^2-1}+\frac{2}{4\cdot 2^2-1}+\frac{2}{4\cdot 3^2-1}+\cdots+\frac{2}{4k^2-1}+\frac{2}{4(k+1)^2-1} &= 1-\frac{1}{2k+1}+\frac{2}{4(k+1)^2-1}\\
&= 1-\frac{1}{2k+1}+\frac{2}{[2(k+1)-1][2(k+1)+1]}\\
&= 1-\frac{1}{2k+1}+\frac{2}{(2k+1)(2k+3)}\\
&= 1-\frac{1}{2k+1}+\left[\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+3}\right]\\
&= 1-\frac{1}{2k+3}\\
&= 1-\frac{1}{2(k+1)+1}
\end{aligned}$$

ทำให้สรุปได้ว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เราสรุปได้ว่า

$$\frac{2}{4\cdot 1^2-1}+\frac{2}{4\cdot 2^2-1}+\frac{2}{4\cdot 3^2-1}+\cdots+\frac{2}{4n^2-1}=1-\frac{1}{2n+1}$$

สำหรับทุกจำนวนนับ n □

2. **(3 คะแนน)** จงหาเศษเหลือที่เกิดจากการหาร $3^{2565}+4^{2565}+5^{2565}+6^{2565}$ ด้วย 9

วิธีทำ พิจารณา

9	หาร	5	เศษเหลือเท่ากับ	-4
9	หาร	5^{2565}	เศษเหลือเท่ากับ	$(-4)^{2565}=-4^{2565}$
9	หาร	6	เศษเหลือเท่ากับ	-3
9	หาร	6^{2565}	เศษเหลือเท่ากับ	$(-3)^{2565}=-3^{2565}$

ดังนั้น 9 หาร $2^{2565}+4^{2565}+5^{2565}+7^{2565}$ เศษเหลือเท่ากับ

$$3^{2565}+4^{2565}-4^{2565}-3^{2565}=0 \quad \#$$

3. **(3 คะแนน)** ให้ n เป็นจำนวนเต็มใด ๆ จงพิสูจน์ว่า $3 \mid (n^2-1)(n^2-5n+6)$

บทพิสูจน์. ให้ n เป็นจำนวนเต็ม โดยขั้นตอนวิธีการหารมีจำนวนเต็ม q ซึ่ง $n=3q$ หรือ $n=3q+1$ หรือ $n=3q+2$

กรณี $n=3q$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(n^2-1)(n^2-5n+6) &= [(3q)^2-1][(3q)^2-5(3q)+6]\\ &= (9q^2-1)(9q^2-15q+6)\\ &= (9q^2-1)3(3q^2-5q+2)\\ &= 3[(9q^2-1)(3q^2-5q+2)]\end{aligned}$$

ดังนั้น $3 \mid (n^2-1)(n^2-5n+6)$

กรณี $n=3q+1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(n^2-1)(n^2+5n+6) &= [(3q+1)^2-1][(3q+1)^2-5(3q+1)+6]\\ &= (9q^2+6q+1-1)(9q^2+6q+1-15q-5+6)\\ &= (9q^2+6q)(9q^2-9q+2)\\ &= 3[(3q^2+2q)(9q^2-9q+2)]\end{aligned}$$

ดังนั้น $3 \mid (n^2-1)(n^2-5n+6)$

กรณี $n=3q+2$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(n^2-1)(n^2+5n+6) &= [(3q+2)^2-1][(3q+2)^2-5(3q+2)+6]\\ &= (9q^2+12q+4-1)(9q^2+12q+4-15q-10+6)\\ &= (9q^2+12q+3)(9q^2-3q)\\ &= 3[(3q^2+4q+1)(9q^2-3q)]\end{aligned}$$

ดังนั้น $3 \mid (n^2-1)(n^2-5n+6)$

$\square$

Quiz 2 : ทฤษฎีจำนวน MAC2302

หัวข้อ การหารลงตัวของเลขฐานสิบ และสมบัติตัวหารร่วมมาก **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน

เวลา สัปดาห์ที่ 5 ปีการศึกษา 1/2565

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

ชื่อ–สกุล... **รหัสนักศึกษา**.................................... **หมู่เรียน**.............

