คณิตศาสตร์

Quiz 1 : ทฤษฎีจำนวน MAI1305

หัวข้อ อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ และขั้นตอนวิธีการหาร **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน

เวลา สัปดาห์ที่ 3 ปีการศึกษา 2/2566

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

ชื่อ–สกุล.. **รหัสนักศึกษา**.................................... **หมู่เรียน**............

---

1. **(5 คะแนน)** สำหรับจำนวนนับ n ใด ๆ จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

$$\frac{1}{4\cdot 1^2-1}+\frac{1}{4\cdot 2^2-1}+\frac{1}{4\cdot 3^2-1}+\cdots+\frac{1}{4n^2-1}=\frac{n}{2n+1}$$

2. **(5 คะแนน)** ให้ n เป็นจำนวนเต็มใด ๆ จงพิสูจน์ว่า $3 \mid n(n^4-1)$

เฉลย Quiz 1 : ทฤษฎีจำนวน MAI1305

หัวข้อ อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ และขั้นตอนวิธีการหาร **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน

เวลา สัปดาห์ที่ 3 ปีการศึกษา 2/2566

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. **(5 คะแนน)** สำหรับจำนวนนับ n ใดๆ จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

$$\frac{1}{4\cdot 1^2-1}+\frac{1}{4\cdot 2^2-1}+\frac{1}{4\cdot 3^2-1}+\cdots+\frac{1}{4n^2-1}=\frac{n}{2n+1}$$

***บทพิสูจน์*.** ให้ $n\in\mathbb{N}$ และ $P(n)$ แทนข้อความ

$$\frac{1}{4\cdot 1^2-1}+\frac{1}{4\cdot 2^2-1}+\frac{1}{4\cdot 3^2-1}+\cdots+\frac{1}{4n^2-1}=\frac{n}{2n+1}$$

ขั้นฐาน : เนื่องจาก $\dfrac{1}{4\cdot 1^2-1}=\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{2\cdot 1+1}$ ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

ขั้นอุปนัย : ให้ $k\in\mathbb{N}$ สมมติ $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือ

$$\frac{1}{4\cdot 1^2-1}+\frac{1}{4\cdot 2^2-1}+\frac{1}{4\cdot 3^2-1}+\cdots+\frac{1}{4k^2-1}=\frac{k}{2k+1}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\cdot 1^2-1}+\frac{1}{4\cdot 2^2-1}+\cdots+\frac{1}{4k^2-1}+\frac{1}{4(k+1)^2-1}&=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{4(k+1)^2-1}\\&=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{[2(k+1)-1][2(k+1)+1]}\\&=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}\\&=\frac{1}{2k+1}\left[k+\frac{1}{2k+3}\right]\\&=\frac{1}{2k+1}\left[\frac{k(2k+3)+1}{2k+3}\right]\\&=\frac{1}{2k+1}\left[\frac{2k^2+3k+1}{2k+3}\right]\\&=\frac{1}{2k+1}\left[\frac{(2k+1)(k+1)}{2k+3}\right]\\&=\frac{k+1}{2(k+1)+1}\end{aligned}$$

ทำให้สรุปได้ว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เราสรุปได้ว่า

$$\frac{1}{4\cdot 1^2-1}+\frac{1}{4\cdot 2^2-1}+\frac{1}{4\cdot 3^2-1}+\cdots+\frac{1}{4n^2-1}=\frac{n}{2n+1}$$

สำหรับทุกจำนวนนับ n $\square$

2. **(5 คะแนน)** ให้ n เป็นจำนวนเต็มใด ๆ จงพิสูจน์ว่า $3 \mid n(n^4-1)$

บทพิสูจน์. ให้ n เป็นจำนวนเต็ม โดยขั้นตอนวิธีการหารมีจำนวนเต็ม q ซึ่ง $n = 3q$ หรือ $n = 3q+1$ หรือ $n = 3q+2$

