เอกสารประกอบการสอนวิชา

รายวิชาแคลคูลัส 1

(Calculus 1)

ธนัชยศ จำปาหวาย

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์

มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

2565

เอกสารประกอบการสอน
รายวิชาแคลคูลัส 1
(Calculus 1)

ธนัชยศ จำปาหวาย
วท.ด. (คณิตศาสตร์)
วท.ม. (คณิตศาสตร์)
วท.บ. (คณิตศาสตร์)

คณะครุศาสตร์
มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
2565

คำนำ

เอกสารคำสอนวิชาแคลคูลัส 1 เล่มนี้ เป็นส่วนหนึ่งของหลักสูตรครุศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ (4 ปี) (หลักสูตรปรับปรุง พ.ศ. 2562) โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อเป็นแหล่งเรียนรู้เกี่ยวกับแคลคูลัสอันประกอบไปด้วย วิวัฒนาการของแคลคูลัส ลิมิต ความต่อเนื่อง อนุพันธ์ และปริพันธ์ โดยแบ่งเนื้อหาออกเป็น 8 บท ประกอบไปด้วย เบื้องต้นแคลคูลัส ลิมิตและความต่อเนื่อง อนุพันธ์ของฟังก์ชัน การประยุกต์ของอนุพันธ์ ปริพันธ์ เทคนิคการหาปริพันธ์ การประยุกต์ปริพันธ์ และปริพันธ์ไม่ตรงแบบ โดยคำศัพท์ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในเล่มนี้ ผู้เขียนจะใช้ตามพจนานุกรมศัพท์ทางคณิตศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสภา พ.ศ.2559

เนื้อหาในเล่มนี้เรียบเรียงมาจากประสบการณ์การสอนที่สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา ในรายวิชาแคลคูลัสสำหรับครู แคลคูลัส 1 และคณิตศาสตร์ 1 ซึ่งเนื้อหาวิชาเหล่านั้นมีครบทั้ง 8 บทตามเอกสารคำสอนเล่มนี้ ผู้เขียนมุ่งหวังว่าเอกสารคำสอนเล่มนี้ จะเป็นเอกสารอ่านประกอบการเรียนในวิชาดังกล่าวได้ดียิ่งขึ้น

คณิตศาสตร์ 1 มีรายละเอียดวิชาเช่นเดียวกับวิชาแคลคูลัส แต่ออกแบบให้กระชับและเหมาะสมกับครูคณิตศาสตร์มากยิ่งขึ้น การเรียนในวิชานี้ต้องอาศัยความพื้นฐานในระดับมัธยมโดยผู้เขียนได้สรุปไว้ในบทที่ 1 ในหัวคณิตศาสตร์พื้นฐาน ซึ่งจะทำให้ผู้เรียนได้ทบทวนและทำความเข้าใจก่อนเข้าเนื้อหาในรายวิชานี้

แคลคูลัสนั้นมีบทบาทสำคัญในการนำไปใช้หลายด้าน ๆ เช่นวิทยาศาสตร์ และวิศวกรรศาสตร์ เป็นต้น แต่เนื้อหาเล่มนี้จะมุ่งเน้นไปที่ความเข้าใจเบื้องต้นเพื่อให้นักศึกษานำไปใช้ระดับสูงหรือถ่ายทอดต่อไป

เอกสารคำสอนเล่มนี้จะเกิดขึ้นไม่ได้ถ้าไม่มีครูอาจารย์ที่คอยอบรมสั่งสอนและเป็นแบบอย่างที่ดีแก่ผู้เขียน โดยเฉพาะอย่างยิ่งอาจารย์ในภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ผู้เป็นต้นแบบการสอนคณิตศาสตร์ของผู้เขียน รวมถึงบิดามารดาและพี่น้องอาจารย์ในสาขาวิชาคณิตศาสตร์ที่ช่วยอ่านและให้คำแนะนำเพื่อให้ตำราเล่มนี้สมบูรณ์มากยิ่งขึ้น และลูกศิษย์รุ่นปัจจุบันที่ช่วยหาคำผิดอย่างตั้งใจ สุดท้ายหวังว่าเอกสารประกอบการสอนเล่มนี้จะเป็นประโยชน์แก่นักศึกษาและผู้ที่สนใจ

ธนัชยศ จำปาหวาย
2565

แผนบริหารการจัดการเรียนรู้

ภาคเรียนที่ 1/2563 **ระดับครุศาสตรบัณฑิต**

MAC1302 **แคลคูลัส** 1

(Mathematics 1)

หน่วยกิต 3(3-0-6) **สาขาวิชาคณิตศาสตร์**

หมวดที่ 1 หลักการและเป้าประสงค์ของรายวิชา

การเรียนการสอนคณิตศาสตร์เปลี่ยนแปลงตามยุคและสมัยมาโดยตลอด และต้องการพัฒนารูปแบบการสอนและสื่อนวัตกรรมใหม่อยู่เสมอ เพื่อให้ผู้เรียนสามารถเรียนรู้ได้อย่างเต็มศักยภาพของตนเอง การเรียนคณิตศาสตร์ในปัจจุบันผู้เรียนต้องสามารถแสวงหาความรู้ได้ด้วยตนเอง ผ่านการลงมือปฏิบัติ โดยมีผู้สอนคอยให้คำแนะนำ ในวิชาคณิตศาสตร์ 1 ซึ่งมีเนื้อหาเกี่ยวกับแคลคูลัสซึ่งเป็นวิชาที่มีความสำคัญในการเรียนระดับมหาวิทยาลัย ในแทบทุกหลักสูตร อันเนื่องมากจากการอธิบายปรากฏการณ์ต่าง ๆ มักจะใช้ความรู้เกี่ยวกับแคลคูลัส ผู้ที่เรียนแคลคูลัสจะเข้าใจได้อย่างลึกซึ้งต้องอาศัยทักษะพื้นฐาน และความเข้าใจเกี่ยวกับกราฟการเปลี่ยนแปลงต่าง ๆ ที่อยู่รอบตัวอันจะทำให้เรียนรู้วิชานี้ได้ดียิ่งขึ้น คำว่าลิมิตซึ่งอธิบายการเข้าใกล้ค่าหนึ่งแต่ไม่ใช่สิ่งนั้นเป็นจุดเริ่มต้นวิชาแคลคูลัส ซึ่งจะใช้อธิบายความต่อเนื่องที่หมายถึงเส้นที่เชื่อมติดกันโดยไร้รอยต่อ และนำลิมิตไปอธิบาย อัตราการเปลี่ยนแปลงขณะหนึ่งที่เรียกว่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน แล้วนำอนุพันธ์ไปประยุกต์ใช้กับปัญหาค่าสูงสุดต่ำสุด การร่างกราฟ การประมาณค่าเชิงเส้น หลักเกณฑ์ลอปีตาล สุดท้ายการทำย้อนกลับของอนุพันธ์เรียกว่าปริพันธ์ เรียกว่าปฏิยานุพันธ์แล้วมีความหมายเดียวกับพื้นที่ใต้กราฟจากการเสนอทฤษฎีบทหลักมูลแคลคูลัส ซึ่งมีประโยชน์ในการหาพื้นที่รูปแบบต่าง ๆ ที่กล่าวมาแสดงให้เห็นว่าแคลคูสมีความสำคัญต่อการนำไปใช้ประโยชน์ด้านต่าง ๆ ทำให้เกิดความเข้าใจปราฏการณ์ต่าง ๆ รอบตัวได้ดียิ่งขึ้น

หมวดที่ 2 ผลลัพธ์การเรียนรู้

หลังจากที่ศึกษาและเรียนรู้ในรายวิชาคณิตศาสตร์ 1 นักศึกษาจะต้องมีความรู้ ความสามารถและคุณลักษณะที่ต้องการดังต่อไปนี้

1. เพื่อให้นักศึกษารู้ วิวัฒนการของวิชาแคลคูลัสและทบทวนความรู้เบื้องต้น
2. เพื่อให้นักศึกษารู้ เข้าใจลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันต่าง ๆ
3. ใช้พีชคณิตและทฤษฏีบทของลิมิตเพื่อหาค่าลิมิตรูปแบบต่าง ๆ ได้
4. เพื่อให้นักศึกษาเข้าใจความหมาย และหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่าง ๆ โดยนิยามและกฎของอนุพันธ์ได้

(3)

5. เพื่อให้นักศึกสามารถนำอนุพันธ์ไปประยุกต์ใช้กับปัญหาที่กำหนดให้ เช่น ปัญหาค่าสูงสุดต่ำสุด การร่างกราฟ และหลักเกณฑ์ลอปีตาล
6. เพื่อให้นักศึกษาเข้าใจความหมายของปริพันธ์ และหาปริพันธ์โดยใช้ปฏิยานุพันธ์ได้
7. เพื่อให้นักศึกษาเข้าใจความหมายของปริพันธ์จำกัดเขต และหาปริพันธ์โดยใช้กราฟได้
8. เพื่อให้นักศึกษาเข้าใจและหาปริพันธ์จำกัดเขตโดยใช้ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัสได้
9. เพื่อให้นักศึกษาสามารถหาปริพันธ์โดยใช้เทคนิคที่เหมาะสมได้
10. เพื่อให้นักศึกษาสามารถหาพื้นที่โดยใช้ปริพันธ์
11. เพื่อให้นักศึกษาสามารถหาปริมาตรซึ่งหาพื้นที่ตัดได้ และที่เกิดจากการหมุน
12. เพื่อให้นักศึกษาสามารถหาปริพันธ์ไม่ตรงแบบ

หมวดที่ 3 ลักษณะและการดำเนินการ

คำอธิบายรายวิชา

ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน อนุพันธ์ของฟังก์ชันหนึ่งตัวแปรและการประยุกต์ การหาปริพันธ์ ปริพันธ์จำกัดเขตและการประยุกต์ ปริพันธ์ไมตรงแบบ

จำนวนชั่วโมงของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

จำนวนชั่วโมงของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ไม่น้อยกว่า 51 ชั่วโมงต่อภาคเรียน เวลาที่ใช้สอนแบ่งเป็น

การสอนภาคบรรยายทฤษฎี	51	ชั่วโมง
การสอนภาคปฏิบัติ	-	ชั่วโมง
การศึกษาด้วยตัวเอง	102	ชั่วโมง

มอบหมายงานให้นักศึกษาทำการศึกษาเอกสาร และงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับหลักการคณิตศาสตร์ และสื่อมัลติมีเดียที่เกี่ยวข้อง และให้ศึกษาเพิ่มเติมจากเว็ปไซต์เชิงวิชาการที่เกี่ยวข้อง

จำนวนชั่วโมงต่อสัปดาห์ที่อาจารย์ให้คำปรึกษา

การให้คำปรึกษาเป็นรายบุคคล คนละไม่น้อยกว่า 1 ชั่วโมงต่อสัปดาห์

หมวดที่ 4 ผลลัพธ์การเรียนรู้ประจำหน่วย

หลังจากที่ศึกษาและเรียนรู้ในรายวิชาคณิตศาสตร์ 1 นักศึกษาจะต้องมีความรู้ ความสามารถและคุณลักษณะที่ต้องการดังต่อไปนี้

1. เพื่อให้นักศึกษารู้ วิวัฒนการของวิชาแคลคูลัสและทบทวนความรู้เบื้องต้น
2. เพื่อให้นักศึกษารู้ เข้าใจลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันต่าง ๆ
3. ใช้พีชคณิตและทฤษฎีบทของลิมิตเพื่อหาค่าลิมิตรูปแบบต่าง ๆ ได้
4. เพื่อให้นักศึกษาเข้าใจความหมาย และหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่าง ๆ โดยนิยามและกฎของอนุพันธ์ได้
5. เพื่อให้นักศึกสามารถนำอนุพันธ์ไปประยุกต์ใช้กับปัญหาที่กำหนดให้ เช่น ปัญหาค่าสูงสุดต่ำสุด การร่างกราฟ และหลักเกณฑ์ลอปีตาล
6. เพื่อให้นักศึกษาเข้าใจความหมายของปริพันธ์ และหาปริพันธ์โดยใช้ปฏิยานุพันธ์ได้
7. เพื่อให้นักศึกษาเข้าใจความหมายของปริพันธ์จำกัดเขต และหาปริพันธ์โดยใช้กราฟได้
8. เพื่อให้นักศึกษาเข้าใจและหาปริพันธ์จำกัดเขตโดยใช้ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัสได้
9. เพื่อให้นักศึกษาสามารถหาปริพันธ์โดยใช้เทคนิคที่เหมาะสมได้
10. เพื่อให้นักศึกษาสามารถหาพื้นที่โดยใช้ปริพันธ์
11. เพื่อให้นักศึกษาสามารถหาปริมาตรซึ่งหาพื้นที่ตัดได้ และที่เกิดจากการหมุน
12. เพื่อให้นักศึกษาสามารถหาปริพันธ์ไม่ตรงแบบ

หมวดที่ 5 แผนการจัดการเรียนรู้และวิธีการประเมินผลการเรียนรู้

แผนการจัดการเรียนรู้ในรายวิชานี้ ได้ออกแบบตามผลลัพธ์การเรียนรู้หลักของรายวิชาที่กำหนดไว้ข้างต้น โดยครอบคลุม 10 ข้อประกอบไปด้วย

1. ผลลัพธ์การเรียนรู้ของรายวิชานี้มี 10 ข้อ (ดังตารางที่ 1)
2. หัวข้อเนื้อหา/สาระ (Contents to be learned)
   ในรายวิชาหลักการคณิตศาสตร์สำหรับครูได้กำหนดหัวข้อ/สาระ ไว้ดังนี้ เบื้องต้นแคลคูลัส ลิมิตและความต่อเนื่อง อนุพันธ์ของฟังก์ชัน การประยุกต์ของอนุพันธ์ ปริพันธ์ เทคนิคการหาปริพันธ์ การประยุกต์ของปริพันธ์ และปริพันธ์ไม่ตรงแบบ
3. เทคนิควิธีสอน
   การสอนในรายวิชานี้ ประกอบไปด้วย
   3.1 วิธีสอนแบบบรรยาย (Lecture Method) โดยการทบทวนความรู้เดิมผู้เรียน โดยตั้งคำถามและทำแบบทดสอบความรู้เดิม เพื่อนำไปสู่การบรรยาย

3.2 วิธีสอนแบบอภิปราย (Discussion Method) แบ่งผู้เรียนเป็นกลุ่ม ๆ โดยการกำหนดหัวข้อ แล้วให้แต่ละกลุ่มนำเสนอและอภิปราย จากนั้นผู้สอนอภิปรายเพื่อนำไปสู่การสรุปเนื้อหาและความรู้ที่ตรงตามวัตถุประสงค์

3.3 วิธีสอนแบบสืบเสาะ (Inquiry Method) โดยให้ผู้เรียนรู้จักสืบเสาะหาความรู้จาก เอกสาร ตำรา หนังสือ หรือค้นหาจากอินเตอร์เน็ต

3.4 วิธีสอนแบบเปิด (Open Approach) โดยใช้ตั้งคำถามเชิงลึกเพื่อให้ผู้เรียนพบความรู้ด้วยตนเอง จากการลงมือปฏิบัติจริง

ตารางที่ 1. การกระจายผลลัพธ์การเรียนรู้ เนื้อหา/สาระ วิธีการสอน/กิจกรรมการเรียนรู้ หลักฐาน/ผลงาน สื่อและการประเมินผลการเรียนรู้

สปด./ชม.	ผลลัพธ์การเรียนรู้	หัวข้อเนื้อหา/สาระ	เทคนิคการสอน/กิจกรรม	หลักฐานการเรียนรู้ ผลงาน	สื่อการเรียนรู้	การวัด/การประเมินผล
1/3	1.เพื่อให้นักศึกษารู้วิวัฒนการของวิชาแคลคูลัสและทบทวนความรู้เบื้องต้น	-ระเบียบวิธีเกษียณ -ผลต่างสามเหลี่ยม -แคลคูลัสสมัยใหม่ -คณิตศาสตร์วิเคราะห์ -คณิตศาสตร์พื้นฐาน	-วิธีการสอนแบบบรรยาย	-ใบบันทึกกิจกรรม	-power point -สื่อออนไลน์	-ประเมินจากใบบันทึกกิจกรรม
2/3	2.เพื่อให้นักศึกษารู้เข้าใจลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันต่าง ๆ 3.ใช้พีชคณิตและทฤษฎีบทของลิมิตเพื่อหาค่าลิมิตรูปแบบต่าง ๆ ได้	-ลิมิตของฟังก์ชัน -ลิมิตด้านเดียว -ลิมิตของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	-วิธีการสอนแบบบรรยาย	-ใบบันทึก assignment	-power point	-ประเมินจากใบบันทึก assignment
3/3	2.เพื่อให้นักศึกษารู้เข้าใจลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันต่าง ๆ 3.ใช้พีชคณิตและทฤษฎีบทของลิมิตเพื่อหาค่าลิมิตรูปแบบต่าง ๆ ได้	-ลิมิตเกี่ยวกับอนันต์ -ลิมิตที่อนันต์ -ลิมิตอนันต์ -ความต่อเนื่อง	-วิธีการสอนแบบบรรยาย	-ใบบันทึก assignment	-power point -สื่อออนไลน์	-ประเมินจากใบบันทึก assignment -ประเมินจากรายงานกลุ่ม

สปด./ชม.	ผลลัพธ์การเรียนรู้	หัวข้อเนื้อหา/สาระ	เทคนิคการสอน/กิจกรรม	หลักฐานการเรียนรู้ ผลงาน	สื่ อการเรียนรู้	การวัด/การประเมินผล
4/3	4.เพื่อให้นักศึกษาเข้าใจความหมายและหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่าง ๆ โดยนิยามและกฎของอนุพันธ์ได้	-อัตราการ -เปลี่ยนแปลง -อนุพันธ์ของฟังก์ชัน -กฎของอนุพันธ์ -กฎลูกโซ่ แบบผันกลับได้	-วิธีการสอนแบบบรรยาย	-ใบบันทึก assignment	-power point	-ประเมินจากใบบันทึก assignment
5/3	4.เพื่อให้นักศึกษาเข้าใจความหมายและหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่าง ๆ โดยนิยามและกฎของอนุพันธ์ได้ของอนุพันธ์ได้	-อนุพันธ์อันดับสูง -อนุพันธ์ของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง -อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ -อนุพันธ์ของฟังก์ชันที่นิยามโดยปริยาย	-วิธีการสอนแบบบรรยาย	-ใบบันทึก assignment	-power point	-ประเมินจากใบบันทึก assignment
6/3	5.เพื่อให้นักศึกษาสามารถนำอนุพันธ์ไปประยุกต์ใช้กับปัญหาที่กำหนด เช่น ปัญหาค่าสูงสุดต่ำสุด การร่างกราฟ และหลักเกณฑ์ลอปีตาล	-การประมาณค่าเชิงเส้น -ค่าสุดขีด - ความเว้าและจุดเปลี่ยนเว้า	-วิธีการสอนแบบบรรยาย	-ใบบันทึก assignment	-power point	-ประเมินจากใบบันทึก assignment
7/3	5.เพื่อให้นักศึกษาสามารถนำอนุพันธ์ไปประยุกต์ใช้กับปัญหาที่กำหนด เช่น ปัญหาค่าสูงสุดต่ำสุด การร่างกราฟ และหลักเกณฑ์ลอปีตาล	-การร่างกราฟ อัตราสัมพัทธ์ -หลักเกณฑ์ ลอปีตาล	-วิธีการสอนแบบบรรยาย	-ใบบันทึก assignment	-power point	-ประเมินจากใบบันทึก assignment
8/3	สอบกลางภาค					
9/3	6.เพื่อให้นักศึกษาเข้าใจความหมายของปริพันธ์ และหาปริพันธ์โดยใช้ปฏิยานุพันธ์ได้	-ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต ปฏิยานุพันธ์ -การหาปริพันธ์ โดยการแทนค่า	-วิธีการสอนแบบบรรยาย	-ใบบันทึก assignment	-power point	-ประเมินจากใบบันทึก assignment

สปด./ชม.	ผลลัพธ์การเรียนรู้	หัวข้อเนื้อหา/สาระ	เทคนิคการสอน/กิจกรรม	หลักฐานการเรียนรู้ ผลงาน	สื่อการเรียนรู้	การวัด/การประเมินผล
10/3	7.เพื่อให้นักศึกษาเข้าใจความหมายของปริพันธ์จำกัดเขตและหาปริพันธ์โดยใช้กราฟได้ 8. เพื่อให้นักศึกษาเข้าใจและหาปริพันธ์จำกัดเขตโดยใช้ทฤษฎีบทหลักมูลได้	-ปริพันธ์จำกัดเขต -พื้นที่กับปริพันธ์จำกัดเขต -ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส	-วิธีการสอนแบบบรรยาย	-ใบบันทึก assignment	-power point -สื่อออนไลน์	-ประเมินจากใบบันทึก assignment
11/3	9.เพื่อให้นักศึกษารู้สามารถหาปริพันธ์โดยใช้เทคนิคที่เหมาะสมได้	-ปริพันธ์โดยการแยกส่วน -ปริพันธ์ของฟังก์ชันตรรกยะ	-วิธีการสอนแบบบรรยาย	-ใบบันทึก assignment	-power point	-ประเมินจากใบบันทึก assignment
12/3	9.เพื่อให้นักศึกษารู้สามารถหาปริพันธ์โดยใช้เทคนิคที่เหมาะสมได้	-ปริพันธ์ของฟังก์ชันตรรกยะในรูปตรีโกณมิติ -ปริพันธ์ของฟังก์ชันในรูปกรณ์	-วิธีการสอนแบบบรรยาย	-ใบบันทึก assignment	-power point	-ประเมินจากใบบันทึก assignment
13/3	9.เพื่อให้นักศึกษารู้สามารถหาปริพันธ์โดยใช้เทคนิคที่เหมาะสมได้	-ปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ -ปริพันธ์โดยการแทนค่าตรีโกณมิติ	-วิธีการสอนแบบบรรยาย	-ใบบันทึก assignment	-power point	-ประเมินจากใบบันทึก assignment
14/3	10.เพื่อให้นักศึกษาสามารถหาพื้นที่โดยใช้ปริพันธ์ 11. เพื่อให้นักศึกษาสามารถหาปริมาตรของรูปทรงตันซึ่งหาพื้นที่ตัดได้และที่เกิดจากการหมุน	-พื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง -ปริมาตรของรูปทรงตันซึ่งหาพื้นที่ตัดได้	-วิธีการสอนแบบบรรยาย -วิธีสอนแบบอภิปราย	-ใบบันทึก assignment	-power point -สื่อออนไลน์	-ประเมินจากใบบันทึก assignment -ประเมินจากรายงานกลุ่ม
15/3	11. เพื่อให้นักศึกษาสามารถหาปริมาตรของรูปทรงตันซึ่งหาพื้นที่ตัดได้และเกิดจากการหมุน	-ปริมาตรที่เกิดจากการหมุน -วิธีแบบจาน -วิธีแบบเปลือกทรงกระบอก	-วิธีการสอนแบบบรรยาย -วิธีสอนแบบสืบเสาะ	-ใบบันทึก assignment	-power point	-ประเมินจากใบบันทึก assignment

สปด./ชม.	ผลลัพธ์การเรียนรู้	หัวข้อเนื้อหา/สาระ	เทคนิคการสอน/กิจกรรม	หลักฐานการเรียนรู้ ผลงาน	สื่อการเรียนรู้	การวัด/การประเมินผล
16/3	12.เพื่อให้นักศึกษาสามารถหาปริพันธ์ไม่ตรงแบบ	-ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง --ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สอง -ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดผสม	-วิธีการสอนแบบบรรยาย	-ใบบันทึก assignment	-power point -สื่อออนไลน์	-ประเมินจากใบบันทึก assignment
17/3	สอบปลายภาค					

ตารางที่ 2. ปฏิทินและแผนการนำเสนอเนื้อหาสาระและกิจกรรมการเรียนรู้

วันที่	สปด. ที่	เนื้อหา/วิธีการสอน/กิจกรรม	นักศึกษา/อาจารย์
ส.ค.	1	-ระเบียบวิธีเกษียณ -สามเหลี่ยมผลต่าง -แคลคูลลัสสมัยใหม่ -คณิตศาสตร์วิเคราะห์ -คณิตศาสตร์เบื้องต้น เซต พหุนาม เลขยกกำลัง ลอการิทึม ตรีโกณมิติ กราฟเส้นตรง และวงกลม	ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย
	2	-ลิมิตของฟังก์ชัน -ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต -ลิมิตด้านเดียว -ทฤษฎีบทการบีบ -ลิมิตของฟังก์ชันตรีโกณมิติ -ทฤษฎีบทการบีบ	ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย
ก.ย.	3	-ลิมิตเกี่ยวที่อนันต์ -ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตอนันต์ -ลิมิตอนันต์ -ความต่อเนื่อง -ความต่อเนื่องทางด้านขวา -ความต่อเนื่องทางด้านซ้าย	ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย

วันที่	สปด. ที่	เนื้อหา/วิธีการสอน/กิจกรรม	นักศึกษา/อาจารย์
	4	-อัตราการเปลี่ยนแปลง -อนุพันธ์ของฟังก์ชัน -กฎของอนุพันธ์ -กฎลูกโซ่	ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย
	5	-อนุพันธ์อันดับสูง -อนุพันธ์ของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง -อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ -อนุพันธ์ของฟังก์ชันที่นิยามโดยปริยาย	ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย
	6	-การประมาณค่าเชิงเส้น -ค่าสุดขีด -ความเว้าและจุดเปลี่ยนเว้า	ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย
ต.ค.	7	-การร่างกราฟ -อัตราสัมพัทธ์ -หลักเกณฑ์ลอปีตาล	ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย
	8	สอบกลางภาค	นักศึกษา / ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย
	9	-ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต -ปฏิยานุพันธ์ -การปริพันธ์โดยการแทนค่า	ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย
	10	-ปริพันธ์จำกัดเขต -พื้นที่กับปริพันธ์จำกัดเขต -ทฤษฎีบทหลักมูลแคลคูลัส	ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย
พ.ย.	11	-ปริพันธ์โดยการแยกส่วน -ปริพันธ์ของฟังก์ชันตรรกยะ	ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย
	12	-ปริพันธ์ของฟังก์ชันตรรกยะในรูปตรีโกณมิติ -ปริพันธ์ของฟังก์ชันในรูปกรณฑ์	ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย
	13	-ปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ -ปริพันธ์โดยการแทนค่ตรีโกณมิติ	ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย
	14	-พื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง -ปริมาตรของรูปทรงตันซึ่งหาพื้นที่ตัดได้	นักศึกษา/ ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย
ธ.ค.	15	-ปริมาตรการเกิดจากการหมุน -วิธีแบบจาน -วิธีเปลือกทรงกระบอก	ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย
	16	-ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง -ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สอง -ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดผสม	ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย
	17	สอบปลายภาค	นักศึกษา/ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย

การประเมินผลการเรียนรู้
การประเมินผลการเรียนรู้ภาคทฤษฎี และการมีส่วนร่วมในการเรียนรู้ (40 %)

ความตั้งใจ ความสนใจเรียน	10%
คะแนนระหว่างเรียน (Assignment)	10%
โครงการรายกลุ่ม (Project)	5%
การบ้าน	5%
สอบย่อย (Quiz)	10%

หมวดที่ 6 แหล่งทรัพยากร และสื่อการสอน

หนังสือและสื่อการเรียนรู้หลักสำหรับวิชานี้

ธนัชยศ จำปาหวาย (2562). **เอกสารคำสอนวิชาคณิตศาสตร์ 1**. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

เว็ปไซต์ http://www.eledu.ssru.ac.th/thanatyod_ja

หนังสือ เอกสารประกอบ และสื่อที่ควรศึกษาเพิ่มเติม

ดำรง ทิพย์โยธา, ยุวรีย์ พันธ์กล้า และณัฏฐนาถ ไตรภพ. (2548). **แคลคูลัส ๑**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

อนุกรรมการปรับปรุงหลักสูตรวิทยาศาสตร์ ทบวงมหาวิทยาลัย. (2545). **เซต ความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์พิทักษ์การพิมพ์

James Stewart. (2012). **Calculus Early Transcendentals.** Seventh Edition. Canada. Nelson Education Ltd.

Joel Hass, Christopher Heil and Maurice D. Weir. (2019). **Thomas' Calculus: Early Transcendentals.** Fourteenth Edition. USA. Pearson Education, Inc.

Josip Hercet, Lorraine Heienrichs, Palmira Mariz Seiler and Marlence Torres Skoumal. (2012). **Mathematics higher level.** New York: Oxford university press.

Michael Haese, Sandra Haese, Mark umphries, Edward Kemp and Pamela Vollma. (2014). **Mathematics for the international student 10E MYP5 (Extended).** Marleston, Australia : Haese& Harris Publications

แผนบริหารการสอนประจำวิชา

คณิตศาสตร์ 1

ชื่อวิชา คณิตศาสตร์ 1 **รหัสวิชา** MAP1402

Mathematics 1

จำนวนหน่วยกิต-ชั่วโมง 3(3-0-6)

เวลาเรียน 17 สัปดาห์ 51 ชั่วโมง/ภาคเรียน

คำอธิบายรายวิชา

ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน อนุพันธ์ของฟังก์ชันหนึ่งตัวแปรและการประยุกต์ การหาปริพันธ์ ปริพันธ์จำกัดเขตและการประยุกต์ ปริพันธ์ไมตรงแบบ

วัตถุประสงค์ทั่วไป

1. เพื่อให้นักศึกษารู้ วิวัฒนการของวิชาแคลคูลัสและทบทวนความรู้เบื้องต้น
2. เพื่อให้นักศึกษารู้ เข้าใจลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันต่าง ๆ
3. ใช้พีชคณิตและทฤษฎีบทของลิมิตเพื่อหาค่าลิมิตรูปแบบต่าง ๆ ได้
4. เพื่อให้นักศึกษาเข้าใจความหมาย และหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่าง ๆ โดยนิยามและกฎของอนุพันธ์ได้
5. เพื่อให้นักศึกสามารถนำอนุพันธ์ไปประยุกต์ใช้กับปัญหาที่กำหนดให้ เช่น ปัญหาค่าสูงสุดต่ำสุด การร่างกราฟ และหลักเกณฑ์ลอปีตาล
6. เพื่อให้นักศึกษาเข้าใจความหมายของปริพันธ์ และหาปริพันธ์โดยใช้ปฏิยานุพันธ์ได้
7. เพื่อให้นักศึกษาเข้าใจความหมายของปริพันธ์จำกัดเขต และหาปริพันธ์โดยใช้กราฟได้
8. เพื่อให้นักศึกษาเข้าใจและหาปริพันธ์จำกัดเขตโดยใช้ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัสได้
9. เพื่อให้นักศึกษาสามารถหาปริพันธ์โดยใช้เทคนิคที่เหมาะสมได้
10. เพื่อให้นักศึกษาสามารถหาพื้นที่โดยใช้ปริพันธ์
11. เพื่อให้นักศึกษาสามารถหาปริมาตรซึ่งหาพื้นที่ตัดได้ และที่เกิดจากการหมุน
12. เพื่อให้นักศึกษาสามารถหาปริพันธ์ไม่ตรงแบบ

เนื้อหาและเวลาที่ใช้สอน

บทที่ 1	เบื้องต้นแคลคูลัส	3 ชั่วโมง
	ระเบียบวิธีเกษียณ	
	สามเหลี่ยมผลต่าง	
	แคลคูลัสสมัยใหม่	
	คณิตศาสตร์วิเคราะห์	
	คณิตศาสตร์พื้นฐาน	
	สรุป	
บทที่ 2	ลิมิตและความต่อเนื่อง	6 ชั่วโมง
	ลิมิตของฟังก์ชัน	
	ลิมิตด้านเดียว	
	ลิมิตของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	
	ลิมิตเกี่ยวกับอนันต์	
	ความต่อเนื่อง	
	สรุป	
บทที่ 3	อนุพันธ์ของฟังก์ชัน	6 ชั่วโมง
	อัตราการเปลี่ยนแปลงและอนุพันธ์	
	กฎของอนุพันธ์	
	กฎลูกโซ่	
	อนุพันธ์อันดับสูง	
	อนุพันธ์ของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง	
	อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	
	อนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย	
	สรุป	

บทที่ 4	การประยุกต์ของอนุพันธ์	6 ชั่วโมง
	การประมาณค่าเชิงเส้น	
	ค่าสุดขีด	
	ความเว้าและจุดเปลี่ยนเว้า	
	การร่างกราฟ	
	อัตราสัมพัทธ์	
	หลักเกณฑ์ลอปีตาล	
	สรุป	
บทที่ 5	ปริพันธ์	6 ชั่วโมง
	ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต	
	การหาปริพันธ์โดยการแทนค่า	
	ปริพันธ์จำกัดเขต	
	ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส	
	สรุป	
บทที่ 6	เทคนิคการหาปริพันธ์	9 ชั่วโมง
	การหาปริพันธ์โดยแยกส่วน	
	ปริพันธ์ของฟังก์ชันตรรกยะ	
	ปริพันธ์ของฟังก์ชันตรรกยะในรูปตรีโกณมิติ	
	ปริพันธ์ของฟังก์ชันในรูปกรณฑ์	
	ปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	
	ปริพันธ์โดยการแทนค่าตรีโกณมิติ	
	สรุป	
บทที่ 7	การประยุกต์ของปริพันธ์	6 ชั่วโมง
	พื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง	
	ปริมาตรของรูปทรงตันซึ่งหาพื้นที่ภาคตัดได้	
	ปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุน	
	สรุป	

การวัดและการประเมินผล

1. การวัดผล

แบ่งคะแนนตลอดภาคเรียนออกเป็น 3 ส่วน ดังนี้

1.1 คะแนนระหว่างภาคเรียน	40%
1.1.1 ความตั้งใจ ความสนใจเรียน	10%
1.1.2 งานที่มอบหมายในระหว่างเรียน (Assignment)	10%
1.1.3 โครงการรายกลุ่ม (Project)	5%
1.1.4 การบ้าน	5%
1.1.5 สอบย่อย (Quiz)	10%
1.2 คะแนนกลางภาคเรียน	30%
1.3 คะแนนปลายภาคเรียน	30%

2. การประเมินผล

ใช้วิธีอิงเกณฑ์โดยเปรียบเทียบระดับคะแนนที่กำหนดเพื่อให้เกรดดังนี้

ระดับคะแนน	ความหมายของผลการศึกษา	ค่าร้อยละ	ค่าระดับคะแนน
A	ดียอดเยี่ยม	86.00 – 100	4.00
A-	ดีเยี่ยม	82.00 – 85.00	3.75
B+	ดีมาก	78.00 – 81.00	3.50
B	ดี	74.00 – 77.00	3.00
B-	ค่อนข้างดี	70.00 – 73.00	2.75
C+	ปานกลางค่อนข้างดี	66.00 – 69.00	2.50
C	ปานกลาง	62.00 – 65.00	2.00
C-	ปานกลางค่อนข้างอ่อน	58.00 – 61.00	1.75
D+	ค่อนข้างอ่อน	54.00 – 57.00	1.50
D	อ่อน	50.00 – 53.00	1.00
D-	อ่อนมาก	46.00 – 49.00	0.75
F	ตก	00.00 – 45.00	0.00

สารบัญ

สารบัญตาราง

ตารางที่ หน้า

สารบัญรูป

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่ หน้า

แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 1

หัวข้อเนื้อหาประจำบท

1. ระเบียบวิธีเกษียณ
2. สามเหลี่ยมผลต่าง
3. แคลคูลัสยุคใหม่
4. คณิตศาสตร์วิเคราะห์
5. คณิตศาสตร์พื้นฐาน

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. เข้าใจและอธิบายระเบียบวิธีเกษียณ
2. เข้าใจและอธิบายสามเหลี่ยมผลต่างที่สัมพันธ์ไปยังอนุพันธ์ได้
3. สามารถอธิบายวิวัฒนาการของวิชาแคลคูลัสได้
4. มีความรู้พื้นฐานเคณิตศาสตร์เบื้องต้นที่จะนำไปใช้ในวิชาแคลคูลัส

วิธีและกิจกรรมการเรียนการสอน

1. **วิธีสอน**
   1.1 วิธีสอนแบบบรรยาย ประกอบสื่ออิเล็กทรอนิกส์
   1.2 ใช้สื่อทางอินเตอร์เน็ต และให้แต่ละคนแสดงความคิดเห็น
   1.3 วิธีสอนแบบอภิปราย โดยให้หัวข้อเป็นกลุ่มและมานำเสนอหน้าชั้น
2. **กิจกรรมการเรียนการสอน**
   2.1 บรรยายสรุปโดยใช้สื่อการสอนประกอบ
   2.2 ให้ผู้เรียนศึกษาเนื้อหาจากชุดการสอน หนังสือ ตำรา เอกสารเพิ่มเติม และสื่อออนไลน์
   2.3 อภิปรายรายกลุ่มตามหัวข้อที่ได้รับมอบหมาย

สื่อการเรียนการสอน

1. ชุดการสอน เรื่อง "เบื้องต้นแคลคูลัส"
2. สื่ออิเล็กทรอนิกส์ เรื่อง "เบื้องต้นแคลคูลัส"
3. หนังสือ ตำรา เอกสารที่เกี่ยวข้อง
4. ภาพนักคณิตศาสตร์ผู้คิดค้นแคลคูลัส

การวัดผลและประเมินผล

1. สังเกตการตอบคำถามและตั้งคำถามของผู้เรียนในระหว่างการบรรยายและซักถาม
2. วัดผลจากการทำแบบฝึกหัดระหว่างเรียนตามเนื้อหาที่ได้รับมอบหมาย
3. ประเมินการอภิปรายรายกลุ่ม แล้วบันทึกคะแนนลงในใบบันทึกคะแนน
4. ตรวจการทำการบ้าน บันทึกคะแนนลงในบันทึกผลงาน

บทที่ 1

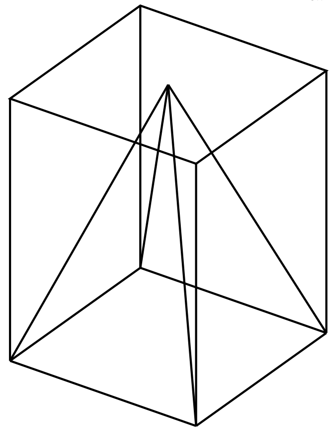
เบื้องต้นแคลคูลัส

ในบทแรกจะกล่าวถึงวิวัฒนาการของวิชาแคลคูลัส แนวคิดวิธีการต่าง ๆ ที่เป็นจุดเริ่มต้นและพัฒนาไปสู่แคลคูลัสในปัจจุบันโดยของนักคณิตศาสตร์แต่ละยุค และกล่าวถึงคณิตศาสตร์พื้นฐานที่จำเป็นต่อการศึกษาวิชาแคลคูลัส

1.1 ระเบียบวิธีเกษียณ

รากฐานของแคลคูลัสเริ่มต้นจากปัญหาเกี่ยวกับการวัด โดยถูกค้นพบปัญหาและการแก้ปัญหาเหล่านั้นใน บันทึกบนแผ่นดินเหนียวของชาวบาบิโลน และบันทึกบนกระดาษปาปิรุส (Papyrus) ของชาวอียิปต์โบราณ ซึ่งมีอายุในสมัยก่อนคริสต์กาล บันทึกบนแผ่นดินเหนียวของชาวบาบิโลน โดยเฉพาะในบันทึกของอาเมส (Ahmose, 1680 - 1620 ก่อนคริสตกาล) ชี้ให้เห็นว่าชาวอียิปต์โบราณมีความรู้ว่า ปริมาตรของพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสเป็น 1/3 เท่าของปริมาตรของปริซึมที่มีฐานเดียวกันและสูงเท่ากัน

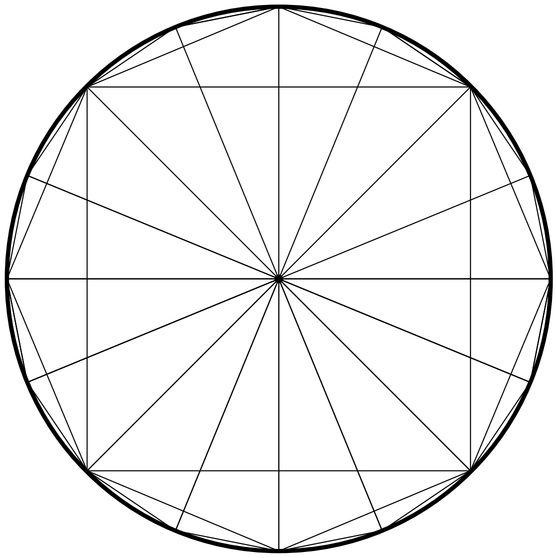
รูปที่ 1.1 พีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสและปริซึมที่มีฐานเดียวกันและสูงเท่ากัน



นักปรัชญาชาวกรีกสมัยโบราณ ได้บันทึกถึงความรู้ต่าง ๆ ไว้หลายชิ้นเนื่องจากยุคนั้นเป็นยุครุ่งเรืองของการใช้ตรรกวิทยาในการแสวงหาความรู้ แต่ที่นับได้ว่าเป็นจุดเริ่มต้นของแคลคูลัสในยุคนี้คือ **ระเบียบวิธีเกษียณ** (The Method of Exhaustion)

ตัวอย่างเช่น การนำเสนอวิธีหาพื้นที่ของวงกลมโดยชาวกรีกนามว่า **แอนติฟอน** (Antiphon, 480 - 411 ก่อนคริสตกาล) เริ่มจากสร้างรูปหลายเหลี่ยมแนบในวงกลม จากนั้นสังเกตได้ว่า หากจำนวนเหลี่ยมมากขึ้น ผลต่างของพื้นที่ของรูปทั้งสองจะหมดไป แต่ก็มีข้อแย้งในทางปฏิบัติว่าเราจะสามารถสร้างรูปหลายเหลี่ยมให้มีจำนวนเหลี่ยมได้มากมายแค่ไหนถึงเพียงพอ

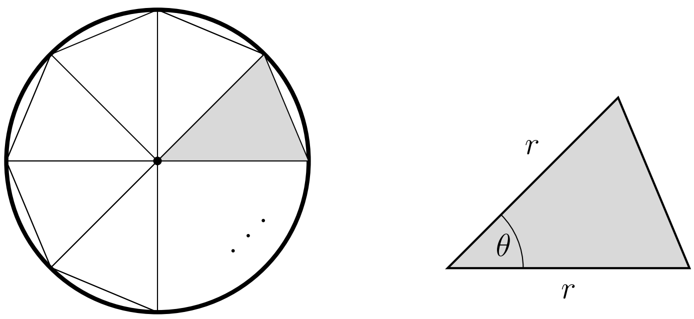
รูปที่ 1.2 รูปหลายเหลี่ยมแนบในวงกลม



จากรูป 1.2 แสดงตัวอย่างการแบ่งวงกลมด้วยรูป 16 เหลี่ยมเท่า ๆ กัน เป็นตัวอย่างขั้นเริ่มต้นของระเบียบวิธีเกษียณ และต่อไปเราอาจใช้ความรู้เรื่องพื้นที่ของสามเหลี่ยมและตรีโกณมิติเพื่ออธิบายระเบียบวิธีเกษียณ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1.1.1 จงหาพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยมที่แบ่งวงกลมรัศมี r ออกเป็น n ส่วนเท่า ๆ กัน

วิธีทำ พิจารณาการหาพื้นสามเหลี่ยม 1 ชิ้นจาก n ชิ้น โดยใช้กฎทางตรีโกณมิติ



จะเห็นว่า $\theta = \dfrac{2\pi}{n}$ โดยใช้กฎทางตรีโกณมิติ จะได้ว่าพื้นที่ของสามเหลี่ยม 1 ชิ้นเท่าทับ

$$\frac{1}{2}r^2\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

ดังนั้นพื้นที่ของรูป n เหลี่ยมด้านเท่าที่แนบในวงกลมรัศมี r เท่ากับ

$$\frac{1}{2}nr^2\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

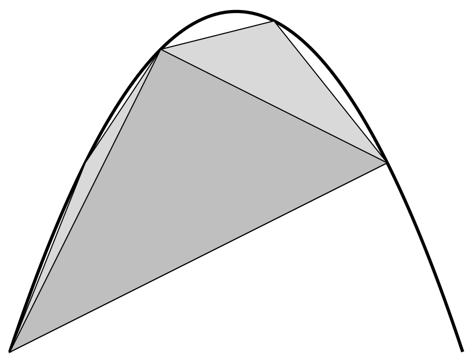
ในปัจจุบันถ้าใช้ความรู้เกี่ยวกับลิมิตอนันต์ พื้นที่ของรูป n เหลี่ยมด้านเท่าที่แนบในวงกลมรัศมี r จะมีค่าเข้าใกล้ πr^2 หรือพื้นของวกลมนั่นเอง เมื่อ n มีขนาดใหญ่มาก ๆ

แต่ในสมัยนั้นชาวกรีกโบราณเป็นผู้ที่ยึดมั่นกับการให้เหตุผลทางตรรกะที่ต้องรัดกุมเข้มงวด รูปวงกลมก็คือรูปวงกลม กระบวนการที่จะทำให้รูปหลายเหลี่ยนปรับเปลี่ยนไปเป็นรูปวงกลม มันสมเหตุสมผลหรือไม่ ซึ่งมีการปฏิเสธการแบ่งพื้นที่อย่างไม่จำกัด นั่นเป็นข้อขัดแย้งของระเบียบวิธีเกษียณ ซึ่งตัวอย่างหนึ่งที่ปฏิเสธวิธีนี้คือผลงานของ **ซีโนแห่งอีเลีย** (Zeno of Elea, **490 – 430 ก่อนคริสตกาล**) นักปราญช์ผู้โด่งดังในการนำเสนอข้อความที่ขัดแย้งกับสามัญสำนึกทั่วไปเรียกว่า **ปฏิทรรศ์ของซีโน** (Zeno's paradoxes) ได้ชี้ข้อบกพร่องทางตรรกะหากเราแบ่งขนาดได้ไม่จำกัด

ต่อมานักคณิตศาสตร์ชาวกรีกผู้เลื่องชื่อนามว่า **อาริสโตเติล** (Aristotle, 384 – 322 ก่อนคริสตกาล) ได้ใช้หลักการเดียวกันนี้ไปเขียนถึง เส้นที่แบ่งย่อยไม่ได้อีก (indivisible line) แต่แนวคิดของ ขนาดที่แบ่งไม่ได้ ก็ไม่รัดกุมพอที่จะนำไปใช้ในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ จากนั้น **ยูโดซุส** (Eudoxus of Cnidus, **390 - 340 ก่อนคริสตกาล**) ได้ปรับปรุงการให้เหตุผลเกี่ยวกับระเบียบวิธีเกษียณ ให้มีความรัดกุมมากขึ้น โดยอาศัยความรู้ทางเรขาคณิตช่วยในพิจารณาขนาดที่แบ่งไม่ได้อีกในทางอ้อม โดยพิจารณาผ่านอัตราส่วนของขนาดที่วัดได้ทางเรขาคณิต ซึ่งต่อมาภายหลังความรู้เหล่านี้ได้ปรากฏในผลงานของ **ยุคลิด** (Euclid of Alexandria, **365 – 275 ก่อนคริสตกาล**)

อาร์คิมีดีส (Archimedes, **287 – 212 ก่อนคริสตกาล**) ได้ใช้ความรู้จากระเบียบวิธีเกษียณนี้จนได้ผลงานที่ถือได้ว่ามีแนวคิดใกล้เคียงกับแนวคิดของการหาปริพันธ์ในแคลคูลัสที่ทราบกันแล้วในปัจจุบันตัวอย่างผลงานที่เด่นซึ่งทำให้แนวคิดของกระบวนการเข้าถึงค่าจริงอย่างไม่จำกัดชัดเจนยิ่งขึ้น ได้แก่ วิธีการหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยพาราโบลาตัดกับเส้นตรง หรือเรียกว่า เซกเมนต์ของพาราโบลา (the quadrature of parabola) ดังรูปต่อไปนี้

รูปที่ 1.3 การแบ่งย่อยเซกเมนต์ของพาราโบลาออกเป็นรูปสามเหลี่ยม



จากรูป 1.3 เป็นการแบ่งย่อยเซกเมนต์ของพาราโบลาออกเป็นรูปสามเหลี่ยมได้เป็นจำนวนอนันต์ตามแนวคิดของอาร์คิมีดีส

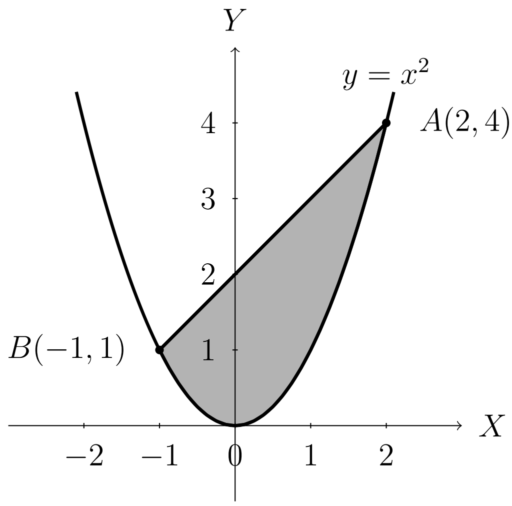
จากกระบวนการสร้างข้างต้น ทำให้ทราบว่าพื้นที่ของเซกเมนต์ของพาราโบลาจะเป็น 4/3 เท่าของพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมรูปแรกที่สร้างให้แนบในเซกเมนต์ของพาราโบลานั้น อาร์คิมีดีสยังได้พัฒนาต่อยอดระเบียบวิธีเพื่อใช้หาพื้นที่ผิวและปริมาตรของทรงเรขาคณิตแบบต่าง ๆ จนได้ระเบียบวิธีที่ต่อมาเรียกว่า **วิธีอาร์คิมีดีส** (method of Archimedes) โดยมีแนวคิดของแบ่งย่อยรูปทรงเหล่านั้นออกเป็นแผ่นบาง ๆ ตามแนวศูนย์ถ่วง แล้วหาผลบวกของขนาดของแผ่นบาง ๆ เหล่านั้น ถึงแม้จะไม่มีคณิตศาสตร์ที่รัดกุมรองรับ แต่ถือว่าเป็นภาพแสดงแนวคิดคราว ๆ ของการหาปริพันธ์ใน

แคลคูลัสที่ทราบในปัจจุบัน

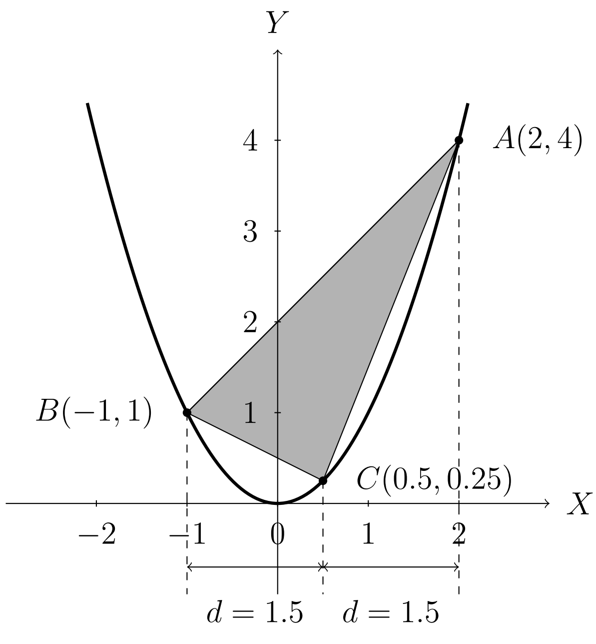
ต่อไปนี้จะเป็นตัวอย่างการฟาพื้นที่ปิดล้อมตามแนวคิดของอาร์คิมีดีส

ตัวอย่าง 1.1.2 จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยล้อมพาราโบลา $y = x^2$ และเส้นตรง $y = x + 2$ โดยใช้วิธีของอาร์คิมีดีส

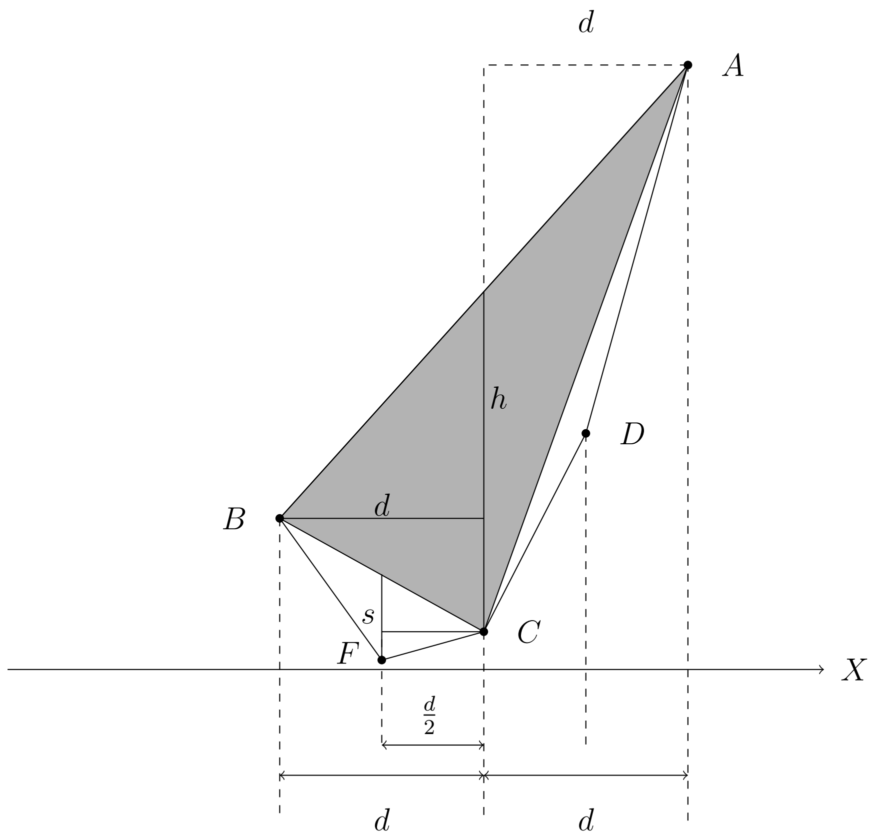
วิธีทำ อาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยล้อมพาราโบลา $y = x^2$ และเส้นตรง $y = x + 3$ แสดงได้ดังกราฟต่อไปนี้



ขั้นตอนแรกแบ่งครึ่งของจุด $A(2,4)$ และ $B(-1,1)$ จะได้จุด $C(0.5, 0.25)$ ให้ระยะที่แบ่งครึ่งเป็น $d = 1.5$ แล้วจะได้สามเหลี่ยม ABC ดังรูป



จากนั้นแบ่งจุดบนแกน X ระหว่างจุด A และ C ได้จุด D กับ B และ C ได้จุด F จะได้สามเหลี่ยม ACD และ BFC ดังรูปต่อไปนี้



กำหนดให้พื้นที่ของสามเหลี่ยม ABC เท่ากับ X ตารางหน่วย จากรูปจพได้ว่า $X = dh$ และ

$$\text{พื้นที่ของสามเหลี่ยม } AFC \text{ เท่ากับ } \frac{d}{2}s$$

และใช้แนวคิดเดียวกับการหาพื้นที่ของสามเหลี่ยม AFC จะได้พื้นที่ของ พื้นที่ของสามเหลี่ยม ADC เท่ากับ พื้นที่ของสามเหลี่ยม AFC

จากนั้นพิสูจน์ได้ว่า $h = 4s$ (เป็นแบบฝึกหัด) ทำให้ได้ความสัมพันธ์

$$\text{พื้นที่ของ } \Delta AFC + \text{ พื้นที่ของ } \Delta ADC = ds = \frac{1}{4}X$$

ขั้นตอนที่ 2 ทำการแบ่งครึ่งตามแนวแกน X ในทำนองเดียวกับขั้นตอนแรก จะได้พื้นที่ที่เพิ่มขึ้นเท่ากับ $\frac{1}{16}X$ และทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ ทำให้สรุปได้ว่าพื้นที่ปิดล้อมดังกล่าวเท่ากับผลบวกในรูปอนุกรมเรขาคณิตที่มีอัตราส่วนร่วมเท่ากับ $\frac{1}{4}$ ถ้าให้พื้นที่ดังกล่าวเท่ากับ A จะได้ว่า

$$\begin{aligned} A &= X + \frac{1}{4}X + \frac{1}{16}X + \cdots \\ &= X\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots\right) \\ &= X\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\right) = \frac{4}{3}X \end{aligned}$$

หรือกล่าวได้ว่าพื้นที่ปิดล้อมของพาราโบลาดังกล่าวจะเป็น 4/3 เท่าของพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมรูปแรกที่สร้างให้แนบในเซกเมนต์ของพาราโบลานั้น สำหรับตัวอย่างนี้มี $h = 2.5 - 0.25 = 2.25$ และ $d = 1.5$ จะได้ $X = dh = 1.5 \times 2.25 = 3.375$ ดังนั้น $A = 4.5$ ตารางหน่วย

1.2 สามเหลี่ยมผลต่าง

ในยุคกลางการพัฒนาแคลคูลัสไม่ก้าวหน้ามากนัก แนวคิดและวิธีการส่วนใหญ่ยังอิงอยู่กับการวัด และการแบ่งระนาบออกเป็นหน่วยเล็กๆ ที่ไม่สามารถแบ่งได้อีก (indivisible) จนกระทั่งราวคริสต์ศตวรรษที่ 16 เมื่อวิศวกรรมศาสตร์ต้องการแก้ปัญหาเกี่ยวกับจุดศูนย์ถ่วง ทำให้มีความต้องการที่จะใช้คณิตศาสตร์ที่รัดกุมมากยิ่งขึ้น เป็นผลให้มีการพัฒนาแนวคิดของแคลคูลัส ดังลำดับต่อไปนี้

- **วาเลริโอ** (Luca Valerio, 1553-1618) ได้ตีพิมพ์ผลงานที่ได้รับแรงบันดาลใจมาจากวิธีการของอาร์คิมีดิส ทำให้แนวคิดของปริพันธ์ในแคลคูลัสเริ่มชัดยิ่งขึ้น

- **เคปเลอร์** (Johannes Kepler, 1571 - 1630) ได้พัฒนาวิธีการหาพื้นที่ของเซเตอร์ของวงรีโดยพิจารณาว่าพื้นที่เป็นผลรวมของเส้น

- **คาวาลีเอรี** (Bonaventura Francesco Cavalieri, 1598 - 1647) ได้ขยายแนวคิดให้ชัดเจนยิ่งขึ้นจนกลายเป็นระเบียบวิธีที่เรียกว่า **วิธีของการแบ่งแยกไม่ได้ (method of indivisible)** โดยมองว่า เส้นตรงประกอบด้วยจุดเป็นจำนวนอนันต์ พื้นที่ผิวประกอบด้วยเส้นจำนวนอนันต์ และปริมาตรประกอบด้วยพื้นที่ผิวจำนวนอนันต์

จากผลงานดังกล่าวทำให้ได้เทคนิคการหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยการแบ่งย่อยพื้นที่ออกเป็นเส้นเล็ก ๆ แล้วหาผลรวมของเส้นเหล่านี้ ซึ่งแนวคิดนี้คล้ายกับที่ชาวกรีกโบราณได้เสนอไว้ แต่วิธีคิดแบบใหม่นี้มีการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่รัดกุมกว่า

แฟร์มาต์ (Pierre de Fermat, 1601 - 1665) นักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศสผู้มีชื่อเสียงคนหนึ่งในยุคฟื้นฟูศิลปวิทยา (Renaissance) ได้พัฒนาแนวคิดต่าง ๆ โดยอ้างอิงความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่รัดกุมและเข้มงวดยิ่งขึ้นจนได้ผลงาน ที่ถือว่ามีบทบาทสำคัญต่อการพัฒนาแนวคิดของแคลคูลัสแบบก้าวกระโดดคือ " การแก้ปัญหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดโดยอาศัยความรู้ทางเรขาคณิต ซึ่งให้หลักการแปลงปัญหาไปเป็นการแก้ปัญหาเกี่ยวกับ การหาจุดบนเส้นโค้งที่ทำให้เส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุดนั้นขนานกับแกนนอน " โดย **ลากรองจ์ (Joseph Louis Lagrange, 1736 - 1813)** ถึงกับยกย่องให้แฟร์มาว่าเป็นผู้คิดค้นแคลคูลัสแนวใหม่

จากผลงานของ **โอเรสเม (Nicolas Oresme, 1323 - 1382)** ที่อาศัยความรู้เกี่ยวกับ **เส้นสัมผัส** (tangent line) ของเส้นโค้ง ทำให้ทราบว่า ค่าต่ำสุดหรือสูงสุงของเส้นโค้งจะอยู่บริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงค่าของตัวแปรช้าที่สุด จากจุดนี้ถือได้การพัฒนาแคลคูลัสเริ่มอยู่บนรากฐานแขนงของคณิตศาสตร์ที่เรียกว่า **เรขาคณิตวิเคราะห์** (analytic geometry)

การอธิบายแนวคิดของอัตราส่วนของสองขนาดที่ไม่สามารถแบ่งแยกได้อีก ถูกอธิบายได้อย่างรัดกุมโดยใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง จากหลักฐานการติดต่อแลกเปลี่ยนความรู้ระหว่างแฟร์มาต์กับ **เดส์การ์ตส์** (René Descartes, 1596 - 1650) ทำให้ทราบว่า แฟร์มาต์ได้เสนอ " หลักการของการแก้ปัญหาค่าต่ำสุดหรือค่าสูงสุดว่าเป็นการแก้สมการเพื่อหาจุดที่ทำให้ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งเป็นศูนย์ "

ต่อมามีผลงานหลายชิ้นที่ทำพัฒนาแคลคูลัสมากยิ่งขึ้นหลังจากแฟร์มาต์เสนอผลงานดังกล่าว ซึ่งผลงานหลายชิ้นได้มีส่วนในการพัฒนาแคลูลัสแบบคู่ขนานของนิวตันและไลบ์นิตซ์ ทั้งสองที่ได้ชื่อร่วมกันว่าเป็นผู้ประดิษฐ์ แคลคูลัส ถึงแม้จะพัฒนาความรู้ทางแคลคูลัสอย่างอิสระต่อกัน แต่มีหลักฐานเชื่อมโยงบุคคลทั้งสองในทางอ้อม ซึ่งเป็นจดหมายโต้ตอบความรู้ระหว่างเพื่อนร่วมงานของบุคคลทั้งสอง โดยพบว่าเพื่อนร่วมงานของทั้งสองหลายคนเป็นนักคณิตศาสตร์คนเดียวกัน บุคคลเหล่านั้น เช่น

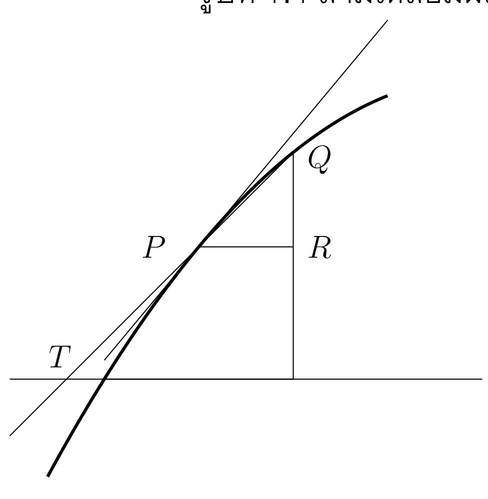
- **บัวเนอร์** (Florimond de Beaune, 1601-1652) ได้ขยายแนวคิดวิธีของเดส์การ์ตส์เกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์ เพื่อพิจารณาปัญหาเกี่ยวกับเส้นสัมผัสเส้นโค้งผ่านทางปัญหาของการหารากซ้ำของสมการพหุนาม

- **ฮูดเด** (Johann van Waveren Hudde, 1628 - 1704) ได้ปรับปรุงวิธีการที่บัวเนอร์ใช้ ให้ง่ายต่อการนำไปใช้จนได้เป็น กฎของฮูดเด (Hudde's rule) โดยกฎนี้แสดงความสัมพันธ์ระหว่างรากซ้ำและสิ่งที่ต่อมาเรียกว่า อนุพันธ์ของฟังก์ชันพหุนาม ทั้งระเบียบวิธีทางเรขาคณิตวิเคราะห์ของเดส์การ์ตส์ที่บัวเนอร์ใช้และกฎของฮูดเดได้มีส่วนสำคัญในการพัฒนาผลงานทางแคลคูลัสของนิวตัน

- **ไฮย์เคนส์** (Chistiaan Huygens, 1629 – 1695) มีผลงานที่เป็นแรงจูงใจให้ไลบ์นิตซ์พัฒนาแนวทางการเข้าถึงแนวคิดของแคลคูลัสได้ง่ายขึ้น

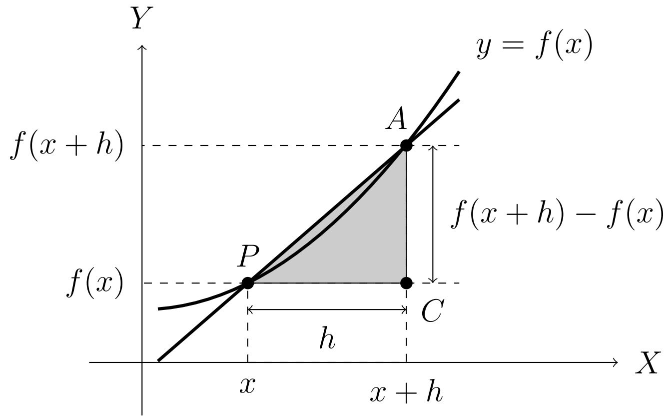
แบร์โรว์ (Isaac Barrow, 1630 – 1677) เป็นอีกบุคคลหนึ่งที่มีอิทธิพลต่อการพัฒนาผลงานของนักคณิตศาสตร์รุ่นถัดมาโดยเฉพาะไลบ์นิตซ์ แบร์โรว์เสนอระเบียบวิธีการพิจารณาเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ว่าเป็นลิมิตของลำดับของ **เส้นตัดเส้นโค้ง (secant lines)** มีแนวคิดโดยสังเขปดังนี้ " ถ้าเริ่มจากเส้นตัดเส้นโค้งเส้นหนึ่ง จะได้สองคู่อันดับของจุดตัดเหล่านั้นในระบบพิกัดฉาก ให้สร้างเส้นตัดเส้นโค้งเส้นใหม่ซึ่งมีคู่อันดับของจุดตัดเส้นโค้งทั้งสอง โดยที่ค่าสัมบูรณ์ของผลต่างของพิกัดที่หนึ่งที่มีค่าน้อยกว่าเดิม ดำเนินกระบวนการสร้างนี้ไปเรื่อย ๆ โดยให้ค่าสัมบูรณ์ของผลต่างของพิกัดที่หนึ่งมีค่าเข้าใกล้ศูนย์ ในทางเรขาคณิตอาจถือได้ว่า กระบวนการสร้างนี้ให้ลำดับของเส้นตัดเส้นโค้งที่มีลักษณะใกล้เคียงกับเส้นสัมผัสเส้นโค้งมากขึ้น ดังแสดงได้ดังรูปต่อไปนี้

รูปที่ 1.4 สามเหลี่ยมผลต่างของแบร์โรว์



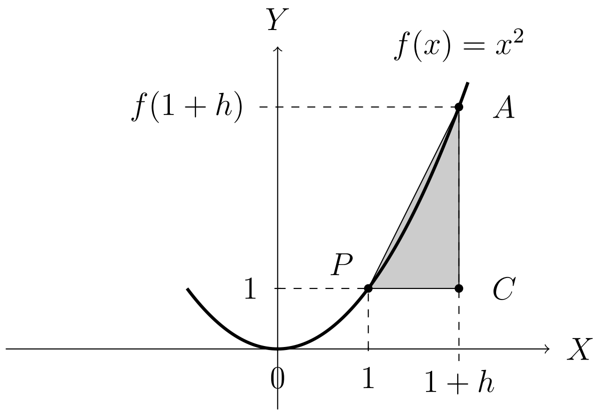
หรืออาจใช้รูปต่อไปนี้แสดงสามเหลี่ยมผลต่างของแบร์โรว์คือ ΔAPC ซึ่งคล้ายคลึงกับที่เราคุ้นเคยในเรื่องอนุพันธ์ โดย ΔAPC จะขึ้นกับระยะ $h > 0$ จะมีค่าลดลงเรื่อย ๆ ตามแนวคิดของแบร์โรว์นั่นหมายความว่าจุด A จะเคลื่อนเข้าใกล้จุด P นี้เป็นจุดเริ่มต้นของการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่จุด P นั่นเอง

รูปที่ 1.5 สามเหลี่ยมผลต่างของแบร์โรว์ที่ขึ้นกับ h



ตัวอย่าง 1.2.1 จงหาความชันของจุด $P(1,1)$ บนเส้นโค้ง $y = x^2$ โดยใช้สามเหลี่ยมผลต่างของแบร์โรว์ ตอบในรูป h

วิธีทำ



จากรูปจะได้ว่าความชันของเส้นสัมผัสที่จุด P ที่ขึ้นกับ h เท่ากับ

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = 2 + h$$

นั่นหมายความว่าเมื่อ h มีค่าน้อยมาก ๆ ความชันของเส้นสัมผัสที่จุด P มีค่าใกล้ ๆ 2 นั่นเอง

มีความเป็นไปได้ว่าทั้ง**นิวตันและไลบ์นิตซ์**ได้ศึกษาผลงานนี้และได้รับคำแนะนำจากแบร์โรว์ให้พัฒนาผลงานของตน บทพิสูจน์แสดงภาพแนวคิดของกระบวนการข้างบนหลายอัน มีรูปสามเหลี่ยมคล้าย ๆ กับรูปด้านล่าง ซึ่งต่อมาเรียกชื่อว่า **สามเหลี่ยมผลต่างแบร์โรว์** (Barrow's differential triangle) เป็นแนวทางให้ไลบ์นิตซ์พัฒนาทฤษฎีบทของตัวเอง

แบรโรว์ และ **ตรูริเชลลิ** (Evangelista Torricelli, 1608 – 1647) ศึกษาปัญหาของการเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วที่แปรผัน พบว่าการดำเนินการที่ต่อมาเรียกว่า**อนุพันธ์**ของระยะทางนี้ จะได้ความเร็ว และถ้าดำเนินการผกผันกระบวนการดังกล่าวจากความเร็วจะได้ระยะทาง แบร์โรว์รับรู้ว่าทั้งสองกระบวนการนั้นผกผันซึ่งกันและกัน (ต่อมาทราบกันว่าคือ อนุพันธ์และปริพันธ์ในแคลคูลัส) แต่ก็ไม่ได้ประโยชน์จากความรู้นี้มากนัก แต่ก็มีอิทธิพลให้นิวตันเสนอทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัสในเวลาต่อมา ในอีกทางหนึ่งผลงานเดียวกันของแบร์โรว์ บทพิสูจน์ที่เกี่ยวข้องกับ สามเหลี่ยมผลต่างแบร์โรว์ ได้ให้แนวคิดแก่ไลบ์นิตซ์ในการประดิษฐ์สัญลักษณ์

$$\frac{dy}{dx}$$

เพื่อแทนสิ่งที่สืบทอดมาจากชาวกรีกโบราณ นั่นคือ **ขนาดที่แบ่งย่อยไม่ได้อีก** และได้ให้กฎการดำเนินการเกี่ยวกับสัญลักษณ์เหล่านี้ ทำให้การศึกษาแนวคิดของแคลคูลัสทำได้ง่ายและสามารถต่อยอดออกไปอย่างที่เราได้ใช้อยู่ในปัจจุบัน