---

1. **(5 คะแนน)** ให้ $ab7ba$ เป็นจำนวนเต็มห้าหลัก ซึ่งหารด้วย 63 ลงตัว จงหาจำนวนเต็มข้างต้นที่เป็นไปได้ทั้งหมด

2. **(5 คะแนน)** ให้ a, b และ c เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่า

$$a^2 \mid b^2c \quad \text{และ} \quad \gcd(a,b) = 1 \quad \text{แล้ว} \quad a^2 \mid c$$

เฉลย Quiz 2 : ทฤษฎีจำนวน MAC2302

หัวข้อ การหารลงตัวของเลขฐานสิบ และสมบัติตัวหารร่วมมาก **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
เวลา สัปดาห์ที่ 5 ปีการศึกษา 1/2565
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
ชื่อ–สกุล... **รหัสนักศึกษา**.................................**หมู่เรียน**............

---

1. **(5 คะแนน)** ให้ $ab7ba$ เป็นจำนวนเต็มห้าหลัก ซึ่งหารด้วย 63 ลงตัว จงหาจำนวนเต็มข้างต้นที่เป็นไปได้ทั้งหมด

แนวคำตอบ เนื่องจาก $63 = 7 \cdot 9$ ซึ่ง $63 \mid ab7ba$ และ $\gcd(7,9) = 1$ ดังนั้น $7 \mid ab7ba$ และ $9 \mid ab7ba$ นั่นคือ

$$7 \text{ หาร } 1a + 3b + 2(7) - 1b - 3a = 2b - 2a + 14 = 2(b-a) + 14 \text{ ลงตัว}$$

แต่ $7 \mid 14$ ทำให้ได้ว่า $7 \mid 2(b-a)$ เนื่องจาก $\gcd(7,2) = 1$ ฉะนั้น $7 \mid (b-a)$ จะได้ว่า

$$b - a = 0 \quad \text{หรือ} \quad b - a = 7 \text{ หรือ} \quad b - a = -7$$

พิจารณา $9 \mid ab7ba$

$$9 \text{ หาร } a + b + 7 + b + a = 2a + 2b + 7 = 2(a+b) + 7 \text{ ลงตัว จะได้ว่า } 2(a+b) = 2, 20$$

ฉะนั้น $a + b = 1, 10$

	$b-a=0$	$b-a=7$	$b-a=-7$	$ab7ba$
$a+b=1$	เป็นไปไม่ได้	$a=-3,\ b=4$	$a=4,\ b=-3$	เป็นไปไม่ได้
$a+b=10$	$a=5,\ b=5$	เป็นไปไม่ได้	เป็นไปไม่ได้	55755

ดังนั้นจำนวนเต็มห้าหลักที่เป็นไปได้มีจำนวนเดียวคือ 55755 $\#$

2. **(5 คะแนน)** ให้ a, b และ c เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่า

$$a^2 \mid b^2c \quad \text{และ} \quad \gcd(a,b) = 1 \quad \text{แล้ว} \quad a^2 \mid c$$

บทพิสูจน์. ให้ a, b และ c เป็นจำนวนเต็ม สมมติว่า $a^2 \mid b^2c$
จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม x, y, k ซึ่ง $1 = ax + by$ และ $b^2c = a^2k$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
c &= c \cdot 1^2 = c(ax+by)^2 \\
&= c[(ax)^2 + 2(ax)(by) + (by)^2] \\
&= c[a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2] \\
&= ca^2x^2 + 2cabxy + cb^2y^2 \\
&= a^2(cx^2) + 2cabxy \cdot 1 + (b^2c)y^2 \\
&= a^2(cx^2) + 2cabxy(ax+by) + (a^2k)y^2 \qquad \because b^2c = a^2k \\
&= a^2(cx^2) + 2x^2yca^2b + 2xy^2cab^2 + a^2(ky^2) \\
&= a^2(cx^2) + a^2(2x^2ycb) + 2xy^2a(b^2c) + a^2(ky^2) \\
&= a^2(cx^2) + a^2(2x^2ycb) + 2xy^2a(a^2k) + a^2(ky^2) \qquad \because b^2c = a^2k \\
&= a^2(cx^2 + 2x^2ycb + 2xy^2ak + ky^2)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $a^2 \mid c$

□

คณิตศาสตร์

Quiz 2 (v.2) : ทฤษฎีจำนวน MAC2302

หัวข้อ การหารลงตัวของเลขฐานสิบ และสมบัติตัวหารร่วมมาก **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน

เวลา สัปดาห์ที่ 5 ปีการศึกษา 1/2565

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

ชื่อ–สกุล... **รหัสนักศึกษา**....................................**หมู่เรียน**............