กรณี $n = 3q$ จะได้ว่า

$$n(n^4-1) = 3q[(3q)^4-1] = 3[q(81q^4-1)]$$

ดังนั้น $3 \mid n(n^4-1)$

กรณี $n = 3q+1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} n(n^4-1) &= n(n^2-1)(n^2+1) \\ &= (3q+1)[(3q+1)^2-1][(3q+1)^2+1] \\ &= (3q+1)[9q^2+6q+1-1][9q^2+6q+1+1] \\ &= (3q+1)[9q^2+6q][9q^2+6q+2] \\ &= (3q+1)3(3q^2+2q)(9q^2+6q+2) \\ &= 3\left[(3q+1)(3q^2+2q)(9q^2+6q+2)\right] \end{aligned}$$

ดังนั้น $3 \mid n(n^4-1)$

กรณี $n = 3q+2$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} n(n^4-1) &= n(n^2-1)(n^2+1) \\ &= (3q+2)[(3q+2)^2-1][(3q+2)^2+1] \\ &= (3q+2)[9q^2+12q+4-1][9q^2+12q+4+1] \\ &= (3q+2)[9q^2+12q+3][9q^2+12q+5] \\ &= (3q+2)3(3q^2+4q+1)(9q^2+12q+5) \\ &= 3\left[(3q+2)(3q^2+4q+1)(9q^2+12q+5)\right] \end{aligned}$$

ดังนั้น $3 \mid n(n^4-1)$

$\square$

Quiz 1 (v.2) : ทฤษฎีจำนวน MAI1305

หัวข้อ อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ และขั้นตอนวิธีการหาร **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน

เวลา สัปดาห์ที่ 3 ปีการศึกษา 2/2566

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

ชื่อ–สกุล.. **รหัสนักศึกษา**.................................... **หมู่เรียน**............

---

1. **(5 คะแนน)** สำหรับจำนวนนับ n ใดๆ จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

$$\frac{2}{4 \cdot 1^2 - 1} + \frac{2}{4 \cdot 2^2 - 1} + \frac{2}{4 \cdot 3^2 - 1} + \cdots + \frac{2}{4n^2 - 1} = \frac{2n}{2n+1}$$

2. **(5 คะแนน)** ให้ n เป็นจำนวนเต็มใด ๆ จงพิสูจน์ว่า $3 \mid n(4n^2 - 1)$

คณิตศาสตร์

เฉลย Quiz 1 (v.2) : ทฤษฎีจำนวน MAI1305

หัวข้อ อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ และขั้นตอนวิธีการหาร **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน

เวลา สัปดาห์ที่ 3 ปีการศึกษา 2/2566

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. **(5 คะแนน)** สำหรับจำนวนนับ n ใดๆ จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

$$\frac{2}{4\cdot 1^2-1}+\frac{2}{4\cdot 2^2-1}+\frac{2}{4\cdot 3^2-1}+\cdots+\frac{2}{4n^2-1}=\frac{2n}{2n+1}$$

บทพิสูจน์. ให้ $n \in \mathbb{N}$ และ $P(n)$ แทนข้อความ

$$\frac{2}{4\cdot 1^2-1}+\frac{2}{4\cdot 2^2-1}+\frac{2}{4\cdot 3^2-1}+\cdots+\frac{2}{4n^2-1}=\frac{2n}{2n+1}$$

ขั้นฐาน : เนื่องจาก $\dfrac{2}{4\cdot 1^2-1}=\dfrac{2}{3}=\dfrac{2\cdot 1}{2\cdot 1+1}$ ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

ขั้นอุปนัย : ให้ $k \in \mathbb{N}$ สมมติ $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือ

$$\frac{2}{4\cdot 1^2-1}+\frac{2}{4\cdot 2^2-1}+\frac{2}{4\cdot 3^2-1}+\cdots+\frac{2}{4k^2-1}=\frac{2k}{2k+1}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\frac{2}{4\cdot 1^2-1}+\frac{2}{4\cdot 2^2-1}+\frac{2}{4\cdot 3^2-1}+\cdots+\frac{2}{4k^2-1}+\frac{2}{4(k+1)^2-1} &= \frac{2k}{2k+1}+\frac{2}{4(k+1)^2-1}\\
&= \frac{2k}{2k+1}+\frac{2}{[2(k+1)-1][2(k+1)+1]}\\
&= \frac{2k}{2k+1}+\frac{2}{(2k+1)(2k+3)}\\
&= \frac{2k}{2k+1}+\left[\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+3}\right]\\
&= \frac{2k+1}{2k+1}-\frac{1}{2k+3}\\
&= 1-\frac{1}{2k+3}\\
&= \frac{(2k+3)-1}{2k+3}\\
&= \frac{2k+2}{2k+3}\\
&= \frac{2(k+1)}{2(k+1)+1}
\end{aligned}$$