1.3 แคลคูลัสยุคสมัยใหม่

นิวตัน (Sir Isaac Newton, 1643-1727) ที่ได้ชื่อว่าเป็นผู้ก่อกำเนิดแคลคูลัส เพราะว่ามีผลงานที่สำคัญมากมายต่อการพัฒนารากฐานของแคลคูลัส ดังจะเห็นได้จากผลงานที่รวบรวมไว้ในหนังสือชื่อชุด Principia ตัวอย่างผลงานที่ได้กล่าวมาแล้วเช่น การเสนอทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส เพื่อแสดงกระบวนการที่ผกผันกันของอนุพันธ์และปริพันธ์ตามที่แบร์โรว์ได้สังเกตเห็น โดยนิวตันได้ใช้ประโยชน์จากวิธีการนี้ในการแก้ปัญหาทางอนุพันธ์ (ซึ่งตอนนั้นเรียกว่า Method of tangents) และนำไปแก้ปัญหาทางปริพันธ์ (ซึ่งตอนนั้นเรียกว่า Method of quadrature) ในผลงาน Method of Fluxions ที่นิวตันได้ศึกษาเกี่ยวกับการเคลื่อนที่ มีการใช้แนวคิดของ ขนาดที่แบ่งย่อยไม่ได้อีก เช่นกัน ซึ่งนิวตันใช้สัญลักษณ์

รูปที่ 1.6 เซอร์ ไอแซก นิวตัน

$$\dot{x}$$

แทน fluxion ของ x และ

$$\ddot{x}$$

(ความเร่ง) แทน fluxion ของ fluxion ของ x (เทียบได้กับอนุพันธ์อันดับหนึ่งและอนุพันธ์อันดับสองที่ทราบในปัจจุบัน) แต่ระบบการดำเนินการเกี่ยวกับสัญลักษณ์ที่นิวตัวใช้มีความคลุมเครือเข้าใจยากกว่าของระบบสัญลักษณ์ที่ไลบ์นิตซ์เสนอ ในผลงาน Tractatus de Quadratura Curvarum นิวตันได้ให้ระเบียบวิธีคิดเกี่ยวกับลิมิตเป็นศูนย์และการใช้อนุกรมกำลังแทนฟังก์ชันที่ทราบกันในปัจจุบัน

รูปที่ 1.7 กอทฟริด วิลเฮล์ม ไลบ์นิตซ์

ไลบ์ นิต ซ์ (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646-1716) นอกจากจะประดิษฐ์ระบบสัญลักษณ์ที่ใช้ง่ายกว่าสำหรับศึกษาแนวคิดของอนุพันธ์ (ตามแนวคิดที่ได้จากบทพิสูจน์ของแบร์โรว์ที่กล่าวแล้วข้างต้น) ยังประดิษฐ์ระบบสัญลักษณ์ที่ใช้แทนแนวคิดของปริพันธ์ โดยใช้

$$\int$$

เป็นสัญลักษณ์แทนการบวกของ ขนาดที่แบ่งย่อยไม่ได้อีก ดังที่ได้ระบุในระเบียบวิธีที่คาวาลีเอรีเสนอ ในผลงานชิ้นหนึ่ง ไลบ์นิตซ์ได้เขียนสมการที่คุ้นเคยในปัจจุบัน ได้แก่

$$\int y\,dy = \frac{1}{2}y^2$$

เป็นจุดเริ่มต้นของแคลคูลัสเชิงปริพันธ์ ซึ่งสมัยนั้นไลบ์นิตซ์ใช้ชื่อว่า calculus summatorius หรือ calculus integralis ในเวลาต่อมา ระบบสัญลักษณ์ของอนุพันธ์และปริพันธ์ที่เสนอโดยไลบ์นิตซ์ได้รับความนิยมและใช้กันอย่างแพร่หลาย ตามที่เห็นจนถึงปัจจุบัน

การพัฒนาแคลคูลัสในคริสต์ศักราชที่ 19 ยังอิงรากฐานทางคณิตศาสตร์จากผลงานที่สำคัญของนิวตันและไลบ์นิตซ์ มีทั้งที่อยู่บนความรู้ แบบสถิต (static phase) เช่น จากความรู้ในเรื่องการวัด แต่ยังมีการพัฒนาแคลคูลัสโดยอาศัยคณิตศาสตร์ของ infinitesimals ซึ่งตกทอดมาจากชาวกรีกโบราณ และสิ่งที่ปรับปรุงให้รัดกุมกว่าของคาวาลีเอรี ที่ชื่อ indivisible และอีกรากฐานบนความรู้แบบพลวัต (dynamic phase) เช่น การเคลื่อนที่ของจุดในปัญหาของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง

1.4 คณิตศาสตร์วิเคราะห์

แต่ก็มีผู้ชี้ให้เห็นถึงจุดอ่อนของการให้เหตุผลทางตรรกในผลงานของนิวตันและไลบ์นิตซ์ เช่น เบอร์คเลย์ (George Berkeley, 1685 – 1753) จากผลงาน Analyst จากจุดนี้ทำให้แคลคูลัสต้องแสวงหารากฐานความรู้ที่รัดกุมกว่าเพื่อมารองรับแนวคิด ถือได้ว่าเป็นช่วงที่รากฐานของแคลคูลัสได้ขยับมาอยู่บนแขนงคณิตศาสตร์ที่เรียกว่า **คณิตศาสตร์วิเคราะห์** (Mathematical Analysis)

รูปที่ 1.8 ออกัสติน หลุยส์ โคชี

ผู้ที่มีบทบาทสำคัญในการเสนอความรู้ทางคณิตศาสตร์ ที่ จะ เป็น รากฐาน ที่ รัดกุม เข้ม งวด กว่า ให้ กับ แคลคูลัส คือ **โค ชี** (Baron Augustin-Louis Cauchy, 1789-1857) นัก คณิตศาสตร์ชาว ฝรั่ง เศษ นั่นเอง และ ความ รู้ ทาง คณิตศาสตร์ที่ เป็นรากฐานดังกล่าว คือ แนวคิด ของ ลิมิตของฟังก์ชัน ซึ่งภายหลังได้มีบทนิยามของลิมิตของ ฟังก์ชันที่มีความรัดกุมยิ่งขึ้นอีก อย่างเช่น การเสนอให้เข้าถึงแนวคิดของลิมิตโดยใช้แนวคิดของ

$$\{\varepsilon, \delta\}$$

ซึ่งเสนอโดย **ไวแยร์สตราสต์** (Karl Weierstrass, 1815 – 1897) และเชื่อว่ายังมีความจำเป็นที่จะพัฒนาแนวคิดของแคลคูลัสให้อยู่บนรากฐานแนวคิดของคณิตศาสตร์ที่สามารถให้เหตุผลได้รัดกุมเข้มงวด และขยายให้ครอบคลุมปัญหาต่าง ๆ ที่จะเกิดขึ้นจากความจำเป็นต้องพัฒนาความรู้ด้านวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์ขั้นสูง เพื่อตอบสนองการแสวงหาความรู้ใหม่ของมนุษย์ ที่ไม่มีที่สิ้นสุด

1.5 คณิตศาสตร์พื้นฐาน

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ ที่ใช้ในการศึกษาแคลคูลัส ประกอบด้วย เซต ค่าสัมบูรณ์ สมการและอสมการ พหุนาม ฟังก์ชัน เลขยกกำลัง ตรีโกณมิติ และเรขาคณิตเบื้องต้น

เซต

เซต (Set) เป็นคำอนิยาม หมายถึงคำที่ต้องยอมรับกันในเบื้องต้นว่าไม่สามารถให้ความหมายที่รัดกุมได้ คำว่าเซตจึงหมายถึงกลุ่มของสิ่งของต่าง ๆ เมื่อกล่าวถึงกลุ่มใดแล้วจะสามารถบอกได้แน่นอนว่าสิ่งใดอยู่ในกลุ่ม และสิ่งใดอยู่นอกกลุ่ม เรียกสิ่งต่าง ๆ ที่อยู่ในเซตว่า **สมาชิก** (element) (P. Glendinning. 2012. หน้า 48) ถ้า a เป็นสมาชิกของเซต A เขียนแทนด้วย $a \in A$ และถ้า a ไม่เป็นสมาชิกของเซต A เขียนแทนด้วย $a \notin A$ เช่น $A = \{1, 2, 3\}$ จะได้ว่า $1 \in A$ แต่ $4 \notin A$ เป็นต้น การเขียนเซตประกอบด้วย 2 วิธีคือ

1. **วิธีแจกแจงสมาชิก** (Tubular form) การเขียนเซตแบบแจกแจงสมาชิก คือการเขียนเซตโดยเขียนสมาชิกลงในเครื่องหมายวงเล็บปีกกา $\{\}$ และใช้เครื่องหมายจุลภาค $(,)$ คั่นระหว่างสมาชิกแต่ละตัว ตัวอย่างเช่น $\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}$ และ $\{a, b, c\}$ เป็นต้น
2. **วิธีบอกเงื่อนไขของสมาชิก** (Set builder form) การเขียนเซตแบบบอกเงื่อนไขประกอบด้วย 2 ส่วน ส่วนแรกหมายถึงสมาชิก และส่วนที่สองคือเงื่อนไขของสมาชิก โดยมีเครื่องหมายทวิภาค (:) คั่นระหว่างสองส่วนนั้น อ่านว่า "โดยที่"

$$A = \{ \text{ สมาชิก } : \text{ เงื่อนไขของสมาชิก } \}$$

ตัวอย่างเช่น $A = \{x : x$ เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่า $5\}$ หมายถึง $A = \{1, 2, 3, 4\}$

สำหรับเซต A ที่มีสมาชิกทุกตัวอยู่ในเซต B จะกล่าวว่า A เป็น **เซตย่อย** (subset) ของ B เขียนแทนด้วย $A \subseteq B$ ในเบื้องต้นเพื่อให้ง่ายต่อการนำไปใช้ กำหนดสัญลักษณ์ดังนี้

$\mathbb{C}$	แทนเซตของจำนวนเชิงซ้อน	$\mathbb{Q}^c$	แทนเซตของจำนวนอตรรกยะ
$\mathbb{R}$	แทนเซตของจำนวนจริง	$\mathbb{Z}$	แทนเซตของจำนวนเต็ม
$\mathbb{Q}$	แทนเซตของจำนวนตรรกยะ	$\mathbb{N}$	แทนเซตของจำนวนนับ

สำหรับเซตย่อยของจำนวนจริง ถ้า $a, b \in \mathbb{R}$ เมื่อ $a < b$ **ช่วง** (interval) ของจำนวนจริงต่าง ๆ คือ

$\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$	เขียนแทนด้วย	(a, b)
$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$	เขียนแทนด้วย	$[a, b]$
$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$	เขียนแทนด้วย	$[a, b)$
$\{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$	เขียนแทนด้วย	$(a, b]$
$\{x \in \mathbb{R} : x > a\}$	เขียนแทนด้วย	(a, ∞)
$\{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$	เขียนแทนด้วย	$[a, \infty)$
$\{x \in \mathbb{R} : x < b\}$	เขียนแทนด้วย	$(-\infty, b)$
$\{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$	เขียนแทนด้วย	$(-\infty, b]$

สำหรับเซตที่ไม่มีสมาชิกเขียนแทนด้วย $\varnothing$ เรียกว่า **เซตว่าง** (empty set) และ **เอกภพสัมพัทธ์** (universe) คือเซตที่ถูกกำหนดขึ้นโดยมีข้อตกลงว่า จะกล่าวถึงสิ่งที่เป็นสมาชิกของเซตนี้เท่านั้น และนิยมใช้ $\mathcal{U}$ แทนเอกภพสัมพัทธ์ เมื่อให้ A และ B เป็นเซตในเอกภพสัมพัทธ์ $\mathcal{U}$ นิยามการดำเนินการบนเซตดังต่อไปนี้

ยูเนียน (union)	$A \cup B = \{x \in \mathcal{U} : x \in A$ หรือ $x \in B\}$
อินเตอร์เซชัน (intersection)	$A \cap B = \{x \in \mathcal{U} : x \in A$ และ $x \in B\}$
ผลต่าง (difference)	$A - B = \{x \in \mathcal{U} : x \in A$ และ $x \notin B\}$
ส่วนเติมเต็ม (complement)	$A^c = \{x \in \mathcal{U} : x \notin A\}$

สมการและอสมการ

สมบัติเบื้องต้นของการเท่ากัน ให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริง แล้ว

1. สมบัติสะท้อน (Reflective law) $\quad a = a$
2. สมบัติสมมาตร (Symmetric law) $\quad$ ถ้า $a = b$ แล้ว $b = a$
3. สมบัติถ่ายทอด (Transitive law) $\quad$ ถ้า $a = b$ และ $b = c$ แล้ว $a = c$

กฎไตรวิภาค (Trichotomy law) คือสัจพจน์ที่กล่าวว่า ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะได้ว่า

$a = b$ หรือ $a < b$ หรือ $a > b$ อย่างใดอย่างหนึ่ง

ทฤษฎีบท 1.5.1 สำหรับจำนวนจริง a, b และ c

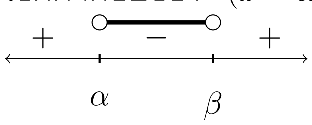
1. ถ้า $a = b$ แล้ว $a + c = b + c$
2. ถ้า $a + c = b + c$ แล้ว $a = b$
3. ถ้า $a = b$ แล้ว $ac = bc$
4. ถ้า $ac = bc$ และ $c \neq 0$ แล้ว $a = b$
5. $ab = 0$ ก็ต่อเมื่อ $a = 0$ หรือ $b = 0$
6. $a^2 + b^2 = 0$ ก็ต่อเมื่อ $a = 0$ และ $b = 0$

ทฤษฎีบท 1.5.2 ให้ $a, b, c, x, y \in \mathbb{R}$ แล้ว

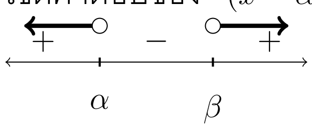
1. ถ้า $a > b$ แล้ว $a + c > b + c$
2. ถ้า $a > b$ และ $b > c$ แล้ว $a > c$
3. ถ้า $a > b$ และ $x > y$ แล้ว $a + x > b + y$
4. ถ้า $a > b$ และ $x > 0$ แล้ว $ax > bx$
5. ถ้า $a > b$ และ $x < 0$ แล้ว $ax < bx$

ให้ $+$ แทนผลคูณที่มากกว่า 0 และ $-$ แทนผลคูณที่น้อยกว่า 0 ให้ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $\alpha < \beta$ จะได้ข้อสรุปดังนี้

1. เซตคำตอบของ $(x - \alpha)(x - \beta) < 0$ คือ (α, β)



2. เซตคำตอบของ $(x - \alpha)(x - \beta) > 0$ คือ $(-\infty, \alpha) \cup (\beta, \infty)$



ค่าสัมบูรณ์

ในเบื้องต้น **ค่าสัมบูรณ์** (Absolute value) ของจำนวนจริง x เขียนแทนด้วย $|x|$ คือระยะทางจาก x ไปยัง 0 หรือดังบทนิยาม

บทนิยาม 1.5.3 ให้ x เป็นจำนวนจริงใด **ค่าสัมบูรณ์** ของ x เขียนแทนด้วย $|x|$ คือจำนวนจริงที่กำหนดโดย

$$|x| = \begin{cases} x & \text{เมื่อ } x > 0 \\ 0 & \text{เมื่อ } x = 0 \\ -x & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases}$$

ข้อสังเกต สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ จะได้ว่า

1. $|x| \geq 0$
2. $|x| = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = 0$
3. $|x| = |-x|$
4. $|x^2| = |x|^2 = x^2$

ทฤษฎีบท 1.5.4 ให้ x และ y เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะได้ว่า

1. $|xy| = |x||y|$
2. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$ เมื่อ $y \neq 0$
3. $\sqrt{x^2} = |x|$
4. $x \leq |x|$

บทพิสูจน์. ให้ x และ y เป็นจำนวนจริงใด ๆ

1. กรณีที่ $x = 0$ หรือ $y = 0$ จะได้ว่า $xy = 0$ ทำให้ได้ว่า $|xy| = 0 = |x||y|$ ให้ $x \neq 0$ และ $y \neq 0$
   ถ้า $x > 0$ และ $y > 0$ จะได้ว่า $xy > 0$ สรุปได้ว่า $|xy| = xy = |x||y|$
   ถ้า $x < 0$ และ $y < 0$ จะได้ว่า $xy > 0$ สรุปได้ว่า $|xy| = xy = (-x)(-y) = |x||y|$
   ถ้า x และ y ตัวใดตัวหนึ่งเป็นจำนวนจริงลบ โดยไม่เสียนัยทั่วไปให้ $x < 0$ และ $y > 0$ จะได้ว่า $xy < 0$ สรุปได้ว่า $|xy| = -xy = (-x)y = |x||y|$
2. ให้ $y \neq 0$ แสดงได้โดยง่ายว่า $\left|\dfrac{1}{y}\right| = \dfrac{1}{|y|}$ โดยข้อ 1 จะได้ว่า
   $$\left|\frac{x}{y}\right| = \left|x \cdot \frac{1}{y}\right| = |x| \cdot \left|\frac{1}{y}\right| = |x| \cdot \frac{1}{|y|} = \frac{|x|}{|y|}$$
3. กรณีที่ $x = 0$ เห็นได้โดยง่าย กรณีที่ $x > 0$ จะได้ว่า $\sqrt{x^2} = x$ กรณีที่ $x < 0$ จะได้ว่า $-x > 0$ ดังนั้น $\sqrt{x^2} = \sqrt{(-x)^2} = -x$ สรุปได้ว่า $\sqrt{x^2} = |x|$
4. ถ้า $x \leq 0$ จะได้ว่า $x \leq 0 \leq |x|$ กรณีที่ $x > 0$ จะได้ว่า $x = |x|$ สรุปได้ว่า $x \leq |x|$ □

ทฤษฎีบท 1.5.5 อสมการสามเหลี่ยม (Triangle inequality)
ให้ x และ y เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้ว

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

บทพิสูจน์. ให้ x และ y เป็นจำนวนจริง โดยทฤษฎีบท 1.5.4 ข้อ 2 จะได้ว่า

$$|x + y|^2 = (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = |x|^2 + 2xy + |y|^2$$

โดยทฤษฎีบท 1.5.4 ข้อ 1 และ 5 จะได้ว่า $xy \leq |xy| = |x||y|$ ดังนั้น

$$|x + y|^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$$

เนื่องจาก $|x + y| \geq 0$ และ $|x| + |y| \geq 0$ สรุปได้ว่า $|x + y| \leq |x| + |y|$ □

ทฤษฎีบท 1.5.6 ให้ x เป็นจำนวนจริง และ a เป็นจำนวนจริงบวก จะได้ว่า

1. $|x| \leq a$ ก็ต่อเมื่อ $-a \leq x \leq a$
2. $|x| \geq a$ ก็ต่อเมื่อ $x \leq -a$ หรือ $x \geq a$

บทพิสูจน์. ทำเป็นแบบฝึกหัด □

พหุนาม

บทนิยาม 1.5.7 ให้ $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ แล้ว

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

เรียกว่า **พหุนาม** (polynomial) และ $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ เรียกว่า **สัมประสิทธิ์** (coefficient) ของ $x^n, x^{n-1}, ..., x, 1$ ตามลำดับ ถ้า $a_n \neq 0$ เรียกว่า พหุนามดีกรี n และเขียน n แทนด้วย deg $P(x)$
เรียก $a_n \neq 0$ ว่า **สัมประสิทธิ์ตัวนำ** (leading coefficient)
กรณี $a_n = 1$ เรียก $P(x)$ ว่า **พหุนามโมนิก** (monic polynomial)

ให้ $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นพหุนาม แล้ว $P(x) = Q(x)$ ถ้า deg $P(x) =$ deg $Q(x)$ และอยู่ในรูป

$$\begin{aligned} P(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \\ Q(x) &= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n \end{aligned}$$

ซึ่งทุกสัมประสิทธ์เท่ากันทุกคู่คือ $a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ ..., a_n = b_n$
หรือกล่าวอีกอย่างคือ

$$P(x) = Q(x) \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad \text{deg } P(x) = \text{deg } Q(x) \quad \text{และ} \quad P(x) = Q(x) \quad \text{ทุกๆ } x \in \mathbb{R}$$

ขั้นตอนวิธีการหาร (The Division Algorithm) **สำหรับพหุนาม**
ให้ $P(x)$ และ $S(x)$ เป็นพหุนาม โดยที่ $S(x)$ ไม่ใช่พหุนามศูนย์ แล้วจะมีพหุนาม $Q(x)$ และ $R(x)$ เพียงคู่เดียวที่สอดคล้องกับ

$$P(x) = Q(x)S(x) + R(x) \qquad \text{เมื่อ } R(x) = 0 \text{ หรือ deg } R(x) < \text{deg } S(x)$$

เรียก $Q(x)$ ว่า**ผลหาร** (quotient) และ $R(x)$ ว่า**เศษเหลือ** (remainder)
กรณี $R(x) = 0$ แล้วจะได้ว่า $S(x)$ หาร $P(x)$ ลงตัว หรือ $S(x)$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$
ทฤษฎีบทเศษเหลือ (remainder theorem)
ให้ $P(x)$ เป็นพหุนาม และ $c \in \mathbb{R}$ แล้ว

$$x - c \quad \text{หาร} \quad P(x) \quad \text{เศษเหลือเท่ากับ} \quad P(c)$$

ดังนั้นถ้า $P(c) = 0$ แล้ว $x - c$ เป็นตัวประกอบหนึ่งของ $P(x)$

บทนิยาม 1.5.8 ให้ $P(x)$ เป็นพหุนาม ถ้า $P(\alpha) = 0$ จะเรียก α ว่า**ราก** (root) ของพหุนาม $P(x)$ หรือ α เป็น**คำตอบ** (solution) ของสมการ $P(x) = 0$

ข้อสังเกต

1. α เป็นรากของก็ต่อเมื่อ $x - \alpha$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$

2. ถ้า $P(x) = Q(x)S(x)$ แล้วรากทุกตัวของ $Q(x)$ และรากทุกตัวของ $S(x)$ เป็นรากของ $P(x)$

ฟังก์ชัน

บทนิยาม 1.5.9 ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ **ผลคูณคาร์ทีเซียน** (cartesian product) นิยามโดย

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A \text{ และ } b \in B\}$$

บทนิยาม 1.5.10 จะกล่าวว่า $f \subseteq A \times B$ เป็น**ฟังก์ชัน** (function) ก็ต่อเมื่อ

$$\text{แต่ละ } (x_1, y_1) \text{ และ } (x_2, y_2) \text{ ใน } f \text{ ถ้า } x_1 = x_2 \text{ แล้ว } y_1 = y_2$$

ถ้า f เป็นฟังก์ชัน และ $(x,y) \in f$ เขียนแทนด้วย $y = f(x)$

บทนิยาม 1.5.11 f เป็น**ฟังก์ชันจาก** A **ไป** B เขียนแทนด้วย $f : A \to B$
ก็ต่อเมื่อ

1. f เป็นฟังก์ชัน
2. Dom$(f) = A$
3. Ran$(f) \subseteq B$

เมื่อ Dom$(f) = \{x \in A : (x,y) \in f\}$ เรียกว่า **โดเมน** (domain) ของ f
และ Ran$(f) = \{y \in A : (x,y) \in f\}$ เรียกว่า **เรนจ์** (range) ของ f

บทนิยาม 1.5.12 เรียก $f : A \to B$ ว่า**ฟังก์ชันมีขอบเขต** (bounded function) บน $D \subseteq A$
ก็ต่อเมื่อมี $M > 0$ ซึ่ง $|f(x)| \leq M$ ทุก ๆ $x \in D$

บทนิยาม 1.5.13 ให้ $f : A_1 \to \mathbb{R}$ และ $g : A_2 \to \mathbb{R}$ โดยที่ $A_1 \cap A_2 \neq \varnothing$ กำหนดให้ $A = A_1 \cap A_2$
นิยาม**พีชคณิตของฟังก์ชัน** (algebra of functions) ดังนี้

$f + g : A \to \mathbb{R}$	กำหนดโดย	$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
$f - g : A \to \mathbb{R}$	กำหนดโดย	$(f-g)(x) = f(x) + g(x)$
$fg : A \to \mathbb{R}$	กำหนดโดย	$(fg)(x) = f(x)g(x)$
$\dfrac{f}{g} : A - \{x \in A \,:\, g(x) = 0\} \to \mathbb{R}$	กำหนดโดย	$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

บทนิยาม 1.5.14 กำหนดให้ $f : A \to B$ จะกล่าวว่า

1. f เป็น**ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง** (injection) หรือ ฟังก์ชัน 1-1 ก็ต่อเมื่อ

$$\text{แต่ละ } x_1, x_2 \in A \quad \text{ถ้า} \quad f(x_1) = f(x_2) \quad \text{แล้ว} \quad x_1 = x_2$$

2. f เป็น**ฟังก์ชันทั่วถึง** (surjection) ก็ต่อเมื่อ Ran$(f) = B$

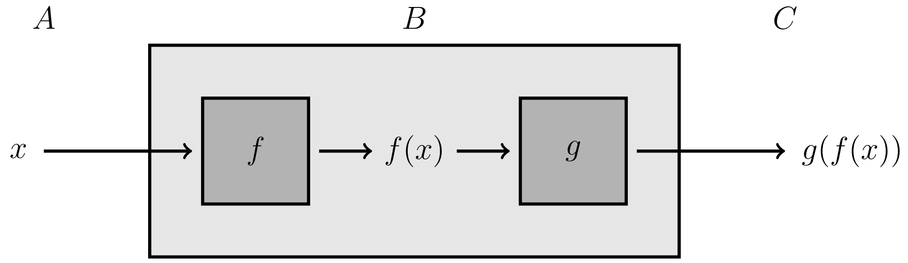
3. f เป็น**ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึง** (bijection) ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชัน 1-1 และ ทั่วถึง

บทนิยาม 1.5.15 ให้ $f : A \to B$ และ $g : B \to C$ แล้ว $g \circ f : A \to C$ เรียกว่า**ฟังก์ชันประกอบ** (composite function) ของ f และ g นิยามโดย

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

ถ้าเปรียบเทียบฟังก์ชันคือเครื่องจักรชิ้นหนึ่งเรียกว่า f เมื่อใส่ x หรือ input เข้าไปในเครื่องจะได้ $f(x)$ ออกมาตามหน้าที่ของเครื่องจักรชนิดนั้น จากแนวคิดนี้เมื่อประกอบเครื่องจักรอีกเครื่องที่เรียกว่า g อีกชิ้น โดยนำ $f(x)$ หรือ output จากเครื่องจักร f ใส่เข้าไปในเครื่องจักร g แล้วได้ผลเป็น $g(f(x))$ เรียกเครื่องจักรประกอบจากสองชิ้นนี้ว่า h ดังรูป

รูปที่ 1.9 แผนภาพแสดงฟังก์ชันประกอบ $g \circ f$



บทนิยาม 1.5.16 ให้ $f : A \to B$ จะกล่าวว่า f เป็น**ฟังก์ชันผกผันได้** (invertible function) ก็ต่อเมื่อ$f^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in f\}$ เป็นฟังก์ชัน
และเรียก f^{-1} ว่า**ฟังก์ชันผกผัน** (inverse function) ของ f

ทฤษฎีบท 1.5.17 ให้ $f : A \to B$ แล้วจะได้ว่า

$$f \text{ เป็นฟังก์ชันผกผันได้ ก็ต่อเมื่อ } f \text{ เป็นฟังก์ชัน 1-1}$$

บทพิสูจน์. สมมติ f เป็นฟังก์ชันผกผันได้ นั่นคือ f^{-1} เป็นฟังก์ชัน ให้ $(x_1, y_1) \in f$ และ $(x_2, y_2) \in f$ สมมติว่า $y_1 = y_2$ เนื่องจาก $(y_1, x_1) \in f^{-1}$ และ $(y_2, x_2) \in f^{-1}$ และ f^{-1} เป็นฟังก์ชัน ดังนั้น $x_1 = x_2$
ในทางกลับกันสมมติ f เป็นฟังก์ชัน 1-1 $(x_1, y_1) \in f^{-1}$ และ $(x_2, y_2) \in f^{-1}$ สมมติว่า $x_1 = x_2$ เนื่องจาก $(y_1, x_1) \in f$ และ $(y_2, x_2) \in f$ และ f เป็นฟังก์ชัน 1-1 ดังนั้น $y_1 = y_2$ นั่นคือ f^{-1} เป็นฟังก์ชัน หรือกล่าวได้ว่า f เป็นฟังก์ชันผกผันได้ □

ชนิดของฟังก์ชันที่ควรทราบ

1. ฟังก์ชันเอกลักษณ์ (identity function) $f(x) = x$
2. ฟังก์ชันเชิงเส้น (linear function) $f(x) = ax + b$
3. ฟังก์ชันกำลังสอง (Quadratic function) $f(x) = ax^2 + bx + c$
4. ฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ (Absolute value function) $f(x) = a|x - h| + k$
5. ฟังก์ชันกำลัง (Power function) $f(x) = ax^n$
6. ฟังก์ชันพหุนาม (Polynomial function) $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$
7. ฟังก์ชันตรรกยะ (Rational function) $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$

เมื่อ $p(x), q(x)$ เป็นพหุนาม และ $q(x) \neq 0$

จะได้ว่าโดเมนของฟังก์ชันข้อ 1 ถึง 6 คือ $\mathbb{R}$ และโดเมนของฟังก์ชันข้อ 7 เท่ากับ $\mathbb{R} - \{x : q(x) = 0\}$

เลขยกกำลัง

บทนิยาม 1.5.18 ให้ $a \in \mathbb{R}$ และ $n \in \mathbb{N}$ เรียก a^n ว่า **เลขยกกำลัง** (power of a number) นิยามโดย

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ ตัว}}$$

เมื่อ a เรียกว่า **ฐาน** (basis) และ n เรียกว่า **เลขชี้กำลัง** (exopnent)
นิยาม $a^0 = 1$ และ $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ เมื่อ $a \neq 0$ ถ้า $\sqrt[n]{a}$ เป็นจำนวนจริงนิยาม $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

สมบัติเบื้องต้นของเลขยกกำลัง ให้ a เป็นจำนวนจริง และ x, y เป็นจำนวนเต็มบวก

1. $(a^x)^y = a^{xy}$
2. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
3. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ เมื่อ $a \neq 0$

ขยายแนวคิดเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ เมื่อ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่งตัวหารร่วมมากของ m และ n เท่ากับ 1 ถ้า นิยาม $\sqrt[n]{a}$ เป็นจำนวนจริง นิยาม

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (\sqrt[n]{a})^m$$

และขยายแนวคิดไปยังจำนวนตรรกยะลบและจำนวนจริงได้ แต่ไม่ขอกล่าวในที่นี้ ถ้า f เป็นฟังก์ชันโดยที่ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1 แล้ว $y = \sqrt[n]{f(x)}$ เรียกว่า **ฟังก์ชันกรณฑ์** (radical function)

สมบัติเบื้องต้นทางพีชคณิตที่อาจใช้ในแคลคูลัส เมื่อ $a, b \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

1. กำลังสองสัมบูรณ์

   $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

   $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

2. กำลังสามสัมบูรณ์

   $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

   $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

3. ผลต่างกำลังสอง $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
4. ผลต่างกำลังสาม $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$
5. ผลบวกกำลังสาม $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$
6. ทฤษฎีบททวินาม ให้ n เป็นจำนวนนับ

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n$$

เมื่อ $\dbinom{n}{r} = \dfrac{n!}{(n-r)!r!}$ โดยที่ $n, r \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $0 \leq r \leq n$
นิยาม m แฟคทอเรียล คือ $m! = m(m-1)(m-2)\cdots 2 \cdot 1$ เมื่อ $m \in \mathbb{N}$ และ $0! = 1$

ให้ a เป็นจำนวนจริงซึ่ง $a > 0$ และ $a \neq 1$ เรียก

$$\{(x, y) : y = a^x\}$$

ว่า**ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง** (exponential function) เนื่องจากฟังก์ชันเลขชี้กำลังเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง จะได้ว่ามีฟังก์ชันผกผัน ดังนั้นเรียกว่าฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันเลขชี้กำลังว่า **ฟังก์ชันลอการิทึม** (logarithmic function) เขียนแทนด้วย $y = \log_a x$ นิยามโดย

$$y = \log_a x \qquad \text{ก็ต่อเมื่อ} \qquad x = a^y$$

ดังนั้น $\log_a 1 = 0$ และ $\log_a a = 1$ ในกรณีที่ $a = 10$ เรียกว่า **ลอการิทึมสามัญ** (common logarithm) เขียนแทนด้วย $\log x$ และกรณี $a = e$ เรียกว่า **ลอการิทึมธรรมชาติ** (natural logarithm) เขียนแทนด้วย $\ell n x$ โดยที่ e คือ **ค่าคงตัวออยเลอร์** (Euler's constant) ซึ่งเป็นจำนวนอตรรกยะมีค่าประมาณ $2.71828182845...$

สมบัติเบื้องต้นของลอการิทึม

ทฤษฎีบท 1.5.19 ให้ x, y เป็นจำนวนจริงบวก และ m เป็นจำนวนตรรกยะ โดยที่ $a > 0$ และ $a \neq 1$ จะได้ว่า

1. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a \left(\dfrac{y}{x}\right) = \log_a y - \log_a x$
3. $\log_a x^m = m\log_a x$
4. $a^{\log_a x} = x$

บทพิสูจน์. ให้ $z = \log_a x$ และ $w = \log_a y$ จะได้ว่า $x = a^z$ และ $y = a^w$

1. จะได้ว่า $xy = a^z \cdot a^w = a^{z+w}$ นั่นคือ $z + w = \log_a xy$ ฉะนั้น $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

3. จะได้ว่า $x^m = (a^z)^m = a^{mz}$ นั่นคือ $mz = \log_a x^m$ ฉะนั้น $\log_a x^m = m\log_a x$

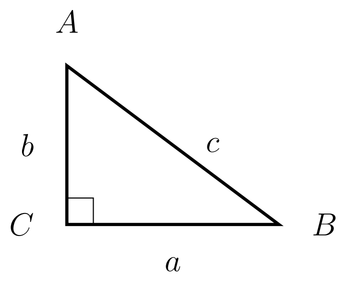
ข้อ 2 และ 4 เป็นแบบฝึกหัด □

สำหรับ $a, b > 0$ และ $a, b \neq 1$ สามารถเปลี่ยนฐานของลอการิทึมได้โดย

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

ตรีโกณมิติ

พิจารณาสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC



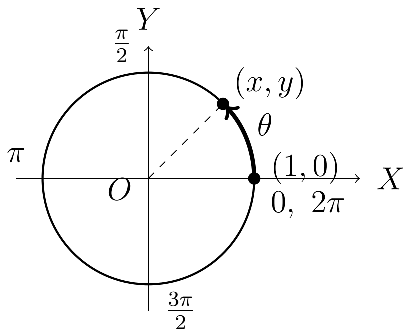
นิยามค่าตรีโกณมิติทั้ง 6 แบบคือ ไซน์ (sine) โคไซน์ (cosine) แทนเจนต์ (tangent) โคแทนเจนต์ (cotangent) เซแคนต์ (secant) และโคเซแคนต์ (cosecant) ดังนี้

$\sin B = \dfrac{b}{c}$ $\cos B = \dfrac{a}{c}$ $\tan B = \dfrac{\sin B}{\cos B} = \dfrac{b}{a}$

$\csc B = \dfrac{1}{\sin B} = \dfrac{c}{b}$ $\sec B = \dfrac{1}{\cos B} = \dfrac{c}{a}$ $\cot B = \dfrac{\cos B}{\sin B} = \dfrac{a}{b}$

ขยายแนวคิดไปยังมุม θ ซึ่งมีหน่วยเป็นเรเดียนคือความยาวของเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วย โดยจุดเริ่มต้นที่ $(1,0)$ ไปสิ้นสุดที่ (x,y) เมื่อวัดแบบทวนเข็มนาฬิกาให้มีค่าเป็นบวก และวัดแบบตามเข็มนาฬิกาให้มีค่าเป็นลบ จะได้ว่า $x = \cos\theta$ และ $y = \sin\theta$ นั่นคือ $x^2 + y^2 = 1$
จะได้ว่า 180° มีค่าตรงกับ π เรเดียน

รูปที่ 1.10 วงกลมหนึ่งหน่วย



เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ

1. $\sin x \csc x = 1$
2. $\cos x \sec x = 1$
3. $\cot x \tan x = 1$
4. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
5. $\sec^2 x - \tan^2 x = 1$
6. $\csc^2 x - \cot^2 x = 1$
7. $\sin(-x) = -\sin x$
8. $\cos(-x) = \cos x$
9. $\tan(-x) = -\tan x$
10. $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$
11. $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$
12. $\tan(x \pm y) = \dfrac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$
13. $\sin(2x) = 2\sin x \cos x = \dfrac{2\tan x}{1 + \tan^2 x}$
14. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

    $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$

    $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$
15. $\tan(2x) = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$
16. $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$
17. $\sin^2 x = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)$
18. $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$
19. $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$
20. $\tan 3x = \dfrac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$
21. $\sin x + \sin y = 2\sin\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$
22. $\sin x - \sin y = 2\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\sin\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$
23. $\cos x + \cos y = 2\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$

24. $\cos x - \cos y = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

25. $\sin x \cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x+y) + \sin(x-y)\right]$

26. $\cos x \sin y = \frac{1}{2}\left[\sin(x+y) - \sin(x-y)\right]$

27. $\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x+y) + \cos(x-y)\right]$

28. $\sin x \sin y = -\frac{1}{2}\left[\cos(x+y) - \cos(x-y)\right]$

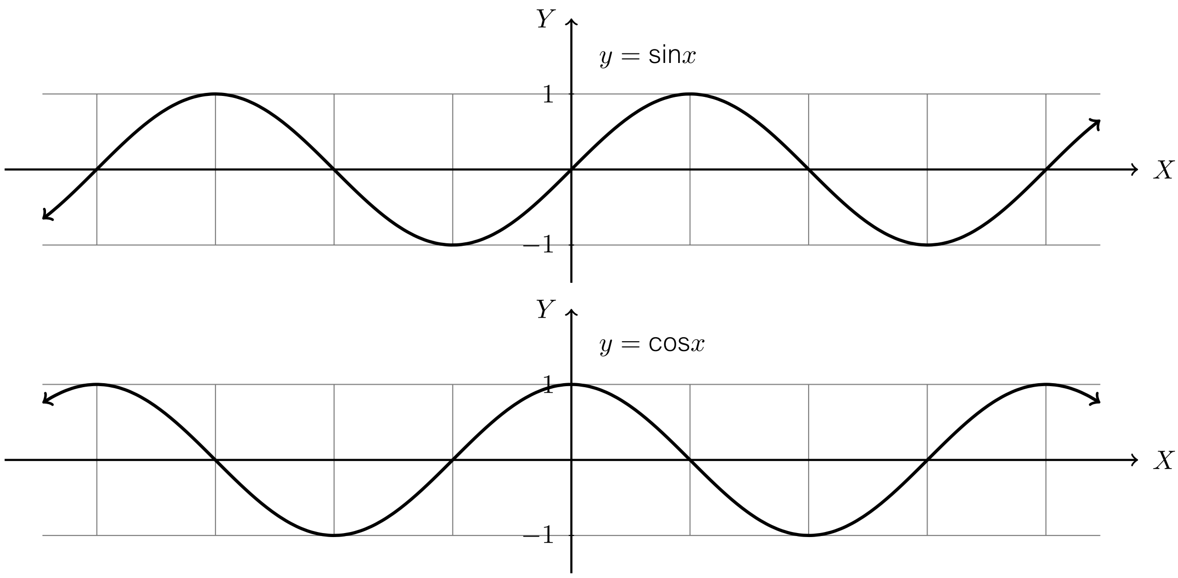
ค่าตรีโกณมิติมาตรฐานที่ควรทราบ

ตารางที่ 1.1 ตัวอย่างค่าตรีโกณมิติที่ควรทราบ

ตรีโกณมิติ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$-$	0	$-$	0

ให้ $x \in \mathbb{R}$ จะเรียก $y = \sin x$ ว่า**ฟังก์ชันไซน์** (sine function) และ $y = \cos x$ ว่า**ฟังก์ชันโคไซน์** (cosine function) แสดงกราฟได้ดังนี้ โดยแกน X มีความกว้างช่องละ $\frac{\pi}{2}$

รูปที่ 1.11 กราฟของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์



นิยามฟังก์ชันตรีโกณมิติอีก 4 ฟังก์ชันคือ ฟังก์ชันแทนเจนต์ (tangent fuction) ฟังก์ชันโคแทนเจนต์ (cotangent fuction) ฟังก์ชันเซแคนต์ (secant fuction) และฟังก์ชันโคเซแคนต์ (cosecant fuction) ได้ในทำนองเดียวกัน เรียกฟังก์ชันทั้ง 6 ว่า **ฟังก์ชันตรีโกณมิติ (trigonometric function)** สรุปได้ดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 1.2 ฟังก์ชันตรีโกณมิติทั้ง 6 ฟังก์ชัน

ฟังก์ชัน	$y = f(x)$	โดเมน	เรจน์
ไซน์	$y = \sin x$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$
โคไซน์	$y = \cos x$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$
แทนเจนต์	$y = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$	$\mathbb{R} - \left\{\frac{(2n-1)\pi}{2} : n \in \mathbb{Z}\right\}$	$\mathbb{R}$
โคแทนเจนต์	$y = \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$	$\mathbb{R} - \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$
เซแคนต์	$y = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$	$\mathbb{R} - \left\{\frac{(2n-1)\pi}{2} : n \in \mathbb{Z}\right\}$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
โคเซแคนต์	$y = \text{arccsc} x = \dfrac{1}{\sin x}$	$\mathbb{R} - \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

จะเห็นว่าฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1 ดังนั้นการศึกษาฟังก์ชันผกผันจึงต้องกำหนดโดเมนเพื่อให้เป็นฟังก์ชัน 1-1 ฟังก์ชันไซน์มีโดเมนเป็น $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ และฟังก์ชันโคไซน์มีโดเมน $[0, \pi]$

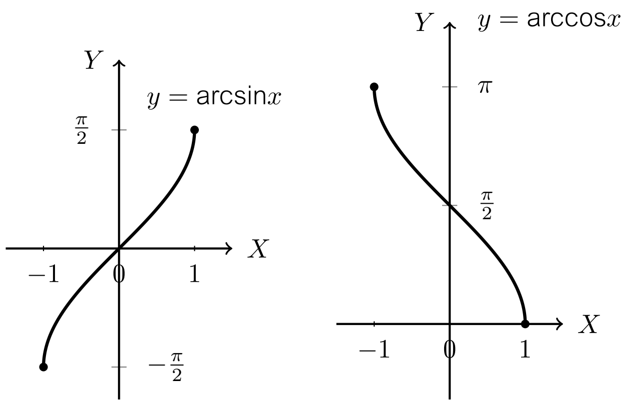
1. เรียกฟังก์ชันผกผันของไซน์ว่า **ฟังก์ชันอาร์กไซน์** (arcsine function) เขียนแทนด้วย arcsin นิยามโดย

$$y = \arcsin x \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad x = \sin y \quad \text{เมื่อ} \quad y \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]$$

2. เรียกฟังก์ชันผกผันของโคไซน์ว่า **ฟังก์ชันอาร์กโคไซน์** (arccosine function) เขียนแทนด้วย arccos นิยามโดย

$$y = \arccos x \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad x = \cos y \quad \text{เมื่อ} \quad y \in [0, \pi]$$

รูปที่ 1.12 กราฟของฟังก์ชันอาร์กไซน์และอาร์กโคไซน์



ในทำนองเดียวกันฟังกชันผกผันอีก 4 ฟังก์ชันคือ อาร์กแทนเจนต์ (arctangent function) อาร์กโคแทนเจนต์ (arccotangent function) อาร์กเซแคนต์ (arcsecant function) และอาร์กโคเซแคนต์

(arccosecant function) เรียกฟังก์ชันทั้ง 6 ว่า **ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน** (inverse trigonometric function) สรุปได้ดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 1.3 ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผันทั้ง 6 ฟังก์ชัน

ฟังก์ชัน	$y = f(x)$	โดเมน	เรจน์
อาร์กไซน์	$y = \text{arcsin}x$	$[-1, 1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
อาร์กโคไซน์	$y = \text{arccos}x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
อาร์กแทนเจนต์	$y = \text{arctan}x$	$\mathbb{R}$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
อาร์กโคแทนเจนต์	$y = \text{arccot}x$	$\mathbb{R}$	$(0, \pi)$
อาร์กเซแคนต์	$y = \text{arcsec}x$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$	$[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$
อาร์กโคเซแคนต์	$y = \text{arccsc}x$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$	$[-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$

เรขาคณิตวิเคราะห์

จุดในทางคณิตศาสตร์เป็นอนิยามแต่เป็นทราบกันดีว่าจุดมีความสำคัญโดยเฉพาะการใช้บอกตำแหน่งต่าง ๆ โดยมีแกนอ้างอิง เรียกแกนในแนวนอนว่า **แกน** X (X-axis) และแกนในแนวตั้งว่า **แกน** Y (Y-axis) เรียกจุดตัดของแกนทั้งสองว่า **จุดกำเนิด** (origin) แทนด้วยคู่อันดับ $(0, 0)$ ในที่นี้จะกล่าวถึงจุดคือคู่อันดับที่เป็นสมาชิกของ $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

ระยะทาง (distance) ระหว่าง $A(x_1, y_1)$ และ $B(x_2, y_2)$ เขียนแทนด้วย AB นิยามโดย

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

ความชัน (slope) ของส่วนเส้นตรงที่ลากจาก $A(x_1, y_1)$ และ $B(x_2, y_2)$ เขียนแทนด้วย m_{AB} บางครั้งถ้าไม่สนใจ A และ B จะเขียนย่อ ๆ ด้วย m นิยามโดย

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

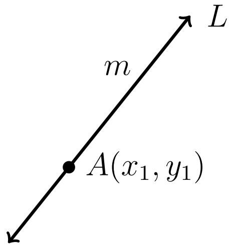
เมื่อ $x_1 \neq x_2$ กรณีที่ $x_1 = x_2$ ความชันไม่มีค่าและส่วนเส้นตรง A และ B จะเป็นแส้นในแนวตั้ง

ให้ $A(x_1, y_1)$ เป็นจุดและ m คือความชัน ให้ L คือเซตของจุด (x, y) โดยที่ความชันของ (x, y) และ $A(x_1, y_1)$ เท่ากับ m เรียกว่า **เส้นตรง** (line) ที่มีความชัน m ผ่านจุด A หรือหมายถึงเซต

$$L = \{(x, y) : y = m(x - x_1) + y_1\}$$

แสดงเส้นตรง L ได้ดังรูป

รูปที่ 1.13 เส้นตรงผ่านจุด A มีความชัน m

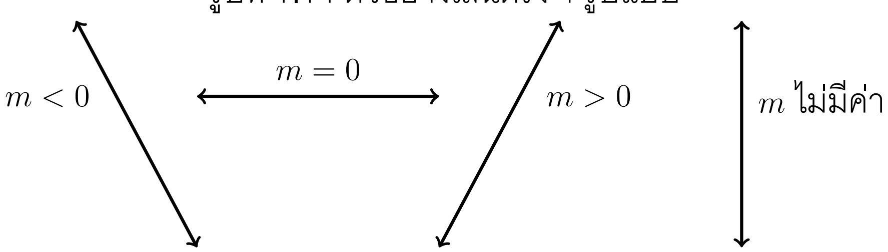


เรียก $y = m(x - x_1) + y_1$ ว่า **สมการเส้นตรง** (equation of a line) สามารถเขียนในรูป

$$y = mx + c$$

ในกรณีที่ $m = 0$ จะเรียก **เส้นตรงแนวนอน** (horizontal line) ซึ่งมีสมการเป็น $y = y_1$ ถ้าเส้นตรงนี้ผ่านจุด A และในกรณีที่ m หาค่าไม่ได้ จะเรียก **เส้นตรงแนวยืน** (vertical line) ซึ่งมีสมการ $x = x_1$ ถ้าเส้นตรงนี้ผ่านจุด A ดังนั้นเราอาจแบ่งเส้นตรงเป็น 4 แบบโดยใช้ความชันคือ 1. $m > 0$ 2. $m < 0$ 3. $m = 0$ และ 4. m ไม่มีค่า แสดงตัวอย่างได้ดังรูป

รูปที่ 1.14 ตัวอย่างเส้นตรง 4 รูปแบบ

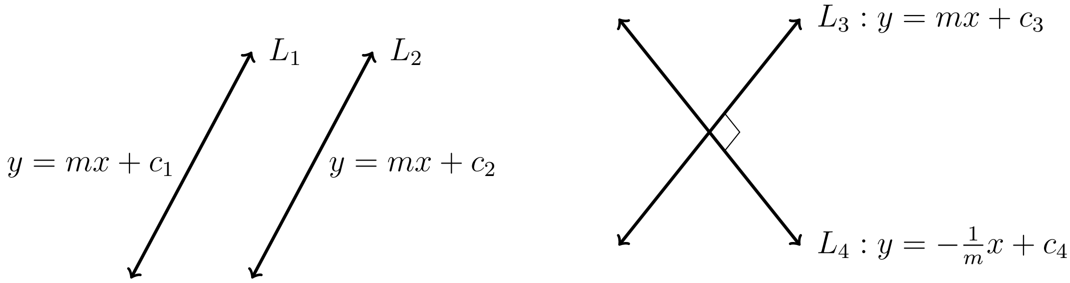


ให้เส้นตรง L_1 และ L_2 มีความชัน m_1 และ m_2 ตามลำดับ จะได้ว่า

1. L_1 **ขนาน** (parallel) กับ L_2 ก็ต่อเมื่อ $m_1 = m_2$
2. L_1 **ตั้งฉาก** (perpendicular) กับ L_2 ก็ต่อเมื่อ $m_1 m_2 = -1$

อาจแสดงตัวอย่างได้ดังรูป

รูปที่ 1.15 ตัวอย่างเส้นตรงที่ขนานกันและตั้งฉากกัน



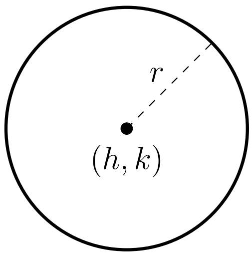
ในกรณีเส้นตรงที่ความชันไม่มีค่าย่อมขนานกับเส้นตรงใด ๆ ที่ความชันไม่มีค่าเสมอ เพราะทุกเส้นเป็นเส้นตรงแนวตั้ง และเส้นตรงที่ความชันไม่มีค่าย่อมตั้งฉากกับเส้นตรงใด ๆ ที่มีความชันเท่ากับ 0 หรือเส้นตรงแนวนอนเสมอ

ให้ C เป็นเซตของจุด (x, y) ที่ห่างจากจุดคงที่ (h, k) ด้วยระยะคงที่ r เรียกว่า **วงกลม** (circle) ที่มีศูนย์กลางที่ (h, k) และรัศมี r ดังนั้น

$$C = \{(x, y) : (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2\}$$

เรียก $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ **สมการวงกลม** (equation of a circle) แสดงตัวอย่างได้ดังรูป

รูปที่ 1.16 วงกลมที่มีศูนย์กลางที่ (h, k) และรัศมี r



สรุป

ในบทนี้เราจะกล่าวถึงวิวัฒนาการของวิชาแคลคูลัสเริ่มต้นตั้งแต่สมัยก่อนคริสตกาลในยุคกรีกที่กล่าวถึงปัญหาการวัดที่ถูกบันทึกไว้ในกระดาษปาปิรุส และวิธีการในการหาพื้นที่ของรูปต่าง ๆ อาศัยวิธีการแบ่งพื้นที่ออกเป็นส่วนประกอบย่อย ๆ ที่เรียกว่า ระเบียบวิธีเกษียณ และนำไปสู่แนวคิดการแบ่งแยกได้ไม่จำกัด แต่ก็ยังไม่รัดกุมในทางคณิตศาสตร์จึงไม่เป็นที่ยอมรับ นี้เป็นจุดเริ่มต้นของแคลคูลัส จากนั้นอาร์คิมีดีสก็ได้พัฒนาวิธีดังกล่าวมาใช้ในการพื้นที่ของพาราโบลาเรียกว่า วิธีของอาร์คิมีดิส ซึ่งได้ผลลัพธ์ที่ว่า พื้นที่ปิดล้อมของพาราโบลาจะเป็น 4/3 เท่าของพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมรูปแรกที่สร้างให้แนบในเซกเมนต์ของพาราโบลานั้น จากนั้นมีผู้พัฒนาแนวคิดดังกล่าวมาเรื่อย ๆ จนกระทั่งแฟร์มาต์ได้นำเสนอผลงานเกี่ยวกับปัญหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุด จนทำให้การพัฒนาแคลคูลัสแบบก้าวกระโดด การติดต่อระหว่างแฟร์มาต์กับเดส์การ์ตส์ทำให้เกิดองค์ความรู้ใหม่ ๆ เกี่ยวกับเส้นสัมผัสเส้นโค้ง เนื่อจากเดส์การ์ตส์เป็นผู้ให้กำเนิดเรขาคณิตวิเคราะห์ ทำให้การพัฒนาแคลคูลัสไปในแนวเรขาคณิตวิเคราะห์นั่นเอง จากนั้นมีนักคณิตหลายคนผลิตผลงานมามากมาย จนเป็นแนวคิดให้นิวตันและไลบ์นิตซ์นำไปเป็นแนวคิดพื้นฐานในการพัฒนาแคลคูลัสอย่างจริงจรัง โดยเฉพาะผลงานของแบร์โรว์ในการหาเส้นสัมผัสเส้นโค้งโดย สามเหลี่ยมผลต่างของแบร์โรว์ และแบร์โรว์ได้ค้นพบทฤษฎีบทหลักมูลแคลคูลัส แต่ไม่ได้พิสูจน์ซึ่งต่อมานิวตันได้ทำการพิสูจน์จนสำเร็จ นิวตันและไลบ์นิตซ์ทั้งสองที่ได้ชื่อร่วมกันว่าเป็นผู้ประดิษฐ์ แคลคูลัส ถึงแม้จะพัฒนาความรู้ทางแคลคูลัสอย่างอิสระต่อกัน แต่ระบบสัญลักษณ์ของอนุพันธ์และปริพันธ์ที่เสนอโดยไลบ์นิตซ์ได้รับความนิยมมากกว่าและใช้กันอย่างแพร่หลายจนถึงปัจจุบัน แต่ก็มีผู้ชี้ให้เห็นถึงจุดอ่อนของการให้เหตุผลทางตรรกในผลงานของนิวตันและไลบ์นิตซ์ ซึ่งโคชีได้วางรากฐานที่รัดกุม

เข้มงวดกว่าให้กับแคลคูลัสที่เรียกว่าคณิตศาสตร์วิเคราะห์ อย่างไรก็ตามยังมีความจำเป็นที่จะพัฒนาแนวคิดของแคลคูลัสให้อยู่บนรากฐานแนวคิดของคณิตศาสตร์ที่สามารถให้เหตุผลได้รัดกุมเข้มงวด และขยายให้ครอบคลุมปัญหาต่าง ๆ ที่จะเกิดขึ้นจากความจำเป็นต้องพัฒนาความรู้ด้านวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์ขั้นสูงต่อไป สุดท้ายกล่าวถึงความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการศึกษาแคลคูลัส ประกอบด้วย เซต ค่าสัมบูรณ์ สมการและอสมการ พหุนาม ฟังก์ชัน เลขยกกำลัง ตรีโกณมิติ และเรขาคณิตเบื้องต้น

แบบฝึกหัดบทที่ 1

1. จงอธิบายวิธีการตรวจสอบปริมาตรของพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสเป็น 1/3 เท่าของปริมาตรของปริซึมที่มีฐานเดียวกันและสูงเท่ากัน เพราะเหตุใดพร้อมยกตัวอย่างประกอบ

2. พิจารณารูปหลายเหลี่ยมที่แบ่งวงกลมรัศมี 1 ออกเป็น n ส่วนเท่า ๆ กัน

   2.1 จงหาพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยมเมื่อ $n = 10, 100$ และ 1000 โดยใช้เครื่องคำนวณ

   2.2 จงคาดคะเนว่าพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยมดังกล่าวจะมีค่าเข้าใกล้ค่าใด เมื่อ n มีค่ามาก ๆ

3. จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่ปิดล้อมต่อไปนี้ โดยใช้วิธีของอาร์คิมีดีส

   3.1 พาราโบลา $y = x^2$ และเส้นตรง $y = 2$

   3.2 พาราโบลา $y = x^2 + 1$ และเส้นตรง $y = x + 3$

   3.3 พาราโบลา $y = -x^2$ และเส้นตรง $y = -x - 2$

4. จากตัวอย่าง 1.1.2 จงพิสูจน์ว่า $h = 4s$

5. จงหาความชันของจุด P บนเส้นโค้ง $y = f(x)$ โดยใช้สามเหลี่ยมผลต่างของแบร์โรว์ ตอบในรูป h

   5.1 $f(x) = x^2$ และ $P = (2, 4)$

   5.2 $f(x) = x^3$ และ $P = (-1, -1)$

6. กำหนดให้ $P = (0, 0)$ และ $f(x) = \sin x$

   6.1 จงหาความชันของจุด P บนเส้นโค้ง $y = f(x)$ โดยใช้สามเหลี่ยมผลต่างของแบร์โรว์ในรูป h

   6.2 จากข้อ 5.1 จงหาความชันที่จุด P เมื่อ $h = 0.1, 0.01$ และ 0.001 โดยใช้เครื่องคำนวณ

   6.3 จงคาดคะเนว่าความชันที่จุด P จะมีค่าเข้าใกล้ค่าใด เมื่อ h มีค่าน้อย ๆ

7. ให้ $\mathcal{U} = \{x \in \mathbb{Z} : -100 \leq x \leq 100\}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์
   $A = \{x \in \mathbb{Z} : 2$ หาร x ลงตัว $\}$ และ $B = \{x \in \mathbb{Z} : 3$ หาร x ลงตัว $\}$
   จงหาจำนวนสมาชิกของ $A^c - B^c$

8. จงแจกแจงสมาชิกของเซตต่อไปนี้ พร้อมทั้งเขียนแผนภาพ

   8.1 $\{(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} : x+y=5\}$

   8.2 $\{(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} : xy=12\}$

   8.3 $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} : x^2+4y^2-2x+4y+2=0\}$

9. จงหาโดเมนและเจน์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

   9.1 $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

   9.2 $f(x)=|x+1|-|x-1|$

   9.3 $f(x)=\ell\text{n}\left(\dfrac{1}{x^2-1}\right)$

   9.4 $f(x)=\sin^2(x^2+1)$

10. จงหา $f^{-1}(x)$ ถ้ากำหนดให้ $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

11. ให้ $f(x)=x^2+3x-1$ จงหา $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ เมื่อ $h>0$

12. จงตรวจสอบว่าฟังก์ชันต่อไปนี้มีฟังก์ชันผกผันหรือไม่ พร้อมให้เหตุผล

   12.1 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ นิยามโดย $f(x)=1-2x$

   12.2 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ นิยามโดย $f(x)=x^3+1$

   12.3 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ นิยามโดย $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$

   12.4 $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ นิยามโดย $f(x)=\sqrt{x}$

13. กำหนดให้ $2<x<3$ จงหาค่าของ $\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2-6x+9}$

14. กำหนดให้ $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นพหุนามดีกรี 2551 ซึ่งสอดคล้องกับ

$$P(n)=Q(n) \quad \text{สำหรับ } n=1,2,3,...,2551 \quad \text{และ} \quad P(2552)=Q(2552)+1$$

   จงหาค่าของ $P(0)-Q(0)$

15. ให้ $\alpha,\ \beta$ และ γ เป็นรากทั้งสามของสมการ $x^3-9x+5=0$ ค่าของ $(1-\alpha)^2(1-\beta)^2(1-\gamma)^2$ เท่ากับเท่าใด

16. กำหนดให้ $P(x)=x^3+ax^2+bx+2$ เมื่อ a,b เป็นจำนวนจริง ถ้า $x-1$ และ $x+3$ ต่างหาร $P(x)$ เหลือเศษ 5 แล้ว $a+2b$ มีค่าเท่าใด

17. จงหาเซตคำตอบของอสมการ $3x^2+5x+11<2x^2-x-4<x^2-2x+2$

18. จงหาเซตคำตอบของสมการ $||x-1|+1|=||x+1|-1|$

19. จงหา y ที่เป็นจำนวนจริงซึ่ง $y=\dfrac{x|x|-x^2}{x^2-x|x|}$ เมื่อ $x\in\mathbb{R}$

20. จงหาเซตคำตอบของสมการ $(|x|-1)(|x|-3)(|x|+3)(|x|-7)=150$

21. จงหาเซตคำตอบของสมการ

21.1 $4^x - 5 \cdot 2^x + 6 = 0$

21.2 $2 + 3(15^{|x|}) = 5^{|x|} + 25(3^{|x|+1})$

21.3 $\log(x+1) + \log(x-1) = 0$

21.4 $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x + \log_{16} x = 7 + 2\log_{64} x$

22. จงหาเซตคำตอบของอสมการ

22.1 $3^{2x+10} - 4(3^{x+6}) + 27 \leq 0$

22.2 $\log_x \left(\frac{2}{x-1}\right) \geq 1$

23. จงหาจำนวนจริง x ที่สอดคล้อง $(3x^2 - 11x + 7)^{3x^2+4x+1} = 1$

24. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(2, a+1)$ และ $(2, b+2)$

25. จงหาสมการที่ตั้งฉากกับเส้นตรง $3x + 4y = 12$ และผ่านจุด $(1, -1)$

26. จงหาจุดบนเส้นตรง $2y - x + 6 = 0$ ที่อยู่ใกล้จุด $(3, 1)$มากที่สุด

27. จงหาสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิดและผ่านจุด $(1, 3)$

28. จงหาสมการเส้นสัมผัสของวงกลม $x^2 + y^2 = 25$ ที่จุด $(3, 4)$

29. ถ้าวงกลมหนึ่งมีจุดศูนย์กลางคือจุด A อยู่บนเส้นตรง $x + y + 4 = 0$ และผ่านจุด $B(-5, -2)$ และ $C(-2, 5)$ จงหาพื้นที่สามเหลี่ยม ABC

30. จงหาจุดบนวงกลม $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 15 = 0$ ที่อยู่ใกล้จุด $(1, 3)$ มากที่สุด

เอกสารอ้างอิง

กรรณิกา กวักเพฑูรย์. (2542). **หลักการคณิตศาสตร์**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ธนัชยศ จำปาหวาย. (2559). **เอกสารประกอบการสอนวิชาหลักการคณิตศาสตร์สำหรับครู**. กรุงเทพฯ: เอกสารอัดสำเนา

อนุกรรมการปรับปรุงหลักสูตรวิทยาศาสตร์ ทบวงมหาวิทยาลัย. (2545). **เซต ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์พิทักษ์การพิมพ์

Brian Clegg. (2003). **A brief history of infinity.** UK: CPI group (UK) Ltd

David Eugene Smith. (1958). **History of mathematics.** New York: Dover Publications, Inc.

Pual Glendinning. (2012). **Maths in minutes.** London, England: Quercus Editions Ltd.