---

1. **(5 คะแนน)** ให้ $ab7ba$ เป็นจำนวนเต็มห้าหลัก ซึ่งหารด้วย 21 ลงตัว จงหาจำนวนเต็มข้างต้นที่เป็นไปได้ทั้งหมด

2. **(5 คะแนน)** ให้ a, b และ c เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่า

$$a^2 \mid b^2c \quad \text{และ} \quad \gcd(a,b) = 1 \quad \text{แล้ว} \quad a^2 \mid c^2$$

คณิตศาสตร์

เฉลย Quiz 2 (v.2): ทฤษฎีจำนวน MAC2302

หัวข้อ การหารลงตัวของเลขฐานสิบ และสมบัติตัวหารร่วมมาก **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน

เวลา สัปดาห์ที่ 5 ปีการศึกษา 1/2565

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

ชื่อ–สกุล.. **รหัสนักศึกษา**.................................... **หมู่เรียน**............

---

1. **(5 คะแนน)** ให้ $ab7ba$ เป็นจำนวนเต็มห้าหลัก ซึ่งหารด้วย 21 ลงตัว จงหาจำนวนเต็มข้างต้นที่เป็นไปได้ทั้งหมด

แนวคำตอบ เนื่องจาก $21 = 7 \cdot 3$ ซึ่ง $21 \mid ab7ba$ และ $\gcd(7,3) = 1$ ดังนั้น $7 \mid ab7ba$ และ $3 \mid ab7ba$ นั่นคือ

$$7 \text{ หาร } 1a + 3b + 2(7) - 1b - 3a = 2b - 2a + 14 = 2(b-a) + 14 \text{ ลงตัว}$$

แต่ $7 \mid 14$ ทำให้ได้ว่า $7 \mid 2(b-a)$ เนื่องจาก $\gcd(7,2) = 1$ ฉะนั้น $7 \mid (b-a)$ จะได้ว่า

$$b - a = 0 \quad \text{หรือ} \quad b - a = 7 \text{ หรือ} \quad b - a = -7$$

พิจารณา $3 \mid ab7ba$

$$3 \text{ หาร } a + b + 7 + b + a = 2a + 2b + 7 = 2(a+b) + 7 \text{ ลงตัว จะได้ว่า } 2(a+b) = 2, 8, 14, 20, 26, 32$$

ฉะนั้น $a + b = 1, 4, 7, 10, 13, 16$

	$b-a=0$	$b-a=7$	$b-a=-7$	$ab7ba$
$a+b=1$	เป็นไปไม่ได้	$a=-3,\ b=4$	$a=3,\ b=-4$	เป็นไปไม่ได้
$a+b=4$	$a=2,\ b=2$	เป็นไปไม่ได้	เป็นไปไม่ได้	22722 #
$a+b=7$	เป็นไปไม่ได้	$a=0,\ b=7$	$a=7,\ b=0$	70707 #
$a+b=10$	$a=5,\ b=5$	เป็นไปไม่ได้	เป็นไปไม่ได้	55755 #
$a+b=13$	เป็นไปไม่ได้	$a=3,\ b=10$	$a=10,\ b=3$	เป็นไปไม่ได้
$a+b=16$	$a=8,\ b=8$	เป็นไปไม่ได้	เป็นไปไม่ได้	88788 #

2. **(5 คะแนน)** ให้ a, b และ c เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่า

$$a^2 \mid b^2c \quad \text{และ} \quad \gcd(a,b) = 1 \quad \text{แล้ว} \quad a^2 \mid c^2$$