ทำให้สรุปได้ว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เราสรุปได้ว่า

$$\frac{2}{4\cdot 1^2-1}+\frac{2}{4\cdot 2^2-1}+\frac{2}{4\cdot 3^2-1}+\cdots+\frac{2}{4n^2-1}=\frac{2n}{2n+1}$$

สำหรับทุกจำนวนนับ n □

2. **(5 คะแนน)** ให้ n เป็นจำนวนเต็มใด ๆ จงพิสูจน์ว่า $3 \mid n(4n^2 - 1)$

บทพิสูจน์. ให้ n เป็นจำนวนเต็ม โดยขั้นตอนวิธีการหารมีจำนวนเต็ม q ซึ่ง $n = 3q$ หรือ $n = 3q+1$ หรือ $n = 3q+2$

กรณี $n = 3q$ จะได้ว่า

$$n(4n^2 - 1) = 3q[4(3q)^2 - 1] = 3(36q^3 - q)$$

ดังนั้น $3 \mid n(4n^2 - 1)$

กรณี $n = 3q + 1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} n(4n^2 - 1) &= (3q+1)[4(3q+1)^2 - 1] \\ &= (3q+1)[4(9q^2 + 6q + 1) - 1] \\ &= (3q+1)[36q^2 + 24q + 4 - 1] \\ &= (3q+1)[36q^2 + 24q + 3] \\ &= (3q+1)3[12q^2 + 8q + 1] \\ &= 3[(3q+1)(12q^2 + 8q + 1)] \end{aligned}$$

ดังนั้น $3 \mid n(4n^2 - 1)$

กรณี $n = 3q + 2$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} n(4n^2 - 1) &= (3q+2)[4(3q+2)^2 - 1] \\ &= (3q+2)[4(9q^2 + 12q + 4) - 1] \\ &= (3q+2)[36q^2 + 48q + 16 - 1] \\ &= (3q+2)[36q^2 + 48q + 15] \\ &= (3q+2)3[12q^2 + 16q + 5] \\ &= 3[(3q+2)(12q^2 + 16q + 5)] \end{aligned}$$

ดังนั้น $3 \mid n(4n^2 - 1)$

$\square$

Quiz 2 : ทฤษฎีจำนวน MAI1305

หัวข้อ พิสูจน์การหารลงตัวโดยอุปนัยฯ และสมบัติเชิงเส้นของ ห.ร.ม. **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน

เวลา สัปดาห์ที่ 5 ปีการศึกษา 2/2566

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

ชื่อ–สกุล.. **รหัสนักศึกษา**.......................................**หมู่เรียน**.............

---

1. **(5 คะแนน)** จงพิสูจน์ว่า

$$12 \mid (7^{2n} - 1) \qquad \text{ทุก ๆ } n \in \mathbb{N}$$

โดยใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

2. **(5 คะแนน)** ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่า

$$\text{ถ้า } a \mid b \quad \text{และ} \quad \gcd(a,b) = 1 \quad \text{แล้ว} \quad a = \pm 1$$

เฉลย Quiz 2 : ทฤษฎีจำนวน MAI1305

หัวข้อ พิสูจน์การหารลงตัวโดยอุปนัยฯ และสมบัติเชิงเส้นของ ห.ร.ม. **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน

เวลา สัปดาห์ที่ 5 ปีการศึกษา 2/2566

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. **(5 คะแนน)** จงพิสูจน์ว่า

$$12 \mid (7^{2n} - 1) \qquad \text{ทุก ๆ } n \in \mathbb{N}$$

โดยใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

บทพิสูจน์. ให้ $n \in \mathbb{N}$ และ $P(n)$ แทนข้อความ $12 \mid (7^{2n} - 1)$

ขั้นฐาน : เนื่องจาก $7^{2\cdot 1} - 1 = 48 = 12 \cdot 4$ นั่นคือ $12 \mid (7^2 - 1)$ ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