Tom Jackson. (2012). **Mathematics an illustrated history of numbers.** New York: Shelter Harbor Press and Worth Press Ltd

แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 2

หัวข้อเนื้อหาประจำบท

1. ลิมิตของฟังก์ชัน
2. ลิมิตด้านเดียว
3. ลิมิตของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
4. ลิมิตเกี่ยวกับอนันต์
5. ความต่อเนื่อง

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. เข้าใจและอธิบายความหมายของคำว่าลิมิตชนิดต่าง ๆ ได้
2. ใช้สมบัติพีชคณิตและสมบัติลิมิตในการหาค่าลิมิตรูปแบบต่าง ๆ ได้อย่างถูกต้อง
3. ใช้เอกลักษณ์ของตรีโกณมิติในการหาลิมิตของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้
4. สามารถอธิบายความต่อเนื่องของฟังก์ชันต่าง ๆ ได้
5. สามารถระบุชนิดของกราฟที่ต่อเนื่องและไม่ต่อเนื่องได้

วิธีและกิจกรรมการเรียนการสอน

1. **วิธีสอน**
   1.1 วิธีสอนแบบบรรยาย ประกอบสื่ออิเล็กทรอนิกส์
   1.2 ใช้สื่อทางอินเตอร์เน็ต และให้แต่ละคนแสดงความคิดเห็น
   1.3 วิธีสอนแบบอภิปราย โดยให้หัวข้อเป็นกลุ่มและมานำเสนอหน้าชั้น
2. **กิจกรรมการเรียนการสอน**
   2.1 บรรยายสรุปโดยใช้สื่อการสอนประกอบ
   2.2 ให้ผู้เรียนศึกษาเนื้อหาจากชุดการสอน หนังสือ ตำรา เอกสารเพิ่มเติม และสื่อออนไลน์
   2.3 อภิปรายรายกลุ่มตามหัวข้อที่ได้รับมอบหมาย

สื่อการเรียนการสอน

1. ชุดการสอน เรื่อง "ลิมิตของฟังก์ชัน"
2. สื่ออิเล็กทรอนิกส์ เรื่อง "ลิมิตของฟังก์ชัน"
3. หนังสือ ตำรา เอกสารที่เกี่ยวข้อง
4. แอพพลิเคชั่น Geogebra
5. แอพพลิเคชั่น Wolfram alpha

การวัดผลและประเมินผล

1. สังเกตการตอบคำถามและตั้งคำถามของผู้เรียนในระหว่างการบรรยายและซักถาม
2. วัดผลจากการทำแบบฝึกหัดระหว่างเรียนตามเนื้อหาที่ได้รับมอบหมาย
3. ประเมินการอภิปรายรายกลุ่ม แล้วบันทึกคะแนนลงในใบบันทึกคะแนน
4. ตรวจการทำการบ้าน บันทึกคะแนนลงในบันทึกผลงาน

บทที่ 2

ลิมิตและความต่อเนื่อง

จุดเริ่มต้นที่สำคัญในการศึกษาวิชาแคลคูลัสคือการรู้จักคำว่า **ลิมิต** (limit) ในบทนี้เราจะกล่าวถึงลิมิตของฟังก์ชัน ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง และความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ซึ่งจะเป็นพื้นฐานในการศึกษาในบทต่อไป

2.1 ลิมิตของฟังก์ชัน

การให้ความหมายของคำว่าลิมิต เริ่มต้นจากการพิจารณาฟังก์ชัน

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{เมื่อ } x < 1 \\ 2 & \text{เมื่อ } x = 1 \\ 2x - 1 & \text{เมื่อ } x > 1 \end{cases}$$

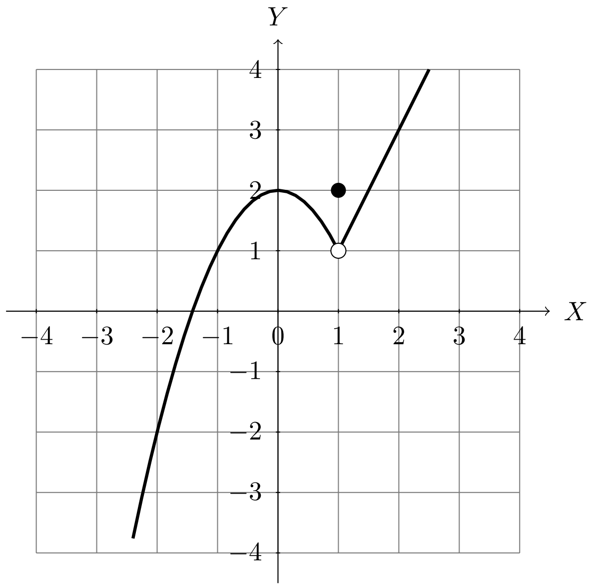
เมื่อสนใจค่าฟังก์ชัน $f(x)$ เมื่อค่าของ x ใกล้ 1 อาจพิจารณาค่า x สำหรับบางค่าดังตารางต่อไปนี้

x	$f(x)$		x	$f(x)$
0.5	1.75		1.5	2
0.8	1.36		1.4	1.8
0.9	1.19		1.1	1.2
0.99	1.0199		1.01	1.02
0.999	1.001999		1.001	1.002
0.9999	1.00019999		1.0001	1.0002
0.99999	1.0000199999		1.00001	1.00002

เมื่อพิจารณา $f(x)$ จากตารางจะเห็นว่า $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 1 ไม่ว่าให้ค่า x เข้าใกล้ลักษณะ $x < 1$ หรือ $x > 1$ ในกรณีเช่นนี้จะกล่าวว่า **ลิมิตของฟังก์ชัน** (limit of function) $f(x)$ ขณะ x **เข้าใกล้** 1 มีค่าเท่ากับ 1 เขียนแทนด้วย

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 1$$

จะเห็นได้ว่าการพิจารณาค่า x เข้าใกล้ 1 จะไม่พิจารณากรณี $x = 1$ และเมื่อแสดงฟังก์ชัน $y = f(x)$ ด้วยกราฟต่อไปนี้



ทำให้ได้ข้อสังเกตว่า $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ $f(1)$

เมื่อพิจารณาค่าของ $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ เราต้องพิจารณาค่าของ $f(x)$ ที่จุดอื่น ๆ ใน Dom(f) ที่อยู่ใกล้ ๆ a ดังนั้นการหาลิมิตที่จุด a ต้องมีค่าอื่น ๆ ใกล้จุด a ให้พิจารณาเสมอ เราเรียกจุด a ลักษณะนี้ว่าเป็น**จุดลิมิต (limit point)** ของ Dom(f) ตัวอย่างเช่น 0 เป็นจุดลิมิตของ $(-1,1)\cup\{2\}$ แต่ 2 ไม่เป็นจุดลิมิตของ $(-1,1)\cup\{2\}$

ข้อสังเกต 2.1.1 จุดลิมิตไม่จำเป็นต้องอยู่ในโดเมนของฟังก์ชันเสมอไป เช่น 0 เป็นจุดลิมิตของโดเมน $(-1,0)\cup(0,1)$ แต่ 0 ไม่เป็นสมาชิกของ $(-1,0)\cup(0,1)$

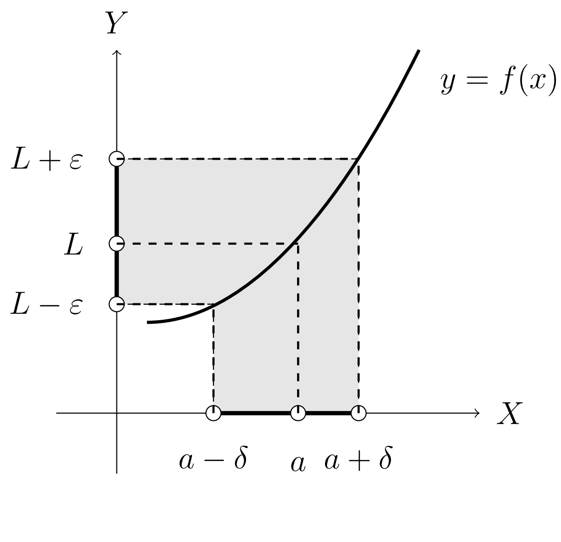
ต่อไปจะกล่าวถึงบทนิยามของลิมิตของฟังก์ชัน

บทนิยาม 2.1.2 ให้ $f : D \to \mathbb{R}$ เมื่อ $D \subseteq \mathbb{R}$ และ a เป็นจุดลิมิตของ D แล้ว

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ เรียกว่าลิมิตของ $f(x)$ ขณะ x เข้าใกล้ a เท่ากับ L

ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ $\varepsilon > 0$ มี $\delta > 0$ ถ้าทุก ๆ $x \in D$ ซึ่ง $0 < |x-a| < \delta$ แล้ว $|f(x) - L| < \varepsilon$

รูปที่ 2.1 กราฟแสดงนิยามลิมิตของฟังก์ชัน



ตัวอย่าง 2.1.3 จงแสดงว่า $\lim_{x\to 2}(2x+1) = 5$ โดยใช้บทนิยาม

วิธีทำ ให้ $\varepsilon > 0$ เลือก $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ ให้ $x \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $0 < |x-2| < \delta$ จะได้ว่า

$$|(2x+1)-5| = |2x-4| = 2|x-2| < 2\delta = 2\cdot\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ดังนั้น $\lim_{x\to 2}(2x+1) = 5$

ทฤษฎีบท 2.1.4 ให้ a เป็นจุดลิมิต และ c เป็นค่าคงตัว จะได้ว่า

1. $\lim_{x\to a} c = c$
2. $\lim_{x\to a} x = a$

บทพิสูจน์. ให้ c เป็นค่าคงตัว และ $\varepsilon > 0$

1. เลือก $\delta > 0$ ให้ $x \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $0 < |x-a| < \delta$ จะได้ว่า

$$|c-c| = 0 < \varepsilon$$

   ดังนั้น $\lim_{x\to a} c = c$

2. เลือก $\delta = \varepsilon$ ให้ $x \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $0 < |x-a| < \delta$ จะได้ว่า

$$|x-a| < \delta = \varepsilon$$

   ดังนั้น $\lim_{x\to a} x = a$

$\square$

จากบทนิยามของลิมิตเราจะพิสูจน์สมบัติต่าง ๆ ของลิมิต ได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.1.5 ให้ f, g เป็นฟังก์ชันจาก D ไป $\mathbb{R}$ เมื่อ $D \subseteq \mathbb{R}$ โดยที่ a เป็นจุดลิมิตของ D ถ้า $\lim_{x\to a} f(x) = L$ และ $\lim_{x\to a} g(x) = M$ เมื่อ $L, M \in \mathbb{R}$ แล้ว

1. $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = L + M$
2. $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x) = LM$
3. $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \dfrac{L}{M}$ เมื่อ $M \neq 0$
4. $\lim_{x\to a} cf(x) = c\lim_{x\to a} f(x) = cL$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว
5. $\lim_{x\to a} |f(x)| = |\lim_{x\to a} f(x)| = |L|$
6. $\lim_{x\to a} (f(x))^n = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^n = L^n$ เมื่อ $n \in \mathbb{N}$
7. $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$ เมื่อ $n \in \mathbb{N}$ และ $\sqrt[n]{L} \in \mathbb{R}$

ตัวอย่าง 2.1.6 จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{x\to 1}(2x^2-4)$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1}{x-1}$
3. $\lim\limits_{x\to 1} x\sqrt{x+1}$
4. $\lim\limits_{x\to 2}(|x|-x)$

วิธีทำ ใช้ตัวอย่าง 2.1.4 และทฤษฎีบทของลิมิต (ทฤษฎีบท**??**) จะได้ว่า

1. $\lim\limits_{x\to 1}(2x^2-4) = 2\left(\lim\limits_{x\to 1} x\right)^2 - \lim\limits_{x\to 1} 4 = 2(1)^2-4 = -2$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 0} x + \lim\limits_{x\to 0} 1}{\lim\limits_{x\to 0} x - \lim\limits_{x\to 0} 1} = \dfrac{0+1}{0-1} = -1$
3. $\lim\limits_{x\to 1} x\sqrt{x+1} = \left(\lim\limits_{x\to 1} x\right)\sqrt{\lim\limits_{x\to 1} x + \lim\limits_{x\to 1} 1} = 1\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
4. $\lim\limits_{x\to 2}(|x|-x) = \left|\lim\limits_{x\to 2} x\right| - \lim\limits_{x\to 2} x = |2|-2 = 0$

ตัวอย่าง 2.1.7 จงหาค่าลิมิต $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$

วิธีทำ สำหรับ $x \neq 1$ จะได้ว่า

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$$

ดังนั้น

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2$$

จากตัวอย่าง 2.1.7 จะเห็นว่า $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$ จะอยู่ในรูป $\dfrac{0}{0}$ จะเรียกลิมิตดังกล่าวที่อยู่ในรูปแบบนี้ว่า **รูปแบบยังไม่กำหนด** (indeterminate form) ดังนั้นโดยทั่วไป

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} \qquad \text{อยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนด}$$

ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to a} g(x)$ และ เขียนแทนด้วย $I.F.\dfrac{0}{0}$ ลิมิตที่อยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนดหมายถึงลิมิตที่ยังไม่ทราบค่าอาจใช้การเปลี่ยนรูปของฟังก์ชัน หรือทฤษฎีบทต่าง ๆ เกี่ยวกับลิมิตมาช่วยในการหาค่า

ตัวอย่าง 2.1.8 จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x-2}$
2. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(3+h)^2-9}{h}$
3. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^4-16}{x+2}$
4. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+27}{x+3}$

วิธีทำ เนื่องจากลิมิตดังกล่าวอยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนด โดยการเปลี่ยนรูปฟังก์ชันจะได้ว่า

1. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x+3)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}(x+3) = 5$
2. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(3+h)^2-9}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{[(3+h)-3]((3+h)+3)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h(6+h)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(6+h) = 6$
3. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^4-16}{x+2} = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{(x+2)(x-2)(x^2+4)}{x+2} = \lim\limits_{x\to -2}(x-2)(x^2+4) = -32$
4. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^3+27}{x+3} = \lim\limits_{x\to -3} \dfrac{(x+3)(x^2-3x+9)}{x+3} = \lim\limits_{x\to -3}(x^2-3x+9) = 27$

ตัวอย่าง 2.1.9 จงหาค่าลิมิตของ $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^4-13x^2+36}{x^2+2x}$

วิธีทำ เนื่องจากลิมิตดังกล่าวอยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนด จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -2} \frac{x^4-13x^2+36}{x^2+2x} &= \lim_{x\to -2} \frac{(x^2-9)(x^2-4)}{x(x+2)} \\
&= \lim_{x\to -2} \frac{(x^2-9)(x-2)(x+2)}{x(x+2)} \\
&= \lim_{x\to -2} \frac{(x^2-9)(x-2)}{x} \\
&= \frac{(-5)(-4)}{-2} \\
&= -10
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2.1.10 จงหาค่าลิมิตของ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^{2x}-2^{x+1}+1}{2^x-1}$

วิธีทำ เนื่องจากลิมิตดังกล่าวอยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนด จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{2^{2x}-2^{x+1}+1}{2^x-1} &= \lim_{x\to 0} \frac{(2^x)^2-2\cdot 2^x+1}{2^x-1} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(2^x-1)(2^x-1)}{2^x-1} \\
&= \lim_{x\to 0}(2^x-1) \\
&= 0
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2.1.11 จงหาค่าลิมิตของ $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{2|x+1|-|1-x|}{x^2-9}$

วิธีทำ พิจารณาค่า x ใกล้ ๆ -3 (อาจยกตัวอย่าง $x = -2.99$ และ $x = -3.01$ เพื่อให้เข้าใจยิ่งขึ้น) จะได้ว่า $x+1 < 0$ และ $1-x > 0$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -3} \frac{2|x+1|-|1-x|}{x^2-9} &= \lim_{x\to -3} \frac{2[-(x+1)]-(1-x)}{x^2-9} \\
&= \lim_{x\to -3} \frac{-(x+3)}{(x-3)(x+3)} \\
&= \lim_{x\to -3} -\frac{1}{x-3} \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2.1.12 ให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามโมนิกดีกรีสอง ถ้า $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2$ จงหาค่าของ $f(3)$

วิธีทำ ให้ $f(x)=x^2+ax+b$ เนื่องจาก $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ ต้องอยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนด จะได้ว่า $f(0)=0$ ดังนั้น $b=0$ และ

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x^2+ax}{x}&=2\\ \lim_{x\to 0}\frac{x(x+a)}{x}&=2\\ \lim_{x\to 0}(x+a)&=2\\ a&=2\end{aligned}$$

ฉะนั้น $f(x)=x^2+2x$ แล้ว $f(3)=3^2+2(3)=15$

ตัวอย่าง 2.1.13 จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$
2. $\lim_{x\to 0}\dfrac{4-\sqrt{16+x}}{x}$

วิธีทำ

1. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}\cdot\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\lim_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(\sqrt{x}+1)=2$
2. จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{4-\sqrt{16+x}}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{4-\sqrt{16+x}}{x}\cdot\frac{4+\sqrt{16+x}}{4+\sqrt{16+x}}\\ &=\lim_{x\to 0}\frac{16-(16+x)}{x(4+\sqrt{16+x})}\\ &=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x(4+\sqrt{16+x})}\\ &=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{4+\sqrt{16+x}}=-\frac{1}{8}\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2.1.14 จงหาค่าลิมิต $\lim_{z\to 1}\dfrac{z^2-1}{\sqrt{|1-z|}}$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 1}\frac{z^2-1}{\sqrt{|1-z|}}&=\lim_{z\to 1}\frac{z^2-1}{\sqrt{|1-z|}}\cdot\frac{\sqrt{|1-z|}}{\sqrt{|1-z|}}\\ &=\lim_{z\to 1}\frac{(z-1)(z+1)\sqrt{|1-z|}}{|1-z|}\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\dfrac{z-1}{|1-z|}=\pm 1$ สำหรับ $z\neq 1$ ดังนั้น

$$\lim_{z\to 1}\frac{z^2-1}{\sqrt{|1-z|}}=\lim_{z\to 1}\pm 1(z+1)\sqrt{|1-z|}=0$$

ตัวอย่าง 2.1.15 จงหาค่าลิมิต $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$ ในรูปตัวแปร x

วิธีทำ วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}(2x+h)=2x\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2.1.16 จงหาค่าลิมิตของ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{2x+1}-1}$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{2x+1}-1} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{2x+1}-1}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\cdot\frac{\sqrt{2x+1}+1}{\sqrt{2x+1}+1}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{((1+x)-(1-x))(\sqrt{2x+1}+1)}{(2x+1)-1)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2x(\sqrt{2x+1}+1)}{2x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x+1}+1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\\ &= \frac{1+1}{1+1}=1\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2.1.17 จงหาค่าลิมิต $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{2+x}}{x+1}$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{2+x}}{x+1} &= \lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{2+x}}{x+1}\cdot\frac{(\sqrt[3]{2x+1})^2-\sqrt[3]{2x+1}\sqrt[3]{2+x}+(\sqrt[3]{2+x})^2}{(\sqrt[3]{2x+1})^2-\sqrt[3]{2x+1}\sqrt[3]{2+x}+(\sqrt[3]{2+x})^2}\\ &= \lim_{x\to -1}\frac{(\sqrt[3]{2x+1})^3+(\sqrt[3]{2+x})^3}{(x+1)((\sqrt[3]{2x+1})^2-\sqrt[3]{2x+1}\sqrt[3]{2+x}+(\sqrt[3]{2+x})^2)}\\ &= \lim_{x\to -1}\frac{3(x+1)}{(x+1)((\sqrt[3]{2x+1})^2-\sqrt[3]{2x+1}\sqrt[3]{2+x}+(\sqrt[3]{2+x})^2)}\\ &= \lim_{x\to -1}\frac{3}{(\sqrt[3]{2x+1})^2-\sqrt[3]{2x+1}\sqrt[3]{2+x}+(\sqrt[3]{2+x})^2}\\ &= \frac{3}{1+1+1}=1\end{aligned}$$

แบบฝึกหัด 2.1

1. จงแสดงค่าลิมิตต่อไปนี้โดยใช้นิยาม

1.1 $\lim_{x\to 1} 1-x$ 1.2 $\lim_{x\to -1} 2x$ 1.3 $\lim_{x\to 2} \frac{x+1}{3}$

2. จงแสดงค่าลิมิตต่อไปนี้

2.1 $\lim_{x\to 0}(x-1)\sqrt{2+x}$ 2.2 $\lim_{x\to 3} \frac{|x|+x}{x^2-1}$ 2.3 $\lim_{x\to -2} \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x+1}$

3. จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

3.1 $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-x}{x^3-x-2}$

3.2 $\lim_{x\to -4} \frac{x^2+5x+4}{x^2+3x-4}$

3.3 $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-2x^2+3x-2}{x-1}$

3.4 $\lim_{x\to -1} \frac{x^{\frac{7}{3}}+x^{\frac{4}{3}}-2x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}+2x^{\frac{1}{3}}}$

3.5 $\lim_{x\to 1} \frac{x^6-1}{x^{10}-1}$

3.6 $\lim_{x\to 2} \frac{2x^2-8}{x^3-2x-4}$

3.7 $\lim_{x\to 7} \frac{x^{-3}-x^{-2}+7x^{-1}-1}{7-x}$

3.8 $\lim_{t\to 3} \frac{t^2-9}{2t^2+7t+3}$

4. จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

4.1 $\lim_{x\to 3} \frac{x^3-27}{\sqrt{x-2}-1}$

4.2 $\lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{x-2}-2}{\sqrt{x-1}}$

4.3 $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{\sqrt{x}-1}$

4.4 $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{3+\sqrt{4-x}}-\sqrt{5}}{x}$

4.5 $\lim_{x\to 16} \frac{4-\sqrt{x}}{16x-x^2}$

4.6 $\lim_{x\to -4} \frac{\sqrt{x^2+9}-5}{x+4}$

5. จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

5.1 $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$

5.2 $\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt[3]{7-x}-2}{\sqrt{x+2}-1}$

5.3 $\lim_{x\to 0} \frac{3^{2x}-3^{x+1}+2}{3^x-1}$

5.4 $\lim_{x\to 1} \frac{5^{x+1}-5^x}{5^{x+2}}$

6. จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้ในรูปตัวแปร x

6.1 $\lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}$

6.2 $\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3-x^3}{h}$

6.3 $\lim_{h\to 0} \frac{3(x+h)^2-3x^2}{h}$

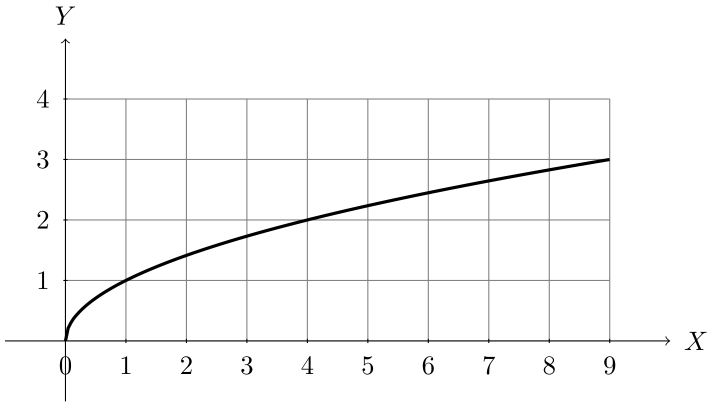
6.4 $\lim_{h\to 1} \frac{(x+h-1)^2-x^2}{h-1}$

7. จงหาค่าลิมิตของ $\lim_{x\to 3} \frac{|x^2-1|-3x+1}{|1-x|-2}$

8. ให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามโมนิกดีกรีสอง ถ้า $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{x^2-x} = 5$ จงหาค่าของ $f(4)$

2.2 ลิมิตด้านเดียว

พิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = \sqrt{x}$ แสดงได้ดังกราฟ



จะเห็นว่า Dom$(f) = [0, \infty)$ และจุด 0 เป็นจุดลิมิต จะได้ว่า $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 0 เมื่อค่า x เข้าใกล้ 0 ในลักษณะ $x > 0$ เรียกว่า x เข้าใกล้ 0 ทางด้านขวา แต่เมื่อ x เข้าใกล้ค่า 0 ในลักษณะ $x < 0$ เรียกว่า x เข้าใกล้ 0 ทางด้านซ้าย ค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ จะไม่มีค่าในจำนวนจริง ทำให้ลิมิตของ $f(x)$ มีเพียงค่าเมื่อ x เข้าใกล้ 0 ทางด้านขวา เขียนแทนด้วย

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$$

เรียกว่า ลิมิตขวาของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ 0 ทางด้านขวา

ในทำนองเดียวกันลิมิตของ $f(x) = \sqrt{-x}$ ที่จุด 0 จะมีค่าเมื่อ x เข้าใกล้ 0 ทางด้านซ้ายเท่านั้น เรียกค่าลิมิตนี้ว่าลิมิตซ้ายของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ 0 ทางด้านซ้าย เรียกลิมิตทั้งสองแบบนี้ว่า **ลิมิตด้านเดียว** (One-sided limit)

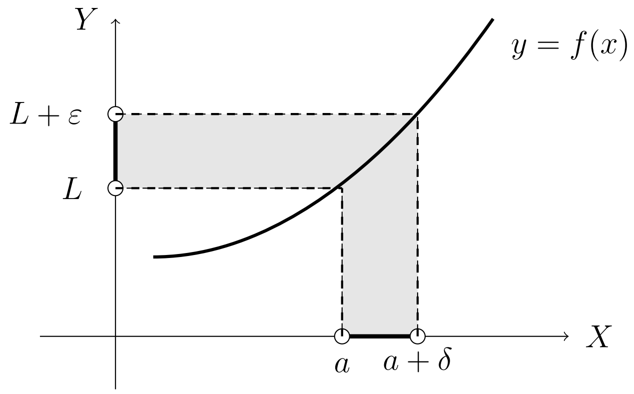
บทนิยาม 2.2.1 ให้ $f : D \to \mathbb{R}$ เมื่อ $D \subseteq \mathbb{R}$ และ a เป็นจุดลิมิตของ $D \cap (a, \infty)$ แล้ว

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

เรียกว่า**ลิมิตขวา (right-handed limit)** ของ $f(x)$ ขณะ x เข้าใกล้ a หรือลิมิตของ $f(x)$ ขณะ x เข้าใกล้ a ทางด้านขวาเท่ากับ L ก็ต่อเมื่อ

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in D, \quad a < x < a + \delta \to |f(x) - L| < \varepsilon$$

รูปที่ 2.2 กราฟแสดงนิยามลิมิตขวาของฟังก์ชัน



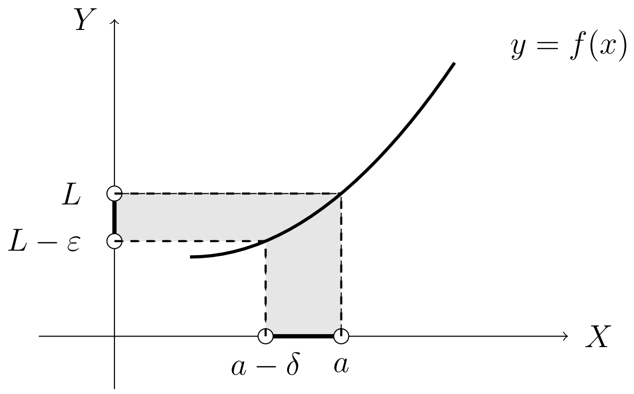
บทนิยาม 2.2.2 ให้ $f : D \to \mathbb{R}$ เมื่อ $D \subseteq \mathbb{R}$ และ a เป็นจุดลิมิตของ $D \cap (-\infty, a)$ แล้ว

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

เรียกว่า**ลิมิตซ้าย (left-handed limit)** ของ $f(x)$ ขณะ x เข้าใกล้ a หรือลิมิตของ $f(x)$ ขณะ x เข้าใกล้ a ทางด้านซ้ายเท่ากับ L ก็ต่อเมื่อ

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in D, \quad a - \delta < x < a \to |f(x) - L| < \varepsilon$$

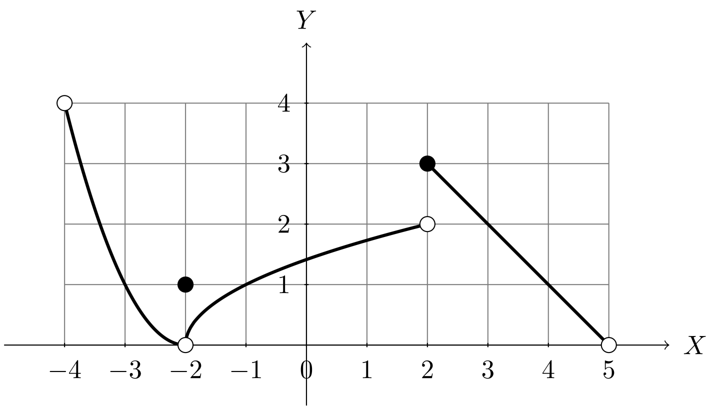
รูปที่ 2.3 กราฟแสดงนิยามลิมิตซ้ายของฟังก์ชัน



ทฤษฎีบท 2.2.3 ให้ $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ และ a เป็นจุดลิมิตของ $D \cap (-\infty, a)$ และ $D \cap (a, \infty)$ และ $L \in \mathbb{R}$ แล้ว

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = L = \lim_{x \to a^-} f(x)$$

ตัวอย่าง 2.2.4 ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมน $(-4, 5)$ และเขียนกราฟได้ดังนี้



จงหาลิมิตที่ $x = -4, -2, 2, 3$ และ 5

วิธีทำ จากกราฟ แสดงค่าต่าง ๆ ของลิมิต ได้ดังตารางต่อไปนี้

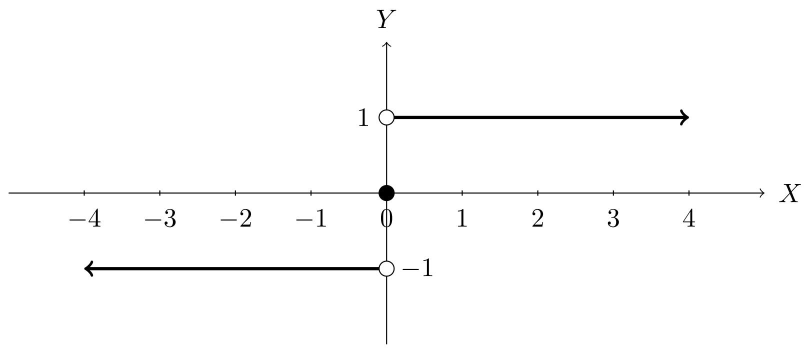
a	$\lim_{x \to a^-} f(x)$	$\lim_{x \to a^+} f(x)$	$\lim_{x \to a} f(x)$
-4	-	4	-
-2	0	0	0
2	2	3	ไม่มีลิมิต
3	2	2	2
5	0	-	-

ตัวอย่าง 2.2.5 ฟังก์ชันซิกนัม (signum function) เขียนแทนด้วย sgn นิยามโดย

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } x > 0 \\ 0 & \text{เมื่อ } x = 0 \\ -1 & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases}$$

จงวาดกราฟของฟังก์ชันซิกนัม และพิจารณาค่าของลิมิตของ sgn(x) ที่จุด 0

วิธีทำ



จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to 0^-} \mathrm{sgn}(x) = -1$ และ $\lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{sgn}(x) = 1$ ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{sgn}(x)$ ไม่มีลิมิต

ตัวอย่าง 2.2.6 พิจารณาค่ามิลิต $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ ของฟังก์ชัน

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{6-x} & \text{เมื่อ } 0 < x < 2 \\ 4-x & \text{เมื่อ } 2 < x < 5 \end{cases}$$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (4-x) = 2 \qquad \text{และ} \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \sqrt{6-x} = 2$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 2$

ตัวอย่าง 2.2.7 พิจารณาค่ามิลิต $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ ของฟังก์ชัน

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{x^2-16} & \text{เมื่อ } x > 4 \\ 3x+1 & \text{เมื่อ } x \le 4 \end{cases}$$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{x^2-16} &= \lim_{x\to 4^+} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{(x-4)(x+4)} \cdot \frac{\sqrt{2x+1}+3}{\sqrt{2x+1}+3} \\ &= \lim_{x\to 4^+} \frac{(2x+1)-9}{(x-4)(x+4)(\sqrt{2x+1}+3)} \\ &= \lim_{x\to 4^+} \frac{2(x-4)}{(x-4)(x+4)(\sqrt{2x+1}+3)} \\ &= \lim_{x\to 4^+} \frac{2}{(x+4)(\sqrt{2x+1}+3)} = \frac{2}{8(6)} = \frac{1}{24} \end{aligned}$$

และ $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^-} (3x+1) = 13$ ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ ไม่มีลิมิต

ต่อไปจะกล่าวถึง **ฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์** (absolute function) นิยามโดย

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{เมื่อ } x > 0 \\ 0 & \text{เมื่อ } x = 0 \\ -x & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases}$$

จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to 0^-} |x| = \lim\limits_{x\to 0^-} (-x) = 0$ และ $\lim\limits_{x\to 0^+} |x| = \lim\limits_{x\to 0^-} x = 0$ ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$

ตัวอย่าง 2.2.8 จงตรวจสอบว่า $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$ มีลิมิตหรือไม่

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1 \\ \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{-x}{x} = \lim_{x\to 0^+} -1 = -1 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$ ไม่มีลิมิต

ตัวอย่าง 2.2.9 จงตรวจสอบว่า $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x|x|-x}{|x|}$ มีลิมิตมีหรือไม่

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} \frac{x|x|-x}{|x|} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{x(x)-x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2-x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x(x-1)}{x} = \lim_{x\to 0^+} (x-1) = -1 \\ \lim_{x\to 0^-} \frac{x|x|-x}{|x|} &= \lim_{x\to 0^-} \frac{x(-x)-x}{-x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2-x}{-x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x(x+1)}{-x} = \lim_{x\to 0^+} (x+1) = 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x|x|-x}{|x|}$ ไม่มีลิมิต

ตัวอย่าง 2.2.10 จงตรวจสอบว่า $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{|x^2-x-6|}{x+2}$ มีลิมิตหรือไม่

วิธีทำ จะเห็นว่า $x+2>0$ และ $x-3<0$ เมื่อ x เข้าใกล้ทางด้านขวาของ -2

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -2^+} \frac{|x^2-x-6|}{x+2} &= \lim_{x\to -2^+} \frac{|(x+2)(x-3)|}{x+2} = \lim_{x\to -2^+} \frac{|(x+2)(x-3)|}{x+2} \\ &= \lim_{x\to -2^+} \frac{-(x+2)(x-3)}{x+2} = \lim_{x\to -2^+} -(x-3) = 5 \end{aligned}$$

จะเห็นว่า $x+2<0$ และ $x-3<0$ เมื่อ x เข้าใกล้ทางด้านซ้ายของ -2

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -2^-} \frac{|x^2-x-6|}{x+2} &= \lim_{x\to -2^-} \frac{|(x+2)(x-3)|}{x+2} = \lim_{x\to -2^-} \frac{|(x+2)(x-3)|}{x+2} \\ &= \lim_{x\to -2^-} \frac{(x+2)(x-3)}{x+2} = \lim_{x\to -2^+} (x-3) = -5 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{|x^2-x-6|}{x+2}$ ไม่มีลิมิต

ตัวอย่าง 2.2.11 จงหาลิมิตของ $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1}$

วิธีทำ เนื่องจาก $x-1<0$ เมื่อ x เข้าใกล้ทางด้านซ้ายของ 1 จะได้ว่า

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} -1 = -1$$

ตัวอย่าง 2.2.12 จงหาค่าลิมิตของ $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\left(1-\dfrac{2x^3}{x^2+1}\right)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\left(1-\frac{2x^3}{x^2+1}\right) &= \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}\left(\frac{(x^2+1)-2x^3}{x^2+1}\right) \\
&= \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{1-x}}{1-x}\left(\frac{-(2x^3-x^2-1)}{x^2+1}\right) \\
&= \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{1-x}}{-(x-1)}\left(\frac{-(x-1)(2x^2+x+1)}{x^2+1}\right) \\
&= \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{1-x}(2x^2+x+1)}{x^2+1} = 0
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2.2.13 ถ้า $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|5x+1|-|5x-1|}{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}} = 80$ จงหาค่าของ a

วิธีทำ เนื่องจาก $5x+1>0$ และ $5x-1<0$ เมื่อ x เข้าใกล้ 0 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
80 &= \lim_{x\to 0} \frac{|5x+1|-|5x-1|}{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}} = \lim_{x\to 0} \frac{(5x+1)+(5x-1)}{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{10x}{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{x+a}+\sqrt{a}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{a}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{10x(\sqrt{x+a}+\sqrt{a})}{(x+a)-a} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{10x(\sqrt{x+a}+\sqrt{a})}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} 10(\sqrt{x+a}+\sqrt{a}) \\
&= 20\sqrt{a}
\end{aligned}$$

จะได้ว่า $\sqrt{a}=4$ ดังนั้น $a=16$

ฟังก์ชันจำนวนเต็มมากสุด (greatest integer function) นิยามโดย

$$[x] = \text{จำนวนเต็มที่มากที่สุดที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ } x$$

เช่น $[1.5] = 1$, $[-1.1] = -2$, $[3] = 3$
จากนิยามสำหรับจำนวนเต็ม a ใด ๆ จะได้ว่า

$$\lim_{x\to a^+}[x] = a \qquad \text{และ} \qquad \lim_{x\to a^-}[x] = a-1$$

ถ้า a เป็นจำนวนจริงที่ไม่ใช่จำนวนเต็ม จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $k < a < k+1$ ดังนั้น

$$\lim_{x\to a}[x] = \lim_{x\to a^+}[x] = \lim_{x\to a^-}[x] = k$$

ตัวอย่าง 2.2.14 จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้ ถ้าลิมิตมีค่า

1. $\lim_{x\to 1^+} x + [x]$

   วิธีทำ $\lim_{x\to 1^+} x + [x] = 1 + 1 = 2$

2. $\lim_{x\to 1^-} x + [x]$

   วิธีทำ $\lim_{x\to 1^-} x + [x] = 1 + 0 = 1$

3. $\lim_{x\to 1.5} x + [x]$

   วิธีทำ $\lim_{x\to 1.5} x + [x] = 1.5 + 1 = 2.5$

ตัวอย่าง 2.2.15 จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้ ถ้าลิมิตมีค่า

1. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{[x]+x}{x}$

   วิธีทำ $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{[x]+x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{0+x}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$

2. $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{[x]+1}{x}$

   วิธีทำ $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{[x]+1}{x} = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{-1+1}{x} = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0$

แบบฝึกหัด 2.2

1. จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้ ถ้าลิมิตมีค่า

1.1 $\lim\limits_{x\to 3}(2x+|x-3|)$

1.2 $\lim\limits_{x\to -6}\dfrac{2x+12}{|x+6|}$

1.3 $\lim\limits_{x\to 0.5^+}\dfrac{2x-1}{|2x^3-x^2|}$

1.4 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2-|x|}{2+|x|}$

1.5 $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{|x|}\right)$

1.6 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{|x|}-\dfrac{1}{x}\right)$

2. จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้ ถ้าลิมิตมีค่า

2.1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|2x-1|-|2x+1|}{x}$

2.2 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+cx}-1}{x}$

2.3 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{[x-1]}{x-1}$

2.4 $\lim\limits_{x\to 0}x\left[\dfrac{1}{x}\right]$

2.5 $\lim\limits_{x\to 0}[\cos x]$

2.6 $\lim\limits_{x\to 0^+}[\sin x]$

2.7 $\lim\limits_{x\to 1}[x]+[-x]$

2.8 $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-[x]}{x-1}$

3. กำหนดให้ $f(x)=\begin{cases}x^3-2x+5 & \text{เมื่อ } |x|\le 2\\ \dfrac{x+7}{x-1} & \text{เมื่อ } |x|>2\end{cases}$
จงตรวจสอบค่าของ $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ และ $\lim\limits_{x\to -2}f(x)$

4. จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{|1+x-x^2|}{\sqrt{x+3}-2}$

5. จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{x^3+x^2}+x}{x^2}$

6. จงหาจำนวนจริง k ซึ่งทำให้ $\lim\limits_{x\to -3}f(x)$ มีค่า เมื่อ $f(x)=\begin{cases}2x+5 & \text{เมื่อ } x<-3\\ kx^2+2 & \text{เมื่อ } x\ge -3\end{cases}$

7. จงหาจำนวนจริง a และ b ซึ่งทำให้ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{ax+b}-2}{x}=1$

8. จงหาจำนวนจริง a ซึ่ง $\lim\limits_{x\to a}(x^3-4x^2+x+10)=4$

2.3 ลิมิตของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ในหัวนี้นี้จะกล่าวถึงการหาลิมิตของฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยอาศัยสมบัติเบื้องต้น

1. $|\text{sin}x| \leq |x|$ ทุก ๆ $x \in \mathbb{R}$
2. $|\text{cos}x - 1| \leq |x|$ ทุก ๆ $x \in \mathbb{R}$

ทฤษฎีบท 2.3.1 ให้ $a \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

1. $\lim_{x\to 0} \text{sin}x = 0$
2. $\lim_{x\to 0} \text{cos}x = 1$
3. $\lim_{x\to a} \text{sin}x = \text{sin}a$
4. $\lim_{x\to a} \text{cos}x = \text{cos}a$

บทพิสูจน์. ให้ $\varepsilon > 0$

1. เลือก $\delta = \varepsilon$ ให้ $x \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $|x| < \delta$ จะได้ว่า

$$|\text{sin}x - 0| = |\text{sin}x| \leq |x| < \delta = \varepsilon$$

ดังนั้น $\lim_{x\to 0} \text{sin}x = 0$

2. เลือก $\delta = \varepsilon$ ให้ $x \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $|x| < \delta$ จะได้ว่า

$$|\text{cos}x - 1| \leq |x| < \delta = \varepsilon$$

ดังนั้น $\lim_{x\to 0} \text{cos}x = 1$

3. ให้ $u = x - a$ โดยข้อ 1 และ 2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} \text{sin}x &= \lim_{u+a\to a} \text{sin}(u+a) \\ &= \lim_{u\to 0}[\text{sin}u\text{cos}a + \text{cos}u\text{sin}a] \\ &= \lim_{u\to 0}[\text{sin}u\text{cos}a + \text{cos}(u)\text{sin}a] \\ &= 0 \cdot \text{cos}a + 1 \cdot \text{sin}a = \text{sin}a\end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{x\to a} \text{sin}x = \text{sin}a$

4. ทำนองเดียวกับข้อ 3 (เป็นแบบฝึกหัด) □

โดยอาศัยการพิสูจน์ในทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 2.3.1 จะได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.3.2 ให้ $a, k, c \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

1. $\lim_{x\to a} \text{sin}(kx+c) = \text{sin}(ka+c)$
2. $\lim_{x\to a} \text{cos}(kx+c) = \text{cos}(ka+c)$

ตัวอย่าง 2.3.3 จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้ ถ้าลิมิตมีค่า

1. $\lim\limits_{x\to 0} \tan x$

   วิธีทำ $\lim\limits_{x\to 0} \tan x = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{0}{1} = 0$

2. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\cos 2x}{x}$

   วิธีทำ $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\cos 2x}{x} = \dfrac{\cos 2\pi}{\pi} = \dfrac{1}{\pi}$

เราอาจจะใช้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติต่อไปนี้มาช่วยในการหาค่าลิมิตในรูปแบบต่าง ๆ

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
2. $\sin(x \pm y) = \sin x\cos y \pm \cos x\sin y$
3. $\cos(x \pm y) = \cos x\cos y \mp \sin x\sin y$
4. $\sin(2x) = 2\sin x\cos x = \dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$
5. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

   $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$

   $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$
6. $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2x)$
7. $\sin^2 x = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2x)$
8. $\sin x + \sin y = 2\sin\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$
9. $\sin x - \sin y = 2\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\sin\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$
10. $\cos x + \cos y = 2\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$
11. $\cos x - \cos y = -2\sin\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\sin\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$

ตัวอย่าง 2.3.4 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{\sin x}$

วิธีทำ จะเห็นว่าลิมิตดังกล่าวอยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนด จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x} \cdot \frac{\cos x + 1}{\cos x + 1} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{\sin x(\cos x + 1)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin^2 x}{\sin x(\cos x + 1)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{\cos x + 1} = \frac{0}{1+1} = 0
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2.3.5 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\cos 2x + \cos x}{\sin 2x - \sin x}$

วิธีทำ จะเห็นว่าลิมิตดังกล่าวอยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนด จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to \pi} \frac{\cos 2x + \cos x}{\sin 2x - \sin x} &= \lim_{x\to \pi} \frac{2\cos(\frac{2x+x}{2})\cos(\frac{2x-x}{2})}{2\cos(\frac{2x+x}{2})\sin(\frac{2x-x}{2})} \\
&= \lim_{x\to \pi} \frac{\cos(\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} \\
&= \frac{0}{1} = 0
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2.3.6 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{(\cot^3 x-1)(\csc^2 x)}{1+\cos 2x-2\sin^2 x}$

วิธีทำ จะเห็นว่าลิมิตดังกล่าวอยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนด จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{(\cot^3 x-1)(\csc^2 x)}{1+\cos 2x-2\sin^2 x} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{(\frac{\cos^3 x}{\sin^3 x}-1)\cdot\frac{1}{\sin^2 x}}{1+(2\cos^2 x-1)-2\sin^2 x} \\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos^3 x-\sin^3 x)\cdot\frac{1}{\sin^5 x}}{2\cos^2 x-2\sin^2 x} \\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x-\sin x)(\cos^2 x+\cos x\sin x+\sin^2 x)}{2(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)\sin^5 x} \\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x+\cos x\sin x+\sin^2 x}{2(\cos x+\sin x)\sin^5 x} \\
&= \frac{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2+(\frac{1}{\sqrt{2}})(\frac{1}{\sqrt{2}})+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}{2(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}})(\frac{1}{\sqrt{2}})^5} \\
&= \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{2(\frac{2}{\sqrt{2}})(\frac{1}{4\sqrt{2}})} \\
&= \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 3
\end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 2.3.7 ทฤษฎีบทการบีบ (Squeeze theorem)
ให้ f, g, h เป็นฟังก์ชันจาก D ไป $\mathbb{R}$ เมื่อ $D \subseteq \mathbb{R}$ ถ้า

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \qquad \text{ทุก ๆ } x \text{ ที่มีค่าใกล้ ๆ } a$$

และ $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L = \lim\limits_{x\to a} h(x)$ แล้ว $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$

บทพิสูจน์. สมมติว่า $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ ทุกๆ x ที่มีค่าใกล้ ๆ a
โดยที่ $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L = \lim\limits_{x\to a} h(x)$ ให้ $\varepsilon > 0$ จะได้ว่ามี $\delta_1 > 0$ และ $\delta_2 > 0$ ซึ่งทุก ๆ $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
&\text{ถ้า} \quad |x-a| < \delta_1 \quad \text{แล้ว} \quad |g(x)-L| < \varepsilon \\
&\text{ถ้า} \quad |x-a| < \delta_2 \quad \text{แล้ว} \quad |h(x)-L| < \varepsilon
\end{aligned}$$

เลือก δ เท่ากับค่าต่ำสุดของ δ_1 และ δ_2 ให้ $x \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $|x-a| < \delta$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
|g(x)-L| < \varepsilon \quad &\text{ดังนั้น} \quad -\varepsilon+L < g(x) < \varepsilon+L \\
|h(x)-L| < \varepsilon \quad &\text{ดังนั้น} \quad -\varepsilon+L < h(x) < \varepsilon+L
\end{aligned}$$

จาก $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ ทำให้ได้ว่า

$$-\varepsilon+L < g(x) < f(x) < h(x) < \varepsilon+L$$

นั่นคือ $|f(x)-L| < \varepsilon$ สรุปได้ว่า $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ □

ตัวอย่าง 2.3.8 จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้ ถ้าลิมิตมีค่า

1. $\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

   วิธีทำ สำหรับจำนวนจริง $x \neq 0$ จะได้ว่า $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$

   เนื่องจาก $x^2 > 0$ ทุก ๆ $x \neq 0$ ดังนั้น

   $$-x^2 \leq x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$$

   จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to 0} -x^2 = 0$ และ $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$
   โดยทฤษฎีบทการบีบสรุปได้ว่า $\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \sin^2 x\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$
   วิธีทำ สำหรับจำนวนจริง $x \neq 0$ จะได้ว่า $-1 \leq \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) \leq 1$
   เนื่องจาก $\sin^2 x > 0$ ทุก ๆ x ที่มีค่าใกล้ ๆ 0 ดังนั้น

   $$-\sin^2 x \leq \sin^2 x\cos\left(\frac{\pi}{x}\right) \leq \sin^2 x$$

   จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to 0} -\sin^2 x = 0$ และ $\lim\limits_{x\to 0} \sin^2 x = 0$
   โดยทฤษฎีบทการบีบสรุปได้ว่า $\lim\limits_{x\to 0} \sin^2 x\cos\left(\frac{\pi}{x}\right) = 0$

ตัวอย่าง 2.3.9 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 0} x\cos\left(\frac{2}{x}\right)$

วิธีทำ พิจารณา $x > 0$ จะได้ว่า $-1 \leq \cos\left(\frac{2}{x}\right) \leq 1$ เนื่องจาก $x > 0$ ดังนั้น

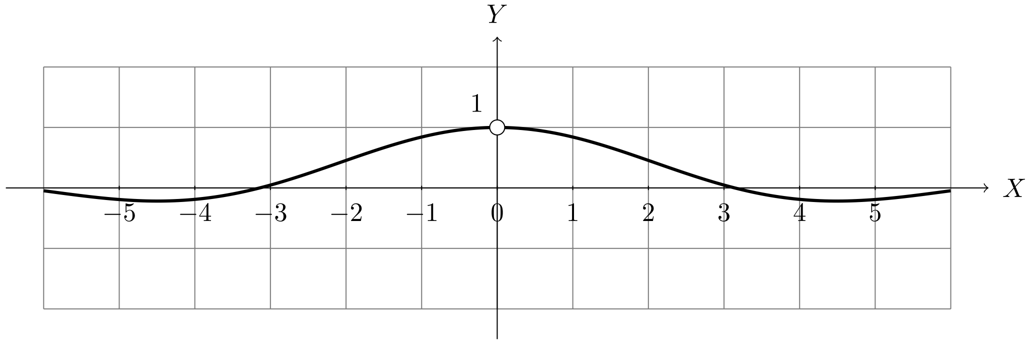
$$-x \leq x\cos\left(\frac{2}{x}\right) \leq x$$

จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to 0^+} -x = 0$ และ $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$ ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0^+} x\cos\left(\frac{2}{x}\right) = 0$
และพิจารณา $x < 0$ จะได้ว่า $-1 \leq \cos\left(\frac{2}{x}\right) \leq 1$ เนื่องจาก $x < 0$ ดังนั้น

$$x \leq x\cos\left(\frac{2}{x}\right) \leq -x$$

จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to 0^-} -x = 0$ และ $\lim\limits_{x\to 0^-} x = 0$ ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0^-} x\cos\left(\frac{2}{x}\right) = 0$
สรุปได้ว่า $\lim\limits_{x\to 0} x\cos\left(\frac{2}{x}\right) = 0$

จากการสังเกตสมบัติ $|\text{sin}x| \le |x|$ แล้ว $\dfrac{|\text{sin}x|}{|x|} \le 1$ เมื่อ $x \neq 0$
ถ้าพิจารณากราฟของฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{\text{sin}x}{x}$ ดังกราฟต่อไปนี้



และคำควณค่าฟังก์ชัน $f(x)$ เมื่อค่าของ x ใกล้ ๆ 0 สำหรับบางค่าดังตารางต่อไปนี้

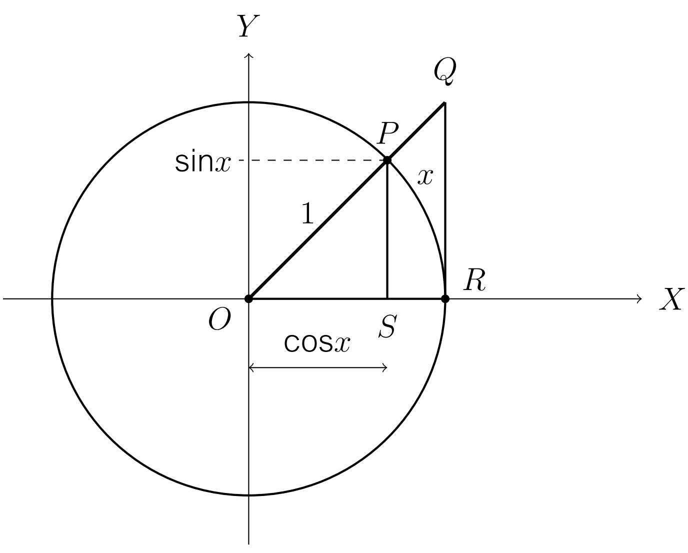
x	$f(x)$		x	$f(x)$
0.1	0.998334166468282		−0.1	0.998334166468282
0.01	0.999983333416666		−0.01	0.999983333416666
0.001	0.999999833333342		−0.001	0.999999833333342
0.0001	0.999999998333333		−0.0001	0.999999998333333
0.00001	0.999999999983333		−0.00001	0.999999999983333

ทำให้สรุปได้ว่า $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sin}x}{x} = 1$ หรือกล่าวอีกนัยว่า sin$x$ จะมีค่าประมาณ x เมื่อ x มีค่าใกล้ ๆ 0 และสามารถพิสูจน์โดยใช้ทฤษฎีบทการบีบดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.3.10 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sin}x}{x} = 1$

บทพิสูจน์. ให้ x เป็นจำนวนจริงที่มีค่าใกล้ ๆ 0 โดยที่ x เป็นความยาวบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด $R(1,0)$ ไปยัง P ในหน่วยเรเดียน ดังนั้น P มีพิกัดเป็น $(\text{cos}x, \text{sin}x)$ จากนั้นพิจารณาวงกลมหนึ่งหน่วยดังรูป

รูปที่ 2.4 ความสัมพันธ์ของ x บนวงกลมหนึ่งหน่วย



จากรูปที่ 2.4 จะเห็นว่าจะได้ความสัมพันธ์ของพื้นที่ดังต่อไปนี้

$$\text{พื้นที่ของ } \Delta OPS < \text{พื้นที่ของเซเตอร์ } OPR < \text{พื้นที่ของ } \Delta OQR$$

เนื่องจาก ΔOPS คล้ายกับ ΔOQR ดังนั้น $\dfrac{QR}{OR} = \dfrac{PS}{OS}$ ฉะนั้น

$$QR = OR \cdot \frac{PS}{OS} = 1 \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x}$$

จะได้ว่า

$$\begin{array}{ccccc} \frac{1}{2}OS \cdot PS & < & \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot x & < & \frac{1}{2}OR \cdot QR \\ \cos x \cdot \sin x & < & x & < & 1 \cdot \dfrac{\sin x}{\cos x} \end{array}$$

กรณี x เข้าใกล้ 0 ทางด้านขวา จะได้ว่า $\sin x > 0$ นั่นคือ

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

เนื่องจาก $\lim_{x\to 0^+} \cos x = 1$ และ $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\cos x} = 1$ ดังนั้น $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{x}{\sin x} = 1$

กรณี x เข้าใกล้ 0 ทางด้านซ้าย จะได้ว่า $\sin x < 0$ นั่นคือ

$$\frac{1}{\cos x} < \frac{x}{\sin x} < \cos x$$

เนื่องจาก $\lim_{x\to 0^-} \cos x = 1$ และ $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{1}{\cos x} = 1$ ดังนั้น $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{x}{\sin x} = 1$

ฉะนั้น $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1$ ทำให้สรุปได้ว่า

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{x}{\sin x}} = \frac{1}{1} = 1$$

□

ตัวอย่าง 2.3.11 จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\tan x}$

   วิธีทำ $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\tan x} = \lim_{x\to 0} \sin x \cdot \dfrac{\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \cos x = 1$

2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x}$

   วิธีทำ จะเห็นว่าลิมิตดังกล่าวอยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนด จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right) \frac{\sin x}{1+\cos x} \\ &= 1 \cdot \frac{0}{1+1} = 0 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2.3.12 จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+\sin x}{x\cos x}$

วิธีทำ จะเห็นว่าลิมิตดังกล่าวอยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนด จะได้ว่า

$$\lim_{x\to 0} \frac{x+\sin x}{x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x(1+\frac{\sin x}{x})}{x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1+\frac{\sin x}{x}}{\cos x} = \frac{1+1}{1} = 2$$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\tan x}{\sin x}$

วิธีทำ จะเห็นว่าลิมิตดังกล่าวอยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนด จะได้ว่า

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\tan x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x-\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{\sin x} - \frac{1}{\cos x}\right) = (1-1) = 0$$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sec x-\cos x}{x}$

วิธีทำ จะเห็นว่าลิมิตดังกล่าวอยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนด จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\sec x-\cos x}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos x}-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x\cos x}\\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x\cos x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)\frac{\sin x}{\cos x}\\ &= 1\cdot\frac{0}{1} = 0\end{aligned}$$

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

วิธีทำ จะเห็นว่าลิมิตดังกล่าวอยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนด จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\tan x-\sin x}{x^3} &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x(\frac{1}{\cos x}-1)}{x^3}\\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}\\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x(1-\cos^2 x)}{x^3\cos x(1+\cos x)}\\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x\sin^2 x}{x^3\cos x(1+\cos x)}\\ &= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 \frac{1}{\cos x(1+\cos x)}\\ &= 1^3\cdot\frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

บทแทรก 2.3.13 ให้ u เป็นฟังก์ชันที่ขึ้นกับตัวแปร x และมีค่าเมื่อ x มีค่าใกล้ ๆ a

$$\text{ถ้า} \quad \lim_{x\to a} u(x) = 0 \quad \text{แล้ว} \quad \lim_{x\to a} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1$$

บทพิสูจน์. ถ้า $\lim_{x\to a} u(x) = 0$ จะได้ว่า $u \to 0$ เมื่อ $x \to a$ โดยทฤษฎีบท 2.3.10 สรุปได้ว่า

$$\lim_{x\to a} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = \lim_{u\to 0} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1$$

□

ตัวอย่าง 2.3.14 จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้ ถ้าลิมิตมีค่า

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{x}$

   วิธีทำ ให้ $u(x) = 2x$ จะได้ว่า $\lim_{x\to 0} u(x) = 0$ ดังนั้น

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x\to 0} 2\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right) = 2 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = 2\cdot 1 = 2$$

2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 4x}{5x^2}$

   วิธีทำ ให้ $u(x) = 4x$ จะได้ว่า $\lim_{x\to 0} u(x) = 0$ ดังนั้น

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 4x}{5x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{16}{5}\left(\frac{\sin^2 4x}{16x^2}\right) = \frac{16}{5} \cdot \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin u(x)}{u(x)}\right)^2 = \frac{16}{5} \cdot 1^2 = \frac{16}{5}$$

ตัวอย่าง 2.3.15 จงหาลิมิตของ $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x - \sin 3x}{\tan x}$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\tan x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \lim_{x\to 0} \cos x\left(\frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}\right) \\
&= \lim_{x\to 0} \cos x \left(\frac{\frac{\sin 5x}{x} - \frac{\sin 3x}{x}}{\frac{\sin x}{x}}\right) = \lim_{x\to 0} \cos x \left(\frac{5\cdot\frac{\sin 5x}{5x} - 3\cdot\frac{\sin 3x}{3x}}{\frac{\sin x}{x}}\right) \\
&= 1\left(\frac{5\cdot 1 - 3\cdot 1}{1}\right) = 2
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2.3.16 จงหาลิมิตของ $\lim_{x\to \pi} \dfrac{\sin x}{x-\pi}$

วิธีทำ ให้ $u = x - \pi$ จะได้ว่า $\lim_{x\to \pi} u(x) = 0$ เนื่องจาก $\sin(x-\pi) = -\sin x$ ดังนั้น

$$\lim_{x\to \pi} \frac{\sin x}{x-\pi} = \lim_{x\to \pi} \frac{-\sin(x-\pi)}{x-\pi} = -\lim_{x\to \pi} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = -1$$

แบบฝึกหัด 2.3

1. จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้ ถ้าลิมิตมีค่า

1.1 $\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\left(\frac{x^2\pi}{x}\right)$

1.2 $\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\left(\frac{x\pi}{x^2}\right)$

1.3 $\lim\limits_{x\to 0} \tan^2 x\cos\left(\frac{3}{x-1}\right)$

1.4 $\lim\limits_{x\to 0} \cos x\sqrt{\sin^2 x}$

1.5 $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x^2+x^3}\cos\left(\frac{x+1}{\pi}\right)$

1.6 $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{\cos 3x-\cos x}{\sin 3x+\sin x}$

2. จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้ ถ้าลิมิตมีค่า

2.1 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{4x}$

2.2 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan 3x}{\tan 5x}$

2.3 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan 5x}{\sin 5x}$

2.4 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$

2.5 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^4 x}{x^2}$

2.6 $\lim\limits_{x\to -3} \frac{\sin(x+3)}{x^2+2x-3}$

2.7 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x+\tan x}{\sin x}$

2.8 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos^3 x}$

2.9 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos^4 x}{x^2}$

2.10 $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{1-\cos\sqrt{x}}$

2.11 $\lim\limits_{x\to 0} x^2\cot x$

2.12 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{x+\sin x}$

2.13 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\sin x}{1-\cos x}$

2.14 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^4 2x}{3x^4}$

2.15 $\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin^2\frac{1}{x}$

2.16 $\lim\limits_{x\to 0} x^6\cos\frac{\pi}{x}$

2.17 $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}e^{\sin\frac{1}{x}}$

2.18 $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$

3. จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้ ถ้าลิมิตมีค่า

3.1 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{x\cos x+\sin x}$

3.2 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos^3 x-2\cos^2 x-\cos x+2}{x^2}$

3.3 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\cos x-\sin x}{x}$

3.4 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x\sin^2 x-\cos^2 x}{x^3}$

3.5 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x-\sin 3x}{x}$

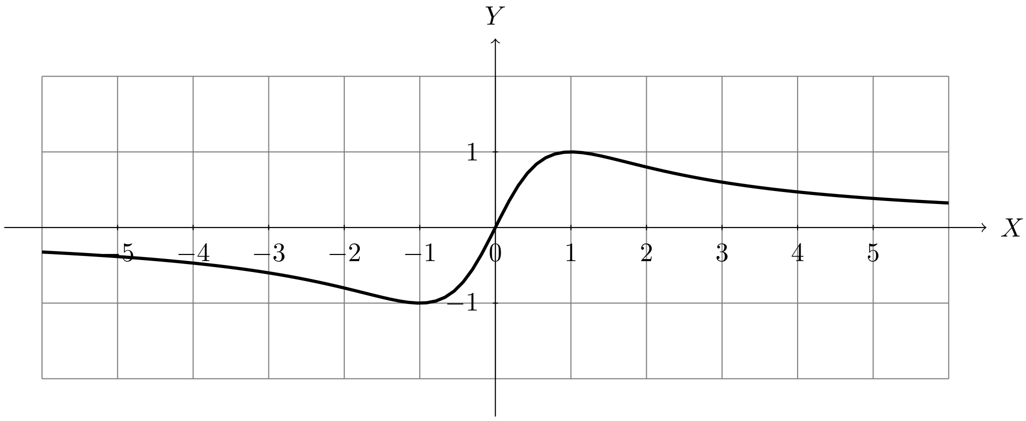
3.6 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 7x+\sin x}{\cos 7x-\cos x}$

4. จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{\sin x}{1+\cos x}$

5. ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นจำนวนจริง ถ้า $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\cos x=0$ จงหา $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

2.4 ลิมิตเกี่ยวกับอนันต์

พิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ แสดงได้ดังกราฟ



จะเห็นว่าเมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขีดจำกัด $f(x)$ จะมีค่าเข้าใกล้ 0 เขียนแทนด้วย

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

และเมื่อ x มีค่าลดลงอย่างไม่มีขีดจำกัด $f(x)$ จะมีค่าเข้าใกล้ 0 เขียนแทนด้วย

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

การพิสูจน์ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตอนันต์อาศัย **สมบัติอาร์คิมีดีส** (Archemedean properties) ที่กล่าวไว้ว่า สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ จะได้ว่า

1. มีจำนวนเต็มบวก n ซึ่ง $\quad x < n$
2. ถ้า $x > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก n ซึ่ง $\quad \dfrac{1}{n} < x$

บทนิยาม 2.4.1 ให้ $f : D \to \mathbb{R}$ โดยที่ $D = (a, \infty)$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัว แล้ว

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

ก็ต่อเมื่อ $\qquad \forall \varepsilon > 0\, \exists N > 0\, \forall x \in D, \quad x > N \quad \to \quad |f(x) - L| < \varepsilon$

บทนิยาม 2.4.2 ให้ $f : D \to \mathbb{R}$ โดยที่ $D = (-\infty, a)$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัว แล้ว

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

ก็ต่อเมื่อ $\qquad \forall \varepsilon > 0\, \exists N < 0\, \forall x \in D, \quad x < N \quad \to \quad |f(x) - L| < \varepsilon$

ทฤษฎีบท 2.4.3 ให้ x เป็นจำนวนจริงที่ไม่ศูนย์ จะได้ว่า

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

บทพิสูจน์. ให้ $\varepsilon > 0$ โดยสมบัติอาร์คิมีดีสมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง $\dfrac{1}{N} < \varepsilon$

1. ให้ $x \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $x > N > 0$ นั่นคือ $\dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{N}$ ดังนั้น

$$\left|\frac{1}{x} - 0\right| = \frac{1}{x} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

สรุปได้ว่า $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

2. ให้ $x \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $x < -N < 0$ นั่นคือ $\dfrac{1}{-x} < \dfrac{1}{N}$ ดังนั้น

$$\left|\frac{1}{x} - 0\right| = \frac{1}{-x} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

สรุปได้ว่า $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ $\square$

ทฤษฎีบท 2.4.4 ให้ $x > 0$ และ r เป็นจำนวนตรรกยะบวก แล้ว $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^r} = 0$

บทพิสูจน์. ให้ $\varepsilon > 0$ แล้ว $(\varepsilon)^{\frac{1}{r}} > 0$ โดยสมบัติอาร์คิมีดีสมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง $\dfrac{1}{N} < (\varepsilon)^{\frac{1}{r}}$
ให้ $x > 0$ ซึ่ง $x > N > 0$ แล้ว $x^r > N^r > 0$ นั่นคือ $\dfrac{1}{x^r} < \dfrac{1}{N^r}$ ดังนั้น

$$\left|\frac{1}{x^r} - 0\right| = \frac{1}{x^r} < \frac{1}{N^r} < \varepsilon$$

สรุปได้ว่า $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^r} = 0$ $\square$

ทฤษฎีบท 2.4.5 ให้ $x < 0$ และ r เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^r} = 0$

บทพิสูจน์. ให้ $\varepsilon > 0$ แล้ว $(\varepsilon)^{\frac{1}{r}} > 0$ โดยสมบัติของอาร์คิมีดีสมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง $\dfrac{1}{N} < (\varepsilon)^{\frac{1}{r}}$
ให้ $x < 0$ ซึ่ง $x < -N < 0$ แล้ว $(-x)^r > N^r > 0$ นั่นคือ $\dfrac{1}{(-x)^r} < \dfrac{1}{N^r}$ ดังนั้น

$$\left|\frac{1}{x^r} - 0\right| = \left|\frac{1}{x}\right|^r = \left(-\frac{1}{x}\right)^r = \frac{1}{(-x)^r} < \frac{1}{N^r} < \varepsilon$$

สรุปได้ว่า $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^r} = 0$ $\square$

ในทำนองเดียวกับลิมิตของฟังก์ชันที่จุด a เมื่อพิจารณาลิมิตของฟังก์ชันเมื่อ x เข้าใกล้ ∞ จะได้ทฤษฎีบท 2.4.6 (จะละการพิสูจน์ไว้ในวิชานี้)

ทฤษฎีบท 2.4.6 ให้ f, g เป็นฟังก์ชันจาก D ไป $\mathbb{R}$ โดยที่ $D = (a, \infty)$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัว ถ้า $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ และ $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = M$ เมื่อ $L, M \in \mathbb{R}$ แล้ว

1. $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) + \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = L + M$
2. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \cdot g(x) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = LM$
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to\infty} f(x)}{\lim\limits_{x\to\infty} g(x)} = \dfrac{L}{M}$ เมื่อ $M \neq 0$
4. $\lim\limits_{x\to\infty} cf(x) = c \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = cL$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว
5. $\lim\limits_{x\to\infty} |f(x)| = |\lim\limits_{x\to\infty} f(x)| = |L|$
6. $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x))^n = \left(\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\right)^n = L^n$ เมื่อ $n \in \mathbb{N}$
7. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to\infty} f(x)} = \sqrt[n]{L}$ เมื่อ $n \in \mathbb{N}$ และ $\sqrt[n]{L} \in \mathbb{R}$

สำหรับลิมิตของฟังก์ชันเมื่อ x เข้าใกล้ $-\infty$ ได้ผลลัพธ์เช่นเดียวกับทฤษฎีบท 2.4.6 แต่ไม่ขอเขียนไว้ ณ ที่นี้ แต่นำไปใช้ได้เช่นกัน

สำหรับ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ และ $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$ จะกล่าวได้ว่า

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ และ } \lim_{x\to\infty} (f(x) - g(x)) \quad \text{อยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนด}$$

เขียนแทนด้วย $I.F.\dfrac{\infty}{\infty}$ และ $I.F.\infty - \infty$ ตามลำดับ

ตัวอย่าง 2.4.7 พิจารณาค่าของลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3 - 4}{2x^2 + x^3}$

   วิธีทำ จะเห็นว่าลิมิตดังกล่าวอยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนด $I.F.\dfrac{\infty}{\infty}$ จะได้ว่า

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3 - 4}{2x^2 + x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3(3 - \frac{4}{x^3})}{x^3(\frac{2}{x} + 1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{3 - \frac{4}{x^3}}{\frac{2}{x} + 1} = \frac{3 - 0}{0 + 1} = 3$$

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2 - 4x}{x + x^3 + 1}$

   วิธีทำ จะเห็นว่าลิมิตดังกล่าวอยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนด $I.F.\dfrac{\infty}{\infty}$ จะได้ว่า

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - 4x}{x + x^3 + 1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3(\frac{1}{x} - \frac{4}{x^2})}{x^3(\frac{1}{x^2} + 1 + \frac{1}{x^3})} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{4}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + 1 + \frac{1}{x^3}} = \frac{0 - 0}{0 + 1 + 0} = 0$$

ตัวอย่าง 2.4.8 พิจารณาค่าของลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^{\frac{4}{3}} - 2\sqrt{x}}{x\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$

   วิธีทำ จะได้ว่า

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{4}{3}} - 2\sqrt{x}}{x\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{4}{3}} - 2x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{3}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}(\frac{1}{x^{\frac{1}{6}}} - \frac{2}{x})}{x^{\frac{3}{2}}(1 + \frac{1}{x^{\frac{7}{6}}})}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^{\frac{1}{6}}} - \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x^{\frac{7}{6}}}} = \frac{0-0}{1+0} = 0$$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^4 + x^2} + x}{3x^2 - 1}$

   วิธีทำ จะได้ว่า

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^4 + x^2} + x}{3x^2 - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^4(1 + \frac{1}{x^2})} + x}{x^2(3 - \frac{1}{x^3})} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^4}\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + x}{x^2(3 - \frac{1}{x^3})}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + x}{x^2(3 - \frac{1}{x^3})}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \frac{1}{x}\right)}{x^2(3 - \frac{1}{x^3})}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \frac{1}{x}}{3 - \frac{1}{x^3}}$$

$$= \frac{\sqrt{1+0} + 0}{3 - 0} = \frac{1}{3}$$

3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{10x + 3}{\sqrt{25x^2 - 6}}$

   วิธีทำ จะได้ว่า

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{10x + 3}{\sqrt{25x^2 - 6}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x(10 + \frac{3}{x})}{\sqrt{x^2(25 - \frac{6}{x^2})}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x(10 + \frac{3}{x})}{\sqrt{x^2}\sqrt{25 - \frac{6}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x(10 + \frac{3}{x})}{|x|\sqrt{25 - \frac{6}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x(10 + \frac{3}{x})}{-x\sqrt{25 - \frac{6}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{10 + \frac{3}{x}}{-\sqrt{25 - \frac{6}{x^2}}}$$

$$= \frac{10 + 0}{-\sqrt{25 - 0}} = -2$$

ตัวอย่าง 2.4.9 พิจารณาค่าของลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)$

วิธีทำ จะเห็นว่าลิมิตดังกล่าวอยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนด $I.F.\infty-\infty$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-x\right) &= \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2+2}+x}{\sqrt{x^2+2}+x} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+2)-x^2}{\sqrt{x^2+2}+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+2}+x} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2(1+\frac{2}{x^2})}+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+x} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{2}{x\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+1\right)} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+1} = \frac{0}{\sqrt{1+0}+1} = 0
\end{aligned}$$

2. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+1}-x+1\right)$

วิธีทำ จะเห็นว่าลิมิตดังกล่าวอยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนด $I.F.\infty-\infty$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+1}-x+1\right) &= \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+1}-(x-1)\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2+3x+1}+(x-1)}{\sqrt{x^2+3x+1}+(x-1)} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+3x+1)-(x-1)^2}{\sqrt{x^2+3x+1}+(x-1)} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+3x+1)-(x^2-2x+1)}{\sqrt{x^2+3x+1}+(x-1)} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{5x}{\sqrt{x^2+3x+1}+(x-1)} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{5x}{\sqrt{x^2(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2})}+(x-1)} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{5x}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+(x-1)} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{5x}{x\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+(x-1)} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{5x}{x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+1-\frac{1}{x}\right)} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{5}{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+1-\frac{1}{x}} \\
&= \frac{5}{\sqrt{1+0+0}+1-0} = \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2.4.10 จงหาลิมิตของ $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x}+x\right)$

วิธีทำ จะเห็นว่าลิมิตดังกล่าวอยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนด $I.F.\infty-\infty$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x}+x\right) &= \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x}+x\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2-x}-x}{\sqrt{x^2-x}-x}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2-x)-x^2}{\sqrt{x^2-x}-x}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{\sqrt{x^2-x}-x}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{\sqrt{x^2(1-\frac{1}{x})}-x}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{\sqrt{x^2}\sqrt{1-\frac{1}{x}}-x}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}}-x}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{-x\sqrt{1-\frac{1}{x}}-x}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{-x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1\right)}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1}\\
&= \frac{1}{\sqrt{1-0}+1}=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

ต่อไปนี้จะขยายแนวคิดมากจากทฤษฎีบทการบีบ ทำให้ได้ทฤษฎีบทที่คล้ายคลึงกันเรียกว่า ทฤษฎีบทการบีบสำหรับลิมิตที่อนันต์

ทฤษฎีบท 2.4.11 ทฤษฎีบทการบีบสำหรับลิมิตที่อนันต์
ให้ f,g,h เป็นฟังก์ชันจาก D ไป $\mathbb{R}$ เมื่อ $D\subseteq\mathbb{R}$

1. ถ้า $D=(a,\infty)$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัว และ

$$g(x)\le f(x)\le h(x) \qquad \text{ทุก ๆ } x>N \text{ สำหรับบางค่า } N>0$$

และ $\lim_{x\to\infty}g(x)=L=\lim_{x\to\infty}h(x)$ แล้ว $\lim_{x\to\infty}f(x)=L$

2. ถ้า $D=(-\infty,b)$ เมื่อ b เป็นค่าคงตัว และ

$$g(x)\le f(x)\le h(x) \qquad \text{ทุก ๆ } x<K \text{ สำหรับบางค่า } K<0$$

และ $\lim_{x\to-\infty}g(x)=M=\lim_{x\to-\infty}h(x)$ แล้ว $\lim_{x\to-\infty}f(x)=M$

ตัวอย่าง 2.4.12 พิจารณาค่าของลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim_{x\to\infty} \frac{\text{sin}x}{x^2}$

   วิธีทำ สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ จะได้ว่า $-1 \leq \text{sin}x < 1$ ถ้า $x > 0$ จะได้ว่า

$$-\frac{1}{x^2} \leq \frac{\text{sin}x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

   เนื่องจาก $\lim_{x\to\infty} -\frac{1}{x^2} = 0$ และ $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ ดังนั้น $\lim_{x\to\infty} \frac{\text{sin}x}{x^2} = 0$

2. $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}\text{cos}x$

   วิธีทำ สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ จะได้ว่า $-1 \leq \text{cos}x < 1$ ถ้า $x < 0$ จะได้ว่า

$$\frac{1}{x} \leq \frac{\text{cos}x}{x} \leq -\frac{1}{x}$$

   เนื่องจาก $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ และ $\lim_{x\to\infty} -\frac{1}{x} = 0$ ดังนั้น $\lim_{x\to\infty} \frac{\text{cos}x}{x} = 0$

3. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 5\text{sin}x}{7x + 2x^2}$

   วิธีทำ โดยข้อ 1 และการจัดรูปจะได้ว่า

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 5\text{sin}x}{7x + 2x^2} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(1 - 5\cdot\frac{\text{sin}x}{x^2})}{x^2(\frac{7}{x} + 2)} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{1 - 5\cdot\frac{\text{sin}x}{x^2}}{\frac{7}{x} + 2} \\ &= \frac{1 - 5\cdot 0}{0 + 2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

โดยทฤษฎีบท 2.3.10 พิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า

ทฤษฎีบท 2.4.13 ให้ u เป็นฟังก์ชันจาก D ไป $\mathbb{R}$ เมื่อ $D \subseteq \mathbb{R}$

1. ถ้า $D = (a, \infty)$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัว และ $\lim_{x\to\infty} u(x) = 0$ แล้ว

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\text{sin}u(x)}{u(x)} = 1$$

2. ถ้า $D = (-\infty, b)$ เมื่อ b เป็นค่าคงตัว และ $\lim_{x\to-\infty} u(x) = 0$ แล้ว

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\text{sin}u(x)}{u(x)} = 1$$

ตัวอย่าง 2.4.14 พิจารณาค่าของลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

   วิธีทำ ให้ $u(x) = \frac{1}{x}$ จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to\infty} u(x) = 0$ ดังนั้น

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1$$

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} x\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$

   วิธีทำ ให้ $u(x) = \frac{\pi}{x}$ จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x) = 0$ ดังนั้น

$$\lim_{x\to-\infty} x\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty} \pi\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{\frac{\pi}{x}} = \pi\cdot\lim_{x\to\infty} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = \pi\cdot 1 = \pi$$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\left(\frac{1}{2x+1}\right)$

   วิธีทำ ให้ $u(x) = \frac{1}{2x+1}$ จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to\infty} u(x) = 0$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} x\sin\left(\frac{1}{2x+1}\right) &= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}(2x+1-1)\sin\left(\frac{1}{2x+1}\right)\\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}\left[(2x+1)\sin\left(\frac{1}{2x+1}\right) - \sin\left(\frac{1}{2x+1}\right)\right]\\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\left(\frac{1}{2x+1}\right)}{\frac{1}{2x+1}} - \sin\left(\frac{1}{2x+1}\right)\right]\\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}\left[\frac{\sin u(x)}{u(x)} - \sin u(x)\right]\\
&= \frac{1}{2}(1-\sin 0) = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

บทนิยาม 2.4.15 ให้ $f : D \to \mathbb{R}$ โดยที่ $D = (a,\infty)$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัว

1. ถ้า $D = (a,\infty)$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัว แล้ว $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$

   ก็ต่อเมื่อ $\forall M > 0\,\exists N > 0\,\forall x \in D,\quad x > N \quad\to\quad f(x) > M$

2. ถ้า $D = (-\infty,b)$ เมื่อ b เป็นค่าคงตัว แล้ว $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

   ก็ต่อเมื่อ $\forall M > 0\,\exists N < 0\,\forall x \in D,\quad x < N \quad\to\quad f(x) > M$

3. ถ้า $D = (a,\infty)$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัว แล้ว $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

   ก็ต่อเมื่อ $\forall M < 0\,\exists N > 0\,\forall x \in D,\quad x > N \quad\to\quad f(x) < M$

4. ถ้า $D = (-\infty,b)$ เมื่อ b เป็นค่าคงตัว แล้ว $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

   ก็ต่อเมื่อ $\forall M < 0\,\exists N < 0\,\forall x \in D,\quad x < N \quad\to\quad f(x) < M$

จากบทนิยาม 2.4.15 อาจนำไปใช้ในการตรวจสอบค่าค่อนข้างยาก เราอาจจะใช้ทฤษฎีบทต่อไปนี้ในการตรวจสอบได้เช่นกัน (การพิสูจน์ขอละไว้ในวิชานี้)