บทพิสูจน์. ให้ a, b และ c เป็นจำนวนเต็ม สมมติว่า $a^2 \mid b^2c$
จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม x, y, k ซึ่ง $1 = ax + by$ และ $b^2c = a^2k$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
c^2 &= c^2 \cdot 1^3 = c^2(ax+by)^3 \\
&= c^2[(ax)^3 + 3(ax)^2(by) + 3(ax)(by)^2 + (by)^3] \\
&= c^2[a^3x^3 + 3a^2x^2by + 3axb^2y^2 + b^3y^3] \\
&= c^2a^3x^3 + 3c^2a^2x^2by + 3ac^2xb^2y^2 + c^2b^3y^3 \\
&= c^2a^3x^3 + 3c^2a^2x^2by + 3ac^2xb^2y^2 + c^2b^3y^3 \\
&= a^2(ac^2x^3) + a^2(3c^2x^2by) + 3axc(b^2c)y^2 + (b^2c)cby^3 \\
&= a^2(ac^2x^3) + a^2(3c^2x^2by) + 3axc(a^2k)y^2 + (a^2k)cby^3 \qquad \because b^2c = a^2k \\
&= a^2(ac^2x^3 + 3c^2x^2by + 3axcky^2 + kcby^3)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $a^2 \mid c^2$

□

Quiz 3 : ทฤษฎีจำนวน MAC2302

หัวข้อ สมภาค และทฤษฎีบทเศษเหลือของจีน **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน

เวลา สัปดาห์ที่ 9 ปีการศึกษา 1/2565

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

ชื่อ–สกุล... **รหัสนักศึกษา**.................................... **หมู่เรียน**.............

---

1. **(5 คะแนน)** ให้ x, y เป็นจำนวนเต็ม และ p เป็นจำนวนเฉพาะ จงพิสูจน์ว่า

$$\text{ถ้า } (p-1)x \equiv y \pmod{p} \quad \text{แล้ว} \quad (p-1)y \equiv x \pmod{p}$$

2. **(5 คะแนน)** แมทตี้มีไข่อยู่ในตู้เย็นจำนวนหนึ่ง เมื่อนำไข่ทั้งหมดมาจัดในถาดหลุมซึ่งมีแถวละ 6 หลุม โดยจัดไข่ลงหลุมไปที่ละแถวปรากฏว่าแถวสุดท้ายจัดไข่ลงหลุมได้เพียง 3 ฟอง แต่เมื่อเปลี่ยนถาดหลุ่มชนิดใหม่ซึ่งมีแถวละ 5 หลุม และทำการจัดเช่นเดิมอีกครั้ง ปรากฏว่าแถวสุดท้ายจัดไข่ลงหลุมได้เพียง 4 ฟอง แมทตี้มีไข่ในตู้เย็นอย่างน้อยกี่ฟอง (ใช้ CRT)

เฉลย Quiz 3: ทฤษฎีจำนวน MAC2302

หัวข้อ สมภาค และทฤษฎีบทเศษเหลือของจีน **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน

เวลา สัปดาห์ที่ 9 ปีการศึกษา 1/2565

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

ชื่อ–สกุล.. **รหัสนักศึกษา**....................................**หมู่เรียน**............

---

1. **(5 คะแนน)** ให้ x, y เป็นจำนวนเต็ม และ p เป็นจำนวนเฉพาะ จงพิสูจน์ว่า

$$\text{ถ้า } (p-1)x \equiv y \pmod{p} \qquad \text{แล้ว} \qquad (p-1)y \equiv x \pmod{p}$$

บทพิสูจน์. ให้ x, y เป็นจำนวนเต็ม และ p เป็นจำนวนเฉพาะ สมมติว่า $(p-1)x \equiv y \pmod{p}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(p-1)^2 x &\equiv (p-1)y \pmod{p}\\ (p^2-2p+1)x &\equiv (p-1)y \pmod{p}\end{aligned}$$