ขั้นอุปนัย : ให้ $k \in \mathbb{N}$ สมมติ $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือ $12 \mid (7^{2k} - 1)$ จะได้ว่ามี $x \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง

$$7^{2k} - 1 = 12x \qquad \text{หรือ} \qquad 7^{2k} = 12x + 1$$

พิจารณา

$$\begin{aligned} 7^{2(k+1)} - 1 = 7^{2k+2} - 1 &= 7^2 \cdot 7^{2k} - 1 \\ &= 49(12x + 1) - 1 \\ &= 49 \cdot 12x + 49 - 1 = 49 \cdot 12x + 48 \\ &= 12(49x + 4) \end{aligned}$$

ดังนั้น $12 \mid (7^{2(k+1)} - 1)$ ทำให้สรุปได้ว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

สรุปได้ว่า $12 \mid (7^{2n} - 1)$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$ $\square$

2. **(5 คะแนน)** ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่า

$$\text{ถ้า } a \mid b \quad \text{และ} \quad \gcd(a, b) = 1 \quad \text{แล้ว} \quad a = \pm 1$$

บทพิสูจน์. ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม

สมมติว่า $a \mid b$ และ $\gcd(a, b) = 1$ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม x, y, k ซึ่ง

$$1 = ax + by \quad \text{และ} \quad b = ak$$

ฉะนั้น

$$1 = ax + (ak)y = a(x + ky)$$

จะได้ว่า $a \mid 1$ ดังนั้น $a = \pm 1$ $\square$

คณิตศาสตร์

Quiz 3 : ทฤษฎีจำนวน MAI1305

หัวข้อ สมภาค และทฤษฎีบทเศษเหลือของจีน **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน

เวลา สัปดาห์ที่ 12 ปีการศึกษา 2/2566

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

ชื่อ–สกุล.. **รหัสนักศึกษา**...................................**หมู่เรียน**............

---

1. **(5 คะแนน)** จงใช้สมภาค (Congruent) ในการหาหลักหน่วยของจำนวน 2567^{2024}

2. **(5 คะแนน)** จงหาใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือของจีน (CRT) หาคำตอบของสมการ

$$66x \equiv 1 \pmod{91}$$

คณิตศาสตร์

เฉลย Quiz 3: ทฤษฎีจำนวน MAI1305

หัวข้อ สมภาค และทฤษฎีบทเศษเหลือของจีน **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน

เวลา สัปดาห์ที่ 12 ปีการศึกษา 2/2566

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. **(5 คะแนน)** จงใช้สมภาค (Congruent) ในการหาหลักหน่วยของจำนวน 2567^{2024}

แนวคำตอบ

$$\begin{aligned} 2567 &\equiv 7 && \pmod{10} \\ 2567^2 &\equiv 7^2 \equiv -1 && \pmod{10} \\ (2567^2)^{1012} &\equiv (-1)^{1012} && \pmod{10} \\ 2567^{2024} &\equiv 1 && \pmod{10} \end{aligned}$$

ดังนั้น หลักหน่วยของจำนวน 2567^{2024} คือ 1 $\#$

2. **(5 คะแนน)** จงหาใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือของจีน (CRT) หาคำตอบของสมการ

$$66x \equiv 1 \pmod{91}$$

แนวคำตอบ เนื่องจาก $91 = 7 \cdot 13$ และ $\gcd(7, 13) = 1$ คำตอบของ x สอดคล้องระบบสมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned} 66x &\equiv 1 \pmod{7} \\ 66x &\equiv 1 \pmod{13} \end{aligned}$$

พิจารณา $66x \equiv 1 \pmod{7}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 3x &\equiv 1 \pmod{7} \\ 15x &\equiv 5 \pmod{7} \\ x &\equiv 5 \pmod{7} \end{aligned}$$