ทฤษฎีบท 2.4.16 ให้ f เป็นฟังก์ชัน แล้ว

1. ถ้า $\exists M > 0,\ f(x) > 0$ ทุก ๆ $x > M$ และ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{f(x)} = 0$ แล้ว $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$
2. ถ้า $\exists M > 0,\ f(x) < 0$ ทุก ๆ $x > M$ และ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{f(x)} = 0$ แล้ว $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$
3. ถ้า $\exists M < 0,\ f(x) > 0$ ทุก ๆ $x < M$ และ $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{f(x)} = 0$ แล้ว $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$
4. ถ้า $\exists M < 0,\ f(x) < 0$ ทุก ๆ $x < M$ และ $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{f(x)} = 0$ แล้ว $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

ตัวอย่าง 2.4.17 พิจารณาค่าของลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{1+x}$

   วิธีทำ ให้ $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x}$ เลือก $M = 1$ เห็นได้ชัดว่า $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x} > 0$ ทุก ๆ $x > 1$ และ

   $$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right) = 0 + 0 = 0$$

   ดังนั้น $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{1+x} = +\infty$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{1-x}$

   วิธีทำ ให้ $f(x) = \dfrac{x^2}{1-x}$ เลือก $M = 2$ จะได้ว่า $1 - x < 0$ และ $x^2 > 0$ เมื่อ $x > 2$ ดังนั้น $f(x) = \dfrac{x^2}{1-x} < 0$ ทุก ๆ $x > 2$ และ

   $$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right) = 0 + 0 = 0$$

   ดังนั้น $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{1-x} = -\infty$

3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3}{1+x}$

   วิธีทำ ให้ $f(x) = \dfrac{x^3}{1+x}$ เลือก $M = -3$ จะได้ว่า $1 + x < 0$ และ $x^3 < 0$ เมื่อ $x < -3$ ดังนั้น $f(x) = \dfrac{x^3}{1+x} > 0$ ทุก ๆ $x < -3$ และ

   $$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+x}{x^3} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2}\right) = 0 + 0 = 0$$

   ดังนั้น $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3}{1+x} = +\infty$

4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{1+x}$

วิธีทำ ให้ $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x}$ เลือก $M = -3$ จะได้ว่า $1 + x < 0$ และ $x^2 > 0$ เมื่อ $x < -3$ ดังนั้น $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x} < 0$ ทุก ๆ $x < -3$ และ

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right) = 0 + 0 = 0$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{1+x} = -\infty$

ทฤษฎีบท 2.4.18 ให้ u เป็นฟังก์ชันจาก D ไป $\mathbb{R}$

1. ถ้า $D = (a, \infty)$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัว และ $\lim\limits_{x\to\infty} u(x) = \infty$ แล้ว
$$\lim_{x\to\infty} \text{arctan}u(x) = \frac{\pi}{2}$$

2. ถ้า $D = (-\infty, b)$ เมื่อ b เป็นค่าคงตัว และ $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x) = \infty$ แล้ว
$$\lim_{x\to-\infty} \text{arctan}u(x) = \frac{\pi}{2}$$

3. ถ้า $D = (a, \infty)$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัว และ $\lim\limits_{x\to\infty} u(x) = -\infty$ แล้ว
$$\lim_{x\to\infty} \text{arctan}u(x) = -\frac{\pi}{2}$$

4. ถ้า $D = (-\infty, b)$ เมื่อ b เป็นค่าคงตัว และ $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x) = -\infty$ แล้ว
$$\lim_{x\to-\infty} \text{arctan}u(x) = -\frac{\pi}{2}$$

ตัวอย่าง 2.4.19 พิจารณาค่าของลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \text{arctan}(1 + x^2)$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to\infty}(1 + x^2) = +\infty$ ดังนั้น $\lim\limits_{x\to\infty} \text{arctan}(1 + x^2) = \dfrac{\pi}{2}$

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \text{arctan}(1 - x^2)$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to-\infty}(1 - x^2) = -\infty$ ดังนั้น $\lim\limits_{x\to-\infty} \text{arctan}(1 - x^2) = -\dfrac{\pi}{2}$

บทนิยาม 2.4.20 ให้ $f : D \to \mathbb{R}$ โดยที่ $D \subseteq \mathbb{R}$ และ a เป็นจุดลิมิตของ D แล้ว

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

ก็ต่อเมื่อ $\quad \forall M > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in D, \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \to \quad f(x) > M$

บทนิยาม 2.4.21 ให้ $f : D \to \mathbb{R}$ โดยที่ $D \subseteq \mathbb{R}$ และ a เป็นจุดลิมิตของ D แล้ว

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

ก็ต่อเมื่อ $\quad \forall M < 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in D, \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \to \quad f(x) < M$

ตัวอย่าง 2.4.22 จงพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$

บทพิสูจน์. ให้ $M > 0$ เลือก $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{M}} > 0$ ให้ $x \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $0 < |x| < \delta$ ฉะนั้น $x^2 < \delta^2$ นั่นคือ

$$\frac{1}{x^2} > \frac{1}{\delta^2} = M$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ □

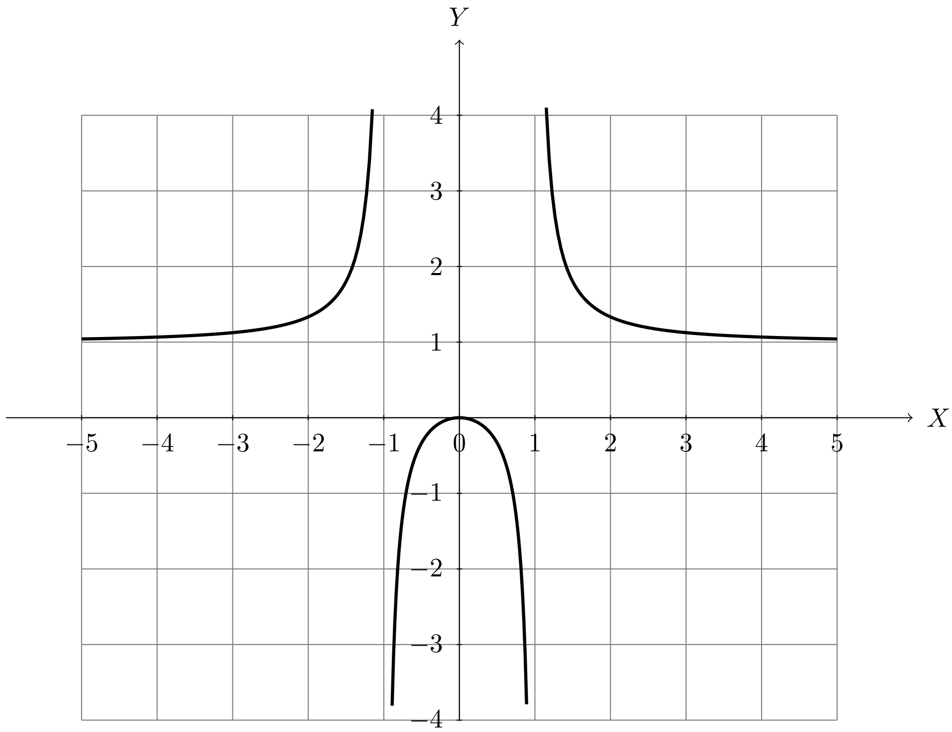
ตัวอย่าง 2.4.23 จงพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{1-x} = -\infty$

บทพิสูจน์. ให้ $M < 0$ เลือก $\delta = -\dfrac{1}{M} > 0$ ให้ $x \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $0 < x - 1 < \delta$ ฉะนั้น $-\delta < 1 - x < 0$ นั่นคือ

$$\frac{1}{1-x} < \frac{1}{-\delta} = M$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{1-x} = -\infty$ □

ตัวอย่าง 2.4.24 กราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ แสดงดังนี้



จะได้ค่าของลิมิตดังต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$
3. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$
4. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$
5. $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$
6. $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = +\infty$

ทฤษฎีบท 2.4.25 ให้ $f : D \to \mathbb{R}$ โดยที่ $D \subseteq \mathbb{R}$ และ a เป็นจุดลิมิตของ D แล้ว

1. ถ้า $\exists\delta > 0,\ f(x) > 0$ ทุกๆ $x \in (a-\delta, a+\delta) \cap D - \{a\}$ และ $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$ แล้ว
$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$
2. ถ้า $\exists\delta > 0,\ f(x) < 0$ ทุกๆ $x \in (a-\delta, a+\delta) \cap D - \{a\}$ และ $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$ แล้ว
$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$
3. ถ้า $\exists\delta > 0,\ f(x) > 0$ ทุกๆ $x \in (a, a+\delta) \cap D$ และ $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{1}{f(x)} = 0$ แล้ว $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty$
4. ถ้า $\exists\delta > 0,\ f(x) < 0$ ทุกๆ $x \in (a, a+\delta) \cap D$ และ $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{1}{f(x)} = 0$ แล้ว $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$
5. ถ้า $\exists\delta > 0,\ f(x) > 0$ ทุกๆ $x \in (a-\delta, a) \cap D$ และ $\lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{1}{f(x)} = 0$ แล้ว $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \infty$
6. ถ้า $\exists\delta > 0,\ f(x) < 0$ ทุกๆ $x \in (a-\delta, a) \cap D$ และ $\lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{1}{f(x)} = 0$ แล้ว $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$

ตัวอย่าง 2.4.26 พิจารณาค่าของลิมิตต่อไปนี้ โดยใช้ทฤษฎีบท 2.4.25

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x}{(x-1)^2}$

   วิธีทำ ให้ $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)^2}$

   เลือก $\delta = 1$ จะได้ว่า $(x-1)^2 > 0$ และ $x > 0$ เมื่อ $x \in (0,1) \cup (1,2)$ ดังนั้น
$$f(x) = \frac{x}{(x-1)^2} > 0 \quad \text{ทุก ๆ } x \in (0,1) \cup (1,2)$$
   และ
$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{x} = \frac{0}{1} = 0$$
   สรุปได้ว่า $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x}{(x-1)^2} = +\infty$

2. $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1-x}{x^2-4}$

   วิธีทำ ให้ $f(x) = \dfrac{1-x}{x^2-4}$

   เลือก $\delta = 1$ จะได้ว่า $x^2 - 4 = (x-2)(x+2) > 0$ และ $1 - x < 0$ เมื่อ $x \in (2,3)$ ดังนั้น

$$f(x) = \frac{1-x}{x^2-4} < 0 \quad \text{ทุก ๆ } x \in (2,3)$$

และ

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-4}{1-x} = \frac{0}{-1} = 0$$

สรุปได้ว่า $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x}{x^2-4} = -\infty$

ตัวอย่าง 2.4.27 จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2+x}\right)$

วิธีทำ จะเห็นว่าลิมิตดังกล่าวอยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนด $I.F.\infty - \infty$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+x}\right) &= \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x(x+1)}\right) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(x+1)-1}{x(x+1)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x}{x(x+1)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{1+0} = 1
\end{aligned}$$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}$

วิธีทำ จะเห็นว่าลิมิตดังกล่าวอยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนด $I.F.\frac{\infty}{\infty}$ จะได้ว่า

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{x-1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{x+1}{x-1} = \frac{0+1}{0-1} = -1$$

3. $\lim\limits_{y\to 0^+} (\cot y - \csc y)$

วิธีทำ จะเห็นว่าลิมิตดังกล่าวอยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนด $I.F.\infty - \infty$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to 0^+} (\cot y - \csc y) &= \lim_{y\to 0^+} \frac{\cos y - 1}{\sin y} \\
&= \lim_{y\to 0^+} \frac{\cos y - 1}{\sin y} \cdot \frac{\cos y + 1}{\cos y + 1} \\
&= \lim_{y\to 0^+} \frac{\cos^2 y - 1}{\sin y(\cos y + 1)} \\
&= \lim_{y\to 0^+} \frac{-\sin^2 y}{\sin y(\cos y + 1)} \\
&= \lim_{y\to 0^+} \frac{-\sin y}{\cos y + 1} \\
&= \frac{0}{1+1} = 0
\end{aligned}$$

แบบฝึกหัด 2.4

1. พิจารณาค่าของลิมิตต่อไปนี้

1.1 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x\sqrt[3]{x}}+3\right)$

1.2 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(2x+5)^5(x-8)^7}{(x^3-2)^2(3x+1)^4}$

1.3 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x+1}{4+x^2+3x^3}$

1.4 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2-4}{2x^4+x}$

1.5 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{|x^2-1|}{x^2+1}$

1.6 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)$

1.7 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2+bx}\right)$

1.8 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{3}{x^2-4}\right)$

1.9 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x}-\sqrt[3]{x^3+1}\right)$

1.10 $\lim\limits_{z\to-\infty}\dfrac{\sqrt{8+z^2}}{z+4}$

1.11 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{9x^6-x}}{x^3+1}$

1.12 $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x^3+2x-1}$

1.13 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-x+6}{3x^2-x}$

1.14 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8-x^2}{\sqrt{2x^2-x+1}}$

2. พิจารณาค่าของลิมิตต่อไปนี้

2.1 $\lim\limits_{x\to0^+}\arctan(\ell\text{n}x)$

2.2 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x}$

2.3 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan(e^x)$

2.4 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin^2 x}{x^2+1}$

2.5 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin^2\left(\dfrac{2}{x}\right)$

2.6 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cos x\sin 3x}{\ell\text{n}(-x)}$

3. พิจารณาค่าของลิมิตต่อไปนี้

3.1 $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$

3.2 $\lim\limits_{x\to-3^-}\dfrac{1}{\sqrt{-x-3}}$

3.3 $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2x+x^{\frac{4}{3}}}{x^2-8x-9}$

3.4 $\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{x^2+x+4-3}{x^2+x-2}$

3.5 $\lim\limits_{x\to5^-}\dfrac{[x]-x}{5-x}$

3.6 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-2x+6}{x^2+2x-15}$

4. พิจารณาค่าของลิมิตต่อไปนี้

4.1 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$

4.2 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin(x-1)}{3x-3}$

4.3 $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2\sin\left(\dfrac{2}{x^2}\right)$

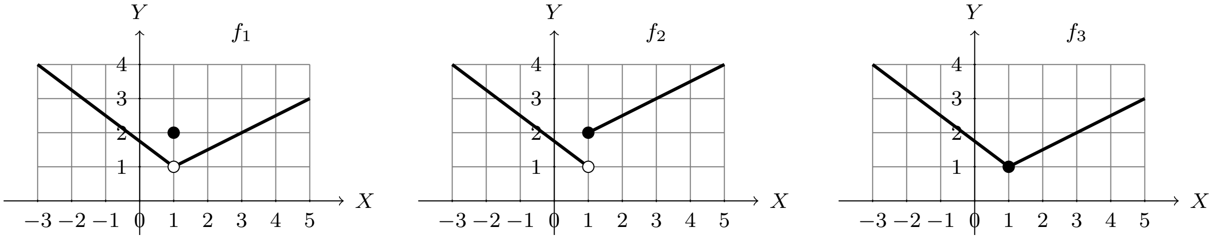
4.4 $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-\pi)\tan\left(\dfrac{\pi}{x-\pi}\right)$

5. จงหาค่าลิมิตของ $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{2-3x+x^2}\right)$

2.5 ความต่อเนื่อง

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงความต่อเนื่องของฟังก์ชันซึ่งมีความสำคัญในการศึกษาวิชาแคลคูลัส จะเริ่มต้นจากการพิจารณาลักษณะของกราฟต่อไปนี้

รูปที่ 2.5 ตัวอย่างฟังก์ชันความต่อเนื่องและไม่ต่อเนื่อง 3 รูปแบบ



จากกราฟเห็นได้ว่าฟังก์ชัน f_1 และ f_2 ไม่มีต่อเนื่องที่ $x = 1$ แต่ f_3 ต่อเนื่องที่ $x = 1$

บทนิยาม 2.5.1 ให้ $f : D \to \mathbb{R}$ โดยที่ $D \subseteq \mathbb{R}$ และ $a \in D$ แล้ว f **ต่อเนื่อง** (continuous) ที่จุด a ก็ต่อเมื่อ

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ มีค่า และ
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

ตัวอย่าง 2.5.2 จงตรวจสอบว่า f ต่อเนื่องที่จุด $x = a$ หรือไม่

1. $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x + 1 & \text{เมื่อ } x \neq 1 \\ 1 + x & \text{เมื่อ } x = 1 \end{cases}$; $a = 1$

   วิธีทำ จะได้ว่า $f(1) = 2$ และ

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(3x^2 - 2x + 1) = 3 - 2 + 1 = 2$$

   นั่นคือ $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2 = f(1)$ ดังนั้น f ต่อเนื่องที่จุด $x = 1$

2. $f(x) = \begin{cases} |x| + 3 & \text{เมื่อ } x \leq -1 \\ |x| - 1 & \text{เมื่อ } x > -1 \end{cases}$; $a = -1$

   วิธีทำ จะได้ว่า $f(-1) = 4$ และ

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} |x| + 3 = 4$$
$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^-} |x| - 1 = 0$$

   นั่นคือ $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ ไม่มีลิมิต ดังนั้น f ไม่ต่อเนื่องที่จุด $x = -1$

3. $f(x) = \begin{cases} x^{-2} & \text{เมื่อ } x \neq 0 \\ 1 & \text{เมื่อ } x = 0 \end{cases}$; $a = 0$

   วิธีทำ เนื่องจาก $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^{-2} = +\infty$ จะได้ว่า $\lim_{x\to 0} f(x)$ ไม่มีลิมิต
   ดังนั้น f ไม่ต่อเนื่องที่จุด $x = 0$

ตัวอย่าง 2.5.3 กำหนดให้ $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ เมื่อ $x \neq 2$ ต้องนิยาม $f(2)$ ให้มีค่าเท่าใด เพื่อทำให้ f ต่อเนื่องที่ $x = 2$

วิธีทำ จะเห็นว่า

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+1)}{x - 2} = \lim_{x\to 2}(x+1) = 3$$

ดังนั้นนิยาม $f(2) = 3$ จะทำให้ได้ว่า f ต่อเนื่องที่ $x = 2$ นั่นคือ

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{เมื่อ } x \neq 2 \\ 3 & \text{เมื่อ } x = 2 \end{cases}$$

ทฤษฎีบท 2.5.4 ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด a และ c เป็นค่าคงตัว แล้วฟังก์ชันต่อไปนี้ต่อเนื่องที่จุด a

1. $f + g$
2. $f - g$
3. fg
4. cf
5. $\dfrac{f}{g}$ เมื่อ $g(a) \neq 0$

บทพิสูจน์. สมมติว่า f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด a จะได้ว่า

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \quad \text{และ} \quad \lim_{x\to a} g(x) = g(a)$$

1. $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = f(a) + g(a)$
   ดังนั้น $f + g$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด a

2. $\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x) = f(a) - g(a)$
   ดังนั้น $f - g$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด a

ข้อ 3-5 เป็นแบบฝึกหัด $\square$

บทนิยาม 2.5.5 ฟังก์ชัน f **ต่อเนื่องทางขวา** (continuous from the right) ที่จุด a ถ้า

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$

และ f **ต่อเนื่องทางซ้าย** (continuous from the left) ที่จุด a ถ้า

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$$

บทนิยาม 2.5.6 ให้ f เป็นฟังก์ชัน และ $I \subseteq \text{Dom}(f)$

1. กรณีที่ $I = (c, d)$, (c, ∞), $(-\infty, d)$ หรือ $(-\infty, \infty)$
   จะกล่าวว่าฟังก์ชัน f **ต่อเนื่องบนช่วง** I ถ้า f ต่อเนื่องทุกจุด $a \in I$

2. กรณีที่ $I = [c, d]$
   จะกล่าวว่าฟังก์ชัน f **ต่อเนื่องบนช่วง** I ถ้า f ต่อเนื่องทุกจุด $a \in (c, d)$ และ
   f ต่อเนื่องทางซ้ายที่จุด d และ f ต่อเนื่องทางขวาที่จุด c

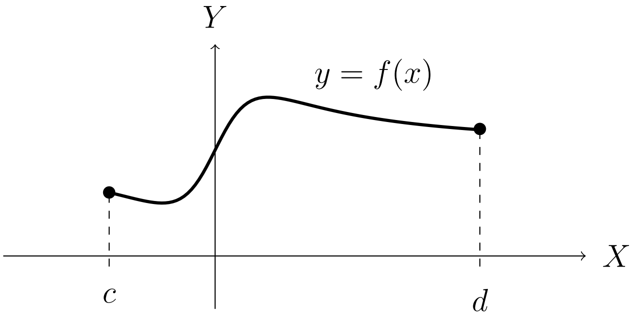
3. กรณีที่ $I = [c, d)$
   จะกล่าวว่าฟังก์ชัน f **ต่อเนื่องบนช่วง** I ถ้า f ต่อเนื่องทุกจุด $a \in (c, d)$ และ
   f ต่อเนื่องทางขวาที่จุด c

4. กรณีที่ $I = (c, d]$
   จะกล่าวว่าฟังก์ชัน f **ต่อเนื่องบนช่วง** I ถ้า f ต่อเนื่องทุกจุด $a \in (c, d)$ และ
   f ต่อเนื่องทางซ้ายที่จุด d

5. กรณีที่ $I = (-\infty, d]$
   จะกล่าวว่าฟังก์ชัน f **ต่อเนื่องบนช่วง** I ถ้า f ต่อเนื่องทุกจุด $a \in (-\infty, d)$ และ
   f ต่อเนื่องทางซ้ายที่จุด d

6. กรณีที่ $I = [c, \infty)$
   จะกล่าวว่าฟังก์ชัน f **ต่อเนื่องบนช่วง** I ถ้า f ต่อเนื่องทุกจุด $a \in (c, \infty)$ และ
   f ต่อเนื่องทางขวาที่จุด c

รูปที่ 2.6 ตัวอย่างฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[c, d]$



ข้อสังเกต 2.5.7 ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง I และ J แล้ว f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $I \cup J$

ตัวอย่าง 2.5.8 ถ้า $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ จงตรวจสอบว่า f ต่อเนื่องที่ $x = 1$ และ $x = -1$ หรือไม่ และ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนโดเมนของ f หรือไม่

วิธีทำ เนื่องจาก $\text{Dom}(f) = [-1, 1]$
จะได้ว่า $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \sqrt{1 - x^2} = 0$ ดังนั้น f ต่อเนื่องทางซ้ายที่จุด $x = 1$

และ $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} \sqrt{1-x^2} = 0$ ดังนั้น f ต่อเนื่องทางขวาที่จุด $x=-1$
และเห็นได้ชัดว่าทุก ๆ $a \in (-1,1)$ จะได้ว่า

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-a^2} = f(a)$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $(-1,1)$ สรุปได้ว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[-1,1]$

จากตัวอย่าง 2.5.8 จะเห็นว่า f ย่อมต่อเนื่องบนโดเมนของตัวมันเองเสมอ ทำให้ได้ข้อสรุปดัง 2 ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.5.9 ฟังก์ชันพหุนาม (polynomial function) ต่อเนื่องบนจำนวนจริง

ทฤษฎีบท 2.5.10 ฟังก์ชันต่อไปนี้ต่อเนื่องบนโดเมนของฟังก์ชันนั้น

1. ฟังก์ชันตรรกยะ (rational function)
2. ฟังก์ชันกรณฑ์ (radical functions)
3. ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง (exponential functions)
4. ฟังก์ชันลอการิทึม (logarithmic functions)
5. ฟังก์ชันตรีโกณมิติ (trigonometric functions)
6. ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน (inverse trigonometric functions)

ตัวอย่าง 2.5.11 จงหาช่วงที่ใหญ่ที่สุดที่ทำให้ f ต่อเนื่อง

1. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

   วิธีทำ จะได้ว่า $\dfrac{x+1}{x-1} \geq 0$ ดังนั้น Dom$(f) = [-1,1)$
   สรุปได้ว่า ช่วงที่ใหญ่ที่สุดที่ทำให้ f ต่อเนื่องคือ $[-1,1)$

2. $f(x) = \text{arcsin}\left(\dfrac{x^2-1}{3}\right)$

   วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} -1 \leq \frac{x^2-1}{3} \leq 1 \\ -3 \leq x^2-1 \leq 3 \\ -2 \leq x^2 \leq 4 \end{aligned}$$

   นั่นคือ $x^2 - 4 \leq 0$ ดังนั้น Dom$(f) = [-2,2]$
   สรุปได้ว่า ช่วงที่ใหญ่ที่สุดที่ทำให้ f ต่อเนื่องคือ $[-2,2]$

3. $f(x) = \dfrac{\ell\text{n}x + \text{arctan}x}{x^2 - 1}$

   วิธีทำ จาก $\ell\text{n}x$ จะได้ว่า $x > 0$ จาก arctan$x$ จะได้ว่า $x \in \mathbb{R}$ และ $x^2 - 1 \neq 0$ นั่นคือ $x \neq \pm 1$
   ดังนั้น Dom$(f) = (0,1) \cup (1,\infty)$
   สรุปได้ว่า ช่วงที่ใหญ่ที่สุดที่ทำให้ f ต่อเนื่องคือ $(0,1) \cup (1,\infty)$

ตัวอย่าง 2.5.12 กำหนดให้ k เป็นจำนวนจริง โดยที่

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 + 1 & \text{เมื่อ } x > 2 \\ 3x - 1 & \text{เมื่อ } x \leq 2 \end{cases}$$

เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนจำนวนจริง จงหา k

วิธีทำ เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ 2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2^+} f(x) &= \lim_{x\to 2^-} f(x) \\ \lim_{x\to 2^+} kx^2 + 1 &= \lim_{x\to 2^-} 3x - 1 \\ 4k + 1 &= 5 \\ k &= 1 \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 2.5.13 ให้ f, g เป็นฟังก์ชัน และ $b \in$ Dom(f) โดยที่ a เป็นจุดลิมิตของ Dom(f) และ Dom(g) ถ้า f ต่อเนื่องที่จุด b และ $\lim_{x\to a} g(x) = b$ แล้ว

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(b)$$

หรือจะกล่าวได้อีกอย่างคือ

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(\lim_{x\to a} g(x))$$

บทพิสูจน์. ให้ $\varepsilon > 0$ เนืองจาก f ต่อเนื่องที่จุด b จะได้ว่ามี $\delta_1 > 0$ ซึ่ง

$$\text{ถ้า} \qquad 0 < |y - b| < \delta_1 \qquad \text{แล้ว} \qquad |f(y) - f(b)| < \varepsilon$$

เนื่องจาก $\lim_{x\to a} g(x) = b$ จะได้ว่ามี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$\text{ถ้า} \qquad 0 < |x - a| < \delta \qquad \text{แล้ว} \qquad |g(x) - b| < \delta_1$$

สำหรับ $x \in$ Dom(g) ซึ่ง $0 < |x - a| < \delta$ จะได้ว่า $|g(x) - b| < \delta_1$ ฉะนั้น

$$|f(g(x)) - f(b)| < \varepsilon$$

สรุปได้ว่า $\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(\lim_{x\to a} g(x))$ $\square$

ทฤษฎีบท 2.5.14 ให้ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ a และ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $g(a)$ แล้ว $f \circ g$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ a

บทพิสูจน์. ใช้ทฤษฎีบท 2.5.13 (เป็นแบบฝึกหัด) □

ตัวอย่าง 2.5.15 จงหาลิมิต $\lim\limits_{x\to 1} \arcsin\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right)$

วิธีทำ ให้ $f(x) = \arcsin x$ และ $g(x) = \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}$ จะได้ว่า f ต่อเนื่องที่ $\frac{1}{2}$ จะเห็นว่า

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} g(x) &= \lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} \cdot \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{1-x}{(1-x)(1+\sqrt{x})} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{1}{1+\sqrt{x}} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

โดยทฤษฎีบท 2.5.13 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} f(g(x)) &= f\left(\frac{1}{2}\right) \\
\lim_{x\to 1} \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right) &= \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{\pi}{6}
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2.5.16 ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนจำนวนจริงและ $f(1) = 1, f(2) = 2$ โดยที่

$$\ell n f(x) = f(x+1) + f(x+2)$$

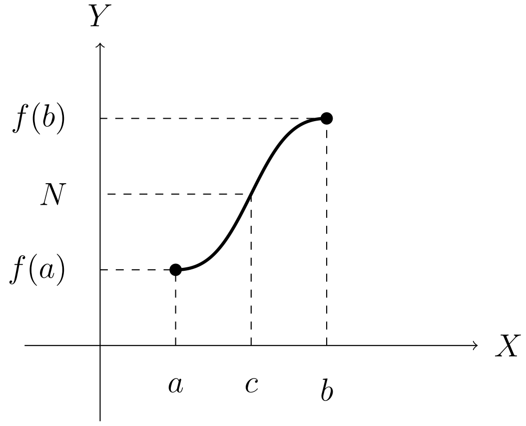
จงหา $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

วิธีทำ โดยทฤษฎีบท 2.5.13 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \ell n f(x) &= \lim_{x\to 0} [f(x+1) + f(x+2)] \\
\ell n \left(\lim_{x\to 0} f(x)\right) &= f(1) + f(2) \\
\ell n \left(\lim_{x\to 0} f(x)\right) &= 1 + 2 = 3 \\
\lim_{x\to 0} f(x) &= e^3
\end{aligned}$$

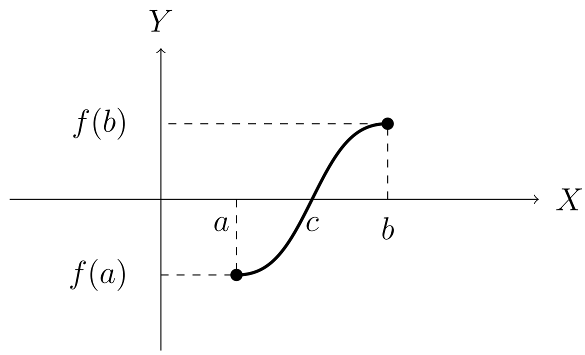
ทฤษฎีบท 2.5.17 ทฤษฎีบทค่าระหว่างกลาง (Intermediate value theorem)
ให้ f ต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ และให้ N เป็นจำนวนที่อยู่ระหว่าง $f(a)$ และ $f(b)$ เมื่อ $f(a) \neq f(b)$ แล้วจะได้ว่ามี $c \in (a, b)$ ซึ่ง $f(c) = N$

รูปที่ 2.7 กราฟของตัวอย่างที่สอดคล้องทฤษฎีบทค่าระหว่างกลาง



บทแทรก 2.5.18 กำหนดให้ f ต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ ซึ่ง $f(a)$ และ $f(b)$ มีเครื่องหมายต่างกัน แล้วจะได้ว่ามี $c \in (a, b)$ ซึ่ง $f(c) = 0$

รูปที่ 2.8 กราฟของตัวอย่างฟังก์ชันที่มีราก



ตัวอย่าง 2.5.19 จงแสดงว่า $4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$ มีรากในช่วง $[0, 3]$

วิธีทำ ให้ $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$ จะได้ว่า

$$f(0) = -2 < 0$$
$$f(3) = 4(27) - 6(9) + 3(3) - 2 = 61 > 0$$

ดังนั้นมี $c \in (0, 3)$ ซึ่ง $f(c) = 0$

แบบฝึกหัด 2.5

1. พิจารณาว่าฟังก์ชันต่อไปนี้ต่อเนื่องที่จุด $x = a$ หรือไม่

   1.1 $a = -2;\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+2} & \text{เมื่อ } x \neq -2 \\ 1 & \text{เมื่อ } x = -2 \end{cases}$

   1.2 $a = 1;\quad f(x) = \begin{cases} 3x+1 & \text{เมื่อ } x < -1 \\ 2-x^3 & \text{เมื่อ } x \geq -1 \end{cases}$

   1.3 $a = 3;\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2-5x-3}{x-3} & \text{เมื่อ } x \neq 3 \\ 6 & \text{เมื่อ } x = 3 \end{cases}$

2. ฟังก์ชัน $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+x} & \text{เมื่อ } -4 \leq x < -1 \\ |x|+1 & \text{เมื่อ } -1 < x < 1 \\ \dfrac{1-x^2}{2x^2-5x+3} & \text{เมื่อ } 1 < x \leq 4 \end{cases}$

   ต่อเนื่องที่จุด $x = 1$ และ $x = -1$ หรือไม่

3. จงขยายโดเมนเพื่อทำให้ฟังก์ชันต่อไปนี้ต่อเนื่องบนจำนวนจริง

   3.1 $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x-1}$

   3.2 $f(x) = \dfrac{x^3-8}{x^2-4}$

4. จงหาค่า a และ b ที่ทำให้ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องบน $(-\infty, \infty)$ เมื่อ

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{เมื่อ } x < 2 \\ ax^2-bx+3 & \text{เมื่อ } 2 \leq x < 3 \\ 2x-a+b & \text{เมื่อ } x \geq 3 \end{cases}$$

5. จงหาช่วงที่ใหญ่ที่สุดที่ทำให้ f ต่อเนื่อง

   5.1 $f(x) = \dfrac{x}{x^2+5x+6}$

   5.2 $f(x) = \dfrac{\sin x}{x+1}$

   5.3 $f(x) = \sqrt{1+\dfrac{1}{x}}$

   5.4 $f(x) = \ell n(1+\cos x)$

6. จงใช้ทฤษฎีบทค่าระหว่างกลาง แสดงว่ามีรากในช่วงที่กำหนดให้

   6.1 $x^4+x-3 = 0, \qquad [1,2]$

   6.2 $e^x = 3-2x, \qquad [0,1]$

สรุป

ในบทนี้เริ่มต้นด้วยการอธิบายความหมายของลิมิตของฟังก์ชันนั่นคือสนใจค่าของฟังก์ชัน f ที่จุดที่ a โดยที่ค่าของ $f(x)$ มีค่าเมื่อ x อยู่ใกล้ ๆ a กล่าวได้ว่า เป็นจุดลิมิตของโดเมนของ f จากนั้นให้นิยามของลิมิตของฟังก์ชัน และพิสูจน์ได้สมบัติพื้นฐานในการนำไปใช้หาค่าของลิมิตในรูปแบบต่าง ๆ และมีรูปแบบของลิมิตเมื่อแทนค่า a ใน $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ อยู่ในรูป $\dfrac{0}{0}$ เรียกว่าลิมิตอยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนด หมายถึงลิมิตที่ยังไม่ทราบค่าอาจต้องใช้การเปลี่ยนรูปแบบของฟังก์ชัน หรือทฤษฎีบทต่าง ๆ เกี่ยวกับลิมิตมาช่วยในการหาค่า จากนั้นให้ตัวอย่างในการหาลิมิตในรูปแบบต่าง ๆ ต่อมากล่าวถึงลิมิตทางเดียว โดยการพิจารณาลิมิตซ้ายและทางขวามือ และได้ข้อสรุปที่ว่า $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L = \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ จากนั้นศึกษาลิมิตของฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยเบื้องต้นใช้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติมาช่วยในการหาค่า และได้ทฤษฎีบทการบีบที่ใช้ในการพิสูจน์สมบัติที่ว่า $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ ซึ่งมีบทบาทสำคัญในการนำไปใช้ต่อไป ต่อมาสนใจลิมิตเกี่ยวกับอนันต์ซึ่งมีสมบัติพื้นฐานคล้ายคลึงกับลิมิตของฟังก์ชันที่จุด a สุดท้ายกล่าวถึงความต่อเนื่องของฟังก์ชันที่จุด a ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ มีค่าและ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ และนิยามความต่อเนื่องบนช่วงต่าง ๆ และได้ข้อสรุปว่าฟังก์ชันพหุนาม ฟังก์ชันตรรกยะ ฟังก์ชันกรณฑ์ ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง ฟังก์ชันลอการิทึม ฟังก์ชันตรีโกณมิติ และ ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนโดเมนของตัวมันเอง และกล่าวถึงทฤษฎีบทค่าระหว่างกลางซึ่งสามารถนำไปใช้ในการตรวจสอบการมีรากของสมการ

แบบฝึกหัดบทที่ 2

1. จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

   1.1 $\lim\limits_{u\to 2} \dfrac{\sqrt{4u+1}-3}{u-2}$

   1.2 $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{\sqrt{x^4+9x^2}+5x}{x+4}$

   1.3 $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(-5+h)^2-25}{h}$

   1.4 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{x}$

   1.5 $\lim\limits_{x\to -8} \dfrac{\sqrt{1-x}-3}{x-4\sqrt[3]{x}}$

   1.6 $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(h+1)^2+2(h+1)-3}{h}$

   1.7 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$

   1.8 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x-2}-1}{x-1}$

   1.9 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x\cdot 3^x-3^x+x-1}{x-1}$

   1.10 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5^{2x}-5^{x+2}+24}{5^x-1}$

2. จงหาค่าลิมิตของ $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x(x^2-1)^2(x+1)^2}{(x^2-5x+4)(x-x^3)}$

3. จงหาค่าลิมิตของ $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-3}}$

4. จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

4.1 $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-2x}{x^2-x-2}$

4.2 $\lim_{x\to -1} \frac{2x^2+3x+1}{x^2-2x-3}$

4.3 $\lim_{x\to -2} \frac{2x^2+3x-2}{3x^3+6x^2-2x-4}$

4.4 $\lim_{t\to 1} \frac{t^4-1}{t^3-1}$

4.5 $\lim_{x\to -2} \frac{x+2}{x^3+8}$

4.6 $\lim_{x\to -4} \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{4}}{x+4}$

4.7 $\lim_{x\to -4} \frac{8x^{-3}+2x^{-2}-4x^{-1}-1}{x+4}$

4.8 $\lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^{-1}-3^{-1}}{h}$

5. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x^3-1} & \text{เมื่อ} \quad x \neq 1 \\ 4-2x & \text{เมื่อ} \quad x = 1 \end{cases}$
จงตรวจสอบค่าของ $\lim_{x\to 1} f(x)$

6. ถ้า $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-8}{x-1} = 10$ จงหา $\lim_{x\to 1} f(x)$

7. จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้ ถ้าลิมิตมีค่า

7.1 $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$

7.2 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x\cos x}$

7.3 $\lim_{x\to 0} \frac{4x}{\sin 3x}$

7.4 $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{3x}$

7.5 $\lim_{x\to 2} \frac{\sin(12-6x)}{5-10x}$

7.6 $\lim_{x\to \pi} \frac{\sin x}{\pi - x}$

7.7 $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos x}$

7.8 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x+\sin x}{x}$

7.9 $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x-1}{x-\frac{\pi}{2}}$

8. พิจารณาค่าของลิมิตต่อไปนี้

8.1 $\lim_{x\to -\infty} \frac{9+\sqrt[5]{x}}{4+\sqrt[3]{x}}$

8.2 $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^3-3x+4}{7x+x^2-2x^3}$

8.3 $\lim_{x\to \infty} \sqrt{\frac{3-8x^2}{x(x+2)}}$

8.4 $\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+6}}{2x-5}$

8.5 $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^3-|x|}{|x^3-2x^2-x+2|}$

8.6 $\lim_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)$

8.7 $\lim_{x\to -\infty} \left(x+\sqrt{x^2+2x}\right)$

8.8 $\lim_{x\to \infty} x\left(x-\sqrt{x^2+4}\right)$

8.9 $\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{2x+3}$

8.10 $\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}}{x-1}$

8.11 $\lim_{x\to \infty} \frac{x^3-2x+1}{x^2+3x-10}$

8.12 $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^5+6x^2-7x}{4x^3-x^2+1}$

8.13 $\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{x^6-x^4}}{x^2+x-12}$

8.14 $\lim_{x\to \infty} \frac{10+\sqrt{1+x^2}}{x}$

9. พิจารณาค่าของลิมิตต่อไปนี้

9.1 $\lim\limits_{x\to 0^+} \arctan(\ell n x)$

9.2 $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x}$

9.3 $\lim\limits_{x\to \infty} \arctan(e^x)$

9.4 $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sin^2 x}{x^2+1}$

10. พิจารณาค่าของลิมิตต่อไปนี้

10.1 $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x-3}{x^3-8}$

10.2 $\lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{x-5}{x-4}$

10.3 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x-3}{x^2-2x+1}$

10.4 $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{x+6}{x^2+10x+25}$

11. จงหาค่าลิมิตของ $\lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{1}{t\sqrt{1+t}}-\dfrac{1}{t}\right)$

12. พิจารณาว่าฟังก์ชันต่อไปนี้ต่อเนื่องที่จุด $x=a$ หรือไม่

12.1 $a=0;\quad f(x)=\begin{cases} e^x & \text{เมื่อ } x<0 \\ x^2 & \text{เมื่อ } x\geq 0 \end{cases}$

12.2 $a=1;\quad f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-x}{x^2-1} & \text{เมื่อ } x\neq 1 \\ 1 & \text{เมื่อ } x=1 \end{cases}$

13. จงหาค่า c ที่ทำให้ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องบน $(-\infty,\infty)$ เมื่อ

$$f(x)=\begin{cases} cx^2+2x & \text{เมื่อ } x<2 \\ x^3-cx & \text{เมื่อ } x\geq 2 \end{cases}$$

14. กำหนดให้ $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2-4x+3}{x^2-2x-3}$ เมื่อ $x\neq -1,3$ ต้องนิยาม $f(-1)$ และ $f(3)$ ให้มีค่าเท่าใด เพื่อทำให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนจำนวนจริง

15. จงหาช่วงที่ใหญ่ที่สุดที่ทำให้ f ต่อเนื่อง

15.1 $f(x)=x^2+\sqrt{2x-1}$

15.2 $f(x)=\dfrac{\tan x}{\sqrt{4-x^2}}$

15.3 $f(x)=\arctan(1+e^{-x^2})$

15.4 $f(x)=\ell n(\sin x-\frac{1}{2})$

16. จงใช้ทฤษฎีบทค่าระหว่างกลาง แสดงว่ามีรากในช่วงที่กำหนดให้

16.1 $x^4+x-3=0,\qquad [1,2]$

16.2 $e^x=3-2x,\qquad [0,1]$

เอกสารอ้างอิง

ดำรง ทิพย์โยธา, ยุวรีย์ พันธ์กล้า และณัฏฐนาถ ไตรภพ. (2548). **แคลคูลัส ๑**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

James Stewart. (2012). **Calculus Early Transcendentals**. Seventh Edition. Canada. Nelson Education Ltd.

แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 3

หัวข้อเนื้อหาประจำบท

1. อัตราการเปลี่ยนแปลงและอนุพันธ์
2. กฎของอนุพันธ์
3. กฎลูกโซ่
4. อนุพันธ์อันดับสูง
5. อนุพันธ์ของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง
6. อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
7. อนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. เข้าใจและอธิบายความหมายของอัตราการเปลี่ยนแปลงและอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้
2. ใช้กฎต่าง ๆ ของอนุพันธ์เพื่อหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน
3. สามารถหาอนุพันธ์อันดับสูงได้
4. สามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันเลขชี้กำลังและตรีโมณมิติ
5. ใช้กฎลูกโซ่หาอนุพันธ์รูปแบบที่ซับซ้อนได้
6. สามารถหาความชันของฟังก์ชันที่นิยามโดยปริยายโดยใช้อนุพันธ์ฟังก์ชันโดยปริยาย

วิธีและกิจกรรมการเรียนการสอน

1. **วิธีสอน**
   - 1.1 วิธีสอนแบบบรรยาย ประกอบสื่ออิเล็กทรอนิกส์
   - 1.2 ใช้สื่อทางอินเตอร์เน็ต และให้แต่ละคนแสดงความคิดเห็น
   - 1.3 วิธีสอนแบบอภิปราย โดยให้หัวข้อเป็นกลุ่มและมานำเสนอหน้าชั้น
2. **กิจกรรมการเรียนการสอน**
   - 2.1 บรรยายสรุปโดยใช้สื่อการสอนประกอบ
   - 2.2 ให้ผู้เรียนศึกษาเนื้อหาจากชุดการสอน หนังสือ ตำรา เอกสารเพิ่มเติม และสื่อออนไลน์
   - 2.3 อภิปรายรายกลุ่มตามหัวข้อที่ได้รับมอบหมาย

สื่อการเรียนการสอน

1. ชุดการสอน เรื่อง "อนุพันธ์ของฟังก์ชัน"
2. สื่ออิเล็กทรอนิกส์ เรื่อง "อนุพันธ์ของฟังก์ชัน"
3. หนังสือ ตำรา เอกสารที่เกี่ยวข้อง
4. แอพพลิเคชั่น Geogebra
5. แอพพลิเคชั่น Wolfram alpha

การวัดผลและประเมินผล

1. สังเกตการตอบคำถามและตั้งคำถามของผู้เรียนในระหว่างการบรรยายและซักถาม
2. วัดผลจากการทำแบบฝึกหัดระหว่างเรียนตามเนื้อหาที่ได้รับมอบหมาย
3. ประเมินการอภิปรายรายกลุ่ม แล้วบันทึกคะแนนลงในใบบันทึกคะแนน
4. ตรวจการทำการบ้าน บันทึกคะแนนลงในบันทึกผลงาน

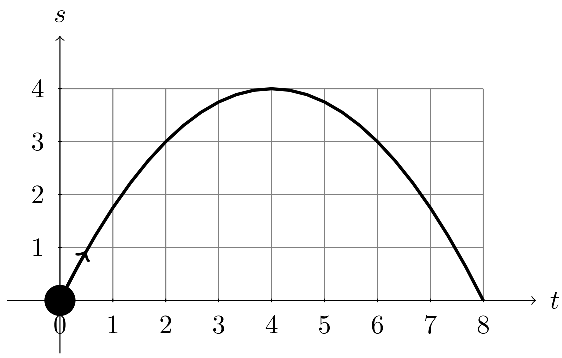
บทที่ 3

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

การศึกษาเส้นสัมผัสเส้นโค้งเริ่มต้นโดยแฟร์มาต์ และถูกพัฒนาอย่างจริงจังโดยแบร์โรว์ซึ่งคำนวณโดยอาศัยสามเหลี่ยมผลต่างของแบร์โรว์ ปัจจุบันความชันของเส้นสัมผัสที่จุด P เรียกอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่ P ในบทนี้เราจะศึกษาเกี่ยวกับอนุพันธ์ของฟังก์ชันและสมบัติที่เกี่ยวข้อง

3.1 อัตราการเปลี่ยนแปลงและอนุพันธ์

พิจารณาฟังก์ชันการเคลื่อนที่ของวัตถุชนิดหนึ่งกับเวลาที่มีสมการเป็น $s(t) = 2t - \frac{1}{4}t^2$ เมตร และเวลา t ในหน่วยวินาที



เมื่อสนใจความเร็วเฉลี่ยของการเคลื่อนที่ของวัตถุนี้สามารถหาได้จาก

$$\text{ความเร็วเฉลี่ย} = \frac{\text{ระยะทางที่เคลื่อนที่ได้}}{\text{เวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่}}$$

หรืออาจเขียนได้เป็น

$$\text{ความเร็วเฉลี่ยในช่วงเวลา } t_1 \text{ ถึง } t_2 = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

เช่น ความเร็วของการเคลื่อนที่ของวัตถุนี้ในช่วงเวลา 1 วินาที ถึง 3 วินาที คือ

$$\text{ความเร็วเฉลี่ยในช่วงเวลา } 1 \text{ ถึง } 3 = \frac{s(3) - s(1)}{3 - 1} = 1 \text{ เมตร/วินาที}$$

โดยอาศัยแนวคิดดังกล่าวนิยาม **อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย** (average rate of change) ของฟังก์ชันอื่น ๆ ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 3.1.1 ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชัน แล้ว

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

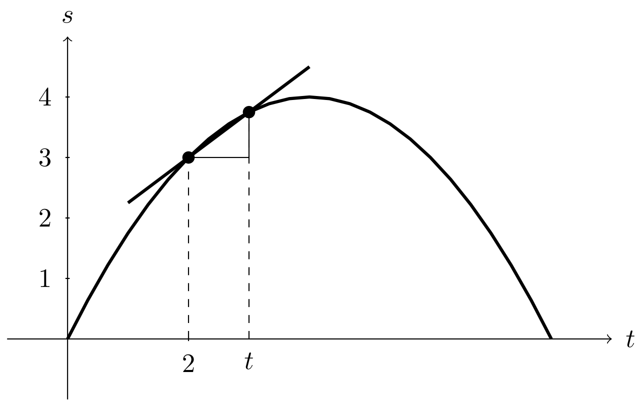
เรียกว่า**อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย** ของ y เทียบกับ x บนช่วง $[x_1, x_2]$

ตัวอย่าง 3.1.2 ให้ $y = f(x)$ จงหาอัตราการอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x บนช่วงที่กำหนดให้

1. $f(x) = x^3 - x^2 + x$ บนช่วง $[-1, 1]$
   วิธีทำ อัตราการอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x บนช่วง $[-1, 1]$ เท่ากับ
   $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{1 - (-3)}{2} = 2$$

2. $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$ บนช่วง $[0, 3]$
   วิธีทำ อัตราการอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x บนช่วง $[0, 3]$ เท่ากับ
   $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

ต่อไปเราสนใจ **ความเร็ว ณ ตำแหน่งต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นจริง** ของการเคลื่อนที่เรียกว่า **ความเร็วชั่วขณะ** ตัวอย่างเช่น ความเร็ว ขณะ $t = 2$ ของ $s(t) = 2t - \frac{1}{4}t^2$



อาจพิจารณาจากความเร็วเฉลี่ยบนช่วง $[2, t]$ เมื่อ t ใกล้ ๆ 2 นั่นคือ $t - 2 = \Delta t \to 0$ แล้ว

$$\text{ความเร็วขณะ } t = 2 \text{ คือ } \lim_{t\to 2} \frac{s(t) - s(2)}{t - 2}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 2} \frac{s(t) - s(2)}{t - 2} &= \lim_{t\to 2} \frac{2t - \frac{1}{4}t^2 - 3}{t - 2} = \lim_{t\to 2} \frac{-\frac{1}{4}(t^2 - 8t + 12)}{t - 2} \\ &= \lim_{t\to 2} \frac{-\frac{1}{4}(t - 2)(t - 6)}{t - 2} = \lim_{t\to 2} -\frac{1}{4}(t - 6) = 1\end{aligned}$$

ดังนั้น ความเร็วของการเคลื่อนที่ของวัตถุนี้ขณะ $t = 2$ เท่ากับ 1 เมตร/วินาที

โดยอาศัยแนวคิดดังกล่าวสามารถขยายไปยังฟังก์ชันอื่น ๆ เรียกว่า **อัตราการเปลี่ยนแปลงขณะหนึ่ง** (instantaneous rate of change) ของฟังก์ชัน f ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 3.1.3 ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชัน แล้ว **อัตราการเปลี่ยนแปลงขณะหนึ่ง** ของฟังก์ชัน f ที่จุด x_0 นิยามโดย

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ตัวอย่าง 3.1.4 อัตราการเปลี่ยนแปลงขณะหนึ่งของฟังก์ชัน $f(x) = x^2 + x$ ที่จุด $x = 1$

วิธีทำ อัตราการเปลี่ยนแปลงขณะหนึ่งของ f ที่จุด $x = 1$ เท่ากับ

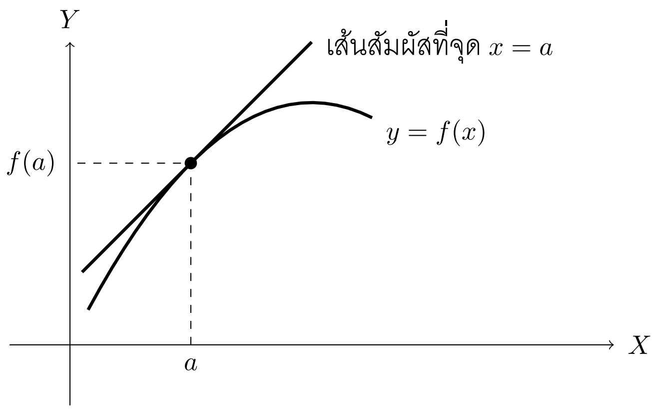
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x\to 1} \frac{(x^2 + x) - 2}{x - 1} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{(x+2)(x-1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1}(x+2) = 3\end{aligned}$$

บทนิยาม 3.1.5 เส้นสัมผัส (tangent line) กับเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด $P(a, f(a))$ ผ่านจุด P จะมีค่าความชันเท่ากับ

$$m = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad \text{ถ้าลิมิตนี้มีค่า}$$

และสมการเส้นสัมผัสคือ $y = m(x - a) + f(a)$

รูปที่ 3.1 เส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด $(a, f(a))$



ตัวอย่าง 3.1.6 จงหาสมการของเส้นสัมผัสกับเส้นโค้ง $y = \frac{2}{x}$ ที่จุด $P(2, 1)$

วิธีทำ ความชันของเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด $x = 2$ เท่ากับ

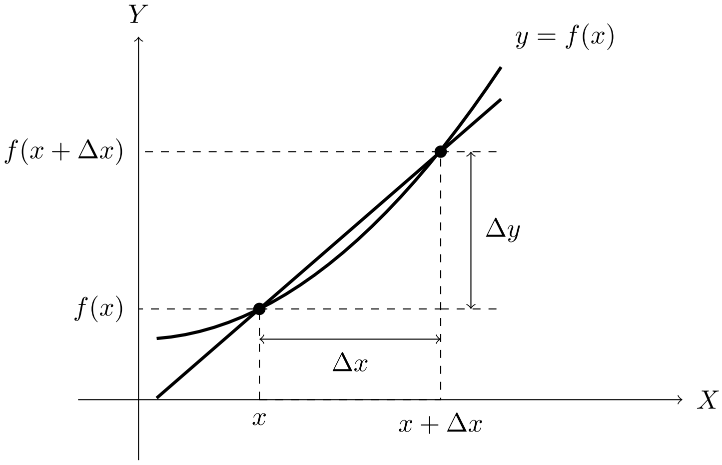
$$m = \lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{2}{x} - 1}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{2 - x}{x(x-2)} = \lim_{x\to 2} -\frac{1}{x} = -\frac{1}{2}$$

ดังนั้นสมการของเส้นสัมผัสกับเส้นโค้ง $y = \frac{2}{x}$ ที่จุด $P(2, 1)$ คือ

$$y = -\frac{1}{2}(x - 2) + 1 \quad \text{หรือ} \quad 2y + x - 4 = 0$$

จากแนวคิดอัตราการเปลี่ยนแปลงขณะหนึ่งของฟังก์ชัน $y = f(x)$ พิจารณากราฟ

รูปที่ 3.2 แนวคิดการหาอนุพันธ์ของ $y = f(x)$ ที่จุด x



จากกราฟอัตราการเปลี่ยนแปลงของของฟังก์ชัน $y = f(x)$ กับการเปลี่ยนแปลงค่าของตัวแปรอิสระของ x ในช่วง x กับ $x + \Delta x$ คือ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ถ้า Δx เข้าใกล้ 0 จะเรียก $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ เรียกว่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน
โดยไลบ์นิซได้ใช้สัญลักษณ์ $\dfrac{dy}{dx}$ เรียกว่า สัญกรณ์ไลบ์นิซ (Leibniz notation)
และลากรองจ์ได้ใช้สัญลักษณ์ $f'(x)$ เรียกว่า สัญกรณ์ลากรองจ์ (Lagrange notation)

บทนิยาม 3.1.7 ให้ f เป็นฟังก์ชัน และ $y = f(x)$ เรียก

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad \text{ถ้าลิมิตมีค่า}$$

ว่า**อนุพันธ์ของฟังก์ชัน (derivative of function)** ของ f เทียบกับ x หรือกล่าวว่า f **หาอนุพันธ์ได้ (differentiable)** ที่ x เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$f'(x) \quad \text{หรือ} \quad y' \quad \text{หรือ} \quad D_x f(x) \quad \text{หรือ} \quad \frac{dy}{dx} \quad \text{หรือ} \quad \frac{df}{dx}$$

ถ้า $a \in \text{Dom}(f)$ แล้วอนุพันธ์ f ที่จุด $x = a$ เขียนแทนด้วย $f'(a)$ หรือ $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=a}$ นั่นคือ

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} \qquad \text{ถ้าลิมิตมีค่า}$$

ถ้าให้ $h = \Delta x$ จะได้ว่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันของ f เทียบกับ x คือ

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

สำหรับอนุพันธ์ f ที่จุด $x = a$ ถ้าให้ $x = a + \Delta x$ จะได้ $\Delta x = x - a$ ดังนั้น

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{หรือ} \quad f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

ตัวอย่าง 3.1.8 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = x^2 + 3x$

วิธีทำ ให้ $x \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 + 3(x+h) - (x^2+3x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 + 3x + 3h - x^2 - 3x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2 + 3h}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h+3)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (2x+h+3) = 2x+3 \end{aligned}$$

ดังนั้น $f'(x) = 2x+3$

ตัวอย่าง 3.1.9 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ที่จุด $x = 2$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{2-x}{2x(x-2)} = \lim_{x\to 2} -\frac{1}{2x} = -\frac{1}{4}$$

ดังนั้นอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ที่จุด $x = 2$ เท่ากับ $-\dfrac{1}{4}$

ตัวอย่าง 3.1.10 จงตรวจสอบว่าฟังก์ชัน

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{เมื่อ } x < 1 \\ 2x & \text{เมื่อ } x \geq 1 \end{cases}$$

หาอนุพันธ์ได้ที่จุด $x = 1$ หรือไม่

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} &= \lim_{x\to 1^+} \frac{2x-2}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} 2 = 2 \\ \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} &= \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+1-2}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} (x+1) = 2 \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = 2$$

ดังนั้น f หาอนุพันธ์ได้ที่จุด $x = 1$ เท่ากับ 2

บทนิยาม 3.1.11 ฟังก์ชัน f **หาอนุพันธ์ได้ทางขวา** (differentiable from the right) ที่จุด a ถ้า

$$f'(a^+) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \text{หาลิมิตได้}$$

และ f **หาอนุพันธ์ได้ทางซ้าย** (differentiable from the left) ที่จุด a ถ้า

$$f'(a^-) = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \text{หาลิมิตได้}$$

การหาอนุพันธ์ได้ทางขวาและหาอนุพันธ์ได้ทางซ้ายจะสัมพันธ์กับการหาอนุพันธ์ได้ซึ่งพิสูจน์ได้โดยง่ายจากบทนิยาม 3.1.11 และอาศัยสมบัติของลิมิต จะได้ผลตามทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.1.12 ฟังก์ชัน f หาอนุพันธ์ได้ที่จุด a ก็ต่อเมื่อ

f หาอนุพันธ์ได้ทางขวาและหาอนุพันธ์ได้ทางซ้าย ที่จุด a และ $f'(a^+) = f'(a^-) = f'(a)$

ตัวอย่าง 3.1.13 จงหาอนุพันธ์ทางขวา อนุพันธ์ทางซ้าย และอนุพันธ์ที่จุด $x = 0$ ของฟังก์ชัน f เมื่อ

1. $f(x) = |x|$
   วิธีทำ พิจารณา

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|-0}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$$
$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|-0}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x\to 0^-} -1 = -1$$

   ดังนั้น f หาอนุพันธ์ได้ทางขวาและหาอนุพันธ์ได้ทางซ้ายที่จุด $x = 0$ เท่ากับ 1 และ -1 ตามลำดับ
   จะได้ว่า $f'(0^+) = 1 \neq -1 = f'(0^-)$ ดังนั้น f หาอนุพันธ์ไม่ได้ที่จุด $x = 0$

2. $f(x) = x|x|$
   วิธีทำ พิจารณา

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x|x|-0}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$
$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x|x|-0}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x\to 0^-} -x = 0$$

   ดังนั้น f หาอนุพันธ์ได้ทางขวาและหาอนุพันธ์ได้อนุพันธ์ทางซ้าย ที่จุด $x = 0$ เท่ากันคือ 0
   จะได้ว่า $f'(0^+) = 0 = f'(0^-)$ ดังนั้น f หาอนุพันธ์ได้ที่จุด $x = 0$ และ $f'(0) = 0$

ตัวอย่าง 3.1.14 จงตรวจสอบว่า $f(x) = \sqrt{x}$ หาอนุพันธ์ได้ทางขวาที่จุด 0 หรือไม่

วิธีทำ พิจารณา

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}-0}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

จะได้ว่า f หาอนุพันธ์ไม่ได้ทางขวาที่จุด 0

ทฤษฎีบท 3.1.15 ถ้า f หาอนุพันธ์ได้ที่จุด a แล้ว f จะต่อเนื่องที่จุด a

บทพิสูจน์. สมมติว่า f หาอนุพันธ์ได้ที่จุด a ดังนั้น $f'(a) = \lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ หาลิมิตได้ พิจารณา $x \neq a$ จะได้ว่า

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a)$$

ดังนั้น

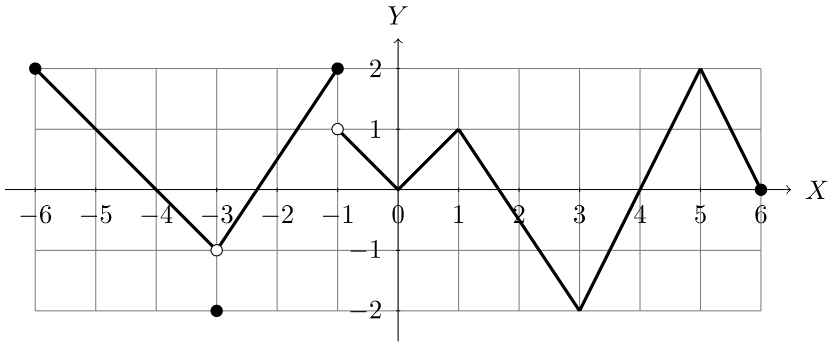
$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a}[f(x) - f(a)] &= \lim_{x \to a}\left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a)\right] \\
\lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} f(a) &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \to a}(x - a) \\
\lim_{x \to a} f(x) - f(a) &= f'(a) \cdot 0 = 0 \\
\lim_{x \to a} f(x) &= f(a)
\end{aligned}$$

สรุปได้ว่า f จะต่อเนื่องที่จุด a □

ตัวอย่าง 3.1.16 จงยกตัวอย่างค้านบทกลับของทฤษฎีบท 3.1.15

วิธีทำ จะเห็นว่า $f(x) = |x|$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ 0 แต่หาอนุพันธ์ไม่ได้ที่ 0 โดยตัวอย่าง 3.1.13 ข้อ 1 ดังนั้นบทกลับทฤษฎีบท 3.1.15 ไม่เป็นจริง

ตัวอย่าง 3.1.17 กราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ บนช่วง $[-6, 6]$ ดังกราฟ



โดยการคำนวนความชันของกราฟเส้นตรงในแต่ละช่วง จะได้ค่าต่าง ๆ ของอนุพันธ์ของ f บางจุด สรุปดังตารางต่อไปนี้

จุด	ค่าอนุพันธ์ทางขวา	ค่าอนุพันธ์ทางซ้าย	ค่าอนุพันธ์
$x = -6$	-1	$-$	$-$
$x = -5$	-1	-1	-1
$x = -3$	$\frac{3}{2}$	-1	หาอนุพันธ์ไม่ได้
$x = -1$	-1	$\frac{3}{2}$	หาอนุพันธ์ไม่ได้
$x = 0$	1	-1	หาอนุพันธ์ไม่ได้
$x = 3$	2	$-\frac{3}{2}$	หาอนุพันธ์ไม่ได้
$x = 4$	2	2	2
$x = 5$	-2	2	หาอนุพันธ์ไม่ได้
$x = 6$	$-$	-2	$-$

บทนิยาม 3.1.18 ให้ f เป็นฟังก์ชัน และ $I \subseteq \text{Dom}(f)$

1. กรณีที่ $I = (c,d)$, (c,∞), $(-\infty,d)$ หรือ $(-\infty,\infty)$
   จะกล่าวว่าฟังก์ชัน f **หาอนุพันธ์ได้บนช่วง** I ถ้า f ต่อเนื่องทุกจุด $a \in I$

2. กรณีที่ $I = [c,d]$
   จะกล่าวว่าฟังก์ชัน f **หาอนุพันธ์ได้บนช่วง** I ถ้า f ต่อเนื่องทุกจุด $a \in (c,d)$ และ f หาอนุพันธ์ได้ทางซ้ายที่จุด d และ f หาอนุพันธ์ได้ทางขวาที่จุด c

3. กรณีที่ $I = [c,d)$
   จะกล่าวว่าฟังก์ชัน f **หาอนุพันธ์ได้บนช่วง** I ถ้า f ต่อเนื่องทุกจุด $a \in (c,d)$ และ f หาอนุพันธ์ได้ทางขวาที่จุด c

4. กรณีที่ $I = (c,d]$
   จะกล่าวว่าฟังก์ชัน f **หาอนุพันธ์ได้บนช่วง** I ถ้า f ต่อเนื่องทุกจุด $a \in (c,d)$ และ f หาอนุพันธ์ได้ทางซ้ายที่จุด d

5. กรณีที่ $I = (-\infty,d]$
   จะกล่าวว่าฟังก์ชัน f **หาอนุพันธ์ได้บนช่วง** I ถ้า f ต่อเนื่องทุกจุด $a \in (-\infty,d)$ และ f หาอนุพันธ์ได้ทางซ้ายที่จุด d

6. กรณีที่ $I = [c,\infty)$
   จะกล่าวว่าฟังก์ชัน f **หาอนุพันธ์ได้บนช่วง** I ถ้า f ต่อเนื่องทุกจุด $a \in (c,\infty)$ และ f หาอนุพันธ์ได้ทางขวาที่จุด c

ข้อสังเกต 3.1.19 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วง I และ J แล้ว f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วง $I \cup J$

ตัวอย่าง 3.1.20 จงตรวจสอบว่า $f(x) = \sqrt{x}$ หาอนุพันธ์ได้บนโดเมนของ f หรือไม่

วิธีทำ จะเห็นได้ว่า $\text{Dom}(f) = [0,\infty)$
กรณีที่ $x = 0$ จากตัวอย่าง 3.1.14 จะได้ว่า f หาอนุพันธ์ไม่ได้ทางขวาที่จุด 0
กรณีที่ $x \in (0,\infty)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วง $(0,\infty)$
สรุปได้ว่า f หาอนุพันธ์ไม่ได้ Dom(f) แต่มีอนุพันธบน $(0,\infty)$

ตัวอย่าง 3.1.21 จงตรวจสอบว่า

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{เมื่อ } x > 0 \\ 2x+1 & \text{เมื่อ } x \le 0 \end{cases}$$

หาอนุพันธ์ได้บน $(-\infty,\infty)$ หรือไม่

วิธีทำ กรณี $x \in (-\infty,0)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2(x+h)+1-(2x+1)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2x+2h+1-2x-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h}{h} = \lim_{h\to 0} 2 = 2 \end{aligned}$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วง $(-\infty,0)$
กรณี $x \in (0,\infty)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2+1-(x^2+1)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2xh+h^2+1-x^2-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h\to 0} (2x+h) = 2x \end{aligned}$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วง $(0,\infty)$
กรณีที่ $x = 0$ พิจารณา

$$\begin{aligned} f'(0^+) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(x^2+1)-1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0^+} x = 0 \\ f'(0^-) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{(2x+1)-1}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2x}{x} = \lim_{x\to 0^-} 2 = 2 \end{aligned}$$

จะได้ว่า $f'(0^+) \neq f'(0^-)$ ดังนั้น f หาอนุพันไม่ธ์ได้ที่จุด $x = 0$
สรุปได้ว่า f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วง $(-\infty,0) \cup (0,\infty)$ และ

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{เมื่อ } x > 0 \\ 2 & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases}$$

แบบฝึกหัด 3.1

1. ให้ $y = f(x)$ จงหาอัตราการอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x

   1.1 $f(x) = 3x - x^2$ บนช่วง $[-2, 2]$

   1.2 $f(x) = \cos x$ บนช่วง $[0, \pi]$

2. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

   2.1 $f(x) = \sqrt{x}$

   2.2 $f(x) = 1 - 3x^2$

3. จงตรวจสอบว่าฟังก์ชันต่อไปนี้หาอนุพันธ์ได้ที่จุด $x = a$ หรือไม่

   3.1 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{เมื่อ } x > 0 \\ 2x - 1 & \text{เมื่อ } x \leq 0 \end{cases}$; $a = 0$

   3.2 $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{เมื่อ } x \neq 1 \\ 1 & \text{เมื่อ } x = 1 \end{cases}$; $a = 1$

   3.3 $f(x) = x|x^3|$; $a = 0$

   3.4 $f(x) = [x]$; $a = -1$

4. ให้ $f'(x) = |2x^2 - 4| + |x^2 + x - 1|$ จงหา $f'(1)$

5. พิจารณาอนุพันธ์ของ f ที่จุด $x = 1$ และร่างกราฟของ f เมื่อกำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{เมื่อ } x < 1 \\ x + 1 & \text{เมื่อ } x \geq 1 \end{cases}$$

6. ให้ a และ b เป็นค่าคงตัว ถ้าฟังก์ชัน $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{เมื่อ } x \leq 1 \\ x^3 - ax + b & \text{เมื่อ } x > 1 \end{cases}$
   หาอนุพันธ์ได้บนจำนวนจริง จงหาค่าของ a และ b

7. จงหาสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้งของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่จุด $x = a$

   7.1 $f(x) = x^3$; $a = 2$

   7.2 $f(x) = \sin x$; $a = \pi$

3.2 กฎของอนุพันธ์

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงกฎพื้นฐานที่สำคัญของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ซึ่งจะนำไปใช้ในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่ซับซ้อนมากยิ่งขึ้น

ทฤษฎีบท 3.2.1 อนุพันธ์ของฟังก์ชันคงตัว (Derivative of a constant function)

$$\frac{d}{dx}(c) = 0 \qquad \text{เมื่อ } c \text{ เป็นค่าคงที่}$$

บทพิสูจน์. ให้ $f(x) = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่ จะได้ว่า

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

ดังนั้น $\dfrac{d}{dx}(c) = 0$ □

ทฤษฎีบท 3.2.2 อนุพันธ์ของฟังก์ชันเอกลักษณ์ (Derivative of the identity function)

$$\frac{d}{dx}(x) = 1$$

บทพิสูจน์. ให้ $f(x) = x$ จะได้ว่า

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$$

ดังนั้น $\dfrac{d}{dx}(x) = 1$ □

ทฤษฎีบท 3.2.3 อนุพันธ์ของฟังก์ชันกำลัง (Derivative of a power function)

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1} \qquad \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนนับ}$$

บทพิสูจน์. ให้ $f(x) = x^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับ โดยทฤษฎีบททวินามจะได้ว่า

$$(x+h)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}xh^{n-1} + h^n$$

เมื่อ $\dbinom{n}{r} = \dfrac{n!}{(n-r)r!}$ โดยที่ $n, r \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $0 \le r \le n$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left[x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}xh^{n-1} + h^n\right] - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h\left[\binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \cdots + \binom{n}{n-1}xh^{n-2} + h^{n-1}\right]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left[\binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \cdots + \binom{n}{n-1}xh^{n-2} + h^{n-1}\right] = \binom{n}{1}x^{n-1} = nx^{n-1}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\dfrac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ □

ขยายแนวคิดจากจำนวนนับ n ไปยังจำนวนเต็ม และพิสูจน์ในกรณีที่ n เป็นจำนวนตรรกยะดังบทแทรกต่อไปนี้ (จะขอละการพิสูจน์ในวิชานี้)

บทแทรก 3.2.4 ให้ n เป็นจำนวนตรรกยะ และ x^n เป็นจำนวนจริง

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

ทฤษฎีบท 3.2.5 กฎการคูณด้วยค่าคงตัวสำหรับอนุพันธ์ (Constant multiplication law for derivatives)

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}f(x)$$

เมื่อ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ และ c เป็นค่าคงที่

บทพิสูจน์. สมมติว่า f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ และ c เป็นค่าคงที่ จะได้ว่า

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = \lim_{h\to 0}\frac{cf(x+h)-cf(x)}{h} = c\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = cf'(x) = c\frac{d}{dx}f(x) \qquad \square$$

ทฤษฎีบท 3.2.6 กฎการบวกสำหรับอนุพันธ์ (Sum law for derivatives)

$$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$$

เมื่อ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้

บทพิสูจน์. สมมติว่า f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] &= \lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)-f(x)]+[g(x+h)-g(x)]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)
\end{aligned}$$

$\square$

บทแทรก 3.2.7 กฎผลต่างสำหรับอนุพันธ์ (Different law for derivatives)

$$\frac{d}{dx}[f(x)-g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}g(x)$$