เนื่องจาก $p^2 - 2p + 1 \equiv 1 \pmod{p}$ ดังนั้น

$$(p-1)y \equiv x \pmod{p}$$

□

2. **(5 คะแนน)** แมทตี้มีไข่อยู่ในตู้เย็นจำนวนหนึ่ง เมื่อนำไข่ทั้งหมดมาจัดในถาดหลุมซึ่งมีแถวละ 6 หลุม โดยจัดไข่ลงหลุมไปที่ละแถวปรากฏว่าแถวสุดท้ายจัดไข่ลงหลุมได้เพียง 3 ฟอง แต่เมื่อเปลี่ยนถาดหลุ่มชนิดใหม่ซึ่งมีแถวละ 5 หลุม และทำการจัดเช่นเดิมอีกครั้ง ปรากฏว่าแถวสุดท้ายจัดไข่ลงหลุมได้เพียง 4 ฟอง แมทตี้มีไข่ในตู้เย็นอย่างน้อยกี่ฟอง (ใช้ CRT)

แนวคำตอบ ให้ x เป็นจำนวนไข่ในตู้เย็นของแมทตี้ จากเงื่อนไข x ต้องสอดคล้องกับ

$$\begin{aligned}x &\equiv 3 \pmod{6}\\ x &\equiv 4 \pmod{5}\end{aligned}$$

พิจารณาสมการ

$$\begin{aligned}5x &\equiv 1 \pmod{6} \longrightarrow x_1 = -1\\ 6x &\equiv 1 \pmod{5} \longrightarrow x_2 = 1\end{aligned}$$

จะได้ว่า $x_0 = 5(-1)(3) + 6(1)(4) = 9$ ดังนั้น

$$x \equiv 9 \pmod{30}$$

สรุปได้ว่าแมทตี้มีไข่ในตู้เย็นอย่างน้อย 9 ฟอง #

Quiz 3 (V.2): ทฤษฎีจำนวน MAC2302

หัวข้อ สมภาค และทฤษฎีบทเศษเหลือของจีน **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน

เวลา สัปดาห์ที่ 9 ปีการศึกษา 1/2565

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

ชื่อ-สกุล.. **รหัสนักศึกษา**..**หมู่เรียน**.............

---

1. **(5 คะแนน)** ให้ x, y เป็นจำนวนเต็ม และ n เป็นจำนวนเต็มบวก จงพิสูจน์ว่า

$$\text{ถ้า } (n-1)^2x \equiv y \pmod{n} \quad \text{แล้ว} \quad (n-1)^2y \equiv x \pmod{n}$$

2. **(5 คะแนน)** แมทตี้มีไข่อยู่ในตู้เย็นจำนวนหนึ่ง เมื่อนำไข่ทั้งหมดมาจัดในถาดหลุมซึ่งมีแถวละ 6 หลุม โดยจัดไข่ลงหลุมไปที่ละแถวปรากฏว่าแถวสุดท้ายจัดไข่ลงหลุมได้เพียง 4 ฟอง แต่เมื่อเปลี่ยนถาดหลุมชนิดใหม่ซึ่งมีแถวละ 5 หลุม และทำการจัดเช่นเดิมอีกครั้ง ปรากฏว่าแถวสุดท้ายจัดไข่ลงหลุมได้เพียง 3 ฟอง แมทตี้มีไข่ในตู้เย็นอย่างน้อยกี่ฟอง (ใช้ CRT)

เฉลย Quiz 3 (V.2): ทฤษฎีจำนวน MAC2302

หัวข้อ สมภาค และทฤษฎีบทเศษเหลือของจีน **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน

เวลา สัปดาห์ที่ 9 ปีการศึกษา 1/2565

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

ชื่อ–สกุล .... **รหัสนักศึกษา**.................................... **หมู่เรียน**............

---

1. **(5 คะแนน)** ให้ x, y เป็นจำนวนเต็ม และ n เป็นจำนวนเต็มบวก จงพิสูจน์ว่า

$$\text{ถ้า } (n-1)^2x \equiv y \pmod{n} \qquad \text{แล้ว} \qquad (n-1)^2y \equiv x \pmod{n}$$

บทพิสูจน์. ให้ x, y เป็นจำนวนเต็ม และ n เป็นจำนวนเต็มบวก สมมติว่า $(n-1)^2x \equiv y \pmod{n}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} (n-1)^3x &\equiv (n-1)y \pmod{n} \\ (n^3-3n^2+3n-1)x &\equiv (n-1)y \pmod{p} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $n^3 - 3n^2 + 3n - 1 \equiv -1 \pmod{n}$ และ $n - 1 \equiv -1 \pmod{n}$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} (-1)x &\equiv (n-1)y \pmod{n} \\ (n-1)(-1)x &\equiv (n-1)^2y \pmod{n} \\ (-1)(-1)x &\equiv (n-1)^2y \pmod{n} \\ x &\equiv (n-1)^2y \pmod{n} \end{aligned}$$