พิจารณา $66x \equiv 1 \pmod{13}$ จะได้ว่า

$$x \equiv 1 \pmod{13}$$

ดังนั้นหาคำตอบของระบบสมการต่อไปนี้ โดยใช้ CRT

$$\begin{aligned} x &\equiv 5 \pmod{7} \\ x &\equiv 1 \pmod{13} \end{aligned}$$

พิจารณา

$$\begin{aligned} 13x &\equiv 1 \pmod{7} &\longrightarrow&\quad x_1 = -1 \\ 7x &\equiv 1 \pmod{13} &\longrightarrow&\quad x_2 = 2 \end{aligned}$$

จะได้ว่า $x_0 = 5(13)(-1) + 1(7)(2) = -51$ ดังนั้นคำตอบของสมการ $66x \equiv 1 \pmod{91}$ คือ

$$\begin{aligned} x &\equiv -51 \pmod{91} \\ x &\equiv 40 \pmod{91} \end{aligned}$$

คณิตศาสตร์

Quiz 4 : ทฤษฎีจำนวน MAI1305

หัวข้อ ทฤษฎีบทของวิลสัน ฟังก์ชันเทาและฟังก์ชันซิกมา **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน

เวลา สัปดาห์ที่ 14 ปีการศึกษา 2/2566

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

ชื่อ–สกุล.. **รหัสนักศึกษา**.....................................**หมู่เรียน**.............

---

1. **(5 คะแนน)** จงหา**เศษเหลือ**ที่เกิดจากหาร

$$66! + 2 \cdot 65! + 2 \cdot 64! \quad \text{ด้วย} \quad 67$$

2. **(5 คะแนน)** กำหนดให้

$$X = \sum_{d|66} \tau(d^2)$$

จงหาค่าของ $\sigma(X)$

คณิตศาสตร์

เฉลย Quiz 4: ทฤษฎีจำนวน MAI1305

หัวข้อ ทฤษฎีบทของวิลสัน ฟังก์ชันเทาและฟังก์ชันซิกมา **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน

เวลา สัปดาห์ที่ 14 ปีการศึกษา 2/2566

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. **(5 คะแนน)** จงหา**เศษเหลือ**ที่เกิดจากหาร

$$66! + 2 \cdot 65! + 2 \cdot 64! \quad \text{ด้วย} \quad 67$$

แนวคำตอบ เนื่องจาก 67 เป็นจำนวนเฉพาะ โดยทฤษฎีของวิลสัน จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
(67-1)! &\equiv -1 \pmod{67}\\
66! &\equiv -1 \pmod{67}\\
66\cdot 65! &\equiv -1 \pmod{67}\\
-1\cdot 65! &\equiv -1 \pmod{67}\\
65! &\equiv 1 \pmod{67}\\
65\cdot 64! &\equiv 1 \pmod{67}\\
-2\cdot 64! &\equiv 1 \pmod{67}\\
-66\cdot 64! &\equiv 33 \pmod{67}\\
64! &\equiv 33 \pmod{67}
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
66! + 2\cdot 65! + 2\cdot 64! &\equiv -1 + 2\cdot 1 + 2\cdot 33 \pmod{67}\\
&\equiv 67 \pmod{67}\\
&\equiv 0 \pmod{67}
\end{aligned}$$

สรุปได้ว่าเศษเหลือที่เกิดจากหาร $66! + 2\cdot 65! + 2\cdot 64!$ ด้วย 67 เท่ากับ 0 $\#$

2. **(5 คะแนน)** กำหนดให้

$$X = \sum_{d|66} \tau(d^2)$$

จงหาค่าของ $\sigma(X)$

แนวคำตอบ เนื่องจากตัวหารของ 66 คือ 1, 2, 3, 6, 11, 22, 33, 66 ดังนั้น

$$\begin{aligned}
X = \sum_{d|66}\tau(d^2) &= \tau(1^2)+\tau(2^2)+\tau(3^2)+\tau(6^2)+\tau(11^2)+\tau(22^2)+\tau(33^2)+\tau(66^2)\\
&= 1+3+3+\tau(2^2\cdot 3^2)+3+\tau(2^2\cdot 11^2)+\tau(3^2\cdot 11^2)+\tau(2^2\cdot 3^2\cdot 11^2)\\
&= 1+3+3+(2+1)(2+1)+3+(2+1)(2+1)+(2+1)(2+1)+(2+1)(2+1)(2+1)\\
&= 1+3+3+9+3+9+9+27\\
&= 64
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\sigma(X) = \sigma(64) = \sigma(2^6) = \frac{2^7-1}{2-1} = \frac{128-1}{1} = 127 \quad \#$$