เมื่อ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้

บทพิสูจน์. สมมติว่า f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ โดยทฤษฎีบท 3.2.6 และทฤษฎีบท 3.2.5

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[f(x)-g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)+(-g(x))] &= \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}(-g(x)) \\
&= \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}(-1)g(x) \\
&= \frac{d}{dx}f(x) + (-1)\frac{d}{dx}g(x) \\
&= \frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}g(x)
\end{aligned}$$

$\square$

ตัวอย่าง 3.2.8 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x) = x^3 + 3x^2 - x + 4$

   วิธีทำ $f'(x) = 3x^2 + 3(2x) - 1 + 0 = 3x^2 + 6x - 1$

2. $y = 2\sqrt{x} - x + \pi$

   วิธีทำ จัดรูปใหม่จะได้ $f(x) = 2x^{\frac{1}{2}} - x$ ดังนั้น

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 1 + 0 = \frac{1}{\sqrt{x}} - 1$$

3. $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$

   วิธีทำ จัดรูปใหม่จะได้ $f(x) = x^{-1} + x^{-2} + x^{-3}$ ดังนั้น

$$f'(x) = -1x^{-2} - 2x^{-3} - 3x^{-4} = -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^4}$$

4. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt[3]{x} + \sqrt{2}$

   วิธีทำ จัดรูปใหม่จะได้ $y = x^{-\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{3}} + \sqrt{2}$ ดังนั้น

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + 0 = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

5. $y = (x-1)(x+1)(x+3)$

   วิธีทำ จัดรูปใหม่จะได้ $y = (x^2 - 1)(x+3) = x^3 + 3x^2 - x - 3$ ดังนั้น

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 6x - 1$$

ตัวอย่าง 3.2.9 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 + 1 & \text{เมื่อ } x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{เมื่อ } x \geq 0 \end{cases}$$

วิธีทำ กรณีที่ $x \in (-\infty, 0)$ จะได้ว่า $f(x) = x^3 + x^2 + 1$ ดังนั้น $f'(x) = 3x^2 + 2x$
กรณีที่ $x \in (0, \infty)$ จะได้ว่า $f(x) = x^2 + 1$ ดังนั้น $f'(x) = 2x$
กรณีที่ $x = 0$ พิจารณาอนุพันธ์ทางซ้ายและทางขวาของ f ที่จุด 0

$$f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 + 1 - 1}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to 0^+} x = 0$$
$$f'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^3 + x^2 + 1 - 1}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^3 + x^2}{x} = \lim_{x \to 0^+} (x^2 + x) = 0$$

จะได้ว่า $f'(0^+) = 0 = f'(0^-)$ ดังนั้น f หาอนุพันธ์ได้ที่ 0 และ $f'(0) = 0$
สรุปได้ว่า f หาอนุพันธ์ได้บน $(-\infty, \infty)$ และ

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2x & \text{เมื่อ } x < 0 \\ 2x & \text{เมื่อ } x \geq 0 \end{cases}$$

ทฤษฎีบท 3.2.10 กฎการคูณสำหรับอนุพันธ์ (Product law for derivatives)
ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ แล้ว

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\frac{d}{dx}f(x)$$

บทพิสูจน์. สมมติว่า f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] &= \lim_{h\to 0}\frac{(fg)(x+h)-(fg)(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)+f(x+h)g(x)-f(x+h)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)[g(x+h)-g(x)]+g(x)[f(x+h)-f(x)]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} f(x+h)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + \lim_{h\to 0} g(x)\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= f(x)\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\frac{d}{dx}f(x)
\end{aligned}$$

□

ตัวอย่าง 3.2.11 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x) = (x+1)(x^2-1)$

   วิธีทำ โดยกฎการคูณจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (x+1)(x^2-1)' + (x+1)'(x^2-1) \\
&= (x+1)(2x) + (1)(x^2-1) \\
&= 2x^2 + 2x + x^2 - 1 \\
&= 3x^2 + 2x - 1
\end{aligned}$$

2. $y = (\sqrt{x}-1)(x^3+1)$

   วิธีทำ โดยกฎการคูณจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (\sqrt{x}+1)(x^3+1)' + (x^{\frac{1}{2}}+1)'(x^3+1) \\
&= (\sqrt{x}+1)(3x^2) + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}(x^3+1) \\
&= 3x^2\sqrt{x} + 3x^2 + \frac{1}{2}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \\
&= 3x^2\sqrt{x} + 3x^2 + \frac{1}{2}x^2\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
&= \frac{7}{2}x^2\sqrt{x} + 3x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

บทแทรก 3.2.12 ถ้า f, g และ h เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ แล้ว

$$[fgh]'(x) = [f'gh + fg'h + fgh'](x)$$

บทพิสูจน์. โดยกฎการคูณจะได้ว่า

$$\begin{aligned}[fgh]'(x) &= [(fg)h]'(x) = (fg)(x)h'(x) + (fg)'(x)h(x) \\ &= (fgh')(x) + [fg'(x) + f'g(x)]h(x) \\ &= (fgh')(x) + fg'h(x) + f'gh(x) \\ &= [f'gh + fg'h + fgh'](x)\end{aligned}$$

□

ตัวอย่าง 3.2.13 ให้ $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ จงหา $f'(0)$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}f'(x) &= (x-1)'(x-2)(x-3) + (x-1)(x-2)'(x-3) + (x-1)(x-2)(x-3)' \\ &= (x-2)(x-3) + (x-1)(x-3) + (x-1)(x-2)\end{aligned}$$

ดังนั้น $f'(0) = (-2)(-3) + (-1)(-3) + (-1)(-2) = 6 + 3 + 2 = 11$

ทฤษฎีบท 3.2.14 กฎการหารสำหรับอนุพันธ์ (Quoteint law for derivatives)
ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ แล้ว

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{d}{dx}f(x) - f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{[g(x)]^2} \qquad \text{เมื่อ } g(x) \neq 0$$

บทพิสูจน์. สมมติว่า f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ เมื่อ $g(x) \neq 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f}{g}(x+h) - \frac{f}{g}(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x+h)} + \frac{f(x)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{g(x+h)}\left[f(x+h) - f(x)\right] + f(x)\left[\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}\right]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{g(x)}{g(x)g(x+h)}\left[f(x+h) - f(x)\right] - f(x)\left[\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x+h)g(x)}\right]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{g(x)\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] - f(x)\left[\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]}{g(x)g(x+h)} \\ &= \frac{g(x)\frac{d}{dx}f(x) - f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{[g(x)]^2}\end{aligned}$$

□

ตัวอย่าง 3.2.15 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

   วิธีทำ โดยกฎการหารจะได้ว่า

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x-1)(x+1)' - (x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} \\ &= \frac{(x-1)(1) - (x+1)(1)}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

2. $y = \dfrac{1}{x^2+1}$

   วิธีทำ โดยกฎการหารจะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{(x^2+1)(1)' - (1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{(x^2+1)0 - (1)(2x)}{(x^2+1)^2} = -\frac{2x}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3.2.16 จงหาสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$ ที่จุด $(1, \frac{1}{2})$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{(x+1)(x^{\frac{1}{2}})' - \sqrt{x}(x+1)'}{(x+1)^2} \\ &= \frac{(x+1)\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \sqrt{x}(1)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{(x+1)\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งนี้ที่จุด $x = 1$ คือ $y' = \dfrac{(1+1)\frac{1}{2\sqrt{1}} - \sqrt{1}}{(1+1)^2} = 0$

ดังนั้นสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$ ที่จุด $(1, \frac{1}{2})$ คือ $y = \frac{1}{2}$

ตัวอย่าง 3.2.17 จงหาจุดบนเส้นโค้ง $y = \dfrac{x}{x^2+1}$ ที่มีเส้นสัมผัสขนานกับแกน X

วิธีทำ เนื่องจากเส้นสัมผัสขนานกับแกน X มีความชั้นเท่ากับ 0 นั่นคือ

$$\begin{aligned} 0 = \frac{dy}{dx} &= \frac{(x^2+1)(x)' - (x)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{(x^2+1)1 - (x)(2x)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

จะได้ว่า $1 - x^2 = 0$ หรือ $x = -1, 1$ ดังนั้นจุดบนเส้นโค้ง $y = \dfrac{x}{x^2+1}$ ที่มีเส้นสัมผัสขนานกับแกน X คือ $(-1, -\frac{1}{2})$ และ $(1, \frac{1}{2})$

แบบฝึกหัด 3.2

1. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

   1.1 $f(x) = x^{10} + x^7 - x$

   1.2 $f(x) = x^{-2} - x^{-1} - 1$

   1.3 $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$

   1.4 $f(x) = \dfrac{1}{x^3 + x - 1}$

   1.5 $f(x) = x^5 + 2x + \pi^2$

   1.6 $y = \dfrac{x^2 + x}{\sqrt{x}+1}$

2. ให้ $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ จงหา $f'(0)$

3. ให้ $f(x) = \dfrac{(x-1)(x+3)}{(x-2)(x+1)}$ จงหา $f'(0)$

4. จงหาจุดบนเส้นโค้ง $y = x^4 - 6x^2 + 4$ ที่มีเส้นสัมผัสขนานกับแกน X

5. จงหาอนุพันธ์ของ f ทุก ๆ จุดที่หาอนุพันธ์ได้

   5.1 $f(x) = \begin{cases} x^3 + 3 & \text{เมื่อ } x < 1 \\ 3x + 1 & \text{เมื่อ } x \geq 1 \end{cases}$

   5.2 $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & \text{เมื่อ } x < 1 \\ 3x + 1 & \text{เมื่อ } x \geq 1 \end{cases}$

6. พิจารณาว่าฟังก์ชัน g หาอนุพันธ์ได้ที่จุดใดบ้าง พร้อมทั้งร่างกราฟ g และ g'

$$g(x) = \begin{cases} 2x & \text{เมื่อ } x \leq 0 \\ 2x - x^2 & \text{เมื่อ } 0 < x < 2 \\ 2 - x & \text{เมื่อ } x \geq 2 \end{cases}$$

7. กำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{เมื่อ } x \leq 2 \\ mx + b & \text{เมื่อ } x > 2 \end{cases}$$

   จงหาค่าของ m และ b ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนจำนวนจริง

3.3 กฎลูกโซ่

ฟังก์ชันประกอบของ f และ g คือ $f \circ g$ โดยที่ $f \circ g(x) = f(g(x))$ ในหัวข้อนี้จะศึกษาว่าถ้า f แล้ว g หาอนุพันธ์ได้ แล้ว $f \circ g$ หาอนุพันธ์ได้ด้วยและ

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

เรียกว่า **กฎลูกโซ่ (Chain rule)** ซึ่งถูกค้นพบโดยนักคณิตศาสตร์เลื่องชื่อชาวสก็อตแลนด์นามว่า เจมส์ เกร็กกอรี (James Gregory, 1638-1675) ในวิชานี้จะไม่กล่าวถึงการพิสูจน์แต่จะนำไปประยุกต์ใช้ในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่มีความซับซ้อนมากยิ่งขึ้น

ทฤษฎีบท 3.3.1 กฎลูกโซ่
ถ้า g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่จุด x และ f หาอนุพันธ์ได้ที่จุด $g(x)$ แล้วฟังก์ชันประกอบ $f \circ g$ หาอนุพันธ์ได้ที่จุด x และเขียนแทนด้วย $(f \circ g)'$ คือ

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

ตัวอย่าง 3.3.2 กำหนดให้ $f(x^3+1) = x^3 + x - 1$ จงหา $f'(2)$

วิธีทำ ให้ $g(x) = x^3 + 1$ โดยกฎลูกโซ่จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= x^3 + x - 1 \\ (f \circ g)'(x) &= (x^3 + x + 1)' \\ f'(g(x)) \cdot g'(x) &= 3x^2 + 1 \\ f'(x^3+1) \cdot (x^3+1)' &= 3x^2 + 1 \\ f'(x^3+1) \cdot 3x^2 &= 3x^2 + 1 \end{aligned}$$

เมื่อแทน $x = 1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f'(1^3+1) \cdot 3(1)^2 &= 3(1)^2 + 1 \\ f'(2) \cdot 3 &= 4 \\ f'(2) &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3.3.3 กำหนดให้ $f(g(x)+x) = 2x^2 - x + 1$ เมื่อ $g(0) = g'(0) = 1$ จงหา $f'(1)$

วิธีทำ โดยกฎลูกโซ่จะได้ว่า

$$\begin{aligned} [f(g(x)+x)]' &= [2x^2 - x + 1]' \\ f'(g(x)+x) \cdot (g(x)+x)' &= 4x - 1 \\ f'(g(x)+x) \cdot (g'(x)+1) &= 4x - 1 \end{aligned}$$

เมื่อแทน $x = 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f'(g(0)+0) \cdot (g'(0)+1) &= 4(0) - 1 \\ f'(1+0) \cdot (1+1) &= -1 \\ f'(1) \cdot 2 &= -1 \\ f'(1) &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3.3.4 กำหนดให้ $f(x) = x|x|$ และ $g(x) = x^2 + x - 1$ จงหา $(f \circ g)'(-1)$

วิธีทำ โดยกฎลูกโซ่จะได้ว่า $(f \circ g)'(-1) = f'(g(-1)) \cdot g'(-1)$
เนื่องจาก $g(-1) = -1$ และ $g'(x) = 2x + 1$ ดังนั้น

$$(f \circ g)'(-1) = f'(-1) \cdot (2(-1) + 1) = -f'(-1)$$

สำหรับ $x < 0$ จะได้ว่า $f(x) = -x^2$ นั่นคือ $f'(x) = -2x$ ดังนั้น $f'(-1) = 2$ สรุปได้ว่า

$$(f \circ g)'(-1) = -2$$

จากกฎลูกโซ่เมื่อกำหนด $y = f(u)$ และ $u = g(x)$ แล้ว

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

ตัวอย่าง 3.3.5 กำหนดให้ $y = u^2 + 3u - 1$ และ $u = x^2 - x$ จงหา $\frac{dy}{dx}$ ขณะ $x = 1$

วิธีทำ โดยกฎลูกโซ่จะได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (2u + 3)(2x - 1)$$

เมื่อ $x = 1$ จะได้ว่า $u = 1^2 - 1 = 0$ ดังนั้น

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = (2(0) + 3)(2(1) - 1) = 3$$

ตัวอย่าง 3.3.6 กำหนดให้ $y = u + \frac{1}{u}$, $u = x^2 + 1$ และ $x = 2t + 1$ จงหา $\frac{dy}{dt}$

วิธีทำ โดยกฎลูกโซ่จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \\
&= (1 - u^{-2})(2x)(2) \\
&= \left(1 - \frac{1}{(x^2 + 1)^2}\right) 4(2t + 1) \\
&= \left(1 - \frac{1}{((2t + 1)^2 + 1)^2}\right) (8t + 4)
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3.3.7 จงหาอนุพันธ์ของ $F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

วิธีทำ ให้ $f(x) = \sqrt{x}$ และ $g(x) = x^2 + 1$ แล้ว $F(x) = f \circ g(x)$ นั่นคือ

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{และ} \quad g'(x) = 2x$$

โดยกฎลูกโซ่จะได้ว่า

$$\begin{aligned}F'(x) &= (f \circ g)'(x)\\ &= f'(g(x)) \cdot g'(x)\\ &= f'(x^2+1) \cdot 2x\\ &= \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x\\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\end{aligned}$$

ดังนั้น $F'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ หรือ

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x^2+1} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

ทฤษฎีบท 3.3.8 กฎทั่วไปของอนุพันธ์สำหรับฟังก์ชันกำลัง
ให้ n เป็นจำนวนตรรกยะ และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ แล้ว

$$\frac{d}{dx}[g(x)]^n = n[g(x)]^{n-1} \cdot g'(x)$$

บทพิสูจน์. ให้ $f(x) = x^n$ แล้ว $f \circ g(x) = [g(x)]^n$ และ $f'(x) = nx^{n-1}$ โดยกฎการคูณจะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[g(x)]^n &= \frac{d}{dx}(f \circ g)(x)\\ &= f'(g(x)) \cdot g'(x)\\ &= n[g(x)]^{n-1} \cdot g'(x)\end{aligned}$$

□

ตัวอย่าง 3.3.9 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x) = (x^3-1)^{100}$

   วิธีทำ $f'(x) = 100(x^3-1)^{99} \cdot (x^3-1)' = 100(x^3-1)^{99} \cdot 3x^2 = 300x^2(x^3-1)^{99}$

2. $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2+x+1}}$

   วิธีทำ จัดรูปใหม่ $f(x) = (x^2+x+1)^{-\frac{1}{3}}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}f'(x) &= -\frac{1}{3}(x^2+x+1)^{-\frac{4}{3}} \cdot (x^2+x+1)'\\ &= -\frac{1}{3}(x^2+x+1)^{-\frac{4}{3}} \cdot (2x+1)\\ &= -\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)^{\frac{4}{3}}}\end{aligned}$$

3. $g(t) = \left(\dfrac{t-2}{2t+1}\right)^9$

   วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} g'(t) &= 9\left(\frac{t-2}{2t+1}\right)^8 \left(\frac{t-2}{2t+1}\right)' \\ &= 9\left(\frac{t-2}{2t+1}\right)^8 \cdot \frac{(2t+1)(t-2)' - (t-2)(2t+1)'}{(2t+1)^2} \\ &= 9\left(\frac{t-2}{2t+1}\right)^8 \cdot \frac{(2t+1)(1) - (t-2)(2)}{(2t+1)^2} \\ &= 9\left(\frac{t-2}{2t+1}\right)^8 \cdot \frac{5}{(2t+1)^2} \\ &= \frac{45(t-2)^8}{(2t+1)^{10}} \end{aligned}$$

4. $k(x) = (1-x)^5(x^3+2)^4$

   วิธีทำ โดยใช้กฎการคูณและกฎลูกโซ่จะได้ว่า

$$\begin{aligned} k'(x) &= (1-x)^5[(x^3+2)^4]' + [(1-x)^5]'(x^3+2)^4 \\ &= (1-x)^5[4(x^3+2)^3(x^3+2)'] + [5(1-x)^4(1-x)'](x^3+2)^4 \\ &= (1-x)^5[4(x^3+2)^3 3x^2] + [5(1-x)^4(-1)](x^3+2)^4 \\ &= 12x^2(1-x)^5(x^3+2)^3 - 5(1-x)^4(x^3+2)^4 \end{aligned}$$

ต่อไปจะกล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างอนุพันธ์ของฟังก์ชันและอนุพันธ์ของฟังก์ชันผกผันดังทฤษฎีบทต่อไปนี้ ซึ่งจะไม่พิสูจน์แต่จะยกตัวอย่างการนำไปใช้ในการการอนุพันธ์โดยทฤษฎีบทดังกล่าว

ทฤษฎีบท 3.3.10 ทฤษฎีบทฟังก์ชันผกผัน (Inverse function theorem)
ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ผกผันได้ และหาอนุพันธ์ได้โดยที่ค่าไม่เป็นศูนย์ที่ x แล้ว $f^{-1}(y) = x$ จะได้ว่า

$$\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dy} = 1 \qquad \text{หรือ} \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

ตัวอย่าง 3.3.11 ให้ $y = \dfrac{1}{x+1}$ จงหา $\dfrac{dx}{dy}$ ในรูป y

วิธีทำ จะเห็นว่า $\dfrac{dy}{dx} = -(x+1)^{-2}(1) = -\dfrac{1}{(x+1)^2}$ และ $x = \dfrac{1}{y} - 1$
โดยทฤษฎีบทฟังก์ชันผกผันจะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dy} &= -(x+1)^2 \\ &= -\left(\frac{1}{y} - 1 + 1\right)^2 = -\frac{1}{y^2} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3.3.12 ให้ $f(x) = x^3 + 1$ จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันผกผันของ f โดยใช้ทฤษฎีบทฟังก์ชันผกผัน

วิธีทำ จะเห็นว่า $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2$ และ $x = (y-1)^{\frac{1}{3}}$ โดยทฤษฎีบทฟังก์ชันผกผันจะได้ว่า

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{3x^2} = \frac{1}{3(y-1)^{\frac{2}{3}}}$$

ดังนั้น

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{3(x-1)^{\frac{2}{3}}}$$

แบบฝึกหัด 3.3

1. จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ เมื่อ
   - 1.1 $y = u^3 - 2u$ และ $u = \sqrt{x}$
   - 1.2 $y = (u+1)^2$ และ $u = x + \dfrac{1}{x}$
   - 1.3 $y = \sqrt{u^2+3}$ และ $u = x - 2x^2$
   - 1.4 $y = \dfrac{u+1}{u-1}$ และ $u = \dfrac{1}{2x}$
2. จงหา $\dfrac{dy}{dt}$ เมื่อ
   - 2.1 $y = u - u^2$, $u = x - x^3$ และ $x = \sqrt{t} + 1$
   - 2.2 $y = 5 + 3u^{-2}$, $u = \sqrt{x}$ และ $x = t^2$
3. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้
   - 3.1 $f(x) = (x^2+1)\sqrt{x^2-1}$
   - 3.2 $F(x) = (4x - x^2)^{99}$
   - 3.3 $f(x) = (x + \sqrt{x})^5$
   - 3.4 $f(x) = (1 + x^4)^{\frac{2}{3}}$
   - 3.5 $f(x) = (2x-3)^4(x^2+x)^3$
   - 3.6 $f(s) = \sqrt{\dfrac{s^2+1}{s^2+3}}$
4. ให้ $F(x) = f \circ g(x)$ เมื่อ $f(-2) = 8, f'(-2) = 4, f'(5) = 3, g(5) = -2$ และ $g'(5) = 6$ จงหา $F'(5)$
5. ถ้า $h(x) = \sqrt{4 + 3f(x)}$ เมื่อ $f(1) = 7$ และ $f'(1) = 4$ จงหา $h'(1)$
6. ให้ $r(x) = f(g(h(x)))$ เมื่อ $h(1) = 2, g(2) = 3, h'(1) = 4, g'(2) = 5$ และ $f'(3) = 6$ จงหา $r'(1)$
7. ให้ $y = f\left(\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ เมื่อ $f'(0) = 2$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ ที่ $x = 1$
8. ให้ $y = f(1 + \sqrt{u})$, $u = 2 - x^2$ เมื่อ $f'(2) = -3$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ ที่ $x = 1$
9. ให้ $y = x^3 + 3x^2 + 3x$ จงหา $\dfrac{dx}{dy}$ ในรูป y

3.4 อนุพันธ์อันดับสูง

บทนิยาม 3.4.1 อนุพันธ์อันดับสูง (Higher order derivatives)
ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ และ f' เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ แล้ว f'' จะเรียกว่า**อนุพันธ์อันดับสอง** (second derivative) ของ f นิยามโดย

$$f''(x) = (f'(x))' \qquad \text{หรือ} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

ให้ $n \in \mathbb{N}$ และ $f^{(0)} = f$ **อนุพันธ์อันดับ n** ของ f เขียนแทนด้วย $f^{(n)}$ นิยามโดย

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

ตัวอย่าง 3.4.2 กำหนดให้ $f(x) = x^3 - 8x^2 + 9x + 3$ จงหา $f''(x)$ และ $f''(2)$

วิธีทำ จะได้ว่า $f'(x) = 3x^2 - 16x + 9$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} f''(x) &= 6x - 16 \\ f''(2) &= 6(2) - 16 = -4 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3.4.3 ให้ $f(x) = x^8 + 12x^5 - 4x^4 + 8x^3 - 5x + 5$ จงหา $f'''(x)$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f'(x) &= 8x^7 + 60x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 5 \\ f''(x) &= 56x^6 + 240x^3 - 48x^2 + 48x \\ f'''(x) &= 336x^5 + 720x^2 - 96x + 48 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3.4.4 สมการการเคลื่อนที่ของวัตถุชิ้นหนึ่ง $s = 2t^3 - 5t^2 + 3t + 4$ เมื่อ s มีหน่วยเป็นเซนติเมตร และ t มีหน่วยเป็นวินาที จงหาสมการความเร่ง และความเร่งที่ขณะ 2 วินาที

วิธีทำ สมการความเร็วคือ

$$v(t) = s'(t) = 6t^2 - 10t + 3$$

ดังนั้นสมการความเร่งคือ

$$a(t) = v'(t) = 12t - 10$$

และ $a(2) = 12(2) - 10 = 14$
ดังนั้นความเร่งที่ขณะ 2 วินาที เท่ากับ 14 เซนติเมตร/วินาที^{2}

ตัวอย่างต่อไปคือการหาอนุพันธ์อันดับสูงที่อาศัยการดูรูปแบบและคาดคะเนคำตอบ การยืนยันคำตอบที่ถูกต้องต้องพิสูจน์โดยวิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ แต่จะขอเว้นการพิสูจน์ดังกล่าว

ตัวอย่าง 3.4.5 ให้ $n \in \mathbb{N}$ จงหาอนุพันธ์ของ n ของฟังก์ชัน $f(x) = x^n$

วิธีทำ ให้ $n \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f'(x) &= nx^{n-1} \\ f''(x) &= n(n-1)x^{n-2} \\ f'''(x) &= n(n-1)(n-2)x^{n-3} \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1 = n! \end{aligned}$$

ดังนั้น $f^{(n)}(x) = n!$

ตัวอย่าง 3.4.6 ให้ $n \in \mathbb{N}$ จงหาอนุพันธ์ของ n ของฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$

วิธีทำ ให้ $n \in \mathbb{N}$ และ $f(x) = (1-x)^{-1}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f'(x) &= -1(1-x)^{-2}(-1) = \frac{1}{(1-x)^2} \\ f''(x) &= 1(-2)(1-x)^{-3}(-1) = \frac{1\cdot 2}{(1-x)^3} \\ f'''(x) &= 1(2)(-3)(1-x)^{-4}(-1) = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{(1-x)^4} \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= 1(2)(3)\cdots(n-1)(-n)(1-x)^{-(n+1)}(-1) = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{(1-x)^{n+1}} \end{aligned}$$

ดังนั้น $f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

ตัวอย่าง 3.4.7 ให้ $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ จงหา $f^{(2561)}(0)$

วิธีทำ ให้ $n \in \mathbb{N}$ และ $f(x) = (1+x)^{-1}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f'(x) &= -1(x+1)^{-2}(1) = \frac{(-1)}{(x+1)^2} \\ f''(x) &= (-1)(-2)(x+1)^{-3}(1) = \frac{(-1)(-2)}{(x+1)^3} \\ f'''(x) &= (-1)(-2)(-3)(x+1)^{-4}(1) = \frac{(-1)(-2)(-3)}{(x+1)^4} \\ &\vdots \\ f^{(2561)}(x) &= (-1)(-2)(-3)\cdots(-2561)(x+1)^{-2562}(-1) = \frac{(-1)(-2)(-3)\cdots(-2561)}{(x+1)^{2562}} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$f^{(2561)}(0) = -(2561!)$$

แบบฝึกหัด 3.4

1. จงหาอนุพันธ์อันดับสองและอันดับสาม ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1.1 $f(x) = x^5 + 6x^3 + x^2 + 3$

1.2 $f(x) = x^{10} + x^7 - x$

1.3 $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$

1.4 $f(x) = (x-1)(x+1)$

1.5 $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

1.6 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$

1.7 $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

2. ให้ $n \in \mathbb{N}$ จงหาอนุพันธ์ของ n ของฟังก์ชันต่อไปนี้

2.1 $f(x) = x^{-n}$

2.2 $f(x) = \sqrt{x}$

2.3 $f(x) = \dfrac{1}{x}$

2.4 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

2.5 $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$

2.6 $f(x) = \dfrac{1}{1-2x}$

3. สมการการเคลื่อนที่ของวัตถุชิ้นหนึ่ง $s = t^3 + 2t^2 - t + 4$ เมื่อ s มีหน่วยเป็นเซนติเมตร และ t มีหน่วยเป็นวินาที จงหาสมการความเร่ง และความเร่งที่ขณะ 1 วินาที

4. ให้ $f(x) = \dfrac{1}{x}$ จงหา $f^{(2018)}(1)$

3.5 อนุพันธ์ของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง

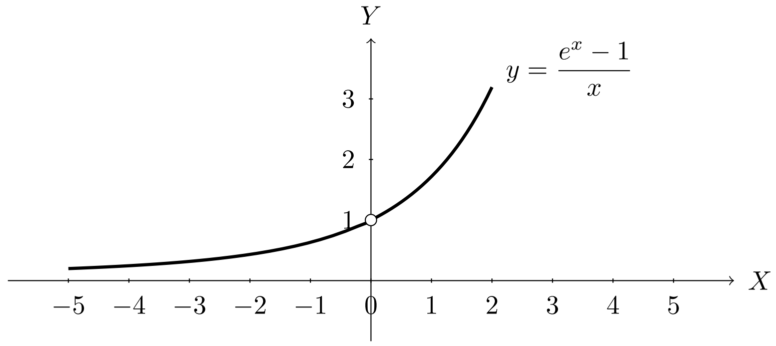
ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันเลขชี้กำลังโดยเริ่มต้นจาก $f(x) = e^x$ เมื่อ e คือค่าคงตัวออยเลอร์ เรียกฟังก์ชันผกผันของ f ว่าฟังก์ชันลอการิทึมธรรมชาติ นั่นคือ $f^{-1}(x) = \ell\text{n}x$ จะเห็นว่า $\ell\text{n}1 = 0, \ell\text{n}e = 1$ และ $e^{\ell\text{n}x} = x$

พิจารณาอนุพันธ์ของ $f(x) = e^x$ จะได้

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{e^x(e^h-1)}{h} = e^x\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = e^x f'(0) \end{aligned}$$

เมื่อพิจารณากราฟของฟังก์ชัน $y = \dfrac{e^x-1}{x}$

รูปที่ 3.3 กราฟของฟังก์ชัน $y = \dfrac{e^x-1}{x}$



เมื่อ x ใกล้ ๆ 0 ค่าของ $\dfrac{e^x-1}{x}$ จะเข้าใกล้ 1 เราจึงกำหนดให้ $f'(0) = 1$ ดังนั้น $f'(x) = e^x$ สรุปได้ว่า

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

ทฤษฎีบท 3.5.1 ให้ $u = u(x)$ จะได้ว่า $\dfrac{d}{dx}e^{u(x)} = e^{u(x)}\cdot u'(x)$

บทพิสูจน์. ให้ $f(x) = e^x$ แล้ว $f\circ u(x) = e^{u(x)}$ และ $f'(x) = e^x$ โดยกฎลูกโซ่จะได้ว่า

$$\begin{aligned} (f\circ u)'(x) &= f'(u(x))\cdot u'(x) \\ \frac{d}{dx}e^{u(x)} &= e^{u(x)}\cdot u'(x) \end{aligned}$$

□

ทฤษฎีบท 3.5.2 ให้ $a > 0$ และ $a \neq 1$ ถ้า $a^x = e^{x\ell\text{n}a}$ จะได้ว่า

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x\ell\text{n}a$$

บทพิสูจน์. โดยทฤษฎีบท 3.5.1 จะได้ว่า

$$\frac{d}{dx}a^x = \frac{d}{dx}e^{x\ell\text{n}a} = e^{x\ell\text{n}a}\cdot\frac{d}{dx}x\ell\text{n}a = e^{x\ell\text{n}a}\ell\text{n}a = a^x\ell\text{n}a$$

□

ทฤษฎีบท 3.5.3 ให้ $a > 0$ และ $a \neq 1$ และ $u = u(x)$ จะได้ว่า $\dfrac{d}{dx}a^{u(x)} = a^{u(x)}\ell\text{n}a \cdot u'(x)$

บทพิสูจน์. ให้ $f(x) = a^x$ แล้ว $f \circ u(x) = a^{u(x)}$ และ $f'(x) = a^x \ell\text{n}a$ โดยกฎลูกโซ่จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(f \circ u)'(x) &= f'(u(x)) \cdot u'(x)\\ \frac{d}{dx}a^{u(x)} &= a^{u(x)}\ell\text{n}a \cdot u'(x)\end{aligned}$$

□

ตัวอย่าง 3.5.4 จงหาอนุพันธ์ของ

1. $f(x) = e^x + e^{-x}$

   วิธีทำ $f'(x) = e^x + e^{-x}(-x)' = e^x + e^{-x}(-1) = e^x - e^{-x}$

2. $f(x) = e^{e^x} + e^{-x^2}$

   วิธีทำ $f'(x) = e^{e^x}(e^x)' + e^{-x^2}(-x^2)' = e^{e^x}e^x + e^{-x}(-2x) = e^{e^x+x} - 2xe^{-x^2}$

3. $f(x) = 3^{x^2} + e^{x^2+2x}$

   วิธีทำ $f'(x) = 3^{x^2}\ell\text{n}3 \cdot (x^2)' + e^{x^2+2x}(x^2+2x)' = 3^{x^2}(2x)\ell\text{n}3 + (2x+2)e^{x^2+2x}$

4. $f(x) = (e^x + x)(e^{2x} + 1)$

   วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}f'(x) &= (e^x + x)(e^{2x} + 1)' + (e^x + x)'(e^{2x} + 1)\\ &= (e^x + x)(2e^{2x}) + (e^x + 1)(e^{2x} + 1)\\ &= 2e^{3x} + 2xe^{2x} + e^{3x} + e^x + e^{2x} + 1\\ &= 3e^{3x} + (2x + 1)e^{2x} + e^x + 1\end{aligned}$$

5. $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

   วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})' - (e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})'}{(e^x - e^{-x})^2}\\ &= \frac{(e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x}) - (e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x})}{(e^x - e^{-x})^2}\\ &= \frac{(e^{2x} - 2 + e^{-2x}) - (e^{2x} + 2 + e^{-2x})}{(e^x - e^{-x})^2}\\ &= -\frac{4}{(e^x - e^{-x})^2}\end{aligned}$$

พิจารณาฟังก์ชัน $y = e^x$ เมื่อ $x > 0$ จะได้ว่า โดยทฤษฎีบทฟังก์ชันผกผันจะได้ว่า

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$$

ดังนั้น

$$\frac{d}{dx}\ell\text{n}x = \frac{1}{x}$$

ทฤษฎีบท 3.5.5 ให้ $u = u(x) > 0$ จะได้ว่า $\dfrac{d}{dx}\ell\text{n}u(x) = \dfrac{1}{u(x)} \cdot u'(x)$

บทพิสูจน์. ให้ $f(x) = \ell\text{n}x$ แล้ว $f \circ u(x) = \ell\text{n}u(x)$ และ $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ โดยกฎลูกโซ่จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(f \circ u)'(x) &= f'(u(x)) \cdot u'(x)\\ \frac{d}{dx}\ell\text{n}u(x) &= \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x)\end{aligned}$$

□

เมื่อ $x < 0$ จะได้ว่า

$$\frac{d}{dx}\ell\text{n}|x| = = \frac{d}{dx}\ell\text{n}(-x) = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$$

สรุปได้ว่าสำหรับ $x \neq 0$ และ $u(x) \neq 0$ จะได้ว่า

$$\frac{d}{dx}\ell\text{n}|x| = \frac{1}{x} \qquad \text{และ} \qquad \frac{d}{dx}\ell\text{n}|u(x)| = \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x)$$

ตัวอย่าง 3.5.6 จงหาอนุพันธ์ของ

1. $f(x) = \ell\text{n}(x^2 + 1)$

   วิธีทำ $f'(x) = \dfrac{1}{x^2+1} \cdot (x^2+1)' = \dfrac{2x}{x^2+1}$

2. $f(x) = \ell\text{n}|1 - x - x^2|$

   วิธีทำ $f'(x) = \dfrac{1}{1-x-x^2} \cdot (1-x-x^2)' = -\dfrac{1+2x}{1-x-x^2}$

ตัวอย่างต่อไปนี้จะใช้สมบัติของลอการิทึมมาช่วยจัดรูปก่อนหาอนุพันธ์

ตัวอย่าง 3.5.7 จงหาอนุพันธ์ของ

1. $f(x) = \ell\text{n}(x+1)(x+2)(x+3)$

   วิธีทำ จัดรูปโดยใช้สมบัติของลอการิทึม $f(x) = \ell\text{n}(x+1) + \ell\text{n}(x+2) + \ell\text{n}(x+3)$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1}{x+1} \cdot (x+1)' + \frac{1}{x+2} \cdot (x+2)' + \frac{1}{x+3} \cdot (x+3)'\\ &= \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3}\end{aligned}$$

2. $f(x) = \ell\text{n}\left(\dfrac{e^x+1}{e^x-1}\right)$

   วิธีทำ จัดรูปโดยใช้สมบัติของลอการิทึม $f(x) = \ell\text{n}(e^x+1) - \ell\text{n}(e^x-1)$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1}{e^x+1} \cdot (e^x+1)' + \frac{1}{e^x-1} \cdot (e^x-1)' + \frac{1}{x+3} \cdot (x+3)'\\ &= \frac{e^x}{e^x+1} + \frac{e^x}{e^x-1}\\ &= \frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1}\end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 3.5.8 ให้ $a > 0$ และ $a \neq 1$ และ $u = u(x)$ ถ้า $\ell\text{og}_a x = \dfrac{\ell\text{n}x}{\ell\text{n}a}$ จะได้ว่า

1. $\dfrac{d}{dx}\ell\text{og}_a|x| = \dfrac{1}{x\ell\text{n}a}$
2. $\dfrac{d}{dx}\ell\text{og}_a|u(x)| = \dfrac{1}{u(x)\ell\text{n}a} \cdot u'(x)$

บทพิสูจน์. จะได้ว่า

$$\frac{d}{dx}\ell\text{og}_a|x| = \frac{d}{dx}\frac{\ell\text{n}x}{\ell\text{n}a} = \frac{1}{\ell\text{n}a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x\ell\text{n}a}$$

ให้ $f(x) = \ell\text{og}_a|x|$ แล้ว $f \circ u(x) = \ell\text{og}_a u(x)$ และ $f'(x) = \dfrac{1}{x\ell\text{n}a}$ โดยกฎลูกโซ่จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(f \circ u)'(x) &= f'(u(x)) \cdot u'(x) \\ \frac{d}{dx}\ell\text{og}_a|u(x)| &= \frac{1}{u(x)\ell\text{n}a} \cdot u'(x)\end{aligned}$$

□

ตัวอย่าง 3.5.9 จงหาอนุพันธ์ของ

1. $f(x) = \ell\text{og}_2(x^3 + x)$

   วิธีทำ $\ell f'(x) = \dfrac{1}{\ell\text{n}(x^3 + x)\ell\text{n}2} \cdot (x^3 + x)' = \dfrac{3x^2 + 1}{\ell\text{n}(x^3 + x)\ell\text{n}2}$

2. $f(x) = \ell\text{og}_3(x^2 + 2)(1 - x)$

   วิธีทำ จัดรูปโดยใช้สมบัติของลอการิทึ่ม $f(x) = \ell\text{og}_3(x^2 + 2) + \ell\text{og}_3(1 - x)$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1}{\ell\text{n}(x^2 + 2)\ell\text{n}3} \cdot (x^2 + 2)' + \frac{1}{\ell\text{n}(1 - x)\ell\text{n}3} \cdot (1 - x)' \\ &= \frac{2x}{\ell\text{n}(x^2 + 2)\ell\text{n}3} - \frac{1}{\ell\text{n}(1 - x)\ell\text{n}3}\end{aligned}$$

ตัวอย่างต่อไปนี้จะใช้สมบัติของลอการิทึ่มมาช่วยจัดรูปของฟังก์ชันที่อยู่ในรูปผลคูณและผลหารหลาย ๆ พจน์ ก่อนหาอนุพันธ์

ตัวอย่าง 3.5.10 จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

1. $y = (x^3 + 1)^5(x - 1)^7(x^2 - 4)^9$

   วิธีทำ จะได้ว่า $\ell\text{n}y = 5\ell\text{n}(x^3 + 1) + 7\ell\text{n}(x - 1) + 9\ell\text{n}(x^2 - 4)$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\ell\text{n}y) &= 5 \cdot \frac{1}{x^3 + 1} \cdot (3x^2) + 7 \cdot \frac{1}{x - 1} \cdot (1) + 9 \cdot \frac{1}{x^2 - 4} \cdot (2x) \\ \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= \frac{15x^2}{x^3 + 1} + \frac{7}{x - 1} + \frac{18x}{x^2 - 4} \\ \frac{dy}{dx} &= y\left(\frac{15x^2}{x^3 + 1} + \frac{7}{x - 1} + \frac{18x}{x^2 - 4}\right) \\ &= (x^3 + 1)^5(x - 1)^7(x^2 - 4)^9\left(\frac{15x^2}{x^3 + 1} + \frac{7}{x - 1} + \frac{18x}{x^2 - 4}\right)\end{aligned}$$

2. $y = \dfrac{(x+1)^9(x^2-4)^4}{(1-2x)\sqrt{x^2-1}}$

วิธีทำ จะได้ว่า $\ell\text{n}y = 9\ell\text{n}(x+1) + 4\ell\text{n}(x^2-4) - \ell\text{n}(1-2x) - \frac{1}{2}\ell\text{n}(x^2-1)$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\ell\text{n}y) &= 9\cdot\frac{1}{x+1}\cdot(1) + 4\cdot\frac{1}{x^2-4}\cdot(2x) - \frac{1}{1-2x}\cdot(-2) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2-1}\cdot(2x) \\
\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= \frac{9}{x+1} + \frac{8x}{x^2-4} + \frac{2}{1-2x} - \frac{x}{x^2-1} \\
\frac{dy}{dx} &= y\left(\frac{9}{x+1} + \frac{8x}{x^2-4} + \frac{2}{1-2x} - \frac{x}{x^2-1}\right) \\
&= \frac{(x+1)^9(x^2-4)^4}{(1-2x)\sqrt{x^2-1}}\left(\frac{9}{x+1} + \frac{8x}{x^2-4} + \frac{2}{1-2x} - \frac{x}{x^2-1}\right)
\end{aligned}$$

3. $y = \sqrt[5]{\dfrac{x^4\sqrt{7x+1}}{(2x^3-5)^9}}$

วิธีทำ จะได้ว่า $\ell\text{n}y = \frac{1}{5}\left[4\ell\text{n}x + \frac{1}{2}\ell\text{n}(7x+1) - 9\ell\text{n}(2x^3-5)\right]$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\ell\text{n}y) &= \frac{1}{5}\left[4\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7x+1}(7) - 9\cdot\frac{1}{2x^3-5}(6x^2)\right] \\
\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{5}\left[\frac{4}{x} + \frac{7}{14x+2} - \frac{54x^2}{2x^3-5}\right] \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{5}y\left(\frac{4}{x} + \frac{7}{14x+2} - \frac{54x^2}{2x^3-5}\right) \\
&= \frac{1}{5}\sqrt[5]{\frac{x^4\sqrt{7x+1}}{(2x^3-5)^9}}\left(\frac{4}{x} + \frac{7}{14x+2} - \frac{54x^2}{2x^3-5}\right)
\end{aligned}$$

สุดท้ายจะเป็นตัวอย่างต่อไปนี้จะใช้สมบัติของลอการิทึ่มมาช่วยจัดรูปของฟังก์ชันในรูป $[u(x)]^{v(x)}$ เพื่อหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันเหล่านั้น

ตัวอย่าง 3.5.11 จงหาอนุพันธ์ของ

1. $\dfrac{d}{dx}(x^x)$

วิธีทำ ให้ $y = x^x$ จะได้ว่า $\ell\text{n}y = x\ell\text{n}x$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\ell\text{n}y) &= x\frac{d}{dx}\ell\text{n}x + \ell\text{n}x\frac{d}{dx}x \\
\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= x\cdot\frac{1}{x} + \ell\text{n}x\cdot 1 \\
\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= 1 + \ell\text{n}x \\
\frac{dy}{dx} &= y(1+\ell\text{n}x) = x^x(1+\ell\text{n}x)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\dfrac{d}{dx}(x^x) = x^x(1+\ell\text{n}x)$

2. $\dfrac{d}{dx}(x^{\frac{1}{x}})$

วิธีทำ ให้ $y = x^{\frac{1}{x}}$ จะได้ว่า $\ell\text{n}y = \dfrac{1}{x}\ell\text{n}x = x^{-1}\ell\text{n}x$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\ell\text{n}y) &= x^{-1}\frac{d}{dx}\ell\text{n}x + \ell\text{n}x\frac{d}{dx}x^{-1}\\ \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= x^{-1}\cdot\frac{1}{x} + \ell\text{n}x\cdot(-x^{-2})\\ \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= \frac{1-\ell\text{n}x}{x^2}\\ \frac{dy}{dx} &= \frac{y(1-\ell\text{n}x)}{x^2} = \frac{x^{\frac{1}{x}}(1-\ell\text{n}x)}{x^2}\end{aligned}$$

ดังนั้น $\dfrac{d}{dx}(x^{\frac{1}{x}}) = \dfrac{x^{\frac{1}{x}}(1-\ell\text{n}x)}{x^2}$

แบบฝึกหัด 3.5

1. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1.1 $y = x^e + e^x$

1.2 $y = 2^{1-x} + 3^{\ell\text{n}x} - e^{3x}$

1.3 $y = 2^{1-x} + 3^{\ell\text{n}x} - e^{3x}$

1.4 $y = (1+\pi)^{x+\pi}$

1.5 $y = \ell\text{og}_2(x^2 + \ell\text{n}x)$

1.6 $y = \ell\text{og}_3(2^x + 3^x)$

1.7 $y = (1+\sqrt{2})^x$

1.8 $y = (1+e)^{1+e^x}$

2. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

2.1 $y = x^{x^2}$

2.2 $y = (1+e^x)^x$

3. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

3.1 $y = x^2\ell\text{n}^2(3x+1)$

3.2 $y = (x+1)^9(x+2)^8(x+3)^7(x+4)^6$

3.3 $y = \sqrt{\dfrac{(x^2+1)\ell\text{n}|x^3+x|}{(2x-3)^3}}$

3.6 อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

การศึกษาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติทั้ง 6 ฟังก์ชันคือ ไซน์ โคไซน์ แทนเจนต์ โคแทนเจนต์ เซแคนต์ และโคเซแคนต์ เริ่มต้นจากฟังก์ชันไซน์ โดยอาศัยทฤษฎีบท 2.3.10 จะได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.6.1 ให้ $u = u(x)$ จะได้ว่า

1. $\dfrac{d}{dx}\sin x = \cos x$
2. $\dfrac{d}{dx}\sin u(x) = \cos u(x) \cdot u'(x)$

บทพิสูจน์. โดยนิยามของอนุพันธ์และเอกลักษณ์ตรีโกณมิติข้อ 10

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\sin x &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}\\ &= -\sin x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos}{h}+\cos x\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\end{aligned}$$

โดยตัวอย่าง 2.3.11 ข้อ 2 และทฤษฎีบท 2.3.10 จะได้ว่า

$$\frac{d}{dx}\sin x = -\sin x\cdot 0+\cos x\cdot 1 = \cos x$$

ให้ $f(x) = \sin x$ แล้ว $f \circ u(x) = \sin u(x)$ และ $f'(x) = \cos x$ โดยกฎลูกโซ่จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(f\circ u)'(x) &= f'(u(x))\cdot u'(x)\\ \frac{d}{dx}\sin u(x) &= \cos u(x)\cdot u'(x)\end{aligned}$$

ดังนั้นทฤษฎีบท 3.6.1 เป็นจริง □

โดยทฤษฎีบท 3.6.1 จะสามารถพิสูจน์อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโดกณมิติได้ครบทุกฟังก์ชัน และขยายไปยังกรณี $u(x)$ โดยใช้กฎลูกโซ่ในทำนองเดียวกัน

ทฤษฎีบท 3.6.2 ให้ $u = u(x)$ จะได้ว่า

1. $\dfrac{d}{dx}\cos x = -\sin x$
2. $\dfrac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$
3. $\dfrac{d}{dx}\sec x = \sec x\tan x$
4. $\dfrac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$
5. $\dfrac{d}{dx}\csc x = -\csc x\cot x$
6. $\dfrac{d}{dx}\cos u(x) = -\sin u(x)\cdot u'(x)$
7. $\dfrac{d}{dx}\tan u(x) = \sec^2 u(x)\cdot u'(x)$
8. $\dfrac{d}{dx}\sec u(x) = \sec u(x)\tan u(x)\cdot u'(x)$
9. $\dfrac{d}{dx}\cot u(x) = -\csc^2 u(x)\cdot u'(x)$
10. $\dfrac{d}{dx}\csc u(x) = -\csc u(x)\cot u(x)\cdot u'(x)$

บทพิสูจน์. 1. เนื่องจาก $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$ และ $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$ จะได้ว่า

$$\frac{d}{dx}\cos x=\frac{d}{dx}\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot(-1)=-\sin x$$

2. จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\tan x=\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)&=\frac{\cos x(\sin x)'-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}\\&=\frac{\cos x(\cos x)-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}\\&=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}\\&=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x\end{aligned}$$

3. จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\sec x&=\frac{d}{dx}(\cos x)^{-1}=-1(\cos x)^{-2}(\cos x)'\\&=-1(\cos x)^{-2}(-\sin x)\\&=\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}\\&=\sec x\tan x\end{aligned}$$

ข้อ 4-5 เป็นแบบฝึกหัด และ ข้อ 6-10 พิสูจน์ในทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 3.6.1 ข้อ 2 □

ตัวอย่าง 3.6.3 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x)=\sin(\sqrt{x})$

   วิธีทำ $f'(x)=\cos(\sqrt{x})\cdot(\sqrt{x})'=\cos(\sqrt{x})\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$

2. $f(x)=\sin 2x\cos 5x$

   วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}f'(x)&=(\sin 2x)(\cos 5x)'+(\sin 2x)'(\cos 5x)\\&=(\sin 2x)(-5\sin 5x)+(2\cos 2x)(\cos 5x)\\&=-5\sin 2x\sin 5x+2\cos 2x\cos 5x\end{aligned}$$

3. $f(x)=\tan(\ell\text{n}x)+\ell\text{n}(\tan x)$

   วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}f'(x)&=\sec^2(\ell\text{n}x)\cdot(\ell\text{n}x)'+\frac{1}{\tan x}\cdot(\tan x)'\\&=\sec^2(\ell\text{n}x)\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{\tan x}\cdot\sec^2 x\\&=\frac{\sec^2(\ell\text{n}x)}{x}+\frac{\sec^2 x}{\tan x}\\&=\frac{\sec^2(\ell\text{n}x)}{x}+\frac{\cos x}{\sin x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\\&=\frac{\sec^2(\ell\text{n}x)}{x}+\sec x\csc x\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3.6.4 จงหาอนุพันธ์ต่อไปนี้

1. $\dfrac{d}{dx}\left(e^{\sec x}+\sec^2 x\right)$

   วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(e^{\sec x}+\sec^2 x\right) &= e^{\sec x}\cdot(\sec x)' + 2(\sec x)\cdot(\sec x)' \\ &= e^{\sec x}\cdot \sec x\tan x + 2(\sec x)\cdot(\sec x\tan x) \\ &= e^{\sec x}\sec x\tan x + 2\sec^2 x\tan x\end{aligned}$$

2. $\dfrac{d}{dx}\cot^2(x^2)$

   วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\cot^2(x^2) &= 2(\cot(x^2))\cdot(\cot(x^2))' \\ &= 2(\cot(x^2))\cdot(-\csc(x^2)\cot(x^2))\cdot(x^2)' \\ &= 2(\cot(x^2))\cdot(-\csc(x^2)\cot(x^2))\cdot 2x \\ &= -4x\cot^2(x^2)\csc(x^2)\end{aligned}$$

3. $\dfrac{d}{dx}\dfrac{1}{\sqrt{\csc^2 x-1}}$

   วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{\csc^2 x-1}} &= \frac{d}{dx}(\csc^2 x-1)^{-\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1}{2}(\csc^2 x-1)^{-\frac{3}{2}}\cdot(\csc^2 x-1)' \\ &= -\frac{1}{2}(\csc^2 x-1)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2(\csc x)\cdot(\csc x)' \\ &= -\frac{1}{2}(\csc^2 x-1)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2(\csc x)\cdot(-\csc x\cot x) \\ &= \frac{\csc^2 x\cot x}{(\csc^2 x-1)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3.6.5 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y=\sin x\sin^2 2x\sin^3 3x$

วิธีทำ จะได้ว่า $\ell\text{n}y = \ell\text{n}(\sin x)+2\ell\text{n}(\sin 2x)+3\ell\text{n}(\sin 3x)$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\ell\text{n}y) &= \frac{1}{\sin x}\cdot\cos x + 2\cdot\frac{1}{\sin 2x}\cdot 2\cos 2x + 3\cdot\frac{1}{\sin 3x}\cdot 3\cos 3x \\ \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= \cot x + 4\cot 2x + 9\cot 3x \\ \frac{dy}{dx} &= y(\cot x + 4\cot 2x + 9\cot 3x) \\ &= \sin x\sin^2 2x\sin^3 3x(\cot x + 4\cot 2x + 9\cot 3x)\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3.6.6 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $y = (\text{sin}x)^x$

   วิธีทำ จะได้ว่า $\ell\text{n}y = x\ell\text{n}(\text{sin}x)$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\ell\text{n}y) &= x\frac{d}{dx}\ell\text{n}(\text{sin}x) + \ell\text{n}(\text{sin}x)\frac{d}{dx}x \\ \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= x \cdot \frac{1}{\text{sin}x} \cdot \text{cos}x + \ell\text{n}(\text{sin}x) \cdot 1 \\ \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= x\text{cot}x + \ell\text{n}(\text{sin}x) \\ \frac{dy}{dx} &= y(x\text{cot}x + \ell\text{n}(\text{sin}x)) \\ &= (\text{sin}x)^x(x\text{cot}x + \ell\text{n}(\text{sin}x))\end{aligned}$$

2. $y = (\text{tan}x)^{\text{cos}x}$

   วิธีทำ จะได้ว่า $\ell\text{n}y = \text{cos}x\ell\text{n}(\text{tan}x)$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\ell\text{n}y) &= \text{cos}x\frac{d}{dx}\ell\text{n}(\text{tan}x) + \ell\text{n}(\text{tan}x)\frac{d}{dx}\text{cos}x \\ \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= \text{cos}x \cdot \frac{1}{\text{tan}x} \cdot \text{sec}^2x + \ell\text{n}(\text{tan}x) \cdot (-\text{sin}x) \\ \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= \text{cos}x \cdot \frac{1}{\text{tan}x} \cdot \text{sec}^2x - \text{sin}x\ell\text{n}(\text{tan}x) \\ \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= \text{cot}x\text{sec}x - \text{sin}x\ell\text{n}(\text{tan}x) \\ \frac{dy}{dx} &= y(\text{cot}x\text{sec}x - \text{sin}x\ell\text{n}(\text{tan}x)) \\ &= (\text{tan}x)^{\text{cos}x}(\text{cot}x\text{sec}x - \text{sin}x\ell\text{n}(\text{tan}x))\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3.6.7 จงหาสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = x\text{cos}(\pi x^2)$ ที่จุด $(1, -1)$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= x \cdot (\text{cos}(\pi x^2))' + \text{cos}(\pi x^2) \cdot (x)' \\ &= x \cdot (-\text{sin}(\pi x^2) \cdot (\pi x^2)') + \text{cos}(\pi x^2) \cdot (1) \\ &= x \cdot (-\text{sin}(\pi x^2) \cdot (2\pi x) + \text{cos}(\pi x^2) \\ &= -2\pi x^2\text{sin}(\pi x^2) + \text{cos}(\pi x^2)\end{aligned}$$

จะได้ความชันของเส้นสัมผัสเท่ากับ

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = 0 - 1 = -1$$

ดังนั้นสมการของเส้นสัมสัมผล $y = x\text{cos}(\pi x^2)$ ที่จุด $(1, -1)$ คือ $y = -1(x - 1) - 1$ หรือ

$$y = -x$$

เมื่อเราทราบอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ต่อมาจะศึกษาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผันทั้ง 6 ฟังก์ชัน คือ อาร์กไซน์ อาร์กโคไซน์ อาร์กแทนเจนต์ อาร์กโคแทนเจนต์ อาร์กเซแคนต์ และอาร์กโคเซแคนต์ โดยอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผันเหล่านั้นพิสูจน์ได้โดยอาศัยทฤษฎีบทฟังก์ชันผกผัน

ทฤษฎีบท 3.6.8 ให้ $u = u(x)$ จะได้ว่า

1. $\dfrac{d}{dx}\text{arcsin}x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
2. $\dfrac{d}{dx}\text{arccos}x = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
3. $\dfrac{d}{dx}\text{arcsin}u(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-[u(x)]^2}}u'(x)$
4. $\dfrac{d}{dx}\text{arccos}u(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-[u(x)]^2}}u'(x)$

บทพิสูจน์. 1. ให้ $y = \text{sin}x$ เมื่อ $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ แล้ว $\dfrac{dy}{dx} = \text{cos}x$ โดยทฤษฎีบทฟังก์ชันผกผันจะได้

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\text{cos}x} = \frac{1}{\sqrt{1-\text{sin}^2x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

ดังนั้น $\dfrac{d}{dx}\text{arcsin}x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

2. ให้ $y = \text{cos}x$ เมื่อ $x \in [0, \pi]$ แล้ว $\dfrac{dy}{dx} = -\text{sin}x$ โดยทฤษฎีบทฟังก์ชันผกผันจะได้

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{-\text{sin}x} = -\frac{1}{\sqrt{1-\text{cos}^2x}} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

ดังนั้น $\dfrac{d}{dx}\text{arccos}x = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

3. ให้ $f(x) = \text{arcsin}x$ แล้ว $f \circ u(x) = \text{arcsin}u(x)$ และ $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ โดยกฎลูกโซ่จะได้

$$\begin{aligned}(f \circ u)'(x) &= f'(u(x)) \cdot u'(x) \\ \frac{d}{dx}\text{arcsin}u(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-[u(x)]^2}} \cdot u'(x)\end{aligned}$$

4. ให้ $f(x) = \text{arccos}x$ แล้ว $f \circ u(x) = \text{arccos}u(x)$ และ $f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ โดยกฎลูกโซ่จะได้

$$\begin{aligned}(f \circ u)'(x) &= f'(u(x)) \cdot u'(x) \\ \frac{d}{dx}\text{arccos}u(x) &= -\frac{1}{\sqrt{1-[u(x)]^2}} \cdot u'(x)\end{aligned}$$

□

ทฤษฎีบท 3.6.9 ให้ $u = u(x)$ จะได้ว่า

1. $\dfrac{d}{dx}\text{arctan}x = \dfrac{1}{1+x^2}$
2. $\dfrac{d}{dx}\text{arccot}x = -\dfrac{1}{1+x^2}$
3. $\dfrac{d}{dx}\text{arctan}u(x) = \dfrac{1}{1+[u(x)]^2}u'(x)$
4. $\dfrac{d}{dx}\text{arccot}u(x) = -\dfrac{1}{1+[u(x)]^2}u'(x)$

บทพิสูจน์. เป็นแบบฝึกหัด (พิสูจน์ในทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 3.6.9) □

ทฤษฎีบท 3.6.10 ให้ $u = u(x)$ จะได้ว่า

1. $\dfrac{d}{dx}\text{arcsec}x = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$
2. $\dfrac{d}{dx}\text{arccsc}\, x = -\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$
3. $\dfrac{d}{dx}\text{arcsec}u(x) = \dfrac{1}{|u(x)|\sqrt{[u(x)]^2-1}}u'(x)$
4. $\dfrac{d}{dx}\text{arccsc}u(x) = -\dfrac{1}{|u(x)|\sqrt{[u(x)]^2-1}}u'(x)$

บทพิสูจน์. 1. ให้ $y = \text{sec}x$ เมื่อ $x \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$ $\dfrac{dy}{dx} = \text{sec}x\text{tan}x$

กรณี $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ จะได้ว่า $y = \text{sec}x > 0$ และ $\text{tan}x > 0$ โดยทฤษฎีบทฟังก์ชันผกผันจะได้

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\text{sec}x\text{tan}x} = \frac{1}{\text{sec}x\sqrt{\text{sec}^2x-1}} = \frac{1}{y\sqrt{y^2-1}}$$

กรณี $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$ จะได้ว่า $y = \text{sec}x < 0$ และ $\text{tan}x < 0$ โดยทฤษฎีบทฟังก์ชันผกผันจะได้

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\text{sec}x\text{tan}x} = \frac{1}{\text{sec}x\left(-\sqrt{\text{sec}^2x-1}\right)} = \frac{1}{-y\sqrt{y^2-1}}$$

จากทั้ง 2 กรณีสรุปได้ว่า $\dfrac{x}{dy} = \dfrac{1}{|y|\sqrt{y^2-1}}$ ดังนั้น

$$\frac{d}{dx}\text{arcsec}x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

3. ให้ $f(x) = \text{arcsec}x$ แล้ว $f \circ u(x) = \text{arcsec}u(x)$ และ $f'(x) = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$ โดยกฎลูกโซ่จะได้

$$(f \circ u)'(x) = f'(u(x)) \cdot u'(x)$$
$$\frac{d}{dx}\text{arcsin}u(x) = \frac{1}{|u(x)|\sqrt{[u(x)]^2-1}} \cdot u'(x)$$

ข้อ 2 และ 4 พิสูจน์ในทำนองเดียวกับข้อ 1 และ 3 ตามลำดับ □

ตัวอย่าง 3.6.11 จงหาอนุพันธ์ต่อไปนี้

1. $\dfrac{d}{dx}(\text{arcsin}x\text{arccos}x)$

   วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\text{arcsin}x\text{arccos}x) &= (\text{arcsin}x)\frac{d}{dx}(\text{arccos}x) + (\text{arccos}x)\frac{d}{dx}(\text{arcsin}x)\\ &= \text{arcsin}x\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) + \text{arccos}x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\\ &= \frac{\text{arccos}x - \text{arcsin}x}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

2. $\dfrac{d}{dx}\left(e^{\text{arctan}x}\right)$

   วิธีทำ จะได้ว่า

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\text{arctan}x}\right) = e^{\text{arctan}x}\frac{d}{dx}(\text{arctan}x) = e^{\text{arctan}x} \cdot \frac{1}{1+x^2} = \frac{e^{\text{arctan}x}}{1+x^2}$$

3. $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{\text{arccsc}x}\right)$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\text{arccsc}x}\right) &= \frac{1}{2}(\text{arcsec}x)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(\text{arcsec}x)\\ &= \frac{1}{2\sqrt{\text{arcsec}x}}\cdot\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}\\ &= \frac{1}{2|x|\sqrt{(x^2-1)\text{arcsec}x}}\end{aligned}$$

4. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\text{arctan}x+1}{\text{arccot}x+1}\right)$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{\text{arctan}x+1}{\text{arccot}x+1}\right) &= \frac{(\text{arccot}x+1)\frac{d}{dx}(\text{arctan}x+1)-(\text{arctan}x+1)\frac{d}{dx}(\text{arccot}x+1)}{(\text{arccot}x+1)^2}\\ &= \frac{(\text{arccot}x+1)\cdot\frac{1}{1+x^2}-(\text{arctan}x+1)\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)}{(\text{arccot}x+1)^2}\\ &= \frac{\text{arccot}x+\text{arctan}x+2}{(1+x^2)(\text{arccot}x+1)^2}\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3.6.12 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x)=\text{arcsin}x^2+\text{arcsin}^2x$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}}\cdot(x^2)'+2(\text{arcsin}x)(\text{arcsin}x)'\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\cdot(2x)+2(\text{arcsin}x)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\\ &= \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}+\frac{2\text{arcsin}x}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

2. $f(x)=\ell\text{n}(\text{arcsec}(e^x))$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1}{\text{arcsec}(e^x)}\cdot(\text{arcsec}(e^x))'\\ &= \frac{1}{\text{arcsec}(e^x)}\cdot\frac{1}{|e^x|\sqrt{(e^x)^2-1}}\cdot(e^x)'\\ &= \frac{1}{\text{arcsec}(e^x)}\cdot\frac{1}{e^x\sqrt{e^{2x}-1}}\cdot e^x\\ &= \frac{1}{\text{arcsec}(e^x)\cdot\sqrt{e^{2x}-1}}\end{aligned}$$

3. $f(x) = x\text{arctan}(\ell\text{n}x)$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f'(x) &= x(\text{arctan}(\ell\text{n}x))' + (x)'\text{arctan}(\ell\text{n}x) \\ &= x \cdot \frac{1}{1+(\ell\text{n}x)^2} \cdot (\ell\text{n}x)' + 1 \cdot \text{arctan}(\ell\text{n}x) \\ &= x \cdot \frac{1}{1+\ell\text{n}^2 x} \cdot \frac{1}{x} + \text{arctan}(\ell\text{n}x) \\ &= \frac{1}{1+\ell\text{n}^2 x} + \text{arctan}(\ell\text{n}x) \end{aligned}$$

4. $f(x) = \dfrac{\text{arctan}x}{\sqrt{\text{arctan}x^2}}$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\sqrt{\text{arctan}x^2})(\text{arctan}x)' - (\text{arctan}x)(\sqrt{\text{arctan}x^2})'}{(\sqrt{\text{arctan}x^2})^2} \\ &= \frac{(\sqrt{\text{arctan}x^2}) \cdot \frac{1}{1+x^2} - (\text{arctan}x)\frac{1}{2}(\text{arctan}x^2)^{-\frac{1}{2}}(\text{arctan}x^2)'}{\text{arctan}x^2} \\ &= \frac{\sqrt{\text{arctan}x^2} \cdot \frac{1}{1+x^2} - (\text{arctan}x)\frac{1}{2\sqrt{\text{arctan}x^2}} \cdot \frac{1}{1+(x^2)^2}(x^2)'}{\text{arctan}x^2} \\ &= \frac{\sqrt{\text{arctan}x^2} \cdot \frac{1}{1+x^2} - (\text{arctan}x)\frac{1}{2\sqrt{\text{arctan}x^2}} \cdot \frac{1}{1+(x^2)^2}(2x)}{\text{arctan}x^2} \\ &= \frac{\sqrt{\text{arctan}x^2} \cdot \frac{1}{1+x^2} - (\text{arctan}x)\frac{x}{(1+x^4)\sqrt{\text{arctan}x^2}}}{\text{arctan}x^2} \\ &= \frac{(1+x^4)\text{arctan}x^2 - x(1+x^2)\text{arctan}x}{(1+x^2)(1+x^4)\text{arctan}x^2\sqrt{\text{arctan}x^2}} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3.6.13 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = x^{\text{arcsin}x}$

วิธีทำ จะได้ว่า $\ell\text{n}y = \text{arcsin}x\ell\text{n}x$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\ell\text{n}y) &= \text{arcsin}x\frac{d}{dx}\ell\text{n}x + \ell\text{n}x\frac{d}{dx}\text{arcsin}x \\ \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= \text{arcsin}x \cdot \frac{1}{x} + \ell\text{n}x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= \frac{\text{arcsin}x}{x} + \frac{\ell\text{n}x}{\sqrt{1-x^2}} \\ \frac{dy}{dx} &= y\left(\frac{\text{arcsin}x}{x} + \frac{\ell\text{n}x}{\sqrt{1-x^2}}\right) \\ &= x^{\text{arcsin}x}\left(\frac{\text{arcsin}x}{x} + \frac{\ell\text{n}x}{\sqrt{1-x^2}}\right) \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3.6.14 จงหาความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = \ell\text{n}(\text{arctan}x)$ ที่จุด $x = 1$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\text{arctan}x} \cdot (\text{arctan}x)' \\ &= \frac{1}{\text{arctan}x} \cdot \frac{1}{1+x^2} \\ &= \frac{1}{(1+x^2)\text{arctan}x}\end{aligned}$$

จะได้ความชันของเส้นสัมผัสเท่ากับ

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = \frac{1}{2\text{arctan}1} = \frac{1}{2 \cdot \frac{\pi}{4}} = \frac{2}{\pi}$$

แบบฝึกหัด 3.6

1. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

   1.1 $f(x) = \text{cot}x\text{sec}^2x$

   1.2 $f(x) = \text{sin}2x + x\text{cos}x$

   1.3 $f(x) = e^x\text{tan}e^x$

   1.4 $f(x) = e^{-\text{cot}x^2}$

   1.5 $f(x) = \sqrt{e^{-x^2} + \text{cos}x}$

   1.6 $f(x) = 2^{\text{sec}x}\text{cot}(xe^x)$

   1.7 $f(x) = \dfrac{\text{sin}(2e^x)}{1 + \text{tan}(x^{-1})} + e^{\text{tan}x}$

   1.8 $f(x) = xe^{e^x} + \text{sin}^2x + \text{sin}x^2\text{cos}(e^x)$

   1.9 $f(x) = \text{sin}(\text{sec}\sqrt{x})$

   1.10 $f(x) = e^{\text{tan}x} + \text{sin}^5x$

2. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

   2.1 $f(x) = x^{\text{cos}x}$

   2.2 $f(x) = (\text{tan}x)^{\text{cot}x}$

   2.3 $f(x) = (1 + x)^{\ell\text{n}x}$

   2.4 $f(x) = (\ell\text{n}x)^{e^x}$

3. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

   3.1 $y = \sqrt{\dfrac{(x^2-1)^5(1-x-x^3)^9}{\text{tan}^3x\text{cos}^7\ell\text{n}x}}$

   3.2 $y = (1 + \sqrt{x})^{10}\text{sec}^5(\text{cos}x)\text{tan}^7x$

   3.3 $y = \left(\dfrac{\text{cos}x(x^2 - \text{sec}x)^{14}}{(x + \text{cos}x)^3(x+1)^5}\right)^3$

   3.4 $y = \sqrt[3]{\dfrac{\ell\text{n}x^2(\text{sin}x)^5}{(1-x^2)^9}}$

4. ให้ $y = \text{sin}u\text{cos}u$ และ $u = e^{\text{sec}x}$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

5. จงหาสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = e^x\text{cos}(\pi e^x)$ ที่จุด $(0, -1)$

6. จงแสดงว่า $y = 2\text{cos}x + 3\text{sin}x$ สอดคล้องสมการ $y'' + y = 0$

7. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

7.1 $f(x) = \text{arcsin}(x^2+1)$

7.2 $f(x) = \sqrt{x - \text{arccos}x^2}$

7.3 $f(x) = x^3\text{arcsin}(e^x + x)$

7.4 $f(x) = \text{arctan}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

7.5 $f(x) = \text{arccsc}^3 x$

7.6 $f(x) = \text{cos}(\text{arctan}x)\text{sin}2x$

7.7 $f(x) = \text{arccot}3x\text{arctan}4x$

7.8 $f(x) = \dfrac{\text{arcsin}(e^x)}{2x + \text{arccos}x}$

8. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

8.1 $f(x) = x^{\text{arctan}x}$

8.2 $f(x) = (\text{arcsin}x)^x$

8.3 $f(x) = (\text{arccos}x)^{\text{arcsin}x}$

8.4 $f(x) = (\sqrt{x})^{\text{arccos}x}$

9. จงหาความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = e^{\text{arctan}x}$ ที่จุด $x = 1$

10. จงหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = \ell\text{n}(e^{x+1} + \text{arccos}x)$ ที่จุด $x = 0$

11. กำหนดให้ $f(x) = \left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{\text{arcsin}x}$ จงหา $f'(0)$

12. จงพิสูจน์ว่า

12.1 $\dfrac{d}{dx}\text{arcsec}x = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

12.2 $\dfrac{d}{dx}\text{arccsc}\,x = -\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

12.3 $\dfrac{d}{dx}\text{arccsc}\,x = -\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

12.4 $\dfrac{d}{dx}\text{arcsec}u(x) = \dfrac{1}{|u(x)|\sqrt{[u(x)]^2-1}}u'(x)$

12.5 $\dfrac{d}{dx}\text{arccsc}u(x) = -\dfrac{1}{|u(x)|\sqrt{[u(x)]^2-1}}u'(x)$

12.6 $\dfrac{d}{dx}\text{arccsc}u(x) = -\dfrac{1}{|u(x)|\sqrt{[u(x)]^2-1}}u'(x)$

3.7 อนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย

ในหัวข้อที่ผ่านมาเราหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันในรูป $y = f(x)$ เราจะเรียกฟังก์ชันลักษณะแบบนี้ว่า**ฟังก์ชันชัดแจ้ง** (explicit function) แต่ในหัวข้อนี้จะศึกษาการอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่อยู่ในรูปแบบ

$$F(x, y) = c$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัว และ x เป็นตัวแปรอิสระ และ y เป็นตัวแปรที่ขึ้นกับ x เรียกฟังก์ชันแบบนี้ว่า **ฟังก์ชันโดยปริยาย** (implicit function) อนุพันธ์ของฟังก์ชันลักษณะนี้เรียกว่า **อนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย** (differentiation of implicit function) และหาอนุพันธ์ดังกล่าวโดยอาศัยกฎลูกโซ่ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.7.1 จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