□

2. **(5 คะแนน)** แมทตี้มีไข่อยู่ในตู้เย็นจำนวนหนึ่ง เมื่อนำไข่ทั้งหมดมาจัดในถาดหลุมซึ่งมีแถวละ 6 หลุม โดยจัดไข่ลงหลุมไปที่ละแถวปรากฏว่าแถวสุดท้ายจัดไข่ลงหลุมได้เพียง 4 ฟอง แต่เมื่อเปลี่ยนถาดหลุ่มชนิดใหม่ซึ่งมีแถวละ 5 หลุม และทำการจัดเช่นเดิมอีกครั้ง ปรากฏว่าแถวสุดท้ายจัดไข่ลงหลุมได้เพียง 3 ฟอง แมทตี้มีไข่ในตู้เย็นอย่างน้อยกี่ฟอง (ใช้ CRT)

แนวคำตอบ ให้ x เป็นจำนวนไข่ในตู้เย็นของแมทตี้ จากเงื่อนไข x ต้องสอดคล้องกับ

$$\begin{aligned} x &\equiv 4 \pmod{6} \\ x &\equiv 3 \pmod{5} \end{aligned}$$

พิจารณาสมการ

$$\begin{aligned} 5x &\equiv 1 \pmod{6} \longrightarrow x_1 = -1 \\ 6x &\equiv 1 \pmod{5} \longrightarrow x_2 = 1 \end{aligned}$$

จะได้ว่า $x_0 = 5(-1)(4) + 6(1)(3) = -2 =$ ดังนั้น

$$x \equiv -2 \equiv 28 \pmod{30}$$

สรุปได้ว่าแมทตี้มีไข่ในตู้เย็นอย่างน้อย 28 ฟอง #

คณิตศาสตร์

Quiz 4 : ทฤษฎีจำนวน MAC2302

หัวข้อ ฟังก์ชันเทา ฟังก์ชันซิกมา และฟังก์ชันฟี **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
เวลา สัปดาห์ที่ 14 ปีการศึกษา 1/2565
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
ชื่อ–สกุล.. **รหัสนักศึกษา**.....................................**หมู่เรียน**.............

---

1. **(5 คะแนน)** จงหาค่าของ
$$\sum_{d|100} \sigma(\tau(d))$$

2. **(5 คะแนน)** จงหาจำนวนเฉพาะ p ทั้งหมดที่เป็นไปได้ที่สอดคล้อง
$$\phi(6p) = \phi(3p)$$

คณิตศาสตร์

เฉลย Quiz 4: ทฤษฎีจำนวน MAC2302

หัวข้อ ฟังก์ชันเทาว ฟังก์ชันซิกมา และฟังก์ชันฟี **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
เวลา สัปดาห์ที่ 14 ปีการศึกษา 1/2565
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
ชื่อ-สกุล... **รหัสนักศึกษา**.................................**หมู่เรียน**............