Quiz 4 (เพิ่มเติ่ม) : ทฤษฎีจำนวน MAI1305

หัวข้อ ทฤษฎีบทของวิลสัน ฟังก์ชันเทาและฟังก์ชันซิกมา **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
เวลา สัปดาห์ที่ 14 ปีการศึกษา 2/2566
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
ชื่อ–สกุล.. **รหัสนักศึกษา**.....................................**หมู่เรียน**.............

---

1. **(5 คะแนน)** จงหา**เศษเหลือ**ที่เกิดจากหาร

$$4 \cdot 66! + 3 \cdot 65! + 2 \cdot 64! \quad \text{ด้วย} \quad 67$$

2. **(5 คะแนน)** กำหนดให้

$$X = \sum_{d|50} \tau(d^2)$$

จงหาค่าของ $\sigma(2X)$

คณิตศาสตร์

เฉลย Quiz 4: ทฤษฎีจำนวน MAI1305

หัวข้อ ทฤษฎีบทของวิลสัน ฟังก์ชันเทาและฟังก์ชันซิกมา **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน

เวลา สัปดาห์ที่ 14 ปีการศึกษา 2/2566

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. **(5 คะแนน)** จงหา**เศษเหลือ**ที่เกิดจากหาร

$$4 \cdot 66! + 3 \cdot 65! + 2 \cdot 64! \quad \text{ด้วย} \quad 67$$

แนวคำตอบ เนื่องจาก 67 เป็นจำนวนเฉพาะ โดยทฤษฎีของวิลสัน จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
(67-1)! &\equiv -1 \pmod{67} \\
66! &\equiv -1 \pmod{67} \\
66 \cdot 65! &\equiv -1 \pmod{67} \\
-1 \cdot 65! &\equiv -1 \pmod{67} \\
65! &\equiv 1 \pmod{67} \\
65 \cdot 64! &\equiv 1 \pmod{67} \\
-2 \cdot 64! &\equiv 1 \pmod{67} \\
-66 \cdot 64! &\equiv 33 \pmod{67} \\
64! &\equiv 33 \pmod{67}
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
4 \cdot 66! + 3 \cdot 65! + 2 \cdot 64! &\equiv 4(-1) + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 33 \pmod{67} \\
&\equiv 65 \pmod{67}
\end{aligned}$$

สรุปได้ว่าเศษเหลือที่เกิดจากหาร $4 \cdot 66! + 3 \cdot 65! + 2 \cdot 64!$ ด้วย 67 เท่ากับ 65 #

2. **(5 คะแนน)** กำหนดให้

$$X = \sum_{d|50} \tau(d^2)$$

จงหาค่าของ $\sigma(2X)$

แนวคำตอบ เนื่องจากตัวหารของ 50 คือ 1, 2, 5, 10, 25, 50 ดังนั้น

$$\begin{aligned}
X = \sum_{d|50} \tau(d^2) &= \tau(1^2) + \tau(2^2) + \tau(5^2) + \tau(10^2) + \tau(25^2) + \tau(50^2) \\
&= 1 + 3 + 3 + \tau(2^2 \cdot 5^2) + \tau(5^4) + \tau(2 \cdot 5^2) \\
&= 1 + 3 + 3 + (2+1)(2+1) + 5 + (1+1)(2+1) \\
&= 1 + 3 + 3 + 9 + 5 + 6 \\
&= 27
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\sigma(2X) = \sigma(2 \cdot 3^3) = \sigma(2)\sigma(3^3) = (1+2) \cdot \frac{3^4-1}{3-1} = \frac{128-1}{1} = 3 \cdot 40 = 120 \quad \#$$