1. $x^3 + y^3 = xy$
   วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(x^3 + y^3) &= \frac{d}{dx}(xy) \\
3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} &= x\frac{dy}{dx} + y \cdot 1 \\
(3y^2 - x)\frac{dy}{dx} &= y - 3x^2 \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{y - 3x^2}{3y^2 - x}
\end{aligned}$$

2. $x^3 + y^2x + x^2y = 5$
   วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(x^3 + y^2x + x^2y) &= \frac{d}{dx}(5) \\
3x^2 + \left(y^2 \cdot 1 + x \cdot 2y\frac{dy}{dx}\right) + \left(x^2\frac{dy}{dx} + y \cdot (2x)\right) &= 0 \\
(2xy + x^2)\frac{dy}{dx} &= -3x^2 - y^2 - 2xy \\
\frac{dy}{dx} &= -\frac{3x^2 + y^2 + 2xy}{2xy + x^2}
\end{aligned}$$

3. $xe^y + ye^x = 1$
   วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(xe^y + ye^x) &= \frac{d}{dx}(1) \\
x\frac{d}{dx}(e^y) + e^y\frac{dx}{dx} + y\frac{d}{dx}(e^x) + e^x\frac{dy}{dx} &= 0 \\
xe^y\frac{dy}{dx} + e^y \cdot 1 + ye^x + e^x\frac{dy}{dx} &= 0 \\
\frac{dy}{dx} &= -\frac{ye^x + e^y}{xe^y + e^x}
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3.7.2 จงหา $\frac{dy}{dx}$

1. $\sqrt{xy+y} = x^2y$

   วิธีทำ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\sqrt{xy+y} &= \frac{d}{dx}(x^2y) \\
\frac{1}{2}(xy+y)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(xy+y) &= x^2\frac{dy}{dx} + y\cdot(2x) \\
\frac{1}{2\sqrt{xy+y}}\left(x\frac{dy}{dx} + y\cdot 1 + 1\right) &= 2x^2\sqrt{xy+y}\frac{dy}{dx} + 4xy\sqrt{xy+y} \\
x\frac{dy}{dx} + y + 1 &= 2x^2\sqrt{xy+y}\frac{dy}{dx} + 4xy\sqrt{xy+y} \\
\left(x - 2x^2\sqrt{xy+y}\right)\frac{dy}{dx} &= 4xy\sqrt{xy+y} - y - 1 \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{4xy\sqrt{xy+y} - y - 1}{x - 2x^2\sqrt{xy+y}}
\end{aligned}
$$

2. $\text{sin}(xy) = x\text{cos}y$

   วิธีทำ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\text{sin}(xy) &= \frac{d}{dx}(x\text{cos}y) \\
\text{cos}(xy)\frac{d}{dx}(xy) &= x\frac{d}{dx}\text{cos}y + \text{cos}y\cdot 1 \\
\text{cos}(xy)\left(x\frac{dy}{dx} + y\right) &= -x\text{sin}y\frac{dy}{dx} + \text{cos}y \\
(x\text{cos}(xy) + x\text{sin}y)\frac{dy}{dx} &= \text{cos}y - y\text{cos}(xy) \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{\text{cos}y - y\text{cos}(xy)}{x\text{cos}(xy) + x\text{sin}y}
\end{aligned}
$$

3. $\text{arctan}(x+y) = x\ell\text{n}y$

   วิธีทำ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\text{arctan}(x+y) &= \frac{d}{dx}(x\ell\text{n}y) \\
\frac{1}{1+(x+y)^2}\frac{d}{dx}(x+y) &= x\frac{d}{dx}\ell\text{n}y + \ell\text{n}y\cdot 1 \\
\frac{1}{x^2+y^2+2xy+1}\left(1+\frac{dy}{dx}\right) &= x\cdot\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} + \ell\text{n}y \\
y\left(1+\frac{dy}{dx}\right) &= x(x^2+y^2+2xy+1)\frac{dy}{dx} + y(x^2+y^2+2xy+1)\ell\text{n}y \\
(y - x^3 - xy^2 - 2x^2y - x)\frac{dy}{dx} &= y(x^2+y^2+2xy+1)\ell\text{n}y - y \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{y(x^2+y^2+2xy+1)\ell\text{n}y - y}{y - x^3 - xy^2 - 2x^2y - x}
\end{aligned}
$$

ตัวอย่าง 3.7.3 จงหาสมการเส้นสัมผัสเส้นวงกลม $x^2 + y^2 = 25$ ที่จุด $(3, 4)$

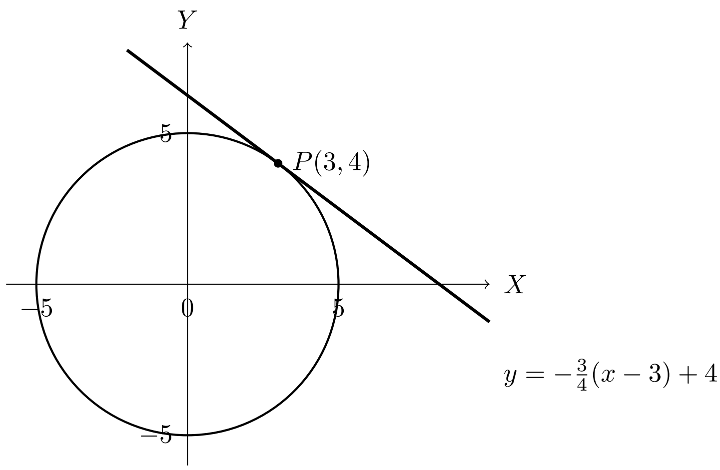
วิธีทำ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) &= \frac{d}{dx}(25) \\
2x + 2y\frac{dy}{dx} &= 0 \\
\frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{y}
\end{aligned}
$$

ความชันของเส้นสัมผัสที่จุด $(3, 4)$ เท่ากับ $-\frac{3}{4}$ ดังนั้นสมการของเส้นสัมผัสคือ

$$
y = -\frac{3}{4}(x - 3) + 4
$$

อาจแสดงได้ดังกราฟต่อไปนี้



ตัวอย่าง 3.7.4 จงหาความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $\arctan(xy) + xy = \sqrt{xy} + \frac{\pi}{4}$ ที่จุด $(1, 1)$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\arctan(xy) + xy) &= \frac{d}{dx}\left(\sqrt{xy} + \frac{\pi}{4}\right) \\
\frac{1}{1 + (xy)^2}\frac{d}{dx}(xy) + x\frac{dy}{dx} + y &= \frac{1}{2}(xy)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(xy) \\
\frac{1}{1 + (xy)^2}\left(x\frac{dy}{dx} + y\right) + x\frac{dy}{dx} + y &= \frac{1}{2\sqrt{xy}}\left(x\frac{dy}{dx} + y\right)
\end{aligned}
$$

หาความชันของเส้นสัมผัสที่จุด $(1, 1)$ โดยแทนค่า $x = 1$ และ $y = 1$ นั่นคือ

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1 + 1}\left(\frac{dy}{dx} + 1\right) + \frac{dy}{dx} + 1 &= \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx} + 1\right) \\
\frac{dy}{dx} &= -1
\end{aligned}
$$

ดังนั้นความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งนี้เท่ากับ -1

ตัวอย่าง 3.7.5 กำหนดให้ $y\text{sin}x = xe^y$ จงหา y''

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
(y\text{sin}x)' &= (xe^y)' \\
y\text{cos}x + y'\text{sin}x &= xe^y y' + e^y \\
(y\text{cos}x + y'\text{sin}x)' &= (xe^y y' + e^y)' \\
(y'\text{cos}x - y\text{sin}x) + (y''\text{sin}x + y'\text{cos}x) &= e^y y' + xe^y y'y' + xe^y y'' + e^y y' \\
(\text{sin}x - xe^y)y'' &= 2e^y y' + xe^y y'y' + y\text{sin}x - 2y'\text{cos}x \\
y'' &= \frac{2e^y y' + xe^y y'y' + y\text{sin}x - 2y'\text{cos}x}{\text{sin}x - xe^y}
\end{aligned}$$

แบบฝึกหัด 3.7

1. จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

   1.1 $4x^2 + 9y^2 = 36$

   1.2 $y^2 - x^2 = 1$

   1.3 $y\text{cos}x + xy = y^2$

   1.4 $2x^2 - 4xy + y^2 - 5x + 3y = 10$

   1.5 $\sqrt{x\text{sin}y} + \sqrt{y} = 0$

   1.6 $\sqrt{x + \sqrt{y}} + \sqrt{y + \sqrt{x}} = 1$

   1.7 $(x^2y^3 + x^3y^2)^2 = xy^2 - yx^2 + 3$

   1.8 $e^{xy} + \text{cos}(xy) = x\text{tan}y$

2. จงหา y''

   2.1 $\text{arctan}y = xy$

   2.2 $\sqrt{xy} - 1 = x + y$

   2.3 $y\text{sec}x = y + \text{cot}x$

   2.4 $x = \dfrac{1}{\sqrt{x + y}}$

3. กำหนดให้ $y = x^y$ จงหา y'''

4. จงสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $yx^2 + xy^2 = 2xy$ ที่จุด $(1, 1)$

5. จงสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $x\ell\text{n}y + 9 = 5x - xy^2 + \text{cos}\pi x$ ที่จุด $(2, 1)$

สรุป

ในบทนี้เริ่มต้นด้วยอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย และอัตราการเปลี่ยนแปลงขณะหนึ่ง ของการเคลื่อนที่ของวัตถุ จากนั้นขยายแนวคิดไปยังฟังก์ชันหนึ่งตัวแปร แล้วเรียก

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

อัตราการเปลี่ยนแปลงขณะหนึ่งของฟังก์ชัน f ที่จุด a ว่าอนุพันธ์ของ f ที่จุด a ถ้าลิมิตนั้นหาค่าได้ และได้อีกด้วยว่าความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด $x = a$ คือ $f'(a)$ ต่อมาศึกษากฎพื้นฐานเกี่ยวกับอนุพันธ์ เช่น กฎการบวก กฎการคูณ และกฎการหาร และสิ่งสำคัญในการนำไปใช้หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่ซับซ้อนมากยิ่งขึ้นคือ กฎลูกโซ่ที่กล่าวไว้ว่า

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

ในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันผกผันก็จะอาศัยทฤษฎีบทฟังก์ชันผกผันที่กล่าวไว้ว่า $\frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 1$ จากนั้นนิยามอนุพันธ์อันดับที่มากกว่า 1 เช่น 2 และ 3 เป็นต้น เรียกว่าอนุพันธ์อันดับสูง โดยการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันอันดับ n หาได้จากอนุพันธ์ของฟังก์ชันอันดับที่ $n - 1$ จากนั้นศึกษาอนุพันธ์ของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง ฟังก์ชันลอการิทึม ฟังก์ชันตรีโกณมิติ และฟังก์ชันฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน สุดท้ายสนใจการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยายที่อยู่ในรูปแบบ $F(x, y) = c$ โดยที่ c เป็นค่าคงตัว และ x เป็นตัวแปรอิสระ และ y เป็นตัวแปรที่ขึ้นกับ x โดยอาศัยกฎลูกโซ่ในการหาอนุพันธ์

แบบฝึกหัดบทที่ 3

1. ให้ $y = f(x)$ จงหาอัตราการอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x

   1.1 $f(x) = x|x|$ บนช่วง $[-3, 1]$

   1.2 $f(x) = \sqrt{2x^2 - 1}$ บนช่วง $[1, 5]$

2. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

   2.1 $f(x) = \sqrt[3]{x}$

   2.2 $f(x) = \dfrac{x+3}{2}$

3. จงหาสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้งของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่จุด $x = a$

   3.1 $f(x) = 1 + x^2$; $a = -1$

   3.2 $f(x) = \sqrt{x+1}$; $a = 3$

4. จงตราจสอบว่าฟังก์ชันต่อไปนี้หาอนุพันธ์ได้ที่จุด $x = 0$ หรือไม่

   4.1 $f(x) = \begin{cases} x\text{sin}\frac{1}{x} & \text{เมื่อ } x \neq 0 \\ 0 & \text{เมื่อ } x = 0 \end{cases}$

   4.2 $f(x) = \begin{cases} x^2\text{sin}\frac{1}{x} & \text{เมื่อ } x \neq 0 \\ 0 & \text{เมื่อ } x = 0 \end{cases}$

5. ให้ $f'(x) = |x+1| - |x-1| + |x-3|$ จงหา $f'(2)$

6. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

   6.1 $f(x) = \sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x}$

   6.2 $f(x) = (x^3 - 1)(2 - x - x^2)$

   6.3 $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1}$

   6.4 $f(x) = \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{1}{\sqrt{x}} + 3$

   6.5 $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x}{2x - 1}$

   6.6 $y = \dfrac{(x^2-1)(x^3+x)}{x^2+1}$

7. ถ้า f, g, h และ k เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ จงแสดงว่า

$$[fghk]'(x) = [f'ghk + fg'hk + fgh'k + fghk'](x)$$

8. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

   8.1 $F(x) = (x^4 + 3x^2 - 2)^5$

   8.2 $F(x) = \sqrt[4]{x^3 + 2x + 1}$

   8.3 $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^3 - x}}$

   8.4 $g(t) = \dfrac{1}{(t^4+1)^3}$

   8.5 $g(x) = (x+1)^{\frac{4}{3}}(x^2+1)^4$

   8.6 $f(t) = \sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{t}+1}{\sqrt{t}-1}}$

9. จงหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง (bullet-nose) $y = \dfrac{|x|}{\sqrt{2-x^2}}$ ที่จุด $(1,1)$

10. ให้ $y = w\left(\dfrac{3+u}{3-u}\right)$, $u = \sqrt{7-3x}$, $x = 1+t^2$ เมื่อ $w'(2) = 2$ จงหา $\dfrac{dy}{dt}$ ที่ $t = 1$

11. ให้ $y = \dfrac{f(1+\sqrt{x})}{g(1-\sqrt{x})}$, $x = 3+t^2$ เมื่อ $f(3) = 2,\ g(-1) = 4,\ f'(3) = -2,\ g'(-1) = -1$ จงหา $\dfrac{dy}{dt}$ ที่ $t = 1$

12. ให้ $F(x) = f(3f(4f(x)))$ เมื่อ $f(0) = 0$ และ $f'(0) = 2$ จงหา $F'(0)$

13. ให้ $F = f(xf(xf(x)))$ เมื่อ $f(1) = 2, f(2) = 3, f'(1) = 4, f'(2) = 5$ และ $f'(3) = 6$ จงหา $F'(1)$

14. ให้ $f(x) = e^x$ จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันผกผันของ f โดยใช้ทฤษฎีบทฟังก์ชันผกผัน เมื่อกำหนดให้ $\dfrac{d}{dx}e^x = e^x$

15. ให้ $n \in \mathbb{N}$ จงหาอนุพันธ์ของ n ของฟังก์ชันต่อไปนี้

15.1 $f(x) = \dfrac{1}{1+2x}$

15.2 $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

16. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

16.1 $y = x^{2^x}$

16.2 $y = (\ln x)^x$

17. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

17.1 $y = \sqrt{x^e + e^x}$

17.2 $y = (x^2+1)^9 \ln^2(4x+1)\sqrt{(x+1)^{11}}$

17.3 $y = \sqrt[4]{\dfrac{x^3\sqrt{5x-6}}{(2x^2-1)^5}}$

18. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

18.1 $f(x) = \sin x^2 + \cos(1-x^2)$

18.2 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\sec^2 x + \tan x^2}}$

18.3 $f(x) = 2^{\sin x}\tan(\cos x)$

18.4 $f(x) = e^{x^2}\sin^2(\tan^2 x^2)$

18.5 $f(x) = e^x(\cos x + \sin x)$

18.6 $f(x) = x^2[\cos(\ln x) + \sin(\ln x)]$

19. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

19.1 $f(x) = x^{\tan x}$

19.2 $f(x) = (\tan x)^{\cos x}$

20. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = \cos x \cos^2 2x \cos^3 3x \cos^4 4x$

21. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

21.1 $f(x) = \sqrt[3]{\text{arccsc}x^2}$

21.2 $f(x) = \text{arcsec}\sqrt{x}$

21.3 $f(x) = \text{arctan}\left(\frac{x}{2}\right) + \text{arccot}\left(\frac{2}{x}\right)$

21.4 $f(x) = \text{arctan}(\ell\text{n}(\text{tan}x))$

22. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

22.1 $y = x^{\text{arccot}x}$

22.2 $y = (\text{arccos}x)^{\ell\text{n}x}$

23. จงหา $\frac{dy}{dx}$

23.1 $\ell\text{n}xy + \text{arctan}x^2y = \text{sec}^2xy$

23.2 $x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} = 1$

23.3 $\text{cos}^2xy = \text{sin}xy^2$

23.4 $e^{\text{arctan}xy} + \text{sin}(\text{csc}xy) = \text{cot}(\ell\text{n}y)$

24. จงสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $yx^3 + 3xy^2 = 4xy$ ที่จุด $(1,1)$

25. จงสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $e^y\ell\text{n}x + 27 = xy^3 + \text{sin}(\pi x)$ ที่จุด $(1,3)$

เอกสารอ้างอิง

ดำรง ทิพย์โยธา, ยุวรีย์ พันธ์กล้า และณัฏฐนาถ ไตรภพ. (2548). **แคลคูลัส ๑**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

James Stewart. (2012). **Calculus Early Transcendentals**. Seventh Edition. Canada. Nelson Education Ltd.

แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 4

หัวข้อเนื้อหาประจำบท

1. การประมาณค่าเชิงเส้น
2. ค่าสุดขีด
3. ความเว้าและจุดเปลี่ยนเว้า
4. การร่างกราฟ
5. อัตราสัมพัทธ์
6. หลักเกณฑ์ลอปีตาล

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. สามารถใช้ค่าเชิงอนุพันธ์ประมาณค่าที่กำหนดให้ได้อย่างเหมาะสม
2. หาค่าสุดขีดและนำไปใช้แก้ปัญหาค่าสูงสุดต่ำสุดได้
3. สามารถร่างกราฟและบอกองค์ประกอบต่าง ๆ ได้อย่างครบถ้วน
4. ใช้อัตราสัมพัทธ์ในการแก้ปัญหาอัตราสัมพัทธ์ได้
5. ใช้หลักลอปีตาลในการหาลิมิตรูปแบบไม่กำหนดได้ถูกต้อง

วิธีและกิจกรรมการเรียนการสอน

1. **วิธีสอน**
   1.1 วิธีสอนแบบบรรยาย ประกอบสื่ออิเล็กทรอนิกส์
   1.2 ใช้สื่อทางอินเตอร์เน็ต และให้แต่ละคนแสดงความคิดเห็น
   1.3 วิธีสอนแบบอภิปราย โดยให้หัวข้อเป็นกลุ่มและมานำเสนอหน้าชั้น
2. **กิจกรรมการเรียนการสอน**
   2.1 บรรยายสรุปโดยใช้สื่อการสอนประกอบ
   2.2 ให้ผู้เรียนศึกษาเนื้อหาจากชุดการสอน หนังสือ ตำรา เอกสารเพิ่มเติม และสื่อออนไลน์
   2.3 อภิปรายรายกลุ่มตามหัวข้อที่ได้รับมอบหมาย

สื่อการเรียนการสอน

1. ชุดการสอน เรื่อง "การประยุกต์ของอนุพันธ์"
2. สื่ออิเล็กทรอนิกส์ เรื่อง "การประยุกต์ของอนุพันธ์"
3. หนังสือ ตำรา เอกสารที่เกี่ยวข้อง
4. แอพพลิเคชั่น Geogebra
5. แอพพลิเคชั่น Wolfram alpha

การวัดผลและประเมินผล

1. สังเกตการตอบคำถามและตั้งคำถามของผู้เรียนในระหว่างการบรรยายและซักถาม
2. วัดผลจากการทำแบบฝึกหัดระหว่างเรียนตามเนื้อหาที่ได้รับมอบหมาย
3. ประเมินการอภิปรายรายกลุ่ม แล้วบันทึกคะแนนลงในใบบันทึกคะแนน
4. ตรวจการทำการบ้าน บันทึกคะแนนลงในบันทึกผลงาน

บทที่ 4

การประยุกต์ของอนุพันธ์

ในบทนี้จะกล่าวถึงการนำอนุพันธ์ไปประยุกต์ใช้ในด้านต่าง ๆ คือ การประมาณค่าเชิงเส้น การร่างกราฟ การหาค่าสูงสุดต่ำสุด อัตราสัมพัทธ์ และหลักเกณฑ์ลอปิตาล จะทำให้ผู้เรียนได้เข้าใจถึงประโยชน์ของอนุพันธ์และเห็นตัวอย่างในการประยุกต์ในเบื้องต้น

4.1 การประมาณค่าเชิงเส้น

บทนิยาม 4.1.1 กำหนดให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ และ Δx เป็นส่วนที่เปลี่ยนแปลงของ x แล้ว **ค่าเชิงอนุพันธ์** (differential) ของ x เขียนแทนด้วย dx หมายถึง Δx นั่นคือ $\Delta x = dx$ **ค่าเชิงอนุพันธ์**ของ y เขียนแทนด้วย dy กำหนดโดย

$$dy = f'(x)dx \qquad \text{หรือ} \qquad df = f'(x)dx$$

ตัวอย่าง 4.1.2 กำหนดให้ $f(x) = x^2 + 2x$ จงหา dy เมื่อ $x = 1$ และ $\Delta x = 0.1$

วิธีทำ จะได้ว่า $f'(x) = 2x + 2$ ฉะนั้น

$$dy = f'(x)dx = (2x + 2)dx$$

เนื่องจาก เมื่อ $x = 1$ และ $dx = \Delta x = 0.1$ ดังนั้น

$$dy = (2 \cdot 1 + 2)(0.1) = 0.4$$

ตัวอย่าง 4.1.3 จงหาค่าเชิงอนุพันธ์โดยใช้บทนิยาม 4.1.1

1. $d(\text{sin}x)$

   วิธีทำ $d(\text{sin}x) = (\text{sin}x)'dx = (\text{cos}x)dx$

2. $d(\text{arctan}x)$

   วิธีทำ $d(\text{arctan}x) = (\text{arctan}x)'dx = \dfrac{1}{1+x^2}dx$

3. $d(xe^x)$

   วิธีทำ $d(xe^x) = (xe^x)'dx = (xe^x + e^x)dx$

ทฤษฎีบท 4.1.4 กำหนดให้ $u = f(x)$ และ $v = g(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ c เป็นค่าคงตัว และ r เป็นจำนวนตรรกยะ แล้ว

1. $dc = 0$
2. $d(cu) = cdu$
3. $d(u \pm v) = du \pm dv$
4. $d(uv) = udv + vdu$
5. $d(u^r) = ru^{r-1}du$
6. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - vdu}{v^2}$ เมื่อ $v \neq 0$

บทพิสูจน์. ให้ $u = f(x)$ และ $v = g(x)$ จะได้ว่า $du = f'(x)dx$ และ $dv = g'(x)dx$
1. $dc = (c')dx = 0dx = 0$
2. $d(cu) = (cu)'dx = cu'dx = cf'(x)dx = cdu$
3. $d(u \pm v) = (u \pm v)'dx = (u' \pm v')dx = u'dx \pm v'dx = f'(x)dx \pm g'(x)dx = du \pm dv$
4. $d(uv) = (uv)'dx = (u'v + uv')dx = vu'dx + uv'dx = vf'(x)dx + ug'(x)dx = vdu + udv$
ข้อ 5-6 เป็นแบบฝึกหัด $\square$

ตัวอย่าง 4.1.5 จงหาค่าเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

1. $d(x^2 + e^x + \ell\text{n}x)$

   วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} d(x^2 + e^x + \ell\text{n}x) &= xd(x^2) + d(e^x) + d(\ell\text{n}x)dx \\ &= (x^2)'dx + (e^x)'dx + (\ell\text{n}x)'dx \\ &= 2xdx + e^x dx + \frac{1}{x}dx \\ &= \left(2x + e^x + \frac{1}{x}\right)dx \end{aligned}$$

2. $d(x\text{sin}x)$

   วิธีทำ $d(x\text{sin}x) = xd(\text{sin}x) + (\text{sin}x)dx = x(\text{sin}x)'dx + (\text{sin}x)dx = (x\text{cos}x + \text{sin}x)dx$

3. $d(\text{cos}^2 x)$

   วิธีทำ $d(\text{cos}^2 x) = 2(\text{cos}x)d(\text{cos}x) = 2\text{cos}x(\text{cos}x)'dx = -2\text{cos}x\text{sin}xdx$

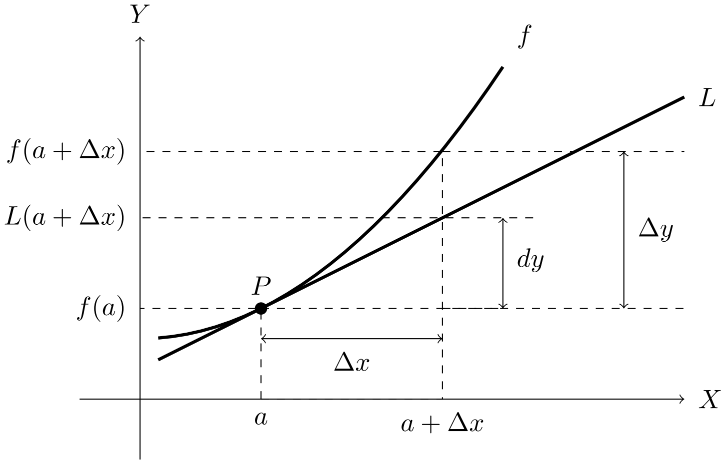
4. $d\left(\frac{x}{e^x}\right)$

   วิธีทำ จะได้ว่า

$$d\left(\frac{x}{e^x}\right) = \frac{e^x dx - xde^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x dx - xe^x dx}{e^{2x}} = \left(\frac{1-x}{e^x}\right)dx$$

กำหนดให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ $x = a$ และ Δy คือส่วนที่เปลี่ยนแปลงของ y บนเส้นโค้ง $y = f(x)$ และ dy คือส่วนที่เปลี่ยนแปลงของ y บนเส้นสัมผัสกับเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด $P(a, f(a))$ ดังรูป

รูปที่ 4.1 แนวคิดการประมาณค่าเชิงเส้น



สมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด $P(a, f(a))$ คือ

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

กำหนดให้ $L(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$ จะเรียก L ว่า**ฟังก์ชันเชิงเส้นของ** f (linear function of f) ที่จุด $x = a$ เมื่อพิจารณากราฟ f และ L จะเห็นว่ากราฟทั้งสองที่จุด $x = 1$ มีค่าใกล้เคียงกัน ถ้า Δx มีค่าใกล้ ๆ ศูนย์ ทำให้ได้ว่า

$$f(a + \Delta x) \approx L(a + \Delta x)$$

เนื่องจาก

$$L(a + \Delta x) = f'(a)(a + \Delta x - a) + f(a) = f(a) + f'(a)\Delta x$$

และ

$$\Delta y = \Delta f = f(a + \Delta x) - f(a) \approx (f(a) + f'(a)\Delta x) - f(x) = f'(a)\Delta x = df$$

นั่นคือ $\Delta f \approx df$ สรุปได้ว่า

$$f(a + \Delta x) \approx f(a) + f'(a)\Delta x$$

จะเรียกว่า **การประมาณค่าเชิงเส้น** (linear approximation) ของ f ที่จุด a

ตัวอย่าง 4.1.6 จงใช้การประมาณค่าเชิงเส้นประมาณค่าของ $\sqrt{16.001}$

วิธีทำ ให้ $f(x) = \sqrt{x}$ จะได้ว่า $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ กำหนดให้ $a = 16$ และ $\Delta x = 0.001$ จาก

$$f(a + \Delta x) \approx f(a) + f'(a)\Delta x$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\sqrt{16.001} = f(16 + 0.001) &\approx f(16) + f'(16) \cdot 0.001 \\ &= \sqrt{16} + \frac{1}{2\sqrt{16}} \cdot 0.001 \\ &= 4 + \frac{1}{8} \cdot 0.001 \\ &= 4.000125\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4.1.7 จงใช้การประมาณค่าเชิงเส้นประมาณค่าของ $\sqrt[3]{7.998}$

วิธีทำ ให้ $f(x) = \sqrt[3]{x}$ จะได้ว่า $f'(x) = \dfrac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$ กำหนดให้ $a = 8$ และ $\Delta x = -0.002$ จาก

$$f(a + \Delta x) \approx f(a) + f'(a)\Delta x$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{7.998} = f(8 - 0.002) &\approx f(8) + f'(8) \cdot (-0.002) \\ &= \sqrt[3]{8} - \frac{1}{3(8)^{\frac{2}{3}}} \cdot 0.002 \\ &= 3 - \frac{1}{6} \cdot 0.002 \\ &= 2.999667\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4.1.8 จงใช้การประมาณค่าเชิงเส้นประมาณค่าของ tan50°

วิธีทำ ให้ $f(x) = \tan x$ จะได้ว่า $f'(x) = \sec^2 x$ กำหนดให้ $a = 45^\circ = \dfrac{\pi}{4}$ และ $\Delta x = 5^\circ = \dfrac{\pi}{36}$ จาก

$$f(a + \Delta x) \approx f(a) + f'(a)\Delta x$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\tan 50^\circ = f\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{36}\right) &\approx f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f'\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{\pi}{36} \\ &= \tan\frac{\pi}{4} + \sec^2\frac{\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{36} \\ &= 1 + 2 \cdot \frac{\pi}{36} \\ &= 1 + \frac{\pi}{18} \\ &= 1.174533\end{aligned}$$

ในการคำนวณค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการวัด กำหนดให้

1. u เป็นปริมาณที่ต้องการวัด
2. $|du|$ เป็น**ค่าคลาดเคลื่อน** (error) ในการวัดของ u
3. $\left|\dfrac{du}{u}\right|$ เป็น**ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์** (relative error) เมื่อ $u \neq 0$ และ

   $\left|\dfrac{du}{u}\right| \times 100$ เป็น**ร้อยละความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์** (percent of relative error)

ตัวอย่าง 4.1.9 เมื่อวัดด้านของลูกบาศก์ลูกหนึ่งยาว 25 เซนติเมตร พบว่าวัดความคลาดเคลื่อนไปด้านละไม่เกิน 0.04 เซนติเมตร จงใช้ค่าเชิงอนุพันธ์ประมาณค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้น พร้อมทั้งหาค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ และค่าคลาดเคลื่อนเป็นกี่เปอร์เซนต์ของปริมาตรนี้

วิธีทำ ให้ V แทนปริมาตรของลูกบาศก์ และ x แทนความยาวด้านของลูกบาศก์
จะได้ว่า $dx = \pm 0.04$ เซนติเมตร และ $a = 25$ และ $V = x^3$ จะได้ว่า $V'(x) = 3x^2$

$$
\begin{aligned}
|dV| &\approx |V'(a)dx| \\
|dV| &\approx |V'(25)(\pm 0.04)| = |3(25)^2(\pm 0.04)| = 75
\end{aligned}
$$

ดังนั้นค่าคลาดเคลื่อนของปริมาตรที่เกิดขึ้นเท่ากับ 75 ลูกบาศก์เซนติเมตร
ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์เท่ากับ

$$\left|\frac{dV}{V}\right| = \frac{75}{25^3} = \frac{3}{625} = 0.0048$$

ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์คิดเป็น

$$\left|\frac{dV}{V}\right| \times 100 = 0.0048 \times 100 = 0.48 \text{ เปอร์เซนต์}$$

แบบฝึกหัด 4.1

1. จงหาค่าเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

    1.1 $d(\tan x)$

    1.2 $d(x\cot x)$

    1.3 $d(e^x \sin x)$

    1.4 $d(\arctan^3 x)$

2. ให้ $f(x) = 3x^2 + 1$ จงหา $\Delta y, dy$ และ $|\Delta y - dy|$ เมื่อ $x = 1$ และ $\Delta x = -0.01$

3. จงหาค่าเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้สำหรับค่า a และ Δx ที่กำหนดให้

    3.1 $f(x) = 2x^2 + 1$; $a = 1$ และ $\Delta x = 0.1$

    3.2 $f(x) = \sqrt{x+1}$; $a = 3$ และ $\Delta x = 0.02$

    3.3 $f(x) = (x+1)\sqrt{x}$; $a = 4$ และ $\Delta x = -0.2$

    3.4 $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$; $a = 3$ และ $\Delta x = 0.03$

4. จงใช้การประมาณค่าเชิงเส้นประมาณค่าของ

    4.1 $\sqrt{81.03}$

    4.2 $\sqrt[3]{15.89}$

    4.3 $\sqrt[4]{127}$

    4.4 $(33)^{\frac{2}{5}}$

    4.5 $\sin(0.03)$

    4.6 $(8.1)^{\frac{4}{3}} + (8.1)^{\frac{2}{3}}$

5. ถังใบรูปทรงกระบอกใบหนึ่งไม่มีฝา ต้องการทาสีด้านนอกรอบถังโดยทาสีหนา 0.25 เซนติเมตร ถ้าวัดรัศมีภายนอกได้ 75 เซนติเมตร และถังสูง 150 เซนติเมตร จงหาปริมาตรของสีที่ใช้ทาถังโดยการประมาณค่าเชิงเส้น

6. ในการวัดด้านของรูปสี่เหลี่ยมจตุรัสรูปหนึ่งซึ่งยาว 16 นิ้ว พบว่าวัดคลาดเคลื่อนไม่เกิน 0.01 นิ้ว เราจะคำนวณพื้นที่คลาดเคลื่อนไปไม่เกินเท่าใด และจงหาค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์และค่าคลาดเคลื่อนคิดเป็นร้อยละของพื้นที่นี้

4.2 ค่าสุดขีด

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงค่าสุดขีดซึ่งหมายถึงค่าสูงสุดหรือต่ำสุดของฟังก์ชัน ซึ่งใช้การตรวจสอบจากอนุพันธ์โดยการแปลความหมายทางเรขาคณิต และนั่นหมายถึงการนำอนุพันธ์ไปใช้ในการแก้ปัญหาค่าสูงสุดต่ำสุดที่มักพบในโลกจริงได้

บทนิยาม 4.2.1 ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันบนช่วง I แล้วจะกล่าวว่า

1. f เป็น**ฟังก์ชันเพิ่ม (increasing function)** บนช่วง I ก็ต่อเมื่อ

$$\text{สำหรับ } x_1 \text{ และ } x_2 \text{ ใน } I \text{ ถ้า } x_1 < x_2 \text{ แล้ว } f(x_1) < f(x_2)$$

2. f เป็น**ฟังก์ชันลด (decreasing function)** บนช่วง I ก็ต่อเมื่อ

$$\text{สำหรับ } x_1 \text{ และ } x_2 \text{ ใน } I \text{ ถ้า } x_1 < x_2 \text{ แล้ว } f(x_1) > f(x_2)$$

ข้อสังเกต 4.2.2 ถ้า f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม (ฟังก์ชันลด) บนช่วง I และ J แล้ว f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม (ฟังก์ชันลด) บนช่วง $I \cup J$

ตัวอย่าง 4.2.3 จงแสดงว่า $f(x) = x^2$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(0, \infty)$

วิธีทำ ให้ $x_1, x_2 \in (0, \infty)$ สมมติว่า $x_1 < x_2$ เนื่องจาก $x_1 > 0$ และ $x_2 > 0$ จะได้ว่า

$$x_1^2 < x_1x_2 \qquad \text{และ} \qquad x_1x_2 < x_2^2$$

นั่นคือ $x_1^2 < x_2^2$ ดังนั้น $f(x_1) < f(x_2)$ สรุปได้ว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(0, \infty)$

การตรวจสอบฟังก์ชันเพิ่มและลดโดยนิยามในบางฟังก์ชันอาจยุ่งยากและอาศัยสมบัติต่าง ๆ มากมาย เราอาจใช้อนุพันธ์มาช่วยในการตรวจสอบได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้ แต่จะไม่พิสูจน์ในวิชานี้

ทฤษฎีบท 4.2.4 ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ และหาอนุพันธ์ได้บนช่วง (a, b) จะได้ว่า

1. ถ้า $f'(x) > 0$ ทุก $x \in (a, b)$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[a, b]$
2. ถ้า $f'(x) < 0$ ทุก $x \in (a, b)$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[a, b]$
3. ถ้า $f'(x) = 0$ ทุก $x \in (a, b)$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันคงตัวบนช่วง $[a, b]$

ตัวอย่าง 4.2.5 จงหาช่วงที่ทำให้ฟังก์ชันต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม และเป็นฟังก์ชันลด

1. $f(x) = x^2 - 2x + 3$

   วิธีทำ เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันเพิ่มเมื่อ $f'(x) = 2x - 2 > 0$ นั่นคือ $x > 1$
   ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(1, \infty)$
   เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันลดเมื่อ $f'(x) = 2x - 2 < 0$ นั่นคือ $x < 1$
   ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(-\infty, 1)$

2. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 2$

   วิธีทำ เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันเพิ่มเมื่อ $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x > 0$ แล้ว $4x(x-1)(x-2) > 0$ นั่นคือ $x \in (0,1) \cup (2,\infty)$ ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(0,1) \cup (2,\infty)$
   เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันลดเมื่อ $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x < 0$ แล้ว $4x(x-1)(x-2) < 0$ นั่นคือ $x \in (-\infty,0) \cup (1,2)$ ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(-\infty,0) \cup (1,2)$

ตัวอย่าง 4.2.6 จงหาช่วงที่ทำให้ $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มและเป็นฟังก์ชันลด

วิธีทำ พิจารณา

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)(1) - x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันเพิ่มเมื่อ $f'(x) > 0$ นั่นคือ $(1-x)(1+x) > 0$ จะได้ว่า $x \in (-1,1)$ ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-1,1)$ และ f เป็นฟังก์ชันลดเมื่อ $f'(x) < 0$ นั่นคือ $(1-x)(1+x) < 0$ จะได้ว่า $x \in (-\infty,1) \cup (1,\infty)$ ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(-\infty,1) \cup (1,\infty)$

ตัวอย่าง 4.2.7 จงหา a ที่ทำให้ $f(x) = \ell\text{n}(e^x + a)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนจำนวนจริง

วิธีทำ พิจารณา

$$f'(x) = \frac{e^x}{e^x + a} > 0$$

เนื่องจาก $e^x > 0$ ทุก ๆ $x \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า $e^x + a > 0$ ทุก ๆ $x \in \mathbb{R}$ ดังนั้น $a \geq 0$

บทนิยาม 4.2.8 ให้ $f : D \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันและ $S \subseteq D$ และ $c \in S$ แล้วจะกล่าวว่า

1. $f(c)$ เป็น**ค่าสูงสุด** (maximum value) หรือ**ค่าสูงสุดสัมบูรณ์** (absolute maximum value) บน S ก็ต่อเมื่อ $f(c) \geq f(x)$ ทุก ๆ $x \in S$

2. $f(c)$ เป็น**ค่าต่ำสุด** (minimum value) หรือ**ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์** (absolute minimum value) บน S ก็ต่อเมื่อ $f(c) \leq f(x)$ ทุก ๆ $x \in S$

3. $f(c)$ เป็น**ค่าสุดขีด** (extreme value) บน S ก็ต่อเมื่อ $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดของ f บน S

ตัวอย่าง 4.2.9 จงแสดงว่า $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์บนช่วง $(-\infty,\infty)$

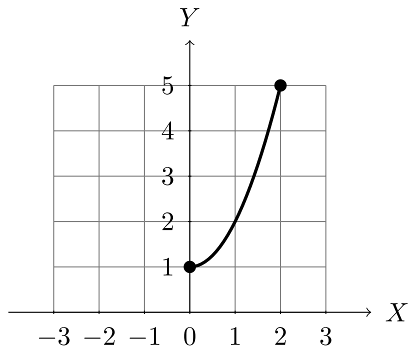
วิธีทำ เนื่องจาก $f(0) = 1$ และ $x^2 + 1 \geq 1$ ทุก ๆ $x \in \mathbb{R}$ นั่นคือ

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1} \leq 1 = f(0) \qquad \text{ทุก ๆ } x \in \mathbb{R}$$

ดังนั้น $f(0) = 1$ เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f บนช่วง $(-\infty,\infty)$

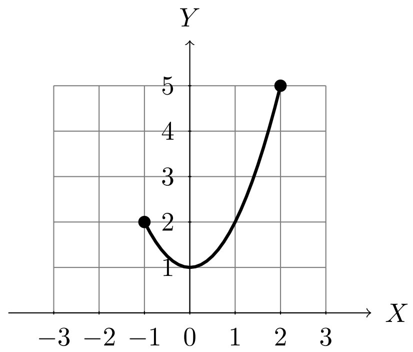
ตัวอย่าง 4.2.10 จงหาค่าสุดขีดของฟังก์ชัน $f(x) = x^2 + 1$ บนช่วงที่กำหนดโดยใช้กราฟที่กำหนดให้

1. $[0, 2]$



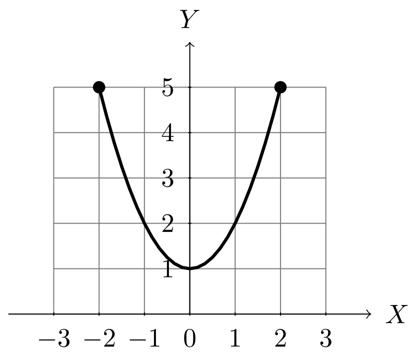
ค่าสูงสุดเท่ากับ 5 และค่าต่ำสุดเท่ากับ 1

2. $[-1, 2]$



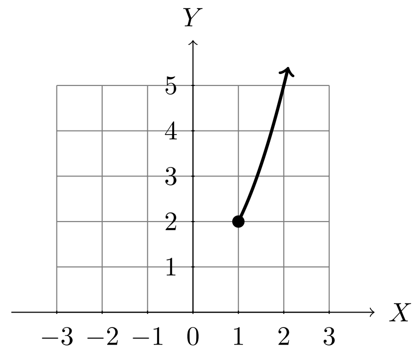
ค่าสูงสุดเท่ากับ 5 และค่าต่ำสุดเท่ากับ 1

3. $[-2, 2]$



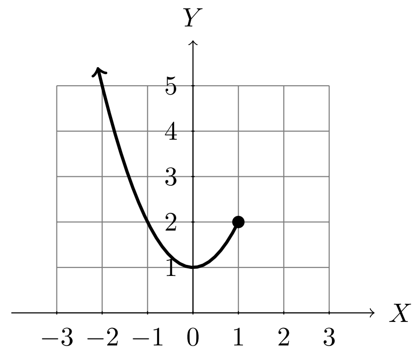
ค่าสูงสุดเท่ากับ 5 และค่าต่ำสุดเท่ากับ 1

4. $[1, \infty)$



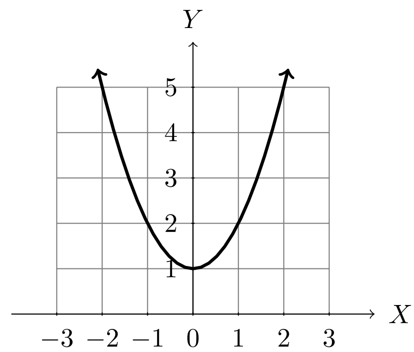
ค่าต่ำสุดเท่ากับ 2 ไม่มีค่าสูงสุด

5. $(-\infty, 1]$



ค่าต่ำสุดเท่ากับ 1 ไม่มีค่าสูงสุด

6. $(-\infty, \infty)$



ค่าต่ำสุดเท่ากับ 1 ไม่มีค่าสูงสุด

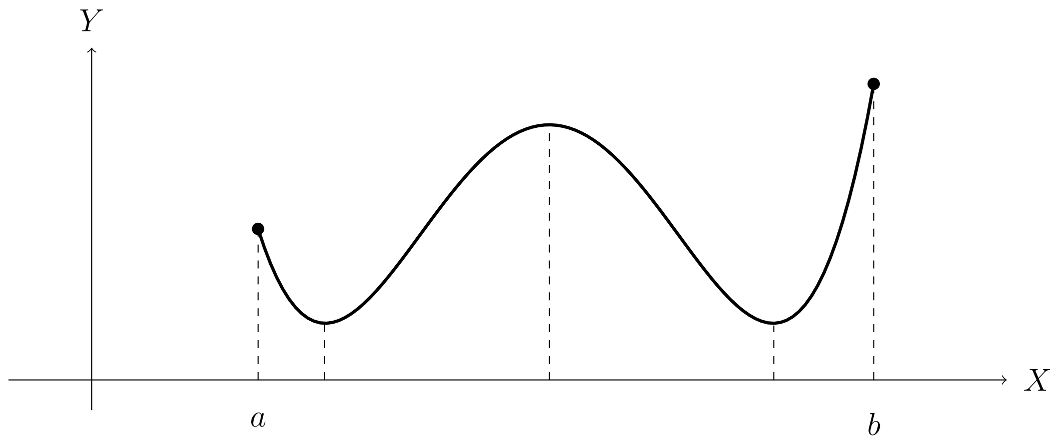
บทนิยาม 4.2.11 ให้ $f : D \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันและ $S \subseteq D$ และ $c \in S$ แล้วจะกล่าวว่า

1. $f(c)$ เป็น**ค่าสูงสุดสัมพัทธ์** (relative maximum value) บน S ก็ต่อเมื่อ มี $\delta > 0$ ซึ่ง
$$f(c) \geq f(x) \qquad \text{ทุก ๆ } x \in S \cap (c-\delta, c+\delta)$$

2. $f(c)$ เป็น**ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์** (relative minimum value) บน S ก็ต่อเมื่อ มี $\delta > 0$ ซึ่ง
$$f(c) \leq f(x) \qquad \text{ทุก ๆ } x \in S \cap (c-\delta, c+\delta)$$

3. $f(c)$ เป็น**ค่าสุดขีดสัมพัทธ์** (relative extreme value) บน S ก็ต่อเมื่อ
$f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f บน S

รูปที่ 4.2 ตัวอย่างกราฟที่เกิดค่าสูงสุดและต่ำสุดสัมพัทธ์บนช่วง $[a, b]$



ตัวอย่าง 4.2.12 จงแสดงว่าฟังก์ชัน $f(x) = x^2 - 2x$ มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 1$

วิธีทำ เลือก $c = 1$ และ $\delta = 1$
ให้ $x \in (0, 2)$ จะเห็นว่า $(x-1)^2 \geq 0$ นั่นคือ $(x-1)^2 - 1 \geq -1$ ดังนั้น

$$f(x) = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1 \geq -1 = f(1) \qquad \text{ทุก ๆ } x \in (0, 2)$$

ดังนั้น $f(1) = -1$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f

จากแนวคิดของแฟร์มาต์ที่พบว่าจุดที่เกิดค่าสูงสุดหรือต่ำสุดต้องที่มีเส้นสัมผัสของเส้นโค้งขนานกับแกน X หรือความชันเป็น 0 ต่อมาได้ขยายไปยังกรณีที่ความชันค่าไม่ได้

ทฤษฎีบท 4.2.13 ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ และ $c \in [a, b]$ แล้ว

ถ้า f มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ที่จุด c แล้ว $f'(c) = 0$ หรือ $f'(c)$ ไม่มีค่า

บทนิยาม 4.2.14 ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ และ $c \in [a, b]$ แล้วจะเรียก

c ว่า**จุดวิกฤต** (critical point) ของฟังก์ชัน f ก็ต่อเมื่อ $f'(c) = 0$ หรือ $f'(c)$ ไม่มีค่า

ตัวอย่าง 4.2.15 จงหาจุดวิกฤตของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x) = x^3 - 12x + 7$
   วิธีทำ จะได้ว่า $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) = 3(x-2)(x+2) = 0$
   ดังนั้น $x = -2, 2$ เป็นจุดวิกฤตของ f

2. $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$
   วิธีทำ จะได้ว่า
   $$f'(x) = \frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3(x-1)^{\frac{2}{3}}}$$
   เนื่องจาก $1 \in \mathrm{Dom}(f)$ และ $f'(1)$ ไม่มีค่า ดังนั้น $x = 1$ เป็นจุดวิกฤตของ f

3. $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$
   วิธีทำ จะได้ว่า $f'(x) = -3x^{-4} = -\dfrac{3}{x^4}$
   ถึงแม้ว่า $f'(0)$ หาค่าไม่ได้ แต่ $0 \notin \mathrm{Dom}(f)$ ไม่มีค่า ดังนั้น f ไม่มีจุดวิกฤต

4. $f(x) = xe^x$
   วิธีทำ จะได้ว่า $f'(x) = xe^x + e^x = e^x(x+1) = 0$
   ดังนั้น $x = -1$ เป็นจุดวิกฤตของ f

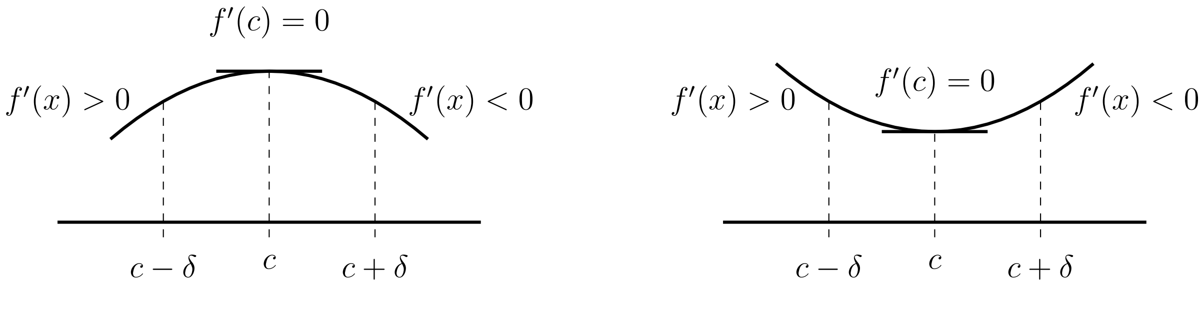
โดยทฤษฎีบท 4.2.13 สรุปได้ว่าการจะหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ย่อมต้องหาจุดวิฤตเป็นอันดับแรก จากนำจุดวิกฤตมาตรวจสอบว่าจุดนั้นให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือต่ำสุดสัมพัทธ์ ทำได้โดย 2 วิธี คือการทดสอบโดยอนุพันธ์อันดับหนึ่ง และ การทดสอบโดยอนุพันธ์อันดับสอง

ทฤษฎีบท 4.2.16 การทดสอบโดยอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First derivative test)
ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วง S และ $c \in S$ เป็นจุดวิกฤตของ f แล้ว มี $\delta > 0$ ซึ่ง

1. ถ้า $f'(x) > 0$ ทุก $x \in (c-\delta, c) \cap S$ และ $f'(x) < 0$ ทุกๆ $x \in (c, c+\delta) \cap S$ แล้ว $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f

2. ถ้า $f'(x) < 0$ ทุก $x \in (c-\delta, c) \cap S$ และ $f'(x) > 0$ ทุกๆ $x \in (c, c+\delta) \cap S$ แล้ว $f(c)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f

รูปที่ 4.3 ค่าสูงสุดและต่ำสุดสัมพัทธ์ของการทดสอบโดยอนุพันธ์อันดับหนึ่ง



อาจพิจารณาเครื่องหมายของ f' โดยแทน $+$ เมื่อ $f'(x) > 0$ และ $-$ เมื่อ $f'(x) < 0$ บนเส้นจำนวน จะได้ว่า $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์เมื่อสอดคล้อง

$$\begin{array}{ccc} + & & - \\ \hline & c & \end{array}$$

$f(c)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ เมื่อสอดคล้อง

$$\begin{array}{ccc} - & & + \\ \hline & c & \end{array}$$

ถ้าเครื่องหมายไม่สอดคล้องทั้ง 2 กรณี สรุปได้ว่าจุดวิกฤตนั้นไม่ใช่จุดที่ให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์และสูงสุดสัมพัทธ์

ตัวอย่าง 4.2.17 จงหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2$

   วิธีทำ พิจารณา $f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 24x = 12x(x^2 + x - 2) = 12x(x+2)(x-1) = 0$
   ดังนั้น $x = -2, 0, 1$ เป็นจุดวิกฤตของ f พิจารณาเครื่องหมาย f' ได้ดังนี้

   $$\begin{array}{ccccccc} - & & + & & - & & + \\ \hline & -2 & & 0 & & 1 & \end{array}$$

   จะได้ว่า $f(-2) = -32$ และ $f(1) = -5$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f
   และ $f(0) = 0$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f

2. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$

   วิธีทำ พิจารณา $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2) = 6(x-2)(x-1) = 0$
   ดังนั้น $x = 1, 2$ เป็นจุดวิกฤตของ f พิจารณาเครื่องหมาย f' ได้ดังนี้

   $$\begin{array}{ccccc} + & & - & & + \\ \hline & 1 & & 2 & \end{array}$$

   จะได้ว่า $f(2) = -1$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f และ $f(1) = 0$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f

ทฤษฎีบท 4.2.18 การทดสอบโดยอนุพันธ์อันดับสอง (Second derivative test)
ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วง (a,b) และ $c \in (a,b)$ โดยที่ $f'(c) = 0$ และ $f''(c)$ หาค่าได้แล้ว

1. $f''(c) < 0$ แล้ว $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f
2. $f''(c) > 0$ แล้ว $f(c)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f

ตัวอย่าง 4.2.19 จงหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x) = x^3 - 3x + 1$
   วิธีทำ พิจารณา $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2-1) = 3(x-1)(x+1) = 0$
   ดังนั้น $x = -1, 1$ เป็นจุดวิกฤตของ f เนื่องจาก $f''(x) = 6x$ จะได้ว่า
   $$f''(-1) = -6 < 0 \qquad \text{และ} \qquad f''(1) = 6 > 0$$
   ดังนั้น $f(1) = -1$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f และ $f(-1) = 2$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f
2. $f(x) = x(x-1)^4$
   วิธีทำ พิจารณา
   $$\begin{aligned} f'(x) &= (x-1)^4 + 4x(x-1)^3 \\ &= (x-1)^3((x-1)+4x) = (x-1)^3(5x-1) = 0 \end{aligned}$$
   ดังนั้น $x = \dfrac{1}{5}, 1$ เป็นจุดวิกฤตของ f เนื่องจาก
   $$\begin{aligned} f''(x) &= 4(x-1)^3 + 4(x-1)^3 + 12x(x-1)^2 \\ &= 8(x-1)^3 + 12x(x-1)^2 \end{aligned}$$
   จะได้ว่า
   $$f''(1) = 0 \qquad \text{และ} \qquad f''\left(\frac{1}{5}\right) = -\frac{64}{25} < 0$$
   ดังนั้น $f\left(\dfrac{1}{5}\right) = \dfrac{256}{3125}$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f
3. $f(x) = xe^x$
   วิธีทำ พิจารณา $f'(x) = xe^x + e^x = e^x(x+1) = 0$
   ดังนั้น $x = -1$ เป็นจุดวิกฤตของ f เนื่องจาก $f''(x) = xe^x + 2e^x$ จะได้ว่า
   $$f''(-1) = e^{-1} > 0$$
   ดังนั้น $f(1) = -e^{-1}$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f

ตัวอย่าง 4.2.20 จงหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x) = 3x^2 - x^{\frac{3}{2}} + 1$

   วิธีทำ จะเห็นว่า $\text{Dom}(f) = [0, \infty)$ พิจารณา

$$f'(x) = 6x - \frac{3}{2}\sqrt{x} = \frac{3}{2}\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) = 0$$

   ดังนั้น $x = 0, 1$ เป็นจุดวิกฤตของ f พิจารณาเครื่องหมาย f' ได้ดังนี้

$$\begin{array}{ccccc} & & - & & + \\ \hline & 0 & & 1 & \end{array}$$

   จะได้ว่า $f(1) = 3$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f

2. $f(x) = (x^3 - 1)^{\frac{2}{3}}$

   วิธีทำ จะเห็นว่า $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ พิจารณา

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x^3 - 1)^{-\frac{1}{3}}(3x^2) = \frac{2x^2}{3\sqrt[3]{(x-1)(x^2+x+1)}}$$

   เนื่องจาก $f'(0) = 0$ และ $f'(1)$ ไม่มีค่า นั่นคือ $x = 0, 1$ เป็นจุดวิกฤตของ f พิจารณาเครื่องหมาย f' ได้ดังนี้

$$\begin{array}{ccccc} - & & - & & + \\ \hline & 0 & & 1 & \end{array}$$

   จะได้ว่า $f(1) = 0$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f

3. $f(x) = x^2 e^x$

   วิธีทำ พิจารณา

$$f'(x) = x^2 e^x + 2xe^x = xe^x(x + 2) = 0$$

   ดังนั้น $x = -2, 0$ เป็นจุดวิกฤตของ f เนื่องจาก

$$f''(x) = x^2 e^x + 2xe^x + 2e^x + 2xe^x = x^2 e^x + 4xe^x + 2e^x$$

   จะได้ว่า

$$f''(-2) = -2e^{-2} < 0 \qquad \text{และ} \qquad f''(0) = 2 > 0$$

   ดังนั้น $f(0) = 0$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f และ $f(-2) = 4e^{-2}$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f

ขั้นตอนการหาค่าสุดขีด

ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง $[a, b]$ และหาอนุพันธ์ได้บนช่วง (a, b) หาค่าสุดขีดได้ดังนี้

1. หาจุดวิกฤติ c ของ f
2. หาค่า $f(c)$ ทั้งหมด $f(a)$ และ $f(b)$
3. เปรียบเทียบค่าในขั้นตอนที่ 2 โดย
   - ค่ามากที่สุด จะเป็นค่าสูงสุดของ f บน $[a, b]$
   - ค่าน้อยที่สุด จะเป็นค่าต่ำสุดของ f บน $[a, b]$

ตัวอย่าง 4.2.21 จงหาค่าสุดขีดของฟังก์ชัน $f(x) = x^3 - 12x + 5$ บนช่วง $[-3, 3]$

วิธีทำ พิจารณา $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) = 3(x + 2)(x - 2) = 0$
ดังนั้น $x = -2, 2$ เป็นจุดวิกฤตของ f และ

$$\begin{aligned}
f(-3) &= (-3)^3 - 12(-3) + 5 = 14 \\
f(-2) &= (-2)^3 - 12(-2) + 5 = 21 \\
f(2) &= (2)^3 - 12(2) + 5 = -11 \\
f(3) &= (3)^3 - 12(3) + 5 = -4
\end{aligned}$$

ดังนั้น $f(2) = -11$ เป็นค่าต่ำสุดของ f และ $f(2) = 21$ เป็นค่าสูงสุดของ f

ตัวอย่าง 4.2.22 จงหาค่าสุดขีดของฟังก์ชัน $f(x) = \text{sin}x + \text{cos}x$ บนช่วง $[0, 2\pi]$

วิธีทำ ให้ $x \in [0, 2\pi]$ พิจารณา

$$\begin{aligned}
f'(x) = \text{cos}x - \text{sin}x &= 0 \\
\text{tan}x &= 1
\end{aligned}$$

ดังนั้น $x = \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}$ เป็นจุดวิกฤตของ f และ

$$\begin{aligned}
f(0) &= \text{sin}0 + \text{cos}0 = 1 \\
f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \text{sin}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \text{cos}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \\
f\left(\frac{5\pi}{4}\right) &= \text{sin}\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \text{cos}\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \\
f(2\pi) &= \text{sin}(2\pi) + \text{cos}(2\pi) = 1
\end{aligned}$$

ดังนั้น $f\left(\dfrac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$ เป็นค่าต่ำสุดของ f และ $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ เป็นค่าสูงสุดของ f

ปัญหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน

การนำอนุพันธ์ไปใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด โดยทั่วไปเรามักจะจำลองปัญหาดังกล่าวในรูปของฟังก์ชัน เช่นให้

$$y = f(x) \text{ แทนฟังก์ชันของปัญหาดังกล่าว}$$

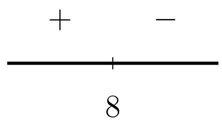
เราอาจจะต้องหาค่าสุดขีดของ y เมื่อ x เป็นค่า ๆ หนึ่ง โดยใช้กระบวนการหาดังขั้นตอนการหาค่าสุดขีด ดังจะแสดงตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.2.23 เมื่อนำจำนวนจริงสองจำนวนมารวมกันได้เท่ากับ 16 จงหาผลคูณที่มากที่สุดของสองจำนวนนั้น

วิธีทำ ให้ x แทนจำนวนจริงจำนวนหนึ่ง
เนื่องจากนำจำนวนจริงสองจำนวนมารวมกันได้เท่ากับ 16 ดังนั้นจำนวนที่สอง เท่ากับ $16 - x$
ให้ f แทนฟังก์ชันการคูณของจำนวนจริงสองจำนวนนั้น จะได้ว่า

$$f(x) = x(16 - x) = 16x - x^2$$

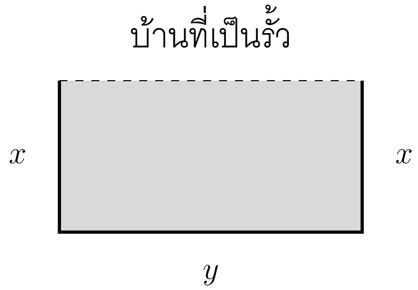
พิจารณา $f'(x) = 16 - 2x = 0$ ดังนั้น $x = 8$ เป็นจุดวิกฤตของ f พิจารณาเครื่องหมาย f' ได้ดังนี้



จะได้ว่า $f(8) = 64$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือเป็นค่าสูงสุด
ดังนั้นผลคูณที่มากที่สุดเท่ากับ 64

ตัวอย่าง 4.2.24 มีไม้ทำรั้วยาว 800 เมตร นำมาล้อมรั้วบ้านเป็นรูปสี่เหลี่ยมพื้นผ้า โดยใช้บ้านเป็นรั้วด้านหนึ่ง จงหาพื้นที่มากสุดที่ล้อมรั้วนี้ได้

วิธีทำ ให้ x แทนความกว้างของรั้ว และ y แทนความยาวของรั้ว



เนื่องจากมีไม้ทำรั้วยาว 800 เมตร ดังนั้น $y + 2x = 800$ นั่นคือ $y = 800 - 2x$
ให้ A แทนฟังก์ชันของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมพื้นผ้าที่เกิดจากการล้อมรั้ว จะได้ว่า

$$A(x) = xy = x(800 - 2x) = 800x - 2x^2$$

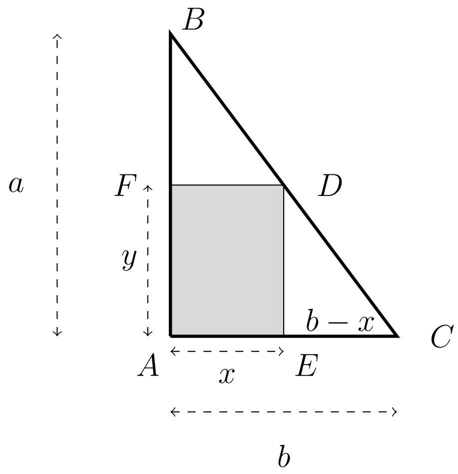
พิจารณา $A'(x) = 800 - 4x = 0$ ดังนั้น $x = 200$ เป็นจุดวิกฤตของ A
พิจารณาเครื่องหมาย A' ได้ดังนี้

$$\begin{array}{ccc} + & & - \\ \hline & 200 & \end{array}$$

จะได้ว่า $A(200) = 80000$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือเป็นค่าสูงสุด
ดังนั้นพื้นที่มากสุดในการล้อมรั้วบ้านเท่ากับ $80,000$ ตารางเมตร

ตัวอย่าง 4.2.25 จงหาด้านของรูปสี่เหลี่ยมพื้นผ้าที่มีพื้นที่มากที่สุดที่บรรจุลงไปในสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านประชิดมุมฉากทั้งสองด้านคือ a และ b

วิธีทำ ให้ $a > 0$ และ $b > 0$ และแสดงได้ดังรูป



จากรูปให้ x แทนความกว้างของพื้นที่ และ y แทนความยาวของพื้นที่
เนื่องจาก ΔABC คล้ายกับ ΔEDC จะได้ว่า $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{ED}{EC}$ ดังนั้น $\dfrac{a}{b} = \dfrac{y}{b-x}$ นั่นคือ

$$y = \frac{a}{b}(b-x)$$

ให้ A แทนฟังก์ชันของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมพื้นผ้า $AFDE$ จะได้ว่า

$$A(x) = xy = x \cdot \frac{a}{b}(b-x) = \frac{a}{b}(bx - x^2)$$

พิจารณา $A'(x) = \dfrac{a}{b}(b-2x) = 0$ ดังนั้น $x = \dfrac{b}{2}$ เป็นจุดวิกฤตของ A
พิจารณาเครื่องหมาย A' ได้ดังนี้

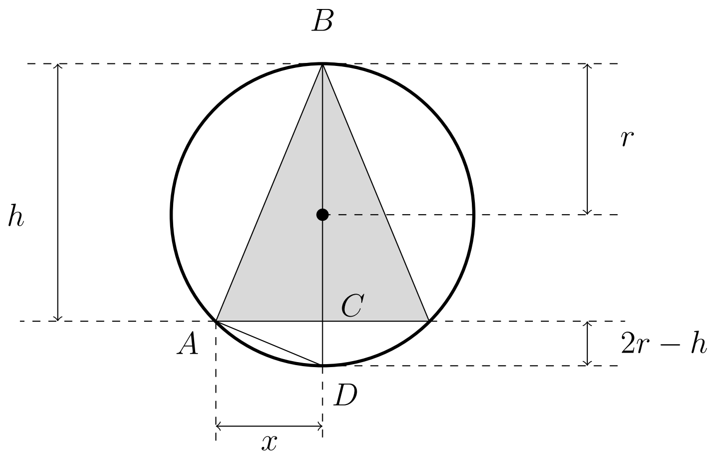
$$\begin{array}{ccc} + & & - \\ \hline & \frac{b}{2} & \end{array}$$

จะได้ว่า $A\left(\dfrac{b}{2}\right)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือเป็นค่าสูงสุด
เมื่อ $x = \dfrac{b}{2}$ และ $y = \dfrac{a}{2}$ ดังนั้นด้านของรูปสี่เหลี่ยมพื้นผ้าที่มีพื้นที่มากที่สุดที่บรรจุลงในสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านประชิดมุมฉากทั้งสองด้านคือ a และ b คือ $\dfrac{b}{2}$ และ $\dfrac{a}{2}$

ตัวอย่าง 4.2.26 จงหาส่วนสูงของกรวยกลมตรงที่มีปริมาตรมากที่สุด และสามารถบรรจุในทรงกลมรัศมี r หน่วย

วิธีทำ ให้ r แทนรัศมีของทรงกลม
h แทนความสูงของกรวย
x แทนรัศมีของฐานกรวย

แสดงรูป 2 มิติได้ดังนี้



จากรูป ΔABC คล้ายกับ ΔACD จะได้ว่า $\dfrac{CA}{CD} = \dfrac{CB}{CA}$ ดังนั้น $\dfrac{x}{2r-h} = \dfrac{h}{x}$ นั่นคือ

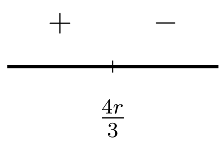
$$x^2 = h(2r-h) = 2rh - h^2$$

ให้ V แทนฟังก์ชันของปริมาตรของกราย จะได้ว่า

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi x^2 h = \frac{1}{3}\pi(2rh - h^2)h = \frac{1}{3}\pi(2rh^2 - h^3)$$

พิจารณา $V'(h) = \dfrac{1}{3}\pi(4rh - 3h^2) = \dfrac{1}{3}\pi h(4r - 3h) = 0$ ดังนั้น $h = \dfrac{4r}{3}$ เป็นจุดวิกฤตของ V

พิจารณาเครื่องหมาย V' ได้ดังนี้



จะได้ว่า $V\left(\dfrac{4r}{3}\right) =$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือเป็นค่าสูงสุด

ดังนั้นส่วนสูงของกรวยกลมตรงที่มีปริมาตรมากที่สุด และสามารถบรรจุในทรงกลมรัศมี r หน่วย เท่ากับ $\dfrac{4r}{3}$ หน่วย

แบบฝึกหัด 4.2

1. จงหาช่วงที่ทำให้ฟังก์ชันต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม และเป็นฟังก์ชันลด พร้อมหาจุดวิกฤติ

   1.1 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$
   1.2 $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$
   1.3 $f(x) = (x-1)^{\frac{2}{3}}$
   1.4 $f(x) = (6-x)x^{\frac{1}{5}}$

2. จงหาค่าสุดขีดบนช่วงที่กำหนดให้ต่อไปนี้

   2.1 $f(x) = 2x - x^2 \quad ; [0,1]$
   2.2 $f(x) = \dfrac{x}{x+3} \quad ; [-1,5]$

3. จงหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้

   3.1 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$
   3.2 $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 6$
   3.3 $f(x) = \dfrac{x-2}{x+2}$
   3.4 $f(x) = (1-x^2)(1-x)$
   3.5 $f(x) = x^{\frac{2}{3}} + 2x^{-\frac{1}{3}}$
   3.6 $f(x) = \dfrac{|x|}{1+|x|}$

4. จงหาค่าสุดขีดของฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{x^2+100}{x^2-25}$ บนช่วง $[-1,3]$

5. จงหาความสูงและรัศมีของฐานของรูปทรงกระบอกกลมตรงที่มีปริมาตรมากที่สุด ที่บรรจุในกรวยกลมซึ่งมีรัศมีของฐานยาว 12 นิ้ว และสูง 30 นิ้ว โดยที่ฐานของทรงกระบอกอยู่บนฐานของกรวย

6. กระป๋องรูปทรงกระบอกกลมตรงมีปริมาตร 125 ลูกบาศก์เซนติเมตร มีฝาปิดหัวท้าย ฝาปิดทำจากแผ่นโลหะบางรูปสี่เหลี่ยมจตุรัส และผิวด้านข้างทำจากรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า จงหารัศมีและความสูงของกระป๋องที่ทำให้ใช้ปริมาณโลหะน้อยที่สุด

7. จงหาจุดบนพาราโบลา $y = x^2$ ที่อยู่ใกล้จุด $(3,0)$ มากที่สุด

4.3 ความเว้าและจุดเปลี่ยนเว้า

บทนิยาม 4.3.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x_0 และ $y = g(x)$ เป็นสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด x_0