---

1. **(5 คะแนน)** จงหาค่าของ
$$\sum_{d|100} \sigma(\tau(d))$$

แนวคำตอบ เนื่องจากตัวหารของ 100 คือ 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100 ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\sum_{d|100} \sigma(\tau(d)) &= \sigma(\tau(1)) + \sigma(\tau(2)) + \sigma(\tau(4)) + \sigma(\tau(5)) + \sigma(\tau(10)) \\
&\quad + \sigma(\tau(20)) + \sigma(\tau(25)) + \sigma(\tau(50)) + \sigma(\tau(100)) \\
&= \sigma(\tau(1)) + \sigma(\tau(2)) + \sigma(\tau(2^2)) + \sigma(\tau(5)) + \sigma(\tau(2\cdot 5)) \\
&\quad + \sigma(\tau(2^2\cdot 5)) + \sigma(\tau(5^2)) + \sigma(\tau(2\cdot 5^2)) + \sigma(\tau(2^2\cdot 5^2)) \\
&= \sigma(1) + \sigma(1+1) + \sigma(1+2) + \sigma(1+1) + \sigma((1+1)(1+1)) \\
&\quad + \sigma((2+1)(1+1)) + \sigma(2+1) + \sigma((1+1)(2+1)) + \sigma((2+1)(2+1)) \\
&= \sigma(1) + \sigma(2) + \sigma(3) + \sigma(2) + \sigma(4) + \sigma(6) + \sigma(3) + \sigma(6) + \sigma(9) \\
&= \sigma(1) + 2\sigma(2) + 2\sigma(3) + \sigma(4) + 2\sigma(6) + \sigma(9) \\
&= \sigma(1) + 2\sigma(2) + 2\sigma(3) + \sigma(2^2) + 2\sigma(2\cdot 3) + \sigma(3^2) \\
&= 1 + 2(1+2) + 2(1+3) + (1+2+2^2) + 2\sigma(2)\sigma(3) + (1+3+3^2) \\
&= 1 + 6 + 8 + 7 + 2(1+2)(1+3) + 13 \\
&= 1 + 6 + 8 + 7 + 24 + 13 \\
&= 59 \quad \#
\end{aligned}$$

2. **(5 คะแนน)** จงหาจำนวนเฉพาะ p ทั้งหมดที่เป็นไปได้ที่สอดคล้อง

$$\phi(6p) = \phi(3p)$$

แนวคำตอบ ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ว่า $\gcd(6, p) = 1, 2, 3$

<u>กรณี $\gcd(6, p) = 1$</u> เนื่องจาก p เป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ว่า $\gcd(3, p) = 1$ ฉะนั้น

$$\begin{aligned} \phi(6p) &= \phi(3p) \\ \phi(6)\phi(p) &= \phi(3)\phi(p) \\ \phi(2 \cdot 3) &= \phi(3) \\ \phi(2)\phi(3) &= \phi(3) \\ 1 \cdot \phi(3) &= \phi(3) \end{aligned}$$

สมการนี้เป็นจริง ดังนั้น p เป็นจำนวนเฉพาะซึ่ง $\gcd(6, p) = 1$ หรือ $p = 5, 7, 11, 13, ...$

<u>กรณี $\gcd(6, p) = 2$</u> เนื่องจาก p เป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ว่า $p = 2$ ฉะนั้น

$$\begin{aligned} \phi(6 \cdot 2) &= \phi(3 \cdot 2) \\ \phi(2^2 \cdot 3) &= \phi(2 \cdot 3) \\ (2^2 - 2)(3 - 1) &= (2 - 1)(3 - 1) \\ 4 &= 2 \end{aligned}$$

สมการนี้ไม่เป็นจริง ดังนั้นไม่มี $p \neq 2$

<u>กรณี $\gcd(6, p) = 3$</u> เนื่องจาก p เป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ว่า $p = 3$ ฉะนั้น

$$\begin{aligned} \phi(6 \cdot 3) &= \phi(3 \cdot 3) \\ \phi(2 \cdot 3^2) &= \phi(3^2) \\ (2 - 1)(3^2 - 3) &= (3^2 - 3) \\ 6 &= 6 \end{aligned}$$

สมการนี้เป็นจริง ดังนั้น $p = 3$

สรุปได้ว่า p เป็นจำนวนเฉพาะทุกจำนวนที่มากกว่า 2 หรือ $p = 3, 5, 7, 11, ...$ ที่ทำให้ $\phi(6p) = \phi(3p)$

Quiz 4 (V.2) : ทฤษฎีจำนวน MAC2302

หัวข้อ ฟังก์ชันเทา ฟังก์ชันซิกมา และฟังก์ชันฟี **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
เวลา สัปดาห์ที่ 14 ปีการศึกษา 1/2565
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
ชื่อ–สกุล... **รหัสนักศึกษา**.................................... **หมู่เรียน**............