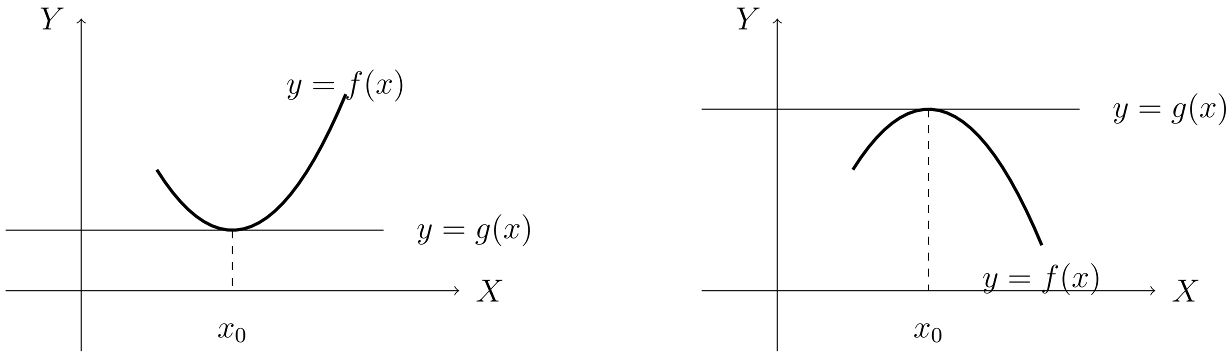
1. f มีความ**เว้าล่าง** (concave downward) ที่จุด x_0 ก็ต่อเมื่อ

$$f(x) < g(x) \text{ ทุกๆ } x \text{ ที่อยู่ใกล้ ๆ } x_0$$

2. f มีความ**เว้าบน** (concave upward) ที่จุด x_0 ก็ต่อเมื่อ

$$f(x) > g(x) \text{ ทุกๆ } x \text{ ที่อยู่ใกล้ ๆ } x_0$$

รูปที่ 4.4 ความเว้าบนและอยู่ล่างที่จุด x_0



ตัวอย่าง 4.3.2 จงแสดงว่า $f(x) = x^2$ มีความเว้าบนที่จุด 0

วิธีทำ จะเห็นว่า $f'(x) = 2x$ นั่นคือ $f'(0) = 0$ ดังนั้น $g(x) = 0$ เป็นเส้นสัมผัสของ f ที่จุด 0 เลือก $\delta = 1$ ให้ $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ จะได้ว่า

$$f(x) = x^2 > 0 = g(x) \qquad \text{ทุก ๆ } x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$$

สรุปได้ว่า f มีความเว้าบนที่ 0

บทนิยาม 4.3.3 ให้ $f : D \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ และ $S \subseteq D$

1. f มีความ**เว้าล่าง** บน S ก็ต่อเมื่อ

$$f \text{ มีความเว้าล่างที่ทุก ๆ } x \in S$$

2. f มีความ**เว้าบน** บน S ก็ต่อเมื่อ

$$f \text{ มีความเว้าบนที่ทุก ๆ } x \in S$$

ข้อสังเกต 4.3.4 ถ้า f มีความเว้าบน (เว้าล่าง) บนช่วง S และ T แล้ว f มีความเว้าบน (เว้าล่าง) บนช่วง $S \cup T$

บทนิยาม 4.3.5 ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด x_0 เรียกจุด $(x_0, f(x_0))$ ว่า**จุดเปลี่ยนเว้า** (inflection point) ก็ต่อเมื่อมี $\delta > 0$ ซึ่งเปลี่ยนจากความเว้าแบบหนึ่งบนช่วง $(x_0 - \delta, x_0)$ ไปเป็นความเว้าอีกแบบหนึ่งบนช่วง $(x_0, x_0 + \delta)$

การตรวจสอบความเว้าบน ความเว้าล่าง และจุดเปลี่ยนเว้า ของบางฟังก์ชันโดยใช้นิยามอาจมีความยุ่งยาก จะมีทฤษฎีบทเกี่ยวกับอนุพันธ์อันดับสองมาช่วยการตรวจสอบดังต่อไปนี้ (ไม่พิสูจน์ในวิชานี้)

ทฤษฎีบท 4.3.6 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้อย่างน้อยสองอันดับแรกบนช่วง (a, b) และ $c \in (a, b)$

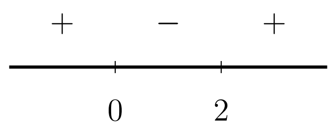
1. ถ้า $f''(x) > 0$ ทุกๆ $x \in (a, b)$ แล้ว f มีความเว้าบนบนช่วง (a, b)
2. ถ้า $f''(x) < 0$ ทุกๆ $x \in (a, b)$ แล้ว f มีความเว้าล่างบนช่วง (a, b)
3. ถ้า $(c, f(c))$ เป็นจุดเปลี่ยนเว้าของ f แล้ว $f''(c) = 0$ หรือ $f''(c)$ ไม่มีค่า

ตัวอย่าง 4.3.7 ให้ $f(x) = x^4 - 4x^3$ จงหาช่วงของ f ที่มีความเว้าบน มีความเว้าล่าง และจุดเปลี่ยนเว้าของ f

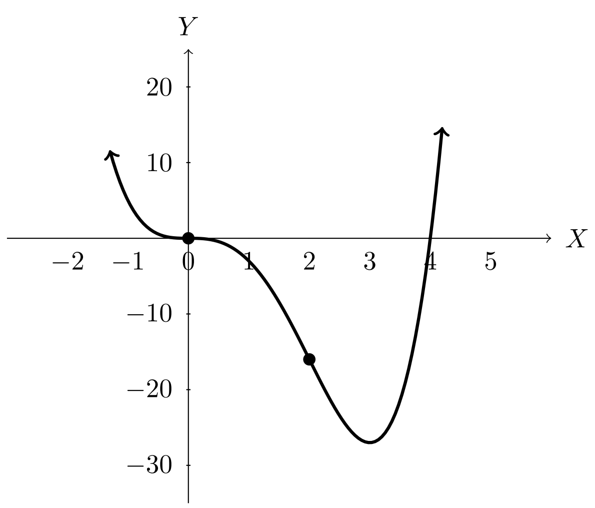
วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - 12x^2 \\ f''(x) &= 12x^2 - 24x = 12x(x-2) \end{aligned}$$

เมื่อพิจารณาเครื่องหมาย f'' บนเส้นจำนวนจะได้ว่า



ดังนั้น $x = 0, 2$ เป็นจุดเปลี่ยนเว้าของ f
และ f มีความเว้าบนบน $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ และความเว้าล่างบน $(0, 2)$
และแสดงกราฟได้ดังนี้



ตัวอย่าง 4.3.8 จงหาช่วงที่มีความเว้าบน ความเว้าล่าง และจุดเปลี่ยนเว้าของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x) = xe^{-2x}$

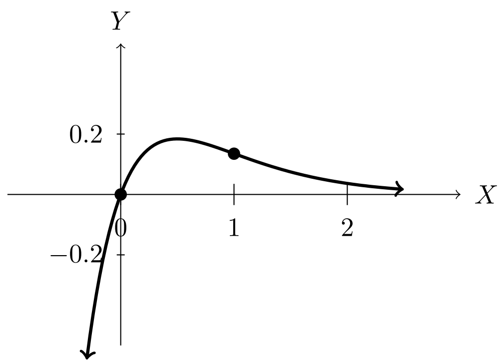
   วิธีทำ พิจารณา

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= xe^{-2x}(-2) + e^{-2x} = -2xe^{-2x} + e^{-2x} \\
f''(x) &= -2xe^{-2x}(-2) - 2e^{-2x} - 2e^{-2x} = 4e^{-2x}(x-1)
\end{aligned}
$$

   เมื่อพิจารณาเครื่องหมาย f'' บนเส้นจำนวนจะได้ว่า

$$
\begin{array}{ccc}
- & & + \\
\hline
 & 1 &
\end{array}
$$

   ดังนั้น $x = 1$ เป็นจุดเปลี่ยนเว้าของ f
   และ f มีความเว้าบนบน $(-\infty, 1)$ และความเว้าล่างบน $(1, \infty)$ และแสดงกราฟได้ดังนี้

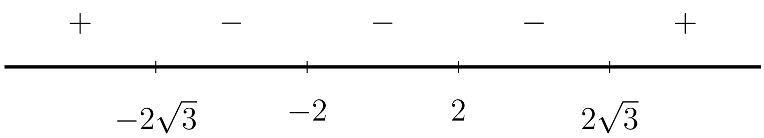


2. $f(x) = (4 - x^2)^{\frac{2}{3}}$

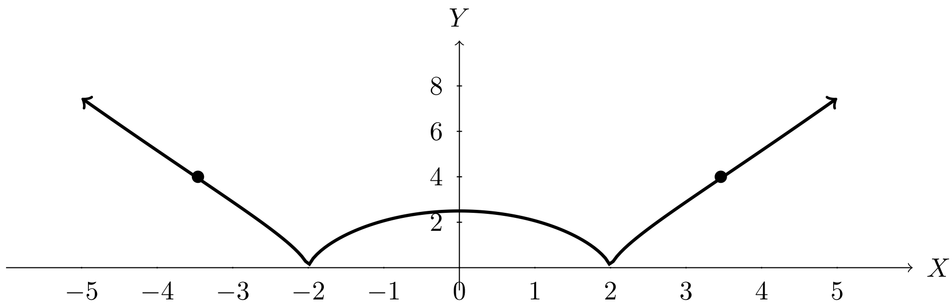
   วิธีทำ จะเห็นว่า Dom$(f) = \mathbb{R}$ และพิจารณา

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{2}{3}(4-x^2)^{-\frac{1}{3}}(-2x) = -\frac{4x}{3}(4-x^2)^{-\frac{1}{3}} \\
f''(x) &= -\frac{4}{3}(4-x^2)^{-\frac{1}{3}} - \frac{4x}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)(4-x^2)^{-\frac{4}{3}}(-2x) \\
&= -\frac{4}{3(4-x^2)^{\frac{1}{3}}} - \frac{8x^2}{9(4-x^2)^{-\frac{4}{3}}} \\
&= \frac{-12(4-x^2) - 8x^2}{9(4-x^2)^{\frac{4}{3}}} \\
&= \frac{4x^2 - 48}{9(4-x^2)^{\frac{4}{3}}} \\
&= \frac{4(x-2\sqrt{3})(x+2\sqrt{3})}{9[(2-x)(2+x)]^{\frac{4}{3}}}
\end{aligned}
$$

เมื่อพิจารณาเครื่องหมาย f'' บนเส้นจำนวนจะได้ว่า



ดังนั้น $x = -2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}$ เป็นจุดเปลี่ยนเว้าของ f
และ f มีความเว้าบนบน $(-\infty, -2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3}, \infty)$ และความเว้าล่างบน $(-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$
และแสดงกราฟได้ดังนี้



แบบฝึกหัด 4.3

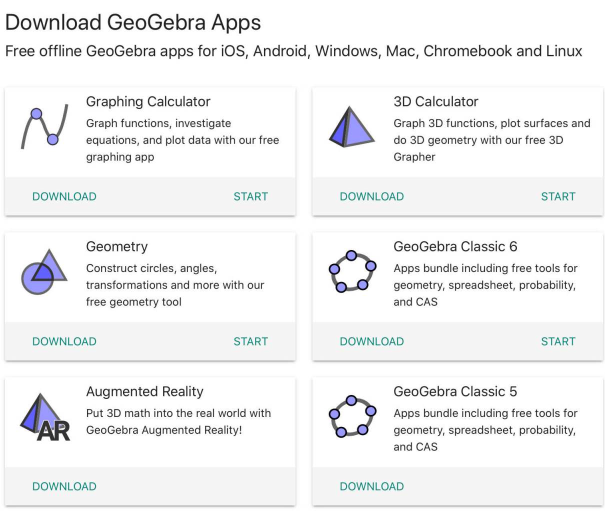
จงหาช่วงที่มีความเว้าบน มีความเว้าล่าง และจุดเปลี่ยนเว้า ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x) = x^3 - 3x^2$
2. $f(x) = 3x^4 + 2x^3 - 5$
3. $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 5x + 7$
4. $f(x) = x^6 - 15x^2 + 5$
5. $f(x) = (1 - x)^{\frac{1}{3}}$
6. $f(x) = (x - 2)^{\frac{2}{3}}$
7. $f(x) = (2 - x)x^{\frac{1}{5}}$
8. $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 1}$

4.4 การร่างกราฟ

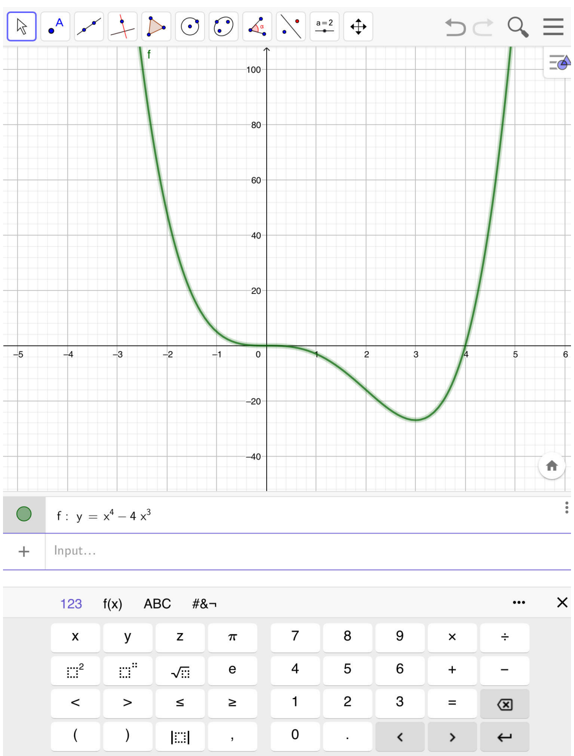
การ สร้าง กราฟ ของ ฟังก์ชัน ในปัจจุบันทำได้ง่ายเพียงแค่พิมพ์สมการลง ใน โปรแกรม สำเร็จรูป เช่น GSP และ GeoGebra เป็นต้น โดยเฉพาะโปรแกรม GeoGebra ซึ่ง ผู้ ผลิต ทำออกมาให้ใช้ฟรีสำหรับการศึกษาโดยเฉพาะ มีให้ใช้ในรูปแบบออนไลน์และออฟไลน์ ทั้งในรูปโปรแกรม และในรูป ของ แอพ พลิ เคชั่น โดย แบ่ง ออกเป็น หลาย ชนิด ให้ เหมาะ กับ การ ใช้งานแต่ละชนิดดังรูป 4.5 สามารถเข้าใช้งาน และโหลดโปรแกรมหรือ แอพพลิ เคชั่น ได้ที่ www.geogebra.org สำหรับ แอพ พลิ เคชั่นมี ให้ ดาว โหลดใน App Store และ Google Play ใช้กับมือถือหรือแท็บเล็ต โดยการออกแบบการที่ใช้งานที่ง่ายทำให้เป็นที่นิยมใช้กันทั่วโลก ถ้าผู้อ่านสนใจสามารถศึกษาการใช้ได้จากเวปไซต์ดังกล่าว

รูปที่ 4.5 ตัวอย่าง Download GeoGebra Apps



ตัวอย่างกราฟของฟังก์ชัน $y = x^4 - 3x^3$ โดยใช้แอพพลิเคชั่น Geogebra Classic 5 แสดงดังรูป 4.6 จะเห็นได้ว่ากราฟของฟังก์ชันที่เกิดขึ้นได้จากการพิมพ์สมการ ในช่องด้านล่างโดยอาศัยแป้นพิมพ์ที่มีให้ในแอพพลิเคชั่น แต่ถ้าไม่มีเครื่องมือเหล่านั้น เราอาจร่างกราฟของฟังก์ชันได้ถ้าเราทราบองค์ประกอบ ต่าง ๆ เช่น โดเมน จุด ตัดแกน เส้นกำกับ (ถ้า มี) ช่วง ที่ ทำให้เกิด ฟังก์ชันเพิ่ม และ ลด ช่วง ที่ ทำให้เกิดความเว้าบนและอยู่ล่าง เป็นต้น ดังนั้นในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการร่างกราฟ โดยอาศัยการประกอบกันขององค์ประกอบต่าง ๆ

รูปที่ 4.6 ตัวอย่างกราฟจาก GeoGebra Classic 5



บทนิยาม 4.4.1 เส้นตรง $x = a$ เป็น **เส้นกำกับแนวยืน** (vertical asymptote) ของกราฟของฟังก์ชัน f ถ้า

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty \text{ หรือ } \infty \qquad \text{หรือ} \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \text{ หรือ } \infty$$

บทนิยาม 4.4.2 เส้นตรง $y = b$ เป็น **เส้นกำกับแนวนอน** (horizontal asymptote) ของกราฟของฟังก์ชัน f ถ้า

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = b \qquad \text{หรือ} \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = b$$

บทนิยาม 4.4.3 เส้นตรง $y = ax + b$ เป็น **เส้นกำกับแนวเอียง** (slant asymptote) ของกราฟของฟังก์ชัน f ถ้า $f(x) = (ax + b) + g(x)$ และ $a \neq 0$ แล้ว

$$\lim_{x\to -\infty} g(x) = 0 \qquad \text{หรือ} \qquad \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$$

ข้อสังเกต 4.4.4 ถ้ากราฟมีเส้นกำกับแนวเอียงแล้วจะไม่มีเส้นกำกับแนวนอน

ตัวอย่าง 4.4.5 จงหาเส้นกำกับแนวยืน เส้นกำกับแนวนอน และ เส้นกำกับแนวนอนเอียง (ถ้ามี) ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

   วิธีทำ เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x^2-1} = \infty$ และ $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{x^2-1} = -\infty$
   ดังนั้น $x = 1$ เป็นเส้นกำกับแนวยืนของ f
   เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{1}{x^2-1} = -\infty$ และ $\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{1}{x^2-1} = \infty$
   ดังนั้น $x = -1$ เป็นเส้นกำกับแนวยืนของ f
   เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2-1} = 0$ และ $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x^2-1} = 0$
   ดังนั้น $y = 0$ เป็นเส้นกำกับแนวนอนของ f

2. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

   วิธีทำ เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x+1}{x-1} = \infty$ และ $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x+1}{x-1} = -\infty$
   ดังนั้น $x = 1$ เป็นเส้นกำกับแนวยืนของ f
   เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+1}{x-1} = 1$ และ $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x+1}{x-1} = 1$
   ดังนั้น $y = 1$ เป็นเส้นกำกับแนวนอนของ f

3. $f(x) = \dfrac{x^2+x}{x-2}$

   วิธีทำ เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2+x}{x-2} = \infty$ และ $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2+x}{x-2} = -\infty$
   ดังนั้น $x = 2$ เป็นเส้นกำกับแนวยืนของ f จะเห็นว่า

   $$f(x) = \frac{x^2+x}{x-2} = \frac{x(x-2) + 3(x-2) + 6}{x-2} = (x+3) + \frac{6}{x-2}$$

   เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6}{x-2} = 0$ และ $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{6}{x-2} = 0$
   ดังนั้น $y = x + 3$ เป็นเส้นกำกับแนวเอียงของ f

การวิเคราะห์กราฟและร่างกราฟ

การร่างกราฟของเส้นโค้ง $y = f(x)$ เราควรวิเคราะห์ข้อมูลประกอบการร่างกราฟ และทำตามขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. ตรวจโดเมนของ f และหาเส้นกำกับ (ถ้ามี) พร้อมดูพฤติกรรมของกราฟเมื่อ $x \to \infty$ และ $x \to -\infty$
2. หาจุดตัดแกน X และ Y (ถ้ามี)
3. หา $f'(x)$ และจุดวิฤกติของ f พร้อมหาช่วงที่ f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม และช่วงที่ f เป็นฟังก์ชันลด
4. หา $f''(x)$ และจุดที่มีโอกาสเป็นจุดเปลี่ยนเว้าของ f พร้อมหาช่วงที่ f มีความเว้าบน และช่วงที่ f มีความเว้าล่าง
5. ร่างกราฟของฟังก์ชันโดยใช้ข้อมูลจากข้อ 1 ถึง 4

ตัวอย่าง 4.4.6 จงวิเคราะห์และร่างกราฟของเส้นโค้ง $f(x) = x^4 - 4x^3$

วิธีทำ 1. โดเมนของ f คือ $\mathbb{R}$ พฤติกรรมของกราฟเมื่อ $x \to \infty$ และ $x \to -\infty$ ดูได้จาก

$$\lim_{x\to\infty} x^4 - 4x^3 = \infty \qquad \text{และ} \qquad \lim_{x\to-\infty} x^4 - 4x^3 = \infty$$

ดังนั้นเมื่อ $x \to \infty$ แล้ว $y \to \infty$ และเมื่อ $x \to -\infty$ แล้ว $y \to \infty$
2. พิจารณา $0 = x^4 - 4x^3 = x^3(x-4)$ นั่นคือ $x = 0, 4$ ดังนั้นจุดตัดแกนคือ $(0,0)$ และ $(4,0)$
3. พิจารณา $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$ ดังนั้น $x = 0, 3$ เป็นจุดวิกฤต
จะได้ว่า $f(0) = 0$ และ $f(3) = -27$ เมื่อพิจารณาเครื่องหมาย f' บนเส้นจำนวนจะได้ว่า

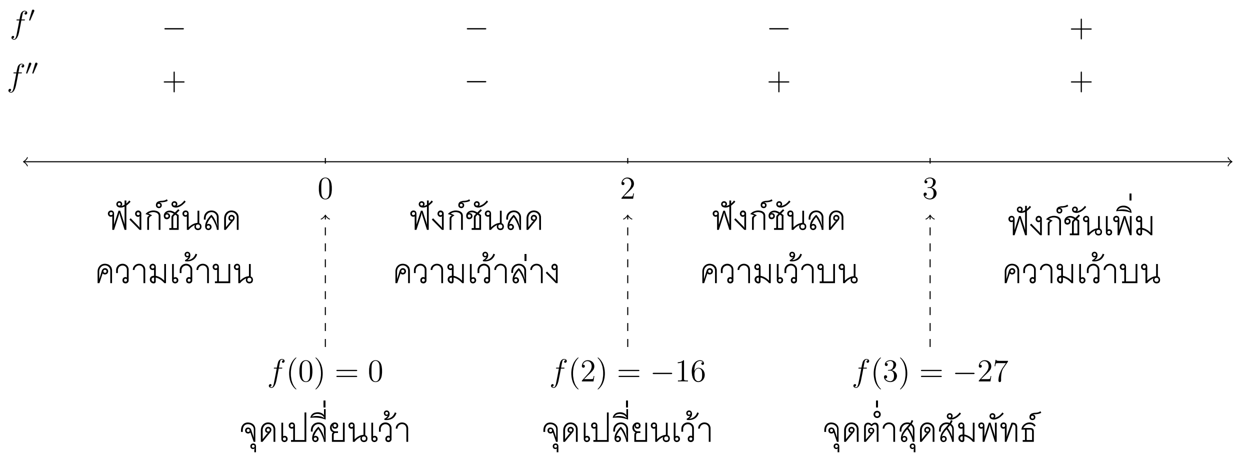
$$\begin{array}{ccccc} - & & - & & + \\ \hline & 0 & & 3 & \end{array}$$

และ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $(3, \infty)$ และเป็นฟังก์ชันลดบน $(-\infty, 0) \cup (0, 3)$
4. พิจารณา $f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2)$
จะได้ว่า $f(2) = -16$ พิจารณาเครื่องหมาย f'' บนเส้นจำนวนจะได้ว่า

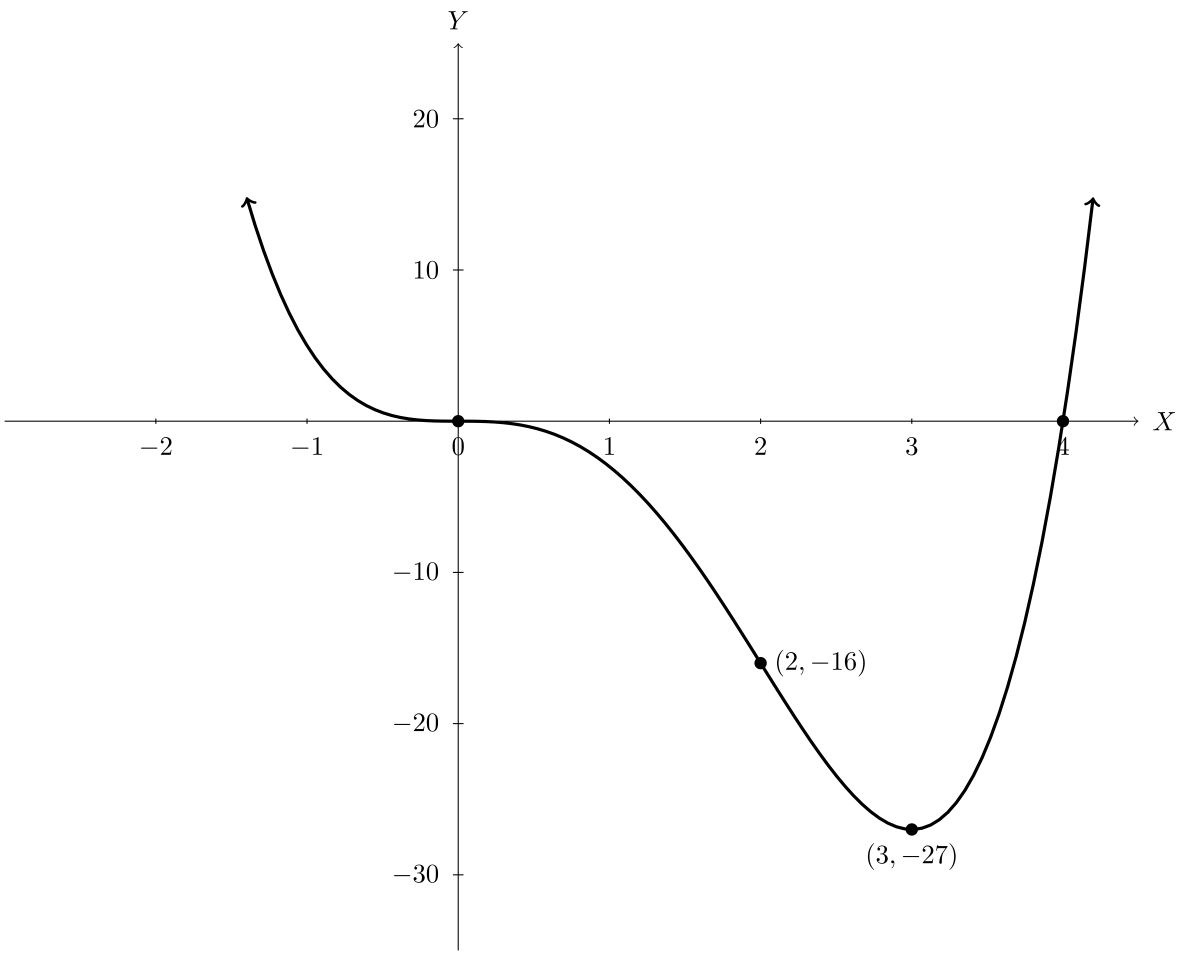
$$\begin{array}{ccccc} + & & - & & + \\ \hline & 0 & & 2 & \end{array}$$

ดังนั้น $x = 0, 2$ เป็นจุดเปลี่ยนเว้าของ f และ f มีความเว้าบนบน $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ และความเว้าล่างบน $(0, 2)$

5. นำข้อมูลที่ได้มาสรุปบนเส้นจำนวนได้ดังนี้



นำไปเขียนกราฟได้ดังนี้



ตัวอย่าง 4.4.7 จงวิเคราะห์และร่างกราฟของเส้นโค้ง $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$

วิธีทำ 1. โดเมนของ f คือ $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ เนื่องจาก

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2}{x^2-1} = \infty \qquad \text{และ} \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2}{x^2-1} = -\infty$$

ดังนั้น $x = 1$ เป็นเส้นกำกับแนวยืน เนื่องจาก

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2}{x^2-1} = -\infty \qquad \text{และ} \qquad \lim_{x\to -1^-} \frac{x^2}{x^2-1} = \infty$$

ดังนั้น $x = -1$ เป็นเส้นกำกับแนวยืน เนื่องจาก

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x^2}{x^2-1} = 1 \qquad \text{และ} \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = 1$$

ดังนั้น $y = 1$ เป็นเส้นกำกับแนวนอน
2. จะเห็นได้ว่า $(0, 0)$ เป็นจุดแกนเพียงจุดเดียว
3. พิจารณา

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2}{x^2-1} = \frac{(x^2-1)+1}{x^2-1} = 1 + \frac{1}{x^2-1} \\ f'(x) &= -(x^2-1)^{-2}(2x) = -\frac{2x}{(x^2-1)^2} \end{aligned}$$

ดังนั้น $x = 0$ เป็นจุดวิกฤต จะได้ว่า $f(0) = 0$ เมื่อพิจารณาเครื่องหมาย f' บนเส้นจำนวนจะได้ว่า

$$\begin{array}{ccccccc} + & & + & & - & & - \\ \hline & -1 & & 0 & & 1 & \end{array}$$

และ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ และเป็นฟังก์ชันลดบน $(0, 1) \cup (1, \infty)$
4. พิจารณา

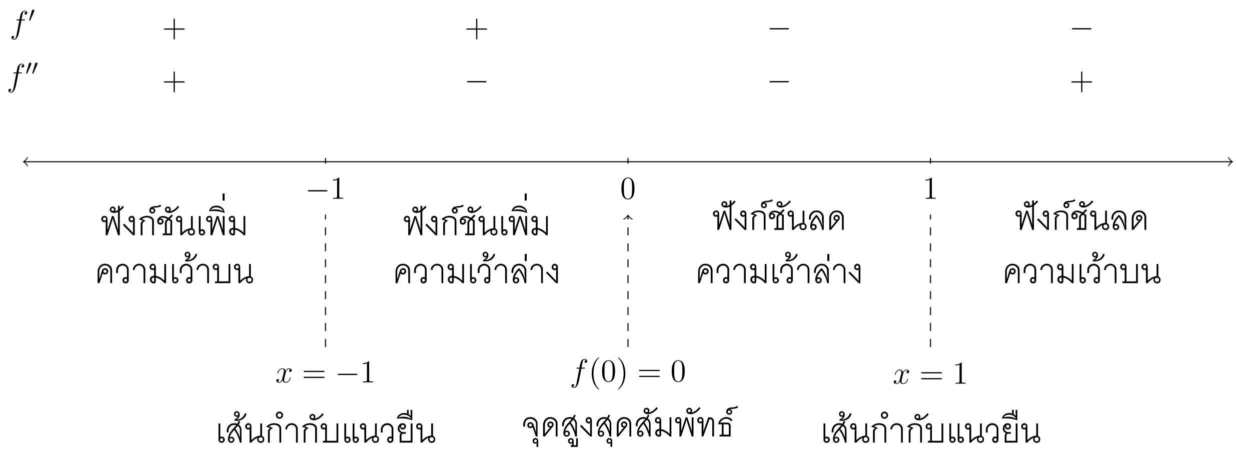
$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{(x^2-1)^2(2) - 2x \cdot 2(x^2-1)(2x)}{(x^2-1)^4} \\ &= -\frac{(x^2-1)[2(x^2-1) - 8x^2]}{(x^2-1)^4} = \frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3} \end{aligned}$$

ดังนั้น f ไม่มีจุดเปลี่ยนเว้า พิจารณาเครื่องหมาย f'' บนเส้นจำนวนจะได้ว่า

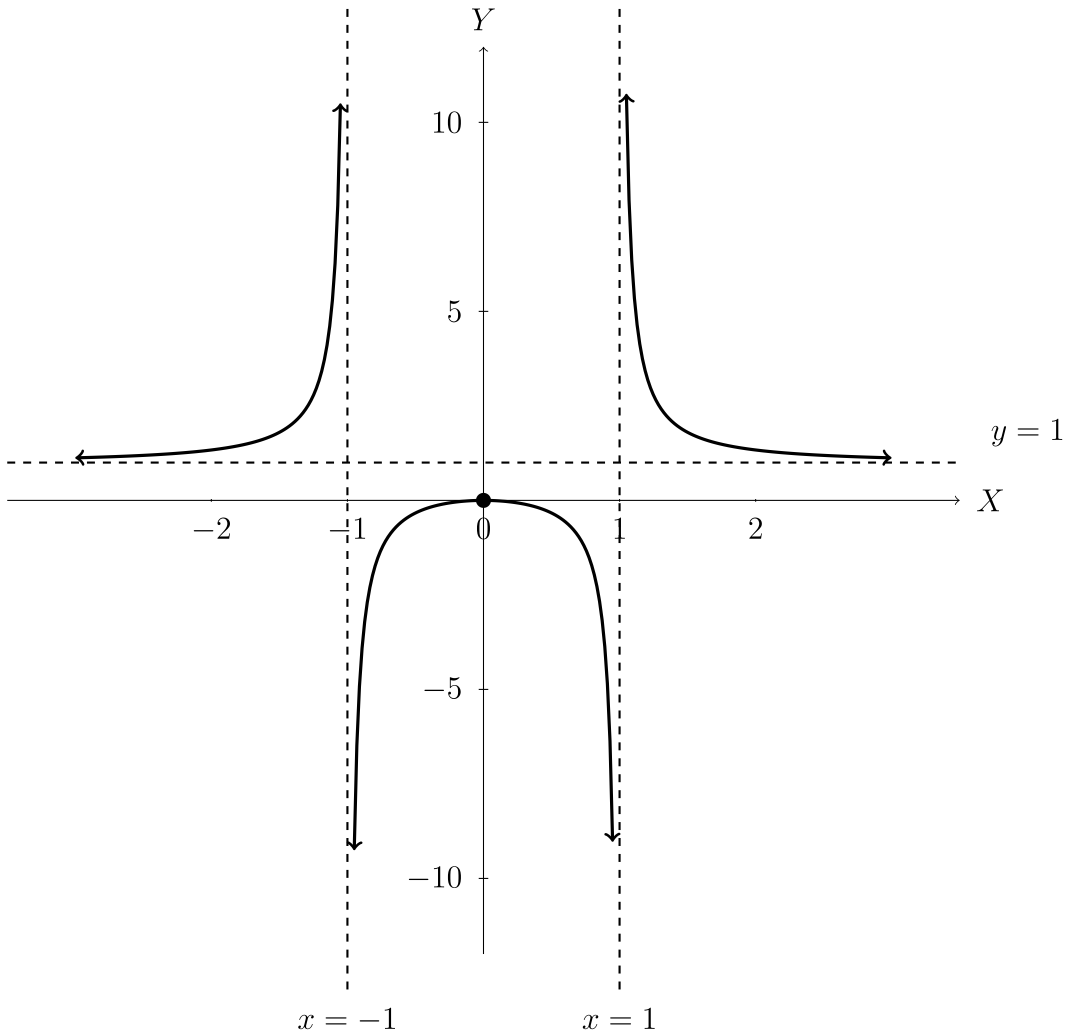
$$\begin{array}{ccccc} + & & - & & + \\ \hline & -1 & & 1 & \end{array}$$

f มีความเว้าบนบน $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ และความเว้าล่างบน $(-1, 1)$

5. นำข้อมูลที่ได้มาสรุปบนเส้นจำนวนได้ดังนี้



นำไปเขียนกราฟได้ดังนี้



ตัวอย่าง 4.4.8 จงวิเคราะห์และร่างกราฟของเส้นโค้ง $f(x) = \dfrac{x^2+x}{x-2}$

วิธีทำ 1. โดเมนของ f คือ $\mathbb{R} - \{2\}$ เนื่องจาก

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+x}{x-2} = \infty \qquad \text{และ} \qquad \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+x}{x-2} = -\infty$$

ดังนั้น $x = 2$ เป็นเส้นกำกับแนวยืน จะเห็นว่า

$$f(x) = \frac{x^2+x}{x-2} = \frac{x(x-2)+3(x-2)+6}{x-2} = (x+3) + \frac{6}{x-2}$$

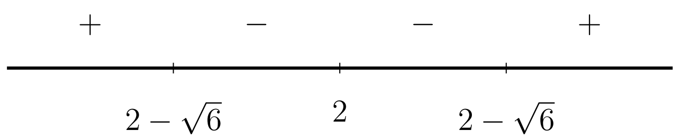
เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6}{x-2} = 0$ และ $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{6}{x-2} = 0$
ดังนั้น $y = x+3$ เป็นเส้นกำกับแนวเอียงของ f
2. เนื่องจาก $f(x) = 0$ ถ้า $x^2 + x = x(x+1) = 0$ นั่นคือ $x = 0, -1$
ดังนั้น $(0,0)$ และ $(-1,0)$ เป็นจุดแกน
3. พิจารณา

$$f'(x) = 1 - 6(x-2)^{-2} = \frac{(x-2)^2-6}{(x-2)^2}$$

ดังนั้น $x = 2-\sqrt{6}, 2+\sqrt{6}$ เป็นจุดวิกฤต จะได้ว่า

$$f(2-\sqrt{6}) = (2-\sqrt{6}) + 3 + \frac{6}{(2-\sqrt{6})-2} = 5 - 2\sqrt{6}$$
$$f(2+\sqrt{6}) = (2+\sqrt{6}) + 3 + \frac{6}{(2+\sqrt{6})-2} = 5 + 2\sqrt{6}$$

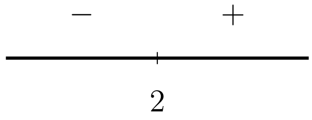
เมื่อพิจารณาเครื่องหมาย f' บนเส้นจำนวนจะได้ว่า



และ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $(-\infty, 2-\sqrt{6}) \cup (2+\sqrt{6}, \infty)$ และเป็นฟังก์ชันลดบน $(2-\sqrt{6}, 2+\sqrt{6})$
4. พิจารณา

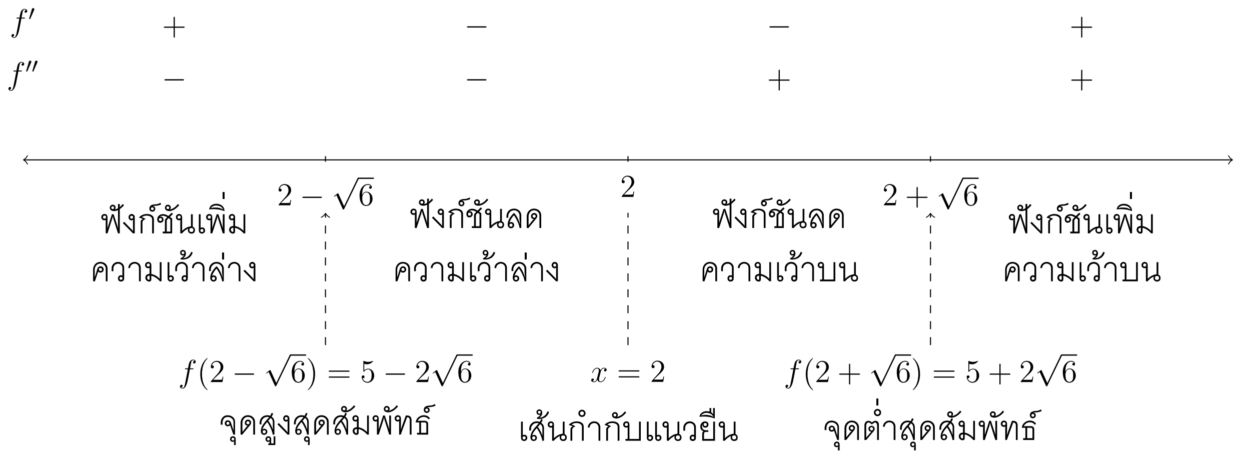
$$f''(x) = 12(x-2)^{-3} = \frac{12}{(x-2)^3}$$

ดังนั้น f ไม่มีจุดเปลี่ยนเว้า พิจารณาเครื่องหมาย f'' บนเส้นจำนวนจะได้ว่า

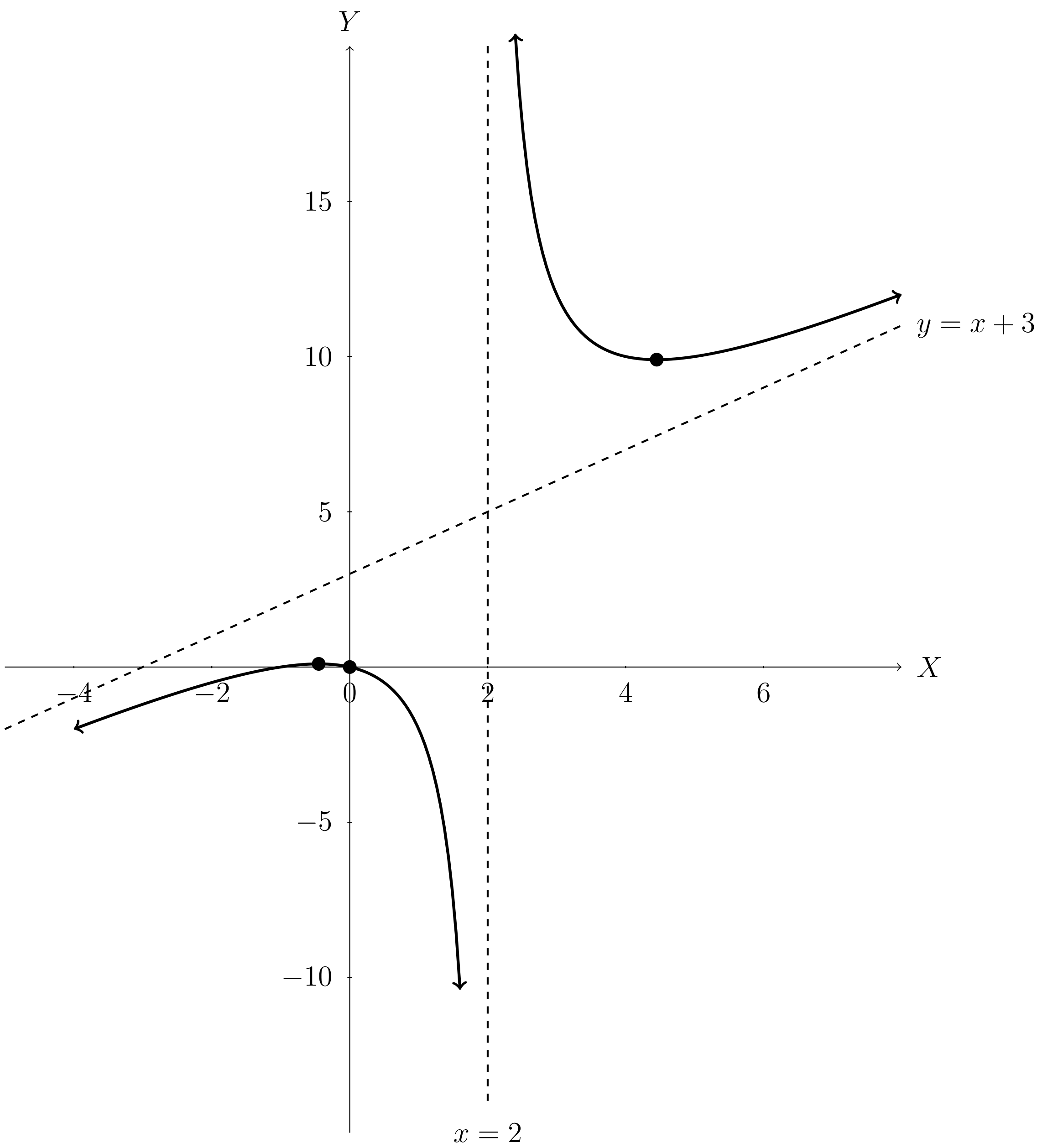


f มีความเว้าบนบน $(2, \infty)$ และความเว้าล่างบน $(-\infty, 2)$

5. นำข้อมูลที่ได้มาสรุปบนเส้นจำนวนได้ดังนี้



นำไปเขียนกราฟได้ดังนี้



ตัวอย่าง 4.4.9 จงวิเคราะห์และร่างกราฟของเส้นโค้ง $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$

วิธีทำ 1. โดเมนของ f คือ $\mathbb{R}$ เนื่องจาก

$$\lim_{x\to\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} = 0 \qquad \text{และ} \qquad \lim_{x\to-\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} = 0$$

ดังนั้น $y = 0$ เป็นเส้นกำกับแนวนอน
2. ไม่มีจุดตัดแกน
3. พิจารณา $f'(x) = -xe^{-\frac{1}{2}x^2}$ ดังนั้น $x = 0$ เป็นจุดวิกฤต จะได้ว่า $f(0) = 1$
เมื่อพิจารณาเครื่องหมาย f' บนเส้นจำนวนจะได้ว่า

$-$		$+$
	0	

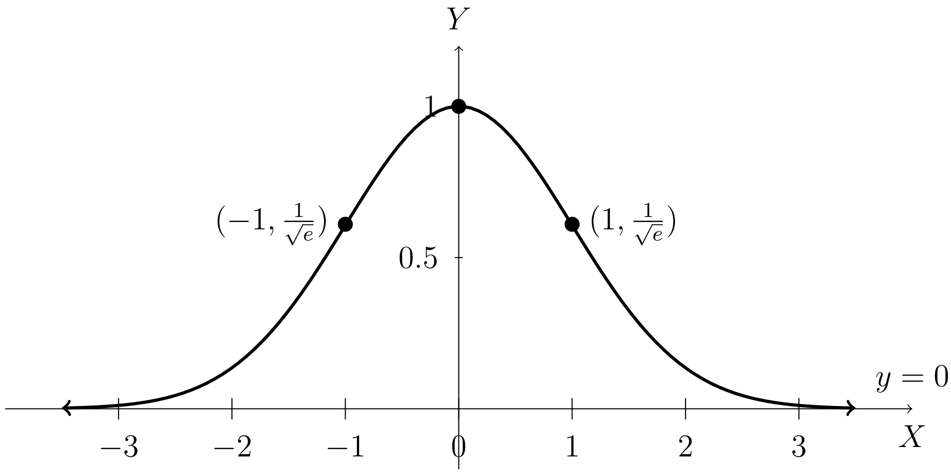
และ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $(0, \infty)$ และเป็นฟังก์ชันลดบน $(-\infty, 0)$
4. พิจารณา $f''(x) = -e^{-\frac{1}{2}x^2} - xe^{-\frac{1}{2}x^2}(-x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}(x^2-1) = e^{-\frac{1}{2}x^2}(x-1)(x+1)$
จะได้ว่า $f(-1) = f(1) = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$ พิจารณาเครื่องหมาย f'' บนเส้นจำนวนจะได้ว่า

$+$		$-$		$+$
	-1		1	

ดังนั้น $x = -1, 1$ เป็นจุดเปลี่ยนเว้าของ f และ f มีความเว้าบนบน $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ และความเว้าล่างบน $(-1, 1)$
5. นำข้อมูลที่ได้มาสรุปบนเส้นจำนวนได้ดังนี้

f'	$-$		$-$		$+$		$+$
f''	$+$		$-$		$-$		$+$
		-1		0		1	
	ฟังก์ชันลด ความเว้าบน		ฟังก์ชันลด ความเว้าล่าง		ฟังก์ชันเพิ่ม ความเว้าล่าง		ฟังก์ชันเพิ่ม ความเว้าบน
		$f(-1) = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$ จุดเปลี่ยนเว้า		$f(0) = 1$ จุดสูงสุดสัมพัทธ์		$f(1) = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$ จุดเปลี่ยนเว้า	

นำไปเขียนกราฟได้ดังนี้



แบบฝึกหัด 4.4

จงวิเคราะห์และร่างกราฟของเส้นโค้งต่อไปนี้

1. $f(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 4$
2. $f(x) = 5x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}}$
3. $f(x) = 2 - (x-3)^{\frac{1}{3}}$
4. $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$
5. $f(x) = x^2 e^{-3x}$
6. $f(x) = 2x + \dfrac{1}{x^2}$
7. $f(x) = \dfrac{4x^2-1}{x^2-1}$
8. $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$
9. $f(x) = x(4-x)^{\frac{1}{3}}$
10. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x}$

4.5 อัตราสัมพัทธ์

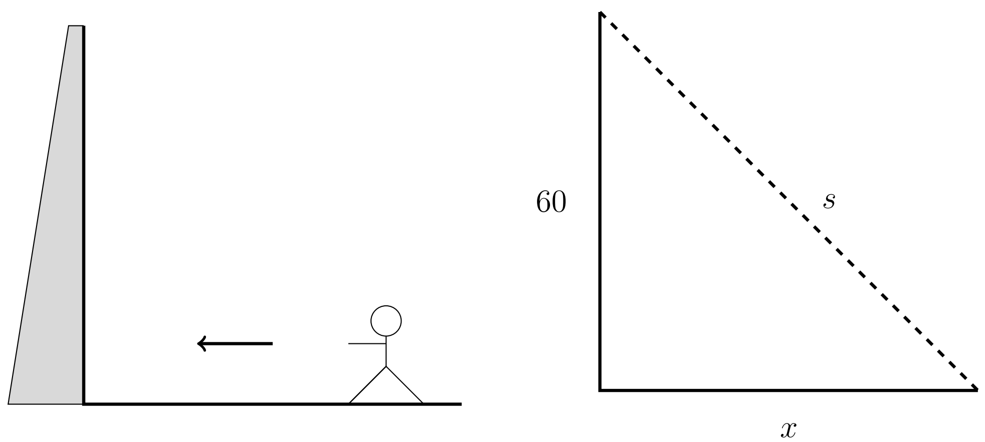
ในหัวนี้เราจะศึกษาการประยุกต์อนุพันธ์เพื่อใช้หาอัตราการเปลี่ยนแปลงปริมาณต่าง ๆ เทียบกับเวลา ซึ่งเรียกว่า **อัตราสัมพัทธ์** (relative rate) ทำให้เราสนใจปัญหากับผลกระทบของอัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรบางตัวเทียบกับเวลาที่มีอัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวอื่น ๆ เทียบกับเวลา เรียกปัญหาแบบนี้ว่า **ปัญหาอัตราสัมพัทธ์** (relative rate problem)

ขั้นตอนการแก้ปัญหา

1. กำหนดตัวแปรแทนปริมาณต่าง ๆ ที่ขึ้นกับเวลา
2. เขียนความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรในข้อ 1 (ถ้าเขียนได้)
3. สร้างสมการระหว่างตัวแปรต่าง ๆ ที่ขึ้นกับเวลา
4. หาอนุพันธ์ของข้อ 3 เทียบกับเวลา
5. แทนค่าตัวแปรต่าง ๆ ที่โจทย์กำหนด และคำนวณหาสิ่งที่โจทย์ต้องการ

ตัวอย่าง 4.5.1 ชายคนหนึ่งเดินเข้าหาฐานหอคอยที่มีความสูง 60 ฟุต ด้วยอัตราเร็ว 2 ฟุตต่อวินาที จงหาว่าชายผู้นี้จะเคลื่อนที่เข้าใกล้ยอดของหอคอยด้วยอัตราเร็วเท่าใด ในขณะเขาอยู่ห่างจากฐานของหอคอยเป็นระยะทาง 80 ฟุต

วิธีทำ ให้ x แทนระยะทางระหว่างฐานของหอคอยกับผู้ชายคนนี้
s แทนระยะทางระหว่างจากจุดยอดของหอคอยกับชายคนนี้



จากรูป $s = \sqrt{x^2 + 60^2}$ ดังนั้น

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}(x^2 + 60^2)^{-\frac{1}{2}}(2x)\frac{dx}{dt} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 60^2}} \cdot \frac{dx}{dt}$$

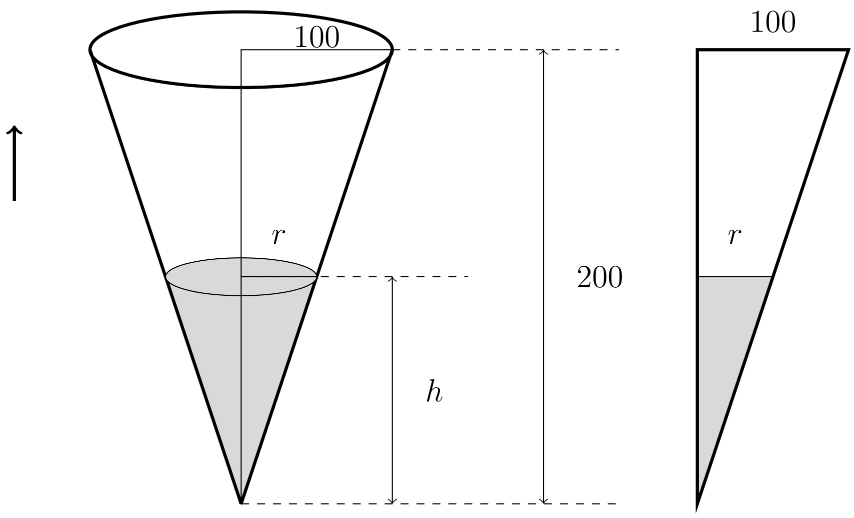
จากที่โจทย์กำหนดจะได้ $\frac{dx}{dt} = 2$ ฟุตต่อวินาที สิ่งที่โจทย์ต้องการคือ $\frac{ds}{dt}$ ขณะที่ $x = 80$ ฟุต จะได้ว่า

$$\frac{ds}{dt} = \frac{80}{\sqrt{80^2 + 60^2}} \cdot 2 = \frac{160}{100} = 1.6$$

ดังนั้นชายผู้นี้จะเคลื่อนที่เข้าใกล้ยอดของหอคอยด้วยอัตราเร็ว 1.6 ฟุตต่อวินาที ในขณะเขาอยู่ห่างจากฐานของหอคอยเป็นระยะทาง 80 ฟุต

ตัวอย่าง 4.5.2 ถังน้ำรูปกรวยกลมตรง มีเส้นผ่านศูนย์กลางที่ปากถังยาว 1 เมตร และสูง 2 เมตร ไขน้ำเข้าถังด้วยอัตราเร็ว 50 ลูกบาศก์เซนติเมตรต่อวินาที จงหาว่าระดับน้ำในถังจะสูงขึ้นด้วยอัตราเร็วเท่าใด เมื่อความสูงของน้ำในถังเป็น 80 เซนติเมตร

วิธีทำ ให้ r แทนรัศมีของผิวน้ำในกรวยมีหน่วยเป็นเซนติเมตร
h แทนความสูงจากผิวน้ำกับก้นถังมีหน่วยเป็นเซนติเมตร
V แทนปริมาตรของน้ำในกรวยมีหน่วยเป็นลูกบาศก์เซนติเมตร



จากรูปด้านขวามือมีสามเหลี่ยมคล้ายกัน 2 รูปคือสามเหลี่ยมที่แรเงากับสามเหลี่ยมใหญ่สุด
จะได้ว่า $h = 2r$ และ

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h = \frac{1}{12}\pi h^3$$

จะได้ว่า

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{12}\pi \cdot 3h^2\frac{dh}{dt} = \frac{1}{4}\pi h^2\frac{dh}{dt}$$

จากที่โจทย์กำหนดจะได้ $\dfrac{dV}{dt} = 50$ ลูกบาศก์เซนติเมตรต่อวินาที สิ่งที่โจทย์ต้องการคือ $\dfrac{dh}{dt}$ ขณะที่ $h = 80$ เซนติเมตร จะได้ว่า

$$50 = \frac{1}{4}\pi \cdot 80^2 \cdot \frac{dh}{dt}$$
$$\frac{1}{32\pi} = \frac{dh}{dt}$$

ดังนั้นระดับน้ำในถังจะสูงขึ้นด้วยอัตราเร็ว $\dfrac{1}{32\pi}$ หรือ 0.00995 เซนติเมตรต่อวินาที เมื่อความสูงของน้ำในถังเป็น 80 เซนติเมตร

แบบฝึกหัด 4.5

1. โยนก้อนหินก้อนหนึ่งลงในสระ จะทำให้เกิดน้ำเป็นละลอกแผ่ออกไปเป็นวงกลมมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดของก้อนหินตกรัศมีของวงกลมวงนอกเพิ่มขึ้นด้วยอัตราเร็ว 50 เซนติเมตรต่อวินาที จงหาพื้นที่ของวงกลมที่จะเพิ่มขึ้นด้วยอัตราเท่าใด หลังจากที่ก้อนหินตกถึงผิวน้ำ 5 วินาที
2. จรวดลำหนึ่งถูกยิงขึ้นจากพื้นดินตามแนวดิ่ง ขณะที่จรวดเคลื่อนที่ขึ้นไปได้มีเรดาห์ซึ่งอยู่ห่างจากฐานยิงจรวดไปตามพื้นดินเป็นระยะ 3 กิโลเมตร คอยสังเกตการเคลื่อนที่ จงหาอัตราเร็วของจรวดขณะเมื่อระยะทางจากเรดาห์ถึงจรวดมีค่าเท่ากับ 5 กิโลเมตร โดยระยะทางนี้กำลังเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 5,000 กิโลเมตรต่อชั่วโมง
3. บันไดยาว 13 ฟุต วางพิงกำแพงไว้ ถ้าฐานบันไดกำลังเลื่อนออกจากกำแพงด้วยอัตราเร็ม 0.1 ฟุตต่อวินาที จงหาว่าปลายบนของบันไดเลื่อนลงด้วยอัตราเร็วเท่าใด และจงหาอัตราเร็วของมุมที่บันไดทำกับพื้นดินขณะที่ยอดอยู่สูงจากพื้น 12 ฟุต
4. อากาศถูกอัดใส่ในลูกโป่งรูปทรงกลมด้วยอัตราเร็วคงตัว 10 ลูกบาศก์นิ้วต่อวินาที จงหาอัตราเร็วของพื้นที่ผิวของลูกโป่งที่เพิ่มขึ้น ขณะที่รัศมีของลูกโป่งเป็น 5 นิ้ว
5. ถ้ามุมเงยของดวงอาทิตย์เป็น 45 องศา และกำลังลดลงด้วยอัตรา 0.25 เรเดียนต่อวินาที จงหาว่าเงาของเราซึ่งสูง 5 ฟุต ที่ทอดบนพื้นดินจะยาวขึ้นด้วยอัตราเร็วเท่าใด
6. กล้องถ่ายภาพตั้งอยู่ห่างฐานยิงจรวด 3,000 เมตร ถ่ายภาพจรวดที่กำลังเคลื่อนที่ไปในแนวดิ่ง จงหาว่า ระยะทางระหว่างกล้องถ่ายภาพกับจรวดจะเปลี่ยนไปด้วยอัตราเร็วเท่าใดขณะที่จรวดอยู่สูง 4,000 เมตร และกำลัง ขึ้นด้วยความเร็ว 880 เมตร/วินาที
7. บันไดยาว 3 เมตร วางพิงกำแพงปรากฏว่าบันไดลื่นไถล โดยปลายล่างเคลื่อนออกจากกำแพงด้วย อัตราเร็ว 1 เมตร/วินาที จงหาว่าปลายบนจะเลื่อนลงด้วยอัตราเร็วเท่าใด ขณะที่ปลายล่างอยู่ห่างกำแพง 2 เมตร
8. เติมน้ำใส่ลูกโป่งด้วยอัตรา 2 ลูกบาศก์นิ้วต่อนาที ทำให้ลูกโป่งขยายออกเป็นลูกทรงกลมตลอด จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของรัศมี เมื่อลูกโป่งมีรัศมี 4 นิ้ว
9. ก่อกองทรายเป็นรูปเจดีย์โดยเททรายบนยอดด้วยความเร็ว 2 ลูกบาศก์ฟุตต่อวินาที ถ้ากองทรายคงรูป เดิมโดยที่ส่วนสูงจะเท่ากับรัศมีของฐาน กองทราย จงหาว่าส่วนสูงของกองทรายจะเพิ่มขึ้นด้วยความเร็วเท่าใด ขณะ ที่กองทรายสูง 5 ฟุต
10. สมชายยืนบนท่าเรือซึ่งสูงกว่าระดับน้ำ 10 ฟุต สาวเชือกดึงเรือบดเข้าหาฝั่งด้วยความเร็วของเชือก 15 ฟุตต่อนาที จงหาว่ามุมที่เชือกทำกับแนวระดับจะเพิ่มขึ้นหรือลดลงด้วยความเร็วเท่าใด ขณะที่เชือกผูกเรือ ยาว 20 ฟุต (มุมหน่วยเป็นเรเดียน)
11. น้ำไหลออกจากถังรูปกรวยหงายด้วยอัตรา 10 ลูกบาศก์เซนติเมตรต่อวินาที ถ้ารัศมีของกรวยเท่ากับ 12 ซม. และสูงเท่ากับ 30 ซม. จงหา อัตราการลดลงของรัศมีของระดับน้ำเมื่อระดับน้ำในกรวยสูง 5 ซม.

4.6 หลักเกณฑ์ลอปีตาล

การหาลิมิตในบทที่ 2 อยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนดสำหรับฟังก์ชันตรรกยะ หรือฟังก์ชันที่สามารถเปลี่ยนรูป หรือใช้บางทฤษฎีบทมาช่วยในการหาค่าลิมิต แต่ฟังก์ชันที่ซับซ้อนยิ่งขึ้นอาจใช้วิธีดังกล่าวไม่ได้เช่น

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ell\text{n}x + x - 1}{\sqrt{x}-1}$$

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึง **หลักเกณฑ์ลอปีตาล (l 'Hospital's rule)** ซึ่งถูกเขียนไว้ในหนังสือชื่อ *Analyse des Infiniment Pertits* ในปี 1696 โดยนักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศสนามว่า มาควิส เดอ โลปิตาล (Marquis de l'Hospital, 1661-1704) แต่ผู้คนพบกฎนี้คือ จอห์น แบร์นูลลี (John Bernoulli, 1667-1748) นักคณิตศาสตร์ชาวสวิส

ทฤษฎีบท 4.6.1 หลักเกณฑ์ลอปีตาล

1. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บน $S = (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$ สำหรับบางค่า $\delta > 0$ $g(x) \neq 0$ และ $g'(x) \neq 0$ ทุก ๆ $x \in S$
   ถ้า $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ หรือ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ แล้ว
   $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

2. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้สำหรับทุก ๆ $x > N$ สำหรับบางค่า $N > 0$ และ $g'(x) \neq 0$ ทุก ๆ $x > N$
   ถ้า $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ หรือ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$ แล้ว
   $$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

3. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้สำหรับทุก ๆ $x < N$ สำหรับบางค่า $N < 0$ และ $g'(x) \neq 0$ ทุก ๆ $x < N$
   ถ้า $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$ หรือ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \infty$ แล้ว
   $$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

โดยหลักเกณฑ์ลอปีตาลจะใช้กับรูปแบบยังไม่กำหนด $\frac{0}{0}$ และ $\frac{\infty}{\infty}$ เท่านั้น แต่เราอาจประยุกต์ใช้หลักเกณฑ์ลอปีตาลกับรูปแบบยังไม่กำหนดอื่น ๆ ดังต่อไปนี้

$$\infty - \infty \qquad 0\cdot\infty \qquad 1^{\infty} \qquad \infty^{0} \qquad 0^{0}$$

แต่จะไม่พิสูจน์หลักเกณฑ์ลอปีตาลในวิชานี้ ผู้สนใจอาจศึกษาได้จากแคลคูลัสขั้นสูง

ตัวอย่าง 4.6.2 จงหาลิมิตของ

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 6x}{x}$

วิธีทำ จะเห็นว่าลิมิตอยู่ในรูปแบบ $I.F.\dfrac{0}{0}$ โดยหลักเกณฑ์ลอปีตาลจะได้ว่า

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan 6x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\tan 6x)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{6\sec^2(6x)}{1} = 6$$

2. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \dfrac{\cos x}{1-\sin x}$

วิธีทำ จะเห็นว่าลิมิตอยู่ในรูปแบบ $I.F.\dfrac{0}{0}$ โดยหลักเกณฑ์ลอปีตาลจะได้ว่า

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos x}{1-\sin x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \frac{(\cos x)'}{(1-\sin x)'} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \frac{-\sin x}{-\cos x} = +\infty$$

3. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{e^x}{x+e^x}$

วิธีทำ จะเห็นว่าลิมิตอยู่ในรูปแบบ $I.F.\dfrac{\infty}{\infty}$ โดยหลักเกณฑ์ลอปีตาลจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to \infty} \frac{e^x}{x+e^x} &= \lim_{x\to \infty} \frac{(e^x)'}{(x+e^x)'} && \text{โดยหลักเกณฑ์ลอปีตาล} \\
&= \lim_{x\to \infty} \frac{e^x}{(1+e^x} && I.F.\frac{\infty}{\infty} \\
&= \lim_{x\to \infty} \frac{(e^x)'}{(1+e^x)'} && \text{โดยหลักเกณฑ์ลอปีตาล} \\
&= \lim_{x\to \infty} \frac{e^x}{e^x} \\
&= 1
\end{aligned}$$

4. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ell n x}{\cot x}$

วิธีทำ จะเห็นว่าลิมิตอยู่ในรูปแบบ $I.F.\dfrac{\infty}{\infty}$ โดยหลักเกณฑ์ลอปีตาลจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \frac{\ell n x}{\cot x} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ell n x)'}{(\cot x)'} && \text{โดยหลักเกณฑ์ลอปีตาล} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\csc^2 x} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2 x}{x} && I.F.\frac{0}{0} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{(\sin^2 x)'}{(x)'} && \text{โดยหลักเกณฑ์ลอปีตาล} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{2\sin x\cos x}{1} = 0
\end{aligned}$$

ในข้อ 4. นี้เราอาจใช้ทฤษฎีบท 2.3.10 ร่วมกับหลักเกณฑ์ลอปีตาลในบรรทัดที่ 4 คือ

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2 x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\sin x}{x}\right) \cdot \sin x = 1 \cdot 0 = 0$$

ตัวอย่าง 4.6.3 จงหาลิมิตของ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^2+e^x(x-1)}$

วิธีทำ จะเห็นว่าลิมิตอยู่ในรูปแบบ $I.F.\dfrac{\infty}{\infty}$ โดยหลักเกณฑ์ลอปิตาลจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^2+e^x(x-1)} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{[(1+x^2)^{\frac{3}{2}}]'}{[x^2+e^x(x-1)]'} && \text{โดยหลักเกณฑ์ลอปิตาล}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{3}{2}(1+x^2)^{\frac{1}{2}}(2x)}{2x+e^x(x-1)+e^x}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{3(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{2+\frac{1}{e^{-x}}}\\
&= +\infty
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4.6.4 จงหาลิมิตของ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2+2\ell\text{n}(\cos x)}{2-2\cos x-x^2}$

วิธีทำ จะเห็นว่าลิมิตอยู่ในรูปแบบ $I.F.\dfrac{0}{0}$ โดยหลักเกณฑ์ลอปิตาลจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to0}\frac{x^2+2\ell\text{n}(\cos x)}{2-2\cos x-x^2} &= \lim_{x\to0}\frac{[x^2+2\ell\text{n}(\cos x)]'}{[2-2\cos x-x^2]'} && \text{โดยหลักเกณฑ์ลอปิตาล}\\
&= \lim_{x\to0}\frac{2x+2\cdot\frac{1}{\cos x}(-\sin x)}{2\sin x-2x}\\
&= \lim_{x\to0}\frac{x-\tan x}{\sin x-x} && I.F.\frac{0}{0}\\
&= \lim_{x\to0}\frac{(x-\tan x)'}{(\sin x-x)'} && \text{โดยหลักเกณฑ์ลอปิตาล}\\
&= \lim_{x\to0}\frac{1-\sec^2 x}{\cos x-1} && I.F.\frac{0}{0}\\
&= \lim_{x\to0}\frac{(1-\sec^2 x)'}{(\cos x-1)'} && \text{โดยหลักเกณฑ์ลอปิตาล}\\
&= \lim_{x\to0}\frac{-2\sec^2 x\tan x}{-\sin x}\\
&= \lim_{x\to0}2\sec^3 x\\
&= 2
\end{aligned}$$

จากตัวอย่างการใช้กฎโลปิตาลที่ผ่านมาจะเห็นว่า เราอาจใช้หลักเกณฑ์ลอปิตาลได้มากกว่าหนึ่งครั้ง ในกรณีการลิมิตที่มีฟังก์ชันตรีโกณมิติมาเกี่ยวข้อง อาจใช้หลักเกณฑ์ลอปิตาลร่วมกับเอกลักษณ์ตรีโกณมิติ และทฤษฎีบท 2.3.10 ที่กล่าวไว้ว่า

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$$

มาช่วยในคำนวณค่าลิมิตเหล่านั้นได้

ตัวอย่างต่อไปนี้จะกล่าวถึงรูปแบบยังไม่กำหนด $\infty - \infty$ และ $0 \cdot \infty$ เราสามารถเปลี่ยนรูปของฟังก์ชันให้ลิมิตอยู่ในรูปแบบ $I.F.\ \frac{0}{0}$ หรือ $I.F.\ \frac{\infty}{\infty}$ ดังจะแสดงดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.6.5 จงหาลิมิตของ

1. $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cot x - \csc x)$

วิธีทำ จะเห็นว่าลิมิตอยู่ในรูปแบบ $I.F.\, \infty - \infty$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+}(\cot x - \csc x) &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x - 1}{\sin x} && I.F.\frac{0}{0}\\
&= \lim_{x\to 0^+}\frac{(\cos x - 1)'}{(\sin x)'} && \text{โดยหลักเกณฑ์ลอปีตาล}\\
&= \lim_{x\to 0^+}\frac{-\sin x}{\cos x} = 0
\end{aligned}$$

2. $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ell\text{n}x}\right)$

วิธีทำ จะเห็นว่าลิมิตอยู่ในรูปแบบ $I.F.\, \infty - \infty$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ell\text{n}x}\right) &= \lim_{x\to 1^-}\frac{\ell\text{n}x - x + 1}{x\ell\text{n}x - \ell\text{n}x} && I.F.\frac{0}{0}\\
&= \lim_{x\to 1^-}\frac{(\ell\text{n}x - x + 1)'}{(x\ell\text{n}x - \ell\text{n}x)'} && \text{โดยหลักเกณฑ์ลอปีตาล}\\
&= \lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{1}{x} - 1}{\ell\text{n}x + 1 - \frac{1}{x}}\\
&= \lim_{x\to 1^-}\frac{1 - x}{x\ell\text{n}x + x - 1} && I.F.\frac{0}{0}\\
&= \lim_{x\to 1^-}\frac{(1-x)'}{(x\ell\text{n}x + x - 1)'} && \text{โดยหลักเกณฑ์ลอปีตาล}\\
&= \lim_{x\to 1^-}\frac{-1}{\ell\text{n}x + 2}\\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4.6.6 จงหาลิมิตของ $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x}\right)$

วิธีทำ จะเห็นว่าลิมิตอยู่ในรูปแบบ $I.F.\, \infty - \infty$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x}\right) &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x - x\cos x}{x\sin x} && I.F.\frac{0}{0}\\
&= \lim_{x\to 0^+}\frac{(\sin x - x\cos x)'}{(x\sin x)'} && \text{โดยหลักเกณฑ์ลอปีตาล}\\
&= \lim_{x\to 0^+}\frac{x\sin x}{\sin x + x\cos x}\\
&= \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{\frac{\sin x}{x} + \cos x}\\
&= \frac{0}{1+1} = 0
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4.6.7 จงหาลิมิตของ

1. $\lim\limits_{x\to\infty} x\tan\left(\frac{1}{x}\right)$

   วิธีทำ จะเห็นว่าลิมิตอยู่ในรูปแบบ $I.F.\, 0\cdot\infty$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} x\tan\left(\frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to\infty} \frac{\tan\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} && I.F.\frac{0}{0}\\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{[\tan\left(\frac{1}{x}\right)]'}{(\frac{1}{x})'} && \text{โดยหลักเกณฑ์ลอปีตาล}\\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\sec^2\left(\frac{1}{x}\right)\cdot(-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}}\\
&= \lim_{x\to\infty} \sec^2\left(\frac{1}{x}\right)\\
&= 1
\end{aligned}$$

2. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ell\text{n}x$

   วิธีทำ จะเห็นว่าลิมิตอยู่ในรูปแบบ $I.F.\, 0\cdot\infty$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} x\ell\text{n}x &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ell\text{n}x}{\frac{1}{x}} && I.F.\frac{\infty}{\infty}\\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ell\text{n}x)'}{(\frac{1}{x})'} && \text{โดยหลักเกณฑ์ลอปีตาล}\\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}\\
&= \lim_{x\to 0^+} (-x)\\
&= 0
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4.6.8 จงหาลิมิตของ $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\text{arctan}x - \frac{\pi}{2}\right)$

วิธีทำ จะเห็นว่าลิมิตอยู่ในรูปแบบ $I.F.\, 0\cdot\infty$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} x\left(\text{arctan}x - \frac{\pi}{2}\right) &= \lim_{x\to\infty} \frac{\text{arctan}x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} && I.F.\frac{0}{0}\\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\text{arctan}x - \frac{\pi}{2}\right)'}{(\frac{1}{x})'} && \text{โดยหลักเกณฑ์ลอปีตาล}\\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}\\
&= \lim_{x\to\infty} -\frac{x^2}{1+x^2}\\
&= \lim_{x\to\infty} -\frac{1}{\frac{1}{x^2}+1}\\
&= -\frac{1}{0+1}\\
&= -1
\end{aligned}$$