---

1. **(5 คะแนน)** จงหาค่าของ

$$\sum_{d|50} \tau(\sigma(d))$$

2. **(5 คะแนน)** จงหาจำนวนเฉพาะ p ทั้งหมดที่เป็นไปได้ที่สอดคล้อง

$$\phi(6p) = 2\phi(2p)$$

เฉลย Quiz 4 (V.2): ทฤษฎีจำนวน MAC2302

หัวข้อ ฟังก์ชันเทา ฟังก์ชันซิกมา และฟังก์ชันฟี **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
เวลา สัปดาห์ที่ 14 ปีการศึกษา 1/2565
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
ชื่อ–สกุล... **รหัสนักศึกษา**.................................**หมู่เรียน**............

---

1. **(5 คะแนน)** จงหาค่าของ

$$\sum_{d|50} \tau(\sigma(d))$$

แนวคำตอบ เนื่องจากตัวหารของ 50 คือ 1, 2, 5, 10, 25, 50 ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\sum_{d|50} \tau(\sigma(d)) &= \tau(\sigma(1)) + \tau(\sigma(2)) + \tau(\sigma(5)) + \tau(\sigma(10)) + \tau(\sigma(25)) + \tau(\sigma(50)) \\
&= \tau(\sigma(1)) + \tau(\sigma(2)) + \tau(\sigma(5)) + \tau(\sigma(2\cdot 5)) + \tau(\sigma(5^2)) + \tau(\sigma(2\cdot 5^2)) \\
&= \tau(1) + \tau(1+2) + \tau(1+5) + \tau((1+2)(1+5)) + \tau(1+5+5^2) + \tau((1+2)(1+5+5^2)) \\
&= \tau(1) + \tau(3) + \tau(6) + \tau(18) + \tau(31) + \tau(62) \\
&= \tau(1) + \tau(3) + \tau(2\cdot 3) + \tau(2\cdot 3^2) + \tau(31) + \tau(2\cdot 31) \\
&= 1 + (1+1) + (1+1)(1+1) + (1+1)(2+1) + (1+1) + (1+1)(1+1) \\
&= 1+2+4+6+2+4 \\
&= 19 \quad \#
\end{aligned}$$

2. **(5 คะแนน)** จงหาจำนวนเฉพาะ p ทั้งหมดที่เป็นไปได้ที่สอดคล้อง

$$\phi(6p) = 2\phi(2p)$$

แนวคำตอบ ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ว่า $\gcd(6, p) = 1, 2, 3$

<u>กรณี $\gcd(6, p) = 1$</u> เนื่องจาก p เป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ว่า $\gcd(2, p) = 1$ ฉะนั้น

$$\begin{aligned} \phi(6p) &= 2\phi(2p) \\ \phi(6)\phi(p) &= 2\phi(2)\phi(p) \\ \phi(2 \cdot 3) &= 2\phi(2) \\ \phi(2)\phi(3) &= 2(2-1) \\ (2-1)(3-1) &= 2 \\ 2 &= 2 \end{aligned}$$

สมการนี้เป็นจริง ดังนั้น p เป็นจำนวนเฉพาะซึ่ง $\gcd(6, p) = 1$ หรือ $p = 5, 7, 11, 13, ...$

<u>กรณี $\gcd(6, p) = 2$</u> เนื่องจาก p เป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ว่า $p = 2$ ฉะนั้น

$$\begin{aligned} \phi(6 \cdot 2) &= 2\phi(2 \cdot 2) \\ \phi(2^2 \cdot 3) &= 2\phi(2^2) \\ (2^2 - 2)(3-1) &= 2(2^2 - 2^1) \\ 4 &= 4 \end{aligned}$$

สมการนี้เป็นจริง ดังนั้น $p = 2$

<u>กรณี $\gcd(6, p) = 3$</u> เนื่องจาก p เป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ว่า $p = 3$ ฉะนั้น

$$\begin{aligned} \phi(6 \cdot 3) &= 2\phi(2 \cdot 3) \\ \phi(2 \cdot 3^2) &= 2\phi(2)\phi(3) \\ (2-1)(3^2 - 3) &= 2(2-1)(3-1) \\ 6 &= 4 \end{aligned}$$

สมการนี้ไม่เป็นจริง ดังนั้น $p \neq 3$

สรุปได้ว่า p เป็นจำนวนเฉพาะทุกจำนวนยกเว้น 3 หรือ $p = 2, 5, 7, 11, ...$ ที่ทำให้ $\phi(6p) = 2\phi(2p)$