สุดท้ายจะกล่าวถึงรูปแบบยังไม่กำหนด 0^0, ∞^0 และ 1^∞ นั่นคือพิจารณาลิมิตของฟังก์ชัน $[f(x)]^{g(x)}$ จากนั้นกำหนดให้ $y = [f(x)]^{g(x)}$ จะได้

$$\ell\text{n}y = (g(x))\ell\text{n}[f(x)]$$

แล้วหาลิมิตของ ℓny และหาค่าลิมิตของ y จากสมบัติของลิมิตที่ว่า

$$\lim_{x\to a} \ell\text{n}y = \ell\text{n}\left(\lim_{x\to a} y\right)$$

ดังจะแสดงดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.6.9 จงหาลิมิตของ

1. $\lim_{x\to 0^+} x^x$

   วิธีทำ ให้ $y = x^x$ จะได้ว่า $\ell\text{n}y = x\ell\text{n}x$ ฉะนั้น

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \ell\text{n}y &= \lim_{x\to 0^+} x\ell\text{n}x \\
\ell\text{n}\left(\lim_{x\to 0^+} y\right) &= 0 && \text{โดยตัวอย่าง 4.6.7 ข้อ 2} \\
\lim_{x\to 0^+} y &= 1
\end{aligned}$$

   ดังนั้น $\lim_{x\to 0^+} x^x = 1$

2. $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

   วิธีทำ ให้ $y = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ จะได้ว่า $\ell\text{n}y = x\ell\text{n}\left(1+\frac{1}{x}\right)$ ฉะนั้น

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \ell\text{n}y &= \lim_{x\to\infty} \frac{\ell\text{n}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} && I.F.\frac{0}{0} \\
\ell\text{n}\left(\lim_{x\to 0^+} y\right) &= \lim_{x\to\infty} \frac{[\ell\text{n}\left(1+\frac{1}{x}\right)]'}{(\frac{1}{x})'} && \text{โดยหลักเกณฑ์ลอปีตาล} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot(-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1 \\
\lim_{x\to\infty} y &= e
\end{aligned}$$

   ดังนั้น $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

ตัวอย่าง 4.6.10 จงหาลิมิตของ $\lim\limits_{x\to\infty}(2^x+x)^{\frac{2}{x}}$

วิธีทำ ให้ $y=(2^x+x)^{\frac{2}{x}}$ จะได้ว่า $\ell\text{n}y=\frac{2}{x}\ell\text{n}(2^x+x)$ ฉะนั้น

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\ell\text{n}y &= \lim_{x\to\infty}\frac{2\ell\text{n}(2^x+x)}{x} && I.F.\frac{\infty}{\infty}\\
\ell\text{n}\left(\lim_{x\to 0^+}y\right) &= \lim_{x\to\infty}\frac{[2\ell\text{n}(2^x+x)]'}{(x)'} && \text{โดยหลักเกณฑ์ลอปีตาล}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{2(2^x\ell\text{n}x+1)}{2^x+x} && I.F.\frac{\infty}{\infty}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{2(2^x\ell\text{n}2+1)'}{(2^x+x)'} && \text{โดยหลักเกณฑ์ลอปีตาล}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{2\cdot 2^x\ell\text{n}2\ell\text{n}2}{2^x\ell\text{n}2+1}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{2\ell\text{n}2\ell\text{n}2}{\ell\text{n}2+\frac{1}{2^x}}\\
&= 2\ell\text{n}2=\ell\text{n}4\\
\lim_{x\to\infty}y &= e^{\ell\text{n}4}=4
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to\infty}(2^x+x)^{\frac{2}{x}}=4$

แบบฝึกหัด 4.6

จงหาลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2x-1}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\cos^2x}{x\sin x}$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x-\tan x}$
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x+\sin x}$
7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\ell\text{n}x}{x^2+1}$
8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x}{\ell\text{n}(x+e^x)}$
9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-1}{2^x-1}$
10. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cot 3x}{\cot 2x}$
11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-1}{x^2}$
12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\ell\text{n}x}{x+\ell\text{n}x}$
13. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2e^{2x}+\ell\text{n}x}{e^{2x}+x^2}$
14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4-3e^x-e^{-3x}}{4x^2}$
15. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ell\text{n}x}{x-1}$
16. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^8}{e^x}$
17. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sec^2x-2\tan x}{1+\cos 4x}$
18. $\lim\limits_{x\to 0^+}(\tan x)\ell\text{n}(\sin x)$
19. $\lim\limits_{x\to\infty}x(e^{\frac{1}{x}}-1)$
20. $\lim\limits_{x\to-\infty}x\sin\dfrac{1}{x}$
21. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\tan 5x$
22. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2-\sec\dfrac{1}{x}\right)2^{-x^2}$
23. $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\right)$
24. $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{x}{\ell\text{n}x}\right)$
25. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\csc^2x-\dfrac{1}{x^2}\right)$
26. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\tan x}\right)$
27. $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{1}{\ell\text{n}x}+\dfrac{x}{x-1}\right)$

28. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\tan 5x - \tan x)$

29. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2^x}{x} - \csc x\right)$

30. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x-1} - \dfrac{x^2}{x+1}\right)$

31. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

32. $\lim\limits_{x\to 0}(e^x + 2x)^{\frac{1}{x}}$

33. $\lim\limits_{x\to 1^-}(\sqrt{2-x^2} - 1)^{x-1}$

34. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\ell n x}$

35. $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+3x)^{\frac{1}{2x}}$

36. $\lim\limits_{x\to 0}(x + e^{\frac{x}{2}})^{\frac{2}{x}}$

37. $\lim\limits_{x\to 0^-}(\cos x - \sin x)^{\frac{1}{x}}$

38. $\lim\limits_{x\to 0^+}(x + \sin x)^{\tan x}$

39. $\lim\limits_{x\to\infty}(e^x + x)^{\frac{e}{x}}$

40. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 - \dfrac{1}{x^3}\right)^x$

41. $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos x)^{\cot x}$

42. $\lim\limits_{x\to\infty}(2^x + x^2)^{\frac{1}{x}}$

43. $\lim\limits_{x\to 0}(e^{x^2}\cos x)^{\frac{4}{x^4}}$

44. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\sec x \tan x)^{\cos x}$

45. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{3}{x}}$

สรุป

การประยุกต์ของอนุพันธ์ในวิชานี้แบ่งออกเป็น 6 เรื่องประกอบด้วย การประมาณค่าเชิงเส้น ค่าสุดขีด ความเว้าและจุดเปลี่ยนเว้า การร่างกราฟ อัตราสัมพัทธ์ และหลักเกณฑ์ลอปีตาล เรื่องแรกกล่าวถึงค่าเชิงอนุพันธ์ dx ซึ่งหมายถึง Δx โดยที่ $dy = f'(x)dx$ และนำไปใช้การการประมาณค่าเมื่อ dx มีค่าน้อย ๆ เรียกว่าการประมาณค่าเชิงเส้น $f(a+\Delta x) \approx f(a) + f'(a)\Delta x$ ต่อมากล่าวถึงค่าสุดขีดของฟังก์ชันซึ่งหมายถึงค่าสูงสุดหรือต่ำสุด และค่าสุดขีดสัมพัทธ์หมายถึงค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือต่ำสุดสัมพัทธ์ ตรวจสอบได้ 2 วิธีคือ การทดสอบโดยอนุพันธ์อันดับหนึ่ง และการทดสอบโดยอนุพันธ์อันดับสอง โดยทดสอบจุดวิกฤต c ซึ่งหมายถึง $f'(c) = 0$ หรือ $f'(c)$ ไม่มีค่า และนำไปใช้กับปัญหาค่าสูงสุดต่ำสุดของฟังก์ชัน จากนั้นกล่าวถึงความเว้าและจุดเปลี่ยนเว้า ซึ่งดูได้การพิจารณาเครื่องหมายของอนุพันธ์อันดับสอง $f''(x) > 0$ หมายถึงความเว้าบน $f''(x) < 0$ หมายถึงความเว้าล่าง และจุดเปลี่ยนเว้าคือจุดที่เปลี่ยนความเว้าแบบหนึ่งไปอีกแบบหนึ่ง ต่อมาองค์ประกอบต่าง ๆ จากเรื่องค่าสุดขีดไปช่วยในการร่างกราฟ ต่อมากล่าวถึงอัตราสัมพัทธ์คือการประยุกต์อนุพันธ์เพื่อใช้หาอัตราการเปลี่ยนแปลงปริมาณต่าง ๆ เทียบกับเวลา กับปัญหาที่เรียกว่าปัญหาอัตราสัมพัทธ์ สุดท้ายกล่าวถึงหลักเกณฑ์ลอปีตาล คือการหาลิมิตของฟังก์ชันที่อยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนด $\dfrac{0}{0}$ และ $\dfrac{\infty}{\infty}$ เท่านั้น แต่เราอาจประยุกต์ใช้หลักเกณฑ์ลอปีตาลกับรูปแบบยังไม่กำหนดอื่น ๆ ได้เช่นกัน

แบบฝึกหัดบทที่ 4

1. จงหาค่าเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

1.1 $d(x\tan x)$

1.2 $d(x\ell n x)$

1.3 $d(e^x - \sec x)$

1.4 $d\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$

2. จงใช้การประมาณค่าเชิงเส้นประมาณค่าของ

2.1 $\sqrt{15.99}$

2.2 $\sqrt[3]{26.5}$

2.3 $\sin 46^\circ$

2.4 $e^{0.02}$

3. เมื่อวัดรัศมีวงกลมและคำนวณปริมาตรพบว่า ปริมาตรมีความคลาดเคลื่อนไม่เกิน 3 ลูกบาศก์เมตร รัศมีที่วัดได้มีความคลาดเคลื่อนไม่เกิน 0.01 เมตร จงหารัศมีที่ยาวที่สุดที่วัดได้ และหาค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์

4. จงหาช่วงที่ทำให้ฟังก์ชันต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม และเป็นฟังก์ชันลด พร้อมหาจุดวิกฤติ

4.1 $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2$

4.2 $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4$

4.3 $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

4.4 $f(x) = x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}}$

5. จงหาค่าสุดขีดบนช่วงที่กำหนดให้ต่อไปนี้

5.1 $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$; $[\frac{1}{2}, 5]$

5.2 $f(x) = |x^2 - 2x - 3|$; $[-5, 5]$

6. จงหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้

6.1 $f(x) = x^4 + 2x^3$

6.2 $f(x) = \dfrac{1}{x - x^2}$

6.3 $f(x) = x\sqrt[3]{5 - x}$

6.4 $f(x) = x^{\frac{7}{3}} - 7x^{\frac{1}{3}}$

6.5 $f(x) = x^2(1 + x)^{\frac{1}{3}}$

6.6 $f(x) = \arctan x - \ell n\sqrt{1 + x^2}$

7. จงหาพื้นที่มากที่สุดของสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ถ้าด้านที่เท่ากันทั้งสองด้านยาวเท่ากับ 12 หน่วย

8. โรงเรียนแห่งหนึ่งนำนักเรียนไปทัศนศึกษา โรงเรียนเก็บเงินนักเรียนคนละ 150 บาท ถ้ามีนักเรียนไม่เกิน 150 คน แต่ถ้านักเรียนไปเกิน 150 คนจะเก็บลดลง 50 สตางค์คูณด้วยจำนวนคนที่เกินจากจำนวน 150 คน นักเรียนควรไปทัศนศึกษากี่คนจึงจะทำให้โรงเรียนเก็นเงินได้มากสุด

9. จงหาช่วงที่มีความเว้าบน มีความเว้าล่าง และจุดเปลี่ยนเว้า ของฟังก์ชันต่อไปนี้

9.1 $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

9.2 $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$

9.3 $f(x) = (x - 1)e^{-x}$

9.4 $f(x) = e^{-x^2}$

10. จงวิเคราะห์และร่างกราฟของเส้นโค้งต่อไปนี้

10.1 $f(x) = x^2 e^x$

10.2 $f(x) = 5x^{\frac{1}{5}} - 2x$

10.3 $f(x) = \dfrac{4x^2 - 1}{x^2 - 1}$

10.4 $f(x) = xe^{-x^2}$

10.5 $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{x - 3}$

10.6 $f(x) = \dfrac{5x}{x^2 - 4}$

11. ถังรูปทรงกระบอกกลมมีรัศมี 4 ฟุต และสูง 6 ฟุต บรรจุน้ำเต็ม ถ้าด้านล่างของถังเจาะรูไขน้ำออก โดยที่ อัตราเร็วของน้ำที่ไหลออกขึ้นอยู่กับความสูงของระดับน้ำ ถ้า h เป็นความสูงของระดับน้ำ อัตราเร็วของน้ำที่ไหลออก จะเท่ากับ h/2 ลูกบาศก์ฟุตต่อนาที จงหาอัตราการลดลงของระดับน้ำ เมื่อเหลือน้ำ 1/2 ของถัง

12. ถังน้ำมันทรงกระบอกถังหนึ่งมีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 8 เซนติเมตร มีรูรั่วที่ทำให้น้ำมันไหลออกมา ด้วยอัตรา 8 ลูกบาศก์เซนติเมตรต่อวินาที จงหาว่าระดับน้ำมันในถังจะลดลงด้วยอัตราเร็วเท่าใด

13. แผ่นโลหะกลมเมื่อได้รับควาร้อนจะขยายตัว เส้นรอบวงยาวเพิ่มขึ้นด้วยอัตราเร็ว 2 เซนติเมตรต่อนาที พื้นที่หน้าตัดของแผ่นโลหะจะเพิ่มขึ้นด้วยอัตราเร็วเท่าใด ขณะที่เส้นรอบวงยาว 10 เซนติเมตร

14. เติมน้ำลงแท็งก์น้ำรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากด้วยอัตราคงที่ 6 ลูกบาศก์เมตรต่อนาที แท็งน้ำมีฐานกว้าง 3 เมตร ยาว 4 เมตร และสูง 5 เมตร จงหาว่าระดับน้ำในแท็งก์น้ำสูงขึ้นด้วยอัตราเท่าใด

15. เครื่องแปรรูปแผ่นยางพาราเครื่องหนึ่งทำการยืด/หดยางพารารูปสี่เหลี่ยมมุมฉากด้วยอัตราดังนี้ ยืด ด้านกว้างขึ้นด้วยอัตราเร็ว 1 เซนติเมตร/วินาที หดด้านยาวลงด้วยอัตราเร็ว 2 เซนติเมตร/วินาที จงหาอัตราการ เปลี่ยนแปลงของพื้นที่ของยางพาราในขณะที่ด้านกว้างเท่ากับด้านยาวมีค่าเป็น 60 เซนติเมตร

16. ชายคนหนึ่งอยู่ห่างจากรางรถไฟตามแนวตั้งฉากเป็นระยะทาง 30 เมตร รถไฟวิ่งตามรางรถไฟใน ทิศทางซึ่งเข้าหาชายคนนี้ ด้วยความเร็ว 90 กม./ชม. จงหาว่าระยะห่างระหว่างรถไฟกับชายคนนั้น (ก่อนรถไฟวิ่ง ผ่านไป) จะลดลงด้วย อัตราการเปลี่ยนแปลงเท่าไร เมื่อเขาอยู่ห่างจากรถไฟ 50 เมตร

เอกสารอ้างอิง

ดำรง ทิพย์โยธา, ยุวรีย์ พันธ์กล้า และณัฏฐนาถ ไตรภพ. (2548). **แคลคูลัส ๑**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

James Stewart. (2012). **Calculus Early Transcendentals**. Seventh Edition. Canada. Nelson Education Ltd.

แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 5

หัวข้อเนื้อหาประจำบท

1. ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต
2. การหาปริพันธ์โดยการแทนค่า
3. ปริพันธ์จำกัดเขต
4. ทฤษฎีบทหลักมูลแคลคูลัส

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. เข้าใจความหมายของปริพันธ์ไม่จำกัดเขตและหาปริพันธ์โดยใช้ปฏิยานุพันธ์ได้
2. สามารถหาการหาปริพันธ์โดยการแทนค่าได้
3. เข้าใจความหมายของฟริพันธ์จำกัดเขต และหาปริพันธ์จำกัดเขตโดยใช้กราฟได้
4. ใช้สมบัติของปริพันธ์จำกัดเขตหาปริพันธ์ที่กำหนดให้ได้
5. เข้าใจและใช้ทฤษฎีบทหลักมูลแคลคูลัสได้อย่างถูกต้อง

วิธีและกิจกรรมการเรียนการสอน

1. **วิธีสอน**
   1.1 วิธีสอนแบบบรรยาย ประกอบสื่ออิเล็กทรอนิกส์
   1.2 ใช้สื่อทางอินเตอร์เน็ต และให้แต่ละคนแสดงความคิดเห็น
   1.3 วิธีสอนแบบอภิปราย โดยให้หัวข้อเป็นกลุ่มและมานำเสนอหน้าชั้น
2. **กิจกรรมการเรียนการสอน**
   2.1 บรรยายสรุปโดยใช้สื่อการสอนประกอบ
   2.2 ให้ผู้เรียนศึกษาเนื้อหาจากชุดการสอน หนังสือ ตำรา เอกสารเพิ่มเติม และสื่อออนไลน์
   2.3 อภิปรายรายกลุ่มตามหัวข้อที่ได้รับมอบหมาย

สื่อการเรียนการสอน

1. ชุดการสอน เรื่อง "ปริพันธ์"
2. สื่ออิเล็กทรอนิกส์ เรื่อง "ปริพันธ์"
3. หนังสือ ตำรา เอกสารที่เกี่ยวข้อง
4. แอพพลิเคชั่น Geogebra
5. แอพพลิเคชั่น Wolfram alpha

การวัดผลและประเมินผล

1. สังเกตการตอบคำถามและตั้งคำถามของผู้เรียนในระหว่างการบรรยายและซักถาม
2. วัดผลจากการทำแบบฝึกหัดระหว่างเรียนตามเนื้อหาที่ได้รับมอบหมาย
3. ประเมินการอภิปรายรายกลุ่ม แล้วบันทึกคะแนนลงในใบบันทึกคะแนน
4. ตรวจการทำการบ้าน บันทึกคะแนนลงในบันทึกผลงาน

บทที่ 5

ปริพันธ์

ในบทที่ 3 เมื่อกำหนดฟังก์ชันหนึ่งมาให้เราสนใจการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันนั้น ไม่ว่าจะเป็นการใช้บทนิยามหรือใช้กฎต่าง ๆ แต่ในบทนี้เราจะการดำเนินการย้อนกลับของการหาอนุพันธ์เรียกว่า **การหาปริพันธ์** (integration) เช่นหาฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์เท่ากับ $2x$ ซึ่งก็คือ x^2 และ x^2+5 เป็นต้น จะเห็นว่าการทำย้อนกลับได้คำตอบที่มากกว่าหนึ่งคำตอบ เราจะมาศึกษาสิ่งเหล่านี้ในบทนี้

5.1 ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต

บทนิยาม 5.1.1 เรียกฟังก์ชัน f ว่าหาปฏิยานุพันธ์ได้บนช่วง I ถ้ามีฟังก์ชัน F ซึ่ง

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{ทุก } x \in I$$

เรียก F ว่าเป็น**ปฏิยานุพันธ์** (antiderivative) ของฟังก์ชัน f บนช่วง I

ในบางครั้งเราจะละการบอกช่วง I ในบทนิยาม 5.1.1 แต่เข้าใจตรงกันว่า F เป็นปฏิยานุพันธ์บนช่วงที่ฟังก์ชัน F หาอนุพันธ์ได้

ตัวอย่าง 5.1.2 จงหาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้ อย่างน้อย 2 ฟังก์ชัน

1. $f(x) = 3x^2$

   วิธีทำ จะเห็นว่า $F_1(x) = x^3$ และ $F_2(x) = x^3 + 7$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f
   เนื่องจาก $F_1'(x) = 3x^2 = f(x)$ และ $F_2'(x) = 3x^2 = f(x)$

2. $f(x) = \cos x$

   วิธีทำ จะเห็นว่า $F_1(x) = \sin x$ และ $F_2(x) = \sin x - 5$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f
   เนื่องจาก $F_1'(x) = \sin x = f(x)$ และ $F_2'(x) = \sin x = f(x)$

จากตัวอย่าง 5.1.2 จะสังเกตเห็นว่าถ้า F เป็นปฏิยานุพันธ์ของของฟังก์ชัน f แล้ว $F + C$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของของฟังก์ชัน f ทุก ๆ C ที่เป็นค่าคงตัว

ทฤษฎีบท 5.1.3 ถ้า F และ G เป็นปฏิยานุพันธ์ของของฟังก์ชัน f บนช่วง I แล้วมีค่าคงตัว C ซึ่ง

$$G(x) = F(x) + C \qquad \text{ทุก } x \in I$$

เรียก $F(x) + C$ ว่า**ปฏิยานุพันธ์ทั่วไป (general antiderivative)** ของ f บนช่วง I

บทพิสูจน์. สมมติว่า F และ G เป็นปฏิยานุพันธ์ของของฟังก์ชัน f บนช่วง I ให้ $x \in I$
จะได้ว่า $F'(x) = f(x)$ และ $G'(x) = f(x)$ แล้ว

$$(G - F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \qquad \text{ทุก } x \in I$$

ดังนั้น $(G - F)(x) = C$ เมื่อ C เป็นค่าคงตัว สรุปได้ว่า $G(x) = F(x) + C$ □

บทนิยาม 5.1.4 ให้ F เป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f จะเรียกปฏิยานุพันธ์ทั่วไปของ f ว่า **ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต (indefinite integral)** ของ f เขียนแทนด้วย $\displaystyle\int f(x)\,dx$ จะได้ว่า

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

เรียก $\int$ ว่าเครื่องหมายปริพันธ์ (integral sign)

เรียก $f(x)$ ว่าตัวถูกปริพันธ์ (integrand)

เรียก x ว่าตัวแปรของปริพันธ์ (variable of integral)

เรียก C ว่าค่าคงตัวของปริพันธ์ (constant of integral)

ทฤษฎีบท 5.1.5 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาปฏิยานุพันธ์ได้ และ k เป็นค่าคงตัวแล้ว

1. $\displaystyle\int f'(x)\,dx = f(x) + C$
2. $\displaystyle\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$
3. $\displaystyle\int f(x) + g(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$
4. $\displaystyle\int f(x) - g(x)\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$

บทพิสูจน์. 1. เห็นได้ชัด
2. ให้ F เป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f จะได้ว่า $F'(x) = f(x)$ แล้ว $(kF(x))' = kF'(x) = kf(x)$ นั่นแสดงว่า kF เป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน kf สรุปได้ว่ามีค่าคงตัว C ซึ่ง

$$k\int f(x)\,dx = k(F(x) + C) = kF(x) + kC = \int kf(x)\,dx$$

3. ให้ F และ G เป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f และ g ตามลำดับ จะได้ว่า $F'(x) = f(x)$ และ $G'(x) = g(x)$ แล้ว

$$(F + G)'(x) = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x) = (f + g)(x)$$

ดังนั้น $F+G$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน $f+g$ สรุปได้ว่ามีค่าคงตัว C ซึ่ง

$$\int f(x)+g(x)dx = F(x)+G(x)+C = \left[F(x)+\frac{1}{2}C\right]+\left[G(x)+\frac{1}{2}C\right] = \int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx$$

4. ในทำนองเดียวกับข้อ 3 $\square$

จากความรู้เรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชันจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int 1\,dx &= x+C \\
\int x^n\,dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1}+C \qquad \text{เมื่อ } n\neq -1 \\
\int \frac{1}{x}\,dx &= \ell\text{n}|x|+C \\
\int e^x\,dx &= e^x+C \\
\int a^x\,dx &= \frac{a^x}{\ell\text{n}a}+C \\
\int \text{sin}x\,dx &= -\text{cos}x+C \\
\int \text{cos}x\,dx &= \text{sin}x+C \\
\int \text{sec}x\text{tan}x\,dx &= \text{sec}x+C \\
\int \text{sec}^2x\,dx &= \text{tan}x+C \\
\int \text{csc}x\text{cot}x\,dx &= -\text{csc}x+C \\
\int \text{csc}^2x\,dx &= -\text{cot}x+C \\
\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \text{arcsin}x+C = -\text{arccos}x+C \\
\int \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \text{arctan}x+C = -\text{arccot}x+C \\
\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}\,dx &= \text{arcsec}\,x+C = -\text{arccsc}x+C
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.1.6 จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขต $\displaystyle\int 3x^2 + x - 1\,dx$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int 3x^2 + x - 1\,dx &= 3\int x^2\,dx + \int x\,dx - \int 1\,dx \\ &= 3\left(\frac{x^3}{3} + C_1\right) + \frac{x^2}{2} + C_2 - (x + C_3) \\ &= x^3 + \frac{x^2}{2} - x + (3C_1 + C_2 - C_3)\end{aligned}$$

ให้ $C = (3C_1 + C_2 - C_3)$ ดังนั้น

$$\int 3x^2 + x - 1\,dx = x^3 + \frac{x^2}{2} - x + C$$

จากตัวอย่าง 5.1.6 จะเห็นว่าการหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตจะเกิดค่าคงตัวได้หลายค่า (ขึ้นกับจำนวนพจน์ของการหาปริพันธ์) แต่สุดท้ายสามารถรวมเป็นค่าคงตัวค่าหนึ่งได้เสมอ ดังนั้นเป็นที่ทราบกันดีว่าในการหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตเราอาจจะเขียนค่าคงตัวเพียงตัวเดียวในขั้นสุดท้าย

ตัวอย่าง 5.1.7 จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตต่อไปนี้

1. $\displaystyle\int 2e^x - 2^{x+1} - \cos x\,dx$

   วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int 2e^x - 2^{x+1} - \cos x\,dx &= 2\int e^x\,dx - 2\int 2^x\,dx - \int \cos x\,dx \\ &= 2e^x - 2\cdot\frac{2^x}{\ell n2} - \sin x + C\end{aligned}$$

2. $\displaystyle\int \frac{2 + x^2}{1 + x^2}\,dx$

   วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int \frac{2 + x^2}{1 + x^2}\,dx = \int \frac{(1 + x^2) + 1}{1 + x^2}\,dx &= \int 1 + \frac{1}{1 + x^2}\,dx \\ &= \int 1\,dx + \int \frac{1}{1 + x^2}\,dx \\ &= x + \arctan x + C\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.1.8 จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตต่อไปนี้

1. $\displaystyle\int \sqrt{x}(x - 1)\,dx$

   วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x}(x - 1)\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}(x - 1)\,dx &= \int x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\,dx \\ &= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C\end{aligned}$$

2. $\displaystyle\int \frac{2x-1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int \frac{2x-1}{\sqrt[3]{x}}\,dx &= \int \frac{2x-1}{x^{\frac{1}{3}}}\,dx = \int 2x^{-\frac{2}{3}} - x^{-\frac{1}{3}}\,dx\\ &= 6x^{\frac{1}{3}} - \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C\end{aligned}$$

3. $\displaystyle\int \frac{(x-1)^2}{x^2}\,dx$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int \frac{(x-1)^2}{x^2}\,dx &= \int \frac{x^2-2x+1}{x^2}\,dx = \int 1 - 2\cdot\frac{1}{x} + x^{-2}\,dx\\ &= x + 2\ell\text{n}|x| + \frac{x^{-1}}{-1} + C = x + 2\ell\text{n}|x| - \frac{1}{x} + C\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.1.9 จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขต $\displaystyle\int \frac{1+\sin x}{\cos^2 x}\,dx$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int \frac{1+\sin x}{\cos^2 x}\,dx &= \int \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx = \int \sec^2 x + \sec x\tan x\,dx\\ &= \tan x + \sec x + C\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.1.10 จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขต $\displaystyle\int \frac{1}{1-\cos x}\,dx$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-\cos x} &= \frac{1}{1-\cos x}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \frac{1+\cos x}{1-\cos^2 x}\\ &= \frac{1+\cos x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{\cos x}{\sin^2 x} = \csc^2 x + \csc x\cot x\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1-\cos x}\,dx &= \int \csc^2 x + \csc x\cot x\,dx\\ &= -\cot x - \csc x + C\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.1.11 จงหาสมการเส้นโค้งที่ผ่านจุด $(1,2)$ โดยที่ความชันที่จุด (x,y) ใดๆเป็น $\dfrac{x^4-x}{x^2}$

วิธีทำ ให้ $y=f(x)$ เป็นสมการเส้นโค้ง จะได้ว่า $f(1)=2$ และ $f'(x)=\dfrac{x^4-x}{x^2}$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}f(x) &= \int f'(x)\,dx = \int \frac{x^4-x}{x^2}\,dx\\ &= \int x^2 - \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{3}x^3 - \ell\text{n}|x| + C\end{aligned}$$

เนื่องจาก $f(1)=2$ จะได้ว่า $2=\dfrac{1}{3}-0+C$ นั่นคือ $C=\dfrac{5}{3}$ ฉะนั้นสมการเส้นโค้งนี้คือ

$$y = \frac{1}{3}x^3 - \ell\text{n}|x| + \frac{5}{3}$$

ตัวอย่าง 5.1.12 อนุภาคหนึ่งเคลื่อนที่ตามแนวแกน X ด้วยความเร่งขณะเวลา t ใด ๆ เป็น

$$\sqrt{t} + \text{sin}t - 5 \quad \text{ฟุต/วินาที}^2$$

เมื่อ $t = 0$ อนุภาคอยู่ห่างจากจุดกำเนิดไปทางซ้าย 30 ฟุต และอนุภาคเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว 20 ฟุต/วินาที จงหาสมการการเคลื่อนที่

วิธีทำ ให้ s แทนสมการการเคลื่อนที่ จะได้ว่า $s(0) = -30$ ฟุต และ $s'(0) = 20$ ฟุต/วินาที และ

$$s''(t) = \sqrt{t} + \text{sin}t - 5$$

ฉะนั้น

$$s'(t) = \int s''(t)\,dt = \int \sqrt{t} + \text{sin}t - 5\,dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - \text{cos}t - 5t + C_1$$

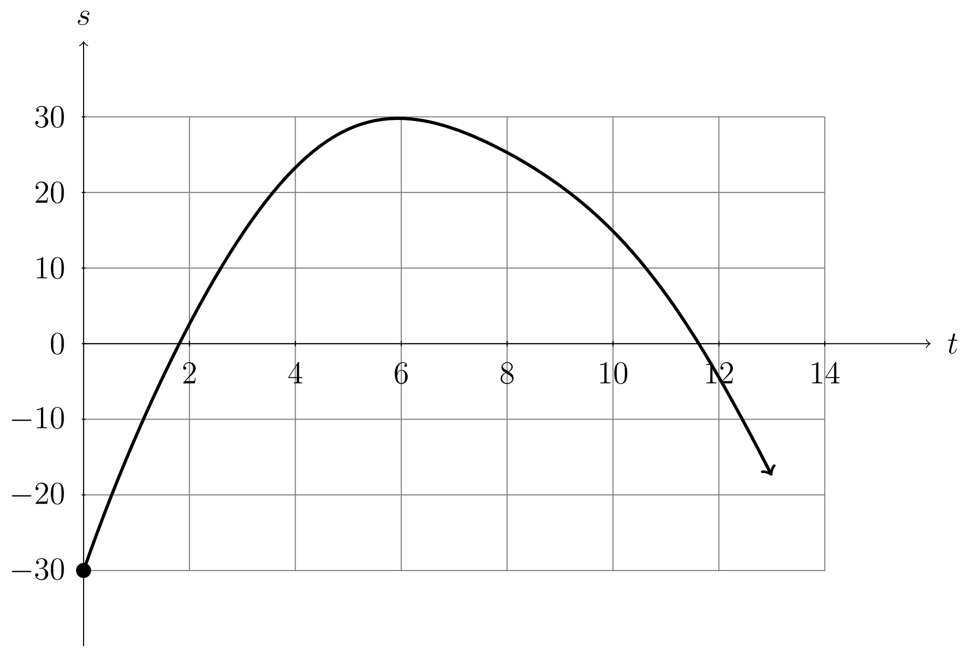
จาก $s'(0) = 20$ จะได้ว่า $20 = -1 + C_1$ นั่นคือ $C_1 = 21$ และ

$$s(t) = \int s'(t)\,dt = \int \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - \text{cos}t - 5t + 21\,dt = \frac{4}{15}t^{\frac{5}{2}} - \text{sin}t - \frac{5}{2}t^2 + 21t + C_2$$

จาก $s(0) = -30$ จะได้ว่า $-30 = 0 + 0 + 0 + 0 + C_2$ นั่นคือ $C_2 = -30$
ดังนั้นสมการการเคลื่อนที่ของอนุภาคนี้คือ

$$s(t) = \frac{4}{15}t^2\sqrt{t} - \text{sin}t - \frac{5}{2}t^2 + 21t - 30$$

แสดงกราฟการเคลื่อนที่ได้ดังนี้



แบบฝึกหัด 5.1

1. จงหาฟังก์ชัน f ที่มีปฏิยานุพันธ์เป็น F ต่อไปนี้

   1.1 $F(x) = 5$

   1.2 $F(x) = (2x+1)^{10}$

   1.3 $F(x) = \sqrt[3]{x^3+x^2-1}$

   1.4 $F(x) = \dfrac{x-1}{2x+3}$

   1.5 $F(x) = \arctan(\ell n x + \sin x)$

   1.6 $F(x) = \sin^2(\cos e^x)$

2. จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตต่อไปนี้

   2.1 $\int x^4(\sqrt{x}+2)\,dx$

   2.2 $\int \sqrt[3]{x^2}(x-2)^2\,dx$

   2.3 $\int (x+1)^3\,dx$

   2.4 $\int (1+\frac{1}{t})^2\,dt$

   2.5 $\int \dfrac{x+1}{\sqrt[3]{x}+1}\,dx$

   2.6 $\int \dfrac{x-1}{x+\sqrt{x}}\,dx$

   2.7 $\int \cos x(\sec x + 3\tan x)\,dx$

   2.8 $\int \sec x(\tan x - 2\cos x)\,dx$

   2.9 $\int \dfrac{x^2}{1+x^2}\,dx$

   2.10 $\int \dfrac{2-x^2-x^4}{4+4x^2}\,dx$

   2.11 $\int \dfrac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx$

   2.12 $\int \dfrac{1+\cos x}{\sin^2 x}\,dx$

3. จงหาสมการเส้นโค้งที่ผ่านจุด $(-1,2)$ โดยที่ความชันที่จุด (x,y) ใดๆเป็น $\dfrac{x^3-x^2}{x^5}$

4. วัตถุหนึ่งเคลื่อนที่ด้วยความเร่งตามแนวแกน X ขณะเวลา t ใด ๆ เป็น

$$6t + \cos t \quad \text{เมตร/วินาที}^2$$

   เมื่อ $t = 0$ วัตถุอยู่ห่างจากจุดกำเนิดไปทางขวา 20 เมตร และเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว 10 เมตร/วินาที จงหาสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุนี้

5.2 การหาปริพันธ์โดยการแทนค่า

ทฤษฎีบท 5.2.1 การหาปริพันธ์โดยการแทนค่า (Integration by substitution)
ให้ $u = u(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้และมีเรจน์เป็นช่วง I และ f เป็นฟังก์ชันที่หาปฏิยานุพันธ์ได้บน I แล้ว

$$\int \left[f(u(x)) \frac{du(x)}{dx} \right] dx = \int f(u)\, du$$

บทพิสูจน์. ให้ F เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f นั่นคือ $F'(x) = f(x)$ โดยกฎลูกโซ่จะได้ว่า

$$\frac{d}{dx} F(u(x)) = F'(u(x)) \frac{du(x)}{dx}$$

ให้ $u = u(x)$ ดังนั้น

$$\int F'(u) \frac{du}{dx}\, dx = \int \frac{d}{dx} F(u)\, dx = F(u) + C = \int F'(u)\, du$$

เนื่องจาก $F'(x) = f(x)$ สรุปได้ว่า

$$\int \left[f(u(x)) \frac{du(x)}{dx} \right] dx = \int f(u)\, du$$

$\square$

ตัวอย่าง 5.2.2 จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตต่อไปนี้

1. $\int (2x+1)^{10}\, dx$

   วิธีทำ ให้ $u = 2x + 1$ นั่นคือ $du = 2dx$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \int (2x+1)^{10}\, dx &= \int (2x+1)^{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2dx = \frac{1}{2} \int u^{10}\, du \\ &= \frac{1}{22} u^{11} + C = \frac{1}{22} (2x+1)^{11} + C \end{aligned}$$

2. $\int x\sqrt{x^2+1}\, dx$

   วิธีทำ ให้ $u = x^2 + 1$ นั่นคือ $du = 2xdx$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{x^2+1}, dx &= \int \sqrt{x^2+1} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2xdx = \frac{1}{2} \int u^{\frac{1}{2}}\, du \\ &= \frac{1}{3} u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3} (x^2+1)^{\frac{3}{2}} + C \end{aligned}$$

3. $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+1}\, dx$

   วิธีทำ ให้ $u = e^x + 1$ นั่นคือ $du = e^x dx$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \int \frac{e^x}{e^x+1}\, dx &= \int \frac{1}{e^x+1} \cdot e^x dx = \int \frac{1}{u}\, du \\ &= \ell\mathrm{n}|u| + C = \ell\mathrm{n}(e^x+1) + C \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.2.3 จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตต่อไปนี้

1. $\int \sin(1-3x)\,dx$

   วิธีทำ ให้ $u = 1-3x$ นั่นคือ $du = -3dx$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int \sin(1-3x)\,dx &= \int \sin(1-3x)\cdot\frac{1}{-3}\cdot(-3dx) = -\frac{1}{3}\int \sin u\,du\\ &= \frac{1}{3}\cos u + C\\ &= \frac{1}{3}\cos(1-3x) + C\end{aligned}$$

2. $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$

   วิธีทำ ให้ $u = \ln x$ นั่นคือ $du = \frac{1}{x}dx$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x\ln x}\,dx &= \int \frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}dx = \int \frac{1}{u}\,du\\ &= \ln|u| + C\\ &= \ln|\ln x| + C\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.2.4 จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตต่อไปนี้

1. $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx$

   วิธีทำ ให้ $u = \ln x$ นั่นคือ $du = \frac{1}{x}dx$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx &= \int \sin(\ln x)\cdot\frac{1}{x}dx = \int \sin u\,du\\ &= -\cos u + C\\ &= -\cos(\ln x) + C\end{aligned}$$

2. $\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx$

   วิธีทำ ให้ $u = \sin x$ นั่นคือ $du = \cos x dx$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx &= \int \frac{1}{1+\sin^2 x}\cdot\cos x dx\\ &= \int \frac{1}{1+u^2}\,du\\ &= \arctan u + C\\ &= \arctan(\sin x) + C\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.2.5 จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขต $\int x^2\sqrt{x-2}\,dx$

วิธีทำ ให้ $u = x-2$ นั่นคือ $du = dx$ และ $x = u+2$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{x-2}\,dx &= \int (u+2)^2\sqrt{u}\,du\\ &= \int (u^2+2u+4)u^{\frac{1}{2}}\,du\\ &= \int u^{\frac{5}{2}}+4u^{\frac{3}{2}}+4u^{\frac{1}{2}}\,du\\ &= \frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}}+\frac{8}{5}u^{\frac{5}{2}}+\frac{8}{3}u^{\frac{3}{2}}+C\\ &= \frac{2}{7}(x-2)^{\frac{7}{2}}+\frac{8}{5}(x-2)^{\frac{5}{2}}+\frac{8}{3}(x-2)^{\frac{3}{2}}+C\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.2.6 จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขต $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt[3]{x+3}}\,dx$

วิธีทำ ให้ $u = x+3$ นั่นคือ $du = dx$ และ $x = u-3$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt[3]{x+3}}\,dx &= \int \frac{u-3}{\sqrt[3]{u}}\,du\\ &= \int \frac{u-3}{u^{\frac{1}{3}}}\,du\\ &= \int u^{-\frac{2}{3}}-3u^{-\frac{1}{3}}\,du\\ &= \frac{3}{5}u^{\frac{5}{3}}-\frac{9}{2}u^{\frac{2}{3}}+C\\ &= \frac{3}{5}(x+3)^{\frac{5}{3}}-\frac{9}{2}(x+3)^{\frac{2}{3}}+C\end{aligned}$$

โดยกฎของค่าเชิงอนุพันธ์ (ทฤษฎีบท 4.1.4) จะได้ว่า

1. $kdv(x) = d[kv(x)]$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัว
2. $d(v(x)+b) = dv(x)$ เมื่อ b เป็นค่าคงตัว

อาจใช้ $dx = \frac{1}{k}\cdot kdx = \frac{1}{k}d(kx) = \frac{1}{k}d(kx+b)$ เมื่อ k, b เป็นค่าคงตัวซึ่ง $k \neq 0$ ในการหาปริพันธ์เช่น

$$\begin{aligned}\int (kx+b)^n\,dx &= \int (kx+b)^n\cdot\frac{1}{k}d(kx+b)\\ &= \frac{1}{k}\int (ax+b)^n d(kx+b)\\ &= \frac{1}{k(n+1)}(kx+b)^{n+1}+C\end{aligned}$$

เมื่อ $n \neq -1$ โดยใช้แนวคิดในทำนองเดียวกันจะสรุปได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 5.2.7 ให้ k และ b เป็นค่าคงตัว โดยที่ $k \neq 0$ และ $n \neq -1$ จะได้ว่า

1. $\displaystyle\int (kx+b)^n\,dx = \frac{1}{k(n+1)}(kx+b)^{n+1} + C$
2. $\displaystyle\int \frac{1}{kx+b}\,dx = \frac{1}{k}\ell\text{n}|kx+b| + C$
3. $\displaystyle\int e^{kx+b}\,dx = \frac{e^{kx+b}}{k} + C$
4. $\displaystyle\int a^{kx+b}\,dx = \frac{a^{kx+b}}{k\ell\text{na}} + C$
5. $\displaystyle\int \sin(kx+b)\,dx = -\frac{\cos(kx+b)}{k} + C$
6. $\displaystyle\int \cos(kx+b)\,dx = \frac{\sin(kx+b)}{k} + C$
7. $\displaystyle\int \sec(kx+b)\tan(kx+b)\,dx = \frac{\sec(kx+b)}{k} + C$
8. $\displaystyle\int \sec^2(kx+b)\,dx = \frac{\tan(kx+b)}{k} + C$
9. $\displaystyle\int \csc(kx+b)\cot(kx+b)\,dx = -\frac{\csc(kx+b)}{k} + C$
10. $\displaystyle\int \csc^2(kx+b)\,dx = -\frac{\cot(kx+b)}{k} + C$
11. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-(kx+b)^2}}\,dx = \frac{\arcsin(kx+b)}{k} + C$
12. $\displaystyle\int \frac{1}{1+(kx+b)^2}\,dx = \frac{\arctan(kx+b)}{k} + C$
13. $\displaystyle\int \frac{1}{|kx+b|\sqrt{(kx+b)^2-1}}\,dx = \frac{\text{arcsec}(kx+b)}{k} + C$

ตัวอย่างการหาปริพันธ์โดยทฤษฎีบท 5.2.7

1. $\displaystyle\int \cos(2x+3)\,dx = \frac{1}{2}\cos(2x+3) + C$
2. $\displaystyle\int e^{5-x}\,dx = -e^{5-x} + C$
3. $\displaystyle\int \frac{1}{3x-1}\,dx = \frac{1}{k}\ell\text{n}|3x-1| + C$
4. $\displaystyle\int \sec^2(5-2x)\,dx = -\frac{1}{2}\tan(5-2x) + C$
5. $\displaystyle\int \frac{1}{1+(x+1)^2}\,dx = \arctan(x+1) + C$

ตัวอย่าง 5.2.8 จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขต $\int \frac{1}{4x^2+4x+2}\,dx$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{4x^2+4x+2}\,dx &= \int \frac{1}{(2x+1)^2+1}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\text{arctan}(2x+1)+C\end{aligned}$$

การหาปริพันธ์โดยอาศัยกฎของค่าเชิงอนุพันธ์ที่ว่า

$$u'(x)dx = du(x)$$

เช่น $e^x dx = (e^x)'dx = d(e^x)$ และ $2xdx = (x^2)'dx = d(x^2)$ เป็นต้น ดังเช่นตัวอย่าง

$$\begin{aligned}\int x\text{sin}(x^2)\,dx\,dx &= \int \text{sin}(x^2)\cdot\frac{1}{2}\cdot 2xdx \\ &= \frac{1}{2}\int \text{sin}(x^2)d(x^2) \\ &= \frac{1}{2}\int \text{sin}u\,du \qquad \text{เมื่อ } u=x^2 \\ &= -\frac{1}{2}\text{cos}u+C \\ &= -\frac{1}{2}\text{cos}(x^2)+C\end{aligned}$$

ในบ้างครั้งเราจะละการกำหนด u โดยเป็นที่รู้กันตามทฤษฎีบทของปฏิยานุพันธ์

ตัวอย่าง 5.2.9 จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตต่อไปนี้

1. $\int e^{-\text{cos}x}\text{sin}x\,dx$

   วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int e^{-\text{cos}x}\text{sin}x\,dx &= \int e^{-\text{cos}x}(-\text{cos}x)'dx \\ &= \int e^{-\text{cos}x}d(-\text{cos}x) \\ &= e^{-\text{cos}x}+C\end{aligned}$$

2. $\int \frac{1}{x(1+\ell\text{n}^2x)}\,dx$

   วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x(1+\ell\text{n}^2x)}\,dx &= \int \frac{1}{1+\ell\text{n}^2x}\cdot\frac{1}{x}dx \\ &= \int \frac{1}{1+\ell\text{n}^2x}\cdot(\ell\text{n}x)'dx \\ &= \int \frac{1}{1+\ell\text{n}^2x}d(\ell\text{n}x) \\ &= \text{arctan}(\ell\text{n}x)+C\end{aligned}$$

3. $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx &= \int \frac{1}{e^{2x}+1}\cdot (e^x)'dx\\ &= \int \frac{1}{1+(e^x)^2}d(e^x)\\ &= \text{arctan}(e^x)+C\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.2.10 จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขต $\displaystyle\int \frac{\text{sin}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

วิธีทำ เนื่องจาก $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int \frac{\text{sin}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx &= \int \text{sin}\sqrt{x}\cdot 2(\sqrt{x})'\,dx\\ &= 2\int \text{sin}\sqrt{x}\,d(\sqrt{x})\\ &= -2\text{cos}\sqrt{x}+C\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.2.11 ปริพันธ์ของฟังก์ชันแทนเจนต์และโคแทนเจนต์

1. $\displaystyle\int \text{tan}x\,dx = \ell\text{n}|\text{sec}x|+C$
2. $\displaystyle\int \text{cot}x\,dx = \ell\text{n}|\text{sin}x|+C$

บทพิสูจน์. จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int \text{tan}x\,dx &= \int \frac{\text{sin}x}{\text{cos}x}\,dx\\ &= -\int \frac{1}{\text{cos}x}\cdot(\text{cos}x)'\,dx\\ &= -\int \frac{1}{\text{cos}x}\,d(\text{cos}x)\\ &= -\ell\text{n}|\text{cos}x|+C\\ &= \ell\text{n}|\text{sec}x|+C\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}\int \text{cot}x\,dx &= \int \frac{\text{cos}x}{\text{sin}x}\,dx\\ &= \int \frac{1}{\text{sin}x}\cdot(\text{sin}x)'\,dx\\ &= \int \frac{1}{\text{cos}x}\,d(\text{sin}x)\\ &= \ell\text{n}|\text{sin}x|+C\end{aligned}$$

□

ตัวอย่าง 5.2.12 จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขต $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 2x}\,dx$

วิธีทำ ให้ $u = 2x$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 2x}\,dx &= \int \frac{1}{2}\frac{\cos 2x}{\sin^2 2x}\,d(2x)\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{\cos u}{\sin^2 u}\,du\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sin^2 u}\,(\sin u)' du && \text{หมายเหตุ } ' = \frac{d}{du}\\ &= \frac{1}{2}\int [\sin u]^{-2}\,d(\sin u)\\ &= \frac{1}{2}[-\sin u]^{-1} + C\\ &= -\frac{1}{2\sin(2x)} + C\end{aligned}$$

การหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของฟังก์ชันตรีโกณมิติบางรูปแบบอาจจะอาศัยเอกลักษณ์ต่อไปนี้

1. $\sin x\cos y = \dfrac{1}{2}\left[\sin(x+y) + \sin(x-y)\right]$
2. $\cos x\sin y = \dfrac{1}{2}\left[\sin(x+y) - \sin(x-y)\right]$
3. $\cos x\cos y = \dfrac{1}{2}\left[\cos(x+y) + \cos(x-y)\right]$
4. $\sin x\sin y = -\dfrac{1}{2}\left[\cos(x+y) - \cos(x-y)\right]$

ตัวอย่าง 5.2.13 จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตต่อไปนี้

1. $\displaystyle\int \sin x\sin(2x)\,dx$

   วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int \sin x\sin(2x)\,dx &= \int -\frac{1}{2}[\cos(2x+x) - \cos(2x-x)]dx\\ &= -\frac{1}{2}\int \cos(3x) - \cos x\,dx\\ &= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\sin(3x) - \sin x\right] + C\\ &= -\frac{1}{6}\sin(3x) + \frac{1}{2}\sin x\end{aligned}$$

2. $\displaystyle\int \sin(3x)\cos(5x)\,dx$

   วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int \sin(3x)\cos(5x)\,dx &= \int \frac{1}{2}[\sin(5x+3x) - \sin(5x-3x)]dx\\ &= \frac{1}{2}\int \sin(8x) - \sin(2x)\,dx\\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{8}\cos(3x) + \frac{1}{2}\cos(2x)\right] + C\\ &= -\frac{1}{16}\cos(3x) + \frac{1}{4}\cos(2x) + C\end{aligned}$$

3. $\displaystyle\int \text{cos}(2x)\text{cos}(4x)\,dx$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int \text{cos}(2x)\text{cos}(4x)\,dx &= \int \frac{1}{2}[\text{cos}(4x+2x)+\text{cos}(4x-2x)]dx\\ &= \frac{1}{2}\int \text{cos}(6x)-\text{cos}(2x)\,dx\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{6}\text{sin}(6x)-\frac{1}{2}\text{sin}(2x)\right]+C\\ &= \frac{1}{12}\text{sin}(6x)-\frac{1}{4}\text{sin}(2x)+C\end{aligned}$$

4. $\displaystyle\int \text{sin}^2 x\,dx$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\int \text{sin}^2 x\,dx = \int \text{sin}x\text{sin}x\,dx$$

$$\begin{aligned} &= \int -\frac{1}{2}[\text{cos}(x+x)-\text{cos}(x-x)]dx\\ &= -\frac{1}{2}\int \text{cos}(2x)-1\,dx\\ &= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\text{sin}(2x)-x\right]+C\\ &= -\frac{1}{4}\text{sin}(2x)+\frac{1}{2}x+C\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.2.14 จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขต $\displaystyle\int \text{sin}x\text{cos}x\,dx$

วิธีทำ ทำได้ 2 วิธีคือ

<u>วิธีที่ 1</u>

$$\begin{aligned}\int \text{sin}x\text{cos}x\,dx &= \int \frac{1}{2}[\text{sin}(x+x)-\text{sin}(x-x)]dx\\ &= \frac{1}{2}\int \text{sin}(2x)\,dx\\ &= \frac{1}{4}\text{cos}(2x)+C\end{aligned}$$

<u>วิธีที่ 2</u>

$$\begin{aligned}\int \text{sin}x\text{cos}x\,dx &= \int \text{sin}x\cdot(\text{sin}x)'dx\\ &= \int \text{sin}x\,d(\text{sin}x)\\ &= \frac{1}{2}\text{sin}^2 x+C\end{aligned}$$

จากตัวอย่างดังกล่าวคำตอบที่ได้จาก 2 วิธีมีรูปแบบที่ไม่เหมือนกัน แต่เมื่อใช้จัดรูปโดยใช้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติคือรูปแบบเดียวกัน ดังนั้นการหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตอาจทำได้หลายวิธีและคำตอบอาจมีรูปแบบแตกต่างกันได้

ตัวอย่าง 5.2.15 จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขต $\int \text{sin}x[\text{cos}(2x)+\text{cos}(3x)]\,dx$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}\text{sin}x[\text{cos}(2x)+\text{cos}(3x)] &= \text{sin}x\text{cos}(2x)+\text{sin}x\text{cos}(3x)\\ &= \frac{1}{2}[\text{sin}(2x+x)-\text{sin}(2x-x)]+\frac{1}{2}[\text{sin}(3x+x)-\text{sin}(3x-x)]\\ &= \frac{1}{2}[\text{sin}(3x)-\text{sin}x]+\frac{1}{2}[\text{sin}(4x)-\text{sin}(2x)]\\ &= \frac{1}{2}\text{sin}(3x)-\frac{1}{2}\text{sin}x+\frac{1}{2}\text{sin}(4x)-\frac{1}{2}\text{sin}(2x)\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int \text{sin}x[\text{cos}(2x)+\text{cos}(3x)]\,dx &= \int \frac{1}{2}\text{sin}(3x)-\frac{1}{2}\text{sin}x+\frac{1}{2}\text{sin}(4x)-\frac{1}{2}\text{sin}(2x)\,dx\\ &= -\frac{1}{6}\text{cos}(3x)+\frac{1}{2}\text{cos}x-\frac{1}{8}\text{cos}(4x)+\frac{1}{4}\text{cos}(2x)+C\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.2.16 จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขต $\int \text{sin}x\text{sin}(2x)\text{sin}(3x)\,dx$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}\text{sin}x\text{sin}(2x)\text{sin}(3x) &= \text{sin}x[\text{sin}(2x)\text{sin}(3x)]\\ &= \text{sin}x\left(-\frac{1}{2}[\text{cos}(3x+2x)-\text{cos}(3x-2x)]\right)\\ &= -\frac{1}{2}\text{sin}x[\text{cos}(5x)-\text{cos}x]\\ &= -\frac{1}{2}\text{sin}x\text{cos}(5x)+\frac{1}{2}\text{sin}x\text{cos}x\\ &= -\frac{1}{4}[\text{sin}(5x+x)-\text{sin}(5x-x)]+\frac{1}{4}[\text{sin}(x+x)+\text{sin}(x-x)]\\ &= -\frac{1}{4}\text{sin}(6x)+\frac{1}{4}\text{sin}(4x)]+\frac{1}{4}\text{sin}(2x)\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int \text{sin}x\text{sin}(2x)\text{sin}(3x)\,dx &= \int -\frac{1}{4}\text{sin}(6x)+\frac{1}{4}\text{sin}(4x)]+\frac{1}{4}\text{sin}(2x)\,dx\\ &= \frac{1}{24}\text{cos}(6x)-\frac{1}{16}\text{cos}(4x)-\frac{1}{8}\text{cos}(2x)+C\end{aligned}$$

แบบฝึกหัด 5.2

1. จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดโดยการกำหนดตัวแปรต่อไปนี้

1.1 $\int x^2\sqrt{1-x}\,dx$ ให้ $u = 1-x$

1.2 $\int \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^3}\,dx$ ให้ $u = \sqrt{x}+1$

1.3 $\int \frac{1-\sin x}{(x+\cos x)^2}\,dx$ ให้ $u = x+\cos x$

1.4 $\int \frac{\ell n(x)}{x}\,dx$ ให้ $u = \ell n x$

2. จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตต่อไปนี้

2.1 $\int x^4(\sqrt{x}+2)\,dx$

2.2 $\int \sqrt[3]{x^2}(x-2)^2\,dx$

2.3 $\int (1+\frac{1}{t})^2\,dt$

2.4 $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}+1}\,dx$

2.5 $\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$

2.6 $\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx$

2.7 $\int \sqrt[3]{3x+1}\,dx$

2.8 $\int (x+1)^2\sqrt{1-x}\,dx$

2.9 $\int (x^2-2x+1)^{10}\,dx$

2.10 $\int \frac{4x^2+6x+1}{\sqrt{1-2x}}\,dx$

2.11 $\int \sqrt{1+\sqrt{1+x}}\,dx$

2.12 $\int \frac{2x+3}{\sqrt{4-9x^2}}\,dx$

2.13 $\int x\sqrt{3x^2+2}\,dx$

2.14 $\int \frac{1}{(3x^2+1)\sqrt{3x^2+2}}\,dx$

2.15 $\int \frac{1}{x\ell n x^4}\,dx$

2.16 $\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}\,dx$

2.17 $\int \frac{\sin e^{-x}}{e^x\cos e^{-x}}\,dx$

2.18 $\int \sec x(\tan x - 2\cos x)\,dx$

2.19 $\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx$

2.20 $\int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^2}\,dx$

2.21 $\int \cos 2x\cos 6x\,dx$

2.22 $\int \frac{\cos^4 x}{1+\sin x}\,dx$

2.23 $\int \frac{\cos^2 2x}{\sqrt{\sin 2x}}\,dx$

2.24 $\int \csc 5t\cot 5t\,dt$

5.3 ปริพันธ์จำกัดเขต

ในหัวข้อนี้จะให้แนวคิดของการหาพื้นที่ใต้กราฟของฟังก์ชันโดยอาศัยการแบ่งพื้นที่ย่อย ๆ แล้วรวมเป็นพื้นที่ที่ต้องการ นั่นคือแนวคิดที่มีมาช้านานที่เรียกว่า ระเบียบวิธีเกษียณ แต่ในแคลคูลัสปัจจุบันต้องอาศัยความรู้เรื่องอนุกรมและลิมิตอนันต์ ดังนั้นเริ่มต้นด้วยสัญลักษณ์แทนการบวกที่เรียกว่า**ซิกมา** $\sum$ (sigma) นิยามโดย

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

มีสมบัติเบื้องต้นดังนี้

1. $\sum_{k=1}^{n} c = cn$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว
2. $\sum_{k=1}^{n}(a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k$

และมีผลบวกที่สำคัญดังนี้

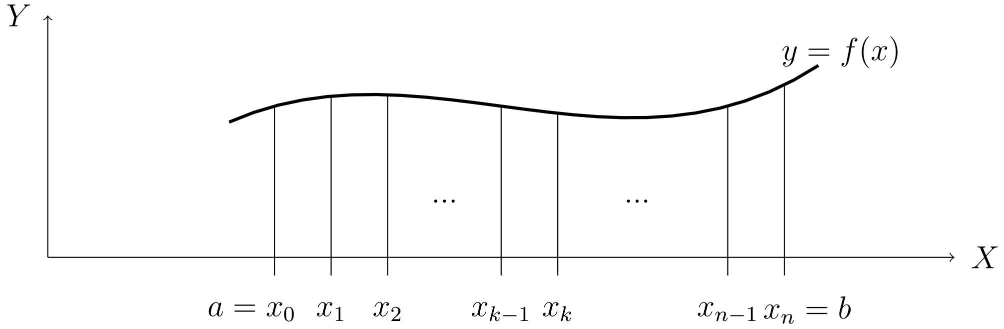
1. $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ สูตรของเกาส์ (Gauss' formula)
2. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

บทนิยาม 5.3.1 เรียกเซต $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ ว่า**ผลแบ่งกั้น** (partition) ของช่วง $[a, b]$ ซึ่งจุดใน P แบ่งช่วง $[a, b]$ ออกเป็น n ช่วงคือ

$$[x_0, x_1],\ [x_1, x_2],\ [x_2, x_3], ...,\ [x_{n-1}, x_n]$$

นั่นคือ $[a, b] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup [x_2, x_3] \cup ... \cup [x_{n-1}, x_n]$ เมื่อ $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$

รูปที่ 5.1 ผลแบ่งกั้นของ $[a, b]$



บทนิยาม 5.3.2 ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ และ $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ เป็นผลแบ่งกั้น $[a, b]$ สำหรับ $k = 1, 2, 3, ..., n$ และ $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ ถ้า

m_k เป็นค่าของ f ที่น้อยที่สุดในช่วง $[x_{k-1}, x_k]$
M_k เป็นค่าของ f ที่มากที่สุดในช่วง $[x_{k-1}, x_k]$

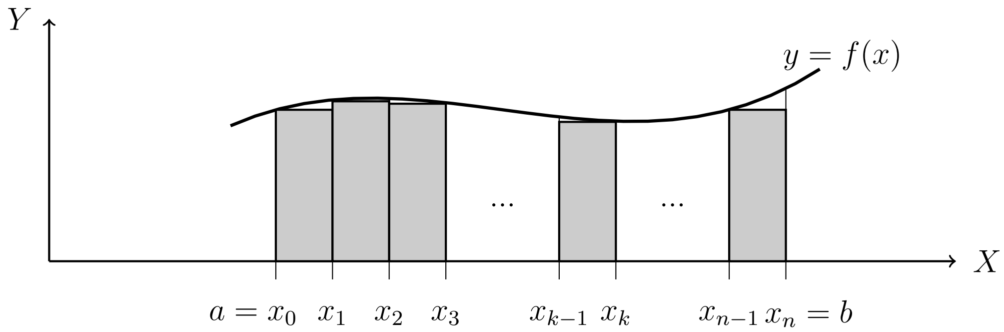
และให้

$$L(P, f) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \qquad \text{และ} \qquad U(P, f) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$$

จะเรียก $L(P, f)$ ว่า**ผลบวกล่าง (lower sum)** ของ f บนช่วง $[a, b]$ เทียบกับผลแบ่งกั้น P
และเรียก $U(P, f)$ ว่า**ผลบวกบน (upper sum)** ของ f บนช่วง $[a, b]$ เทียบกับผลแบ่งกั้น P

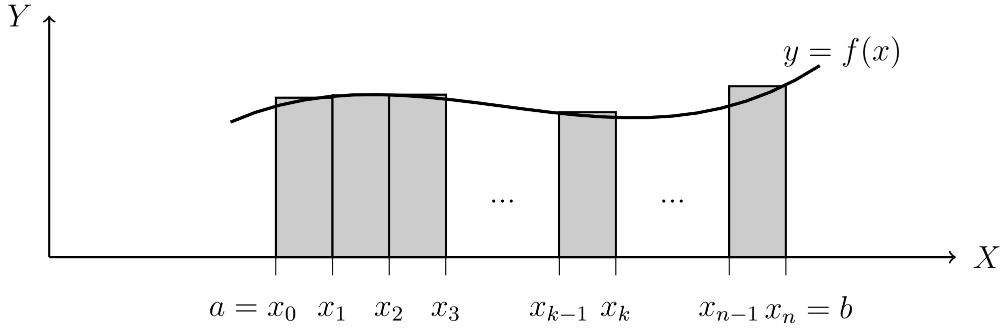
อาจแสดงผลบวกล่างและผลบวกบนได้ดังรูปต่อไปนี้

รูปที่ 5.2 ผลบวกล่างของ f บน $[a, b]$



$$L(P, f) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k$$

รูปที่ 5.3 ผลบวกบนของ f บน $[a, b]$



$$U(P, f) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$$

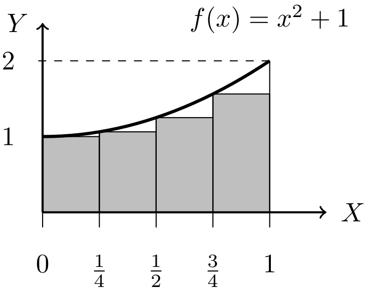
ถ้าให้ A เป็นพื้นที่ปิดล้อมด้วยกราฟ $y = f(x)$ กับแกน X บนช่วง $[a, b]$ สรุปได้ว่า

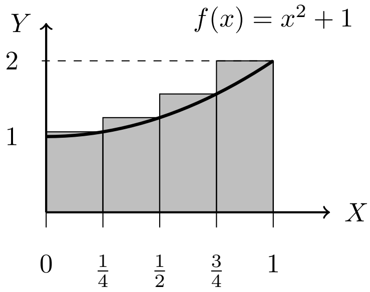
$$L(P, f) \leq A \leq U(P, f)$$

ตัวอย่าง 5.3.3 ให้ $f(x) = x^2 + 1$ บนช่วง $[0, 1]$ จงหา $L(P, f)$ และ $U(P, f)$ เมื่อ P คือ

1. $P = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$

   วิธีทำ จะเห็นว่าความกว้างเท่ากันทุกช่องคือ $\frac{1}{4}$ และแสดงได้ดังกราฟ



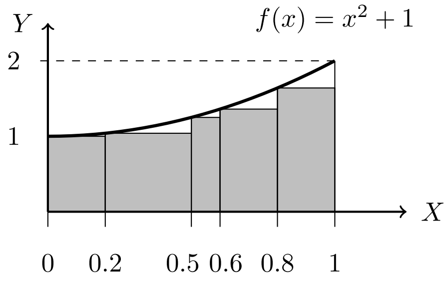


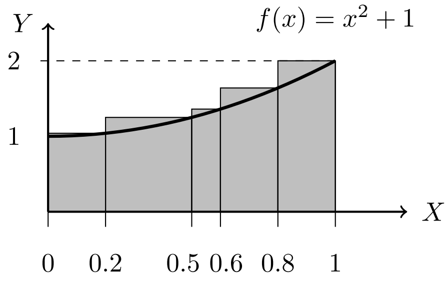
   จากกราฟจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
L(P, f) &= \frac{1}{4}f(0) + \frac{1}{4}f\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}f\left(\frac{3}{4}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(1 + \frac{17}{16} + \frac{5}{4} + \frac{25}{16}\right) = \frac{79}{64} \\
U(P, f) &= \frac{1}{4}f\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}f\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{4}f\left(1\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{17}{16} + \frac{5}{4} + \frac{25}{16} + 2\right) = \frac{47}{32}
\end{aligned}$$

2. $P = \{0, 0.2, 0.5, 0.6, 0.8, 1\}$

   วิธีทำ แสดงได้ดังกราฟ





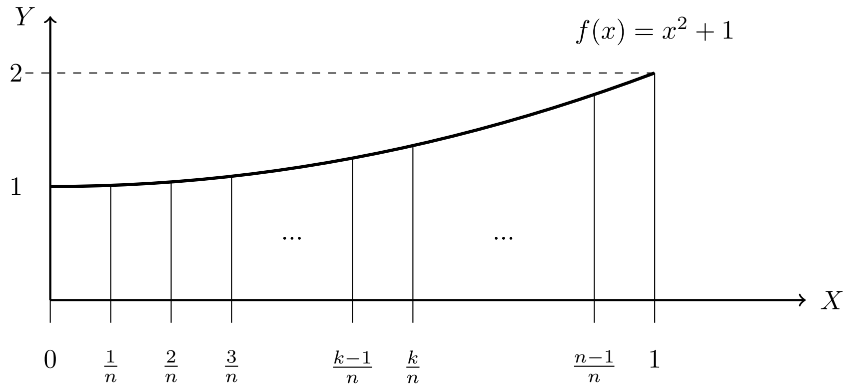
   จากกราฟจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
L(P, f) &= 0.2f(0) + 0.3f(0.2) + 0.1f(0.5) + 0.2f(0.6) + 0.2f(0.8) \\
&= 0.2(1) + 0.3(1.04) + 0.1(1.25) + 0.2(1.36) + 0.2(1.64) \\
&= 1.237 \\
U(P, f) &= 0.2f(0.2) + 0.3f(0.5) + 0.1f(0.6) + 0.2f(0.8) + 0.2f(1) \\
&= 0.2(1.04) + 0.3(1.25) + 0.1(1.36) + 0.2(1.64) + 0.2(2) \\
&= 1.447
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.3.4 ให้ $f(x) = x^2 + 1$ บนช่วง $[0, 1]$ จงหา $L(P, f)$ และ $U(P, f)$ ในรูป n เมื่อ

P เป็นผลแบ่งกั้นโดยแบ่ง $[0, 1]$ ออกเป็น n ช่องเท่า ๆ กัน

วิธีทำ ให้ $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ เป็นผลแบ่งกั้นของ $[0, 1]$ โดยที่ $x_0 = 0$, $x_n = 1$ และ $x_k = \dfrac{k}{n}$ เมื่อ $k = 0, 1, 2, ..., n$ แสดงได้ดังรูป



ดังนั้น $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \dfrac{1}{n}$ เมื่อ $k = 1, 2, ..., n$

พิจารณาช่วงย่อย $[x_{k-1}, x_k]$ เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $[0, 1]$ จะได้ว่า

$$m_k = f(x_{k-1}) = f\left(\frac{k-1}{n}\right) = \left(\frac{k-1}{n}\right)^2 + 1 = \frac{1}{n^2}(k-1)^2 + 1$$

$$m_k = f(x_k) = f\left(\frac{k}{n}\right) = \left(\frac{k}{n}\right)^2 + 1 = \frac{1}{n^2} \cdot k^2 + 1$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
L(P, f) &= \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{n^2}(k-1)^2 + 1\right] \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} (k-1)^2 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} 1 \\
&= \frac{1}{n^3} [0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2] + \frac{1}{n} \cdot n \\
&= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{(n-1)(n-1+1)(2(n-1)+1)}{6} + 1 \\
&= \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6n^3} + 1 \\
&= \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} + 1
\end{aligned}$$

และ

$$
\begin{aligned}
U(P,f) &= \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{n^2}\cdot k^2 + 1\right]\frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 1 \\
&= \frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{n}\cdot n \\
&= \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} + 1
\end{aligned}
$$

บทนิยาม 5.3.5 ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ และ $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ เป็นผลแบ่งกั้น $[a,b]$ สำหรับ $k = 1,2,3,...,n$ และ $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ ถ้า $x_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$ หรือ $m_k \le f(x_k^*) \le M_k$ แล้ว

$$
S^*(P,f) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k
$$

เรียก $S^*(P,f)$ ว่า**ผลบวกรีมันน์** (Riemann sum) ของ f บนช่วง $[a,b]$ เทียบกับผลแบ่งกั้น P

จากการบทนิยามผลบวกรีมันน์จะได้ว่า

$$
L(P,f) \le S^*(P,f) \le U(P,f)
$$

ตัวอย่าง 5.3.6 ให้ $f(x) = x^2 + 1$ บนช่วง $[0,1]$ และ

P เป็นผลแบ่งกั้นที่แบ่งช่วง $[0,1]$ เป็น n ช่องเท่า ๆ กัน

จงหา

1. $S^*(P,f)$ เมื่อ x_k^* เป็นจุดกึ่งกลางของช่วง $[x_{k-1}, x_k]$
2. $\lim_{n\to\infty} L(P,f)$, $\lim_{n\to\infty} U(P,f)$ และ $\lim_{n\to\infty} S^*(P,f)$

วิธีทำ ให้ $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ เป็นผลแบ่งกั้นของ $[0,1]$ โดยที่ $x_0 = 0$, $x_n = 1$ และ $x_k = \dfrac{k}{n}$ เมื่อ $k = 0,1,2,...,n$ ดังนั้น $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \dfrac{1}{n}$ เมื่อ $k = 1,2,...,n$

พิจารณาช่วงย่อย $[x_{k-1}, x_k]$ จะได้ว่า $x_k^* = \dfrac{x_{k-1}+x_k}{2} = \dfrac{2k-1}{2n}$ และ

$$
f(x_k^*) = f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) = \left(\frac{2k-1}{2n}\right)^2 + 1 = \frac{1}{4n^2}(2k-1)^2 + 1
$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
S^*(P,f) &= \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{4n^2}(2k-1)^2+1\right]\frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{4n^3}\sum_{k=1}^{n}(4k^2-4k+1)+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}1 \\
&= \frac{1}{4n^3}\left[4\sum_{k=1}^{n}k^2-4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1\right]+\frac{1}{n}\cdot n \\
&= \frac{1}{4n^3}\left[4\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-4\cdot\frac{n(n+1)}{2}+1\cdot n\right]+1 \\
&= \frac{1}{4n^3}\left[\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}-2n(n+1)+n\right]+1 \\
&= \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}-\frac{2n+1}{4n^2}+1
\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} S^*(P,f) &= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}-\frac{2n+1}{4n^2}+1\right] \\
&= \frac{1}{3}-0+1=\frac{4}{3}
\end{aligned}$$

จากตัวอย่าง 5.3.4 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} L(P,f) &= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}+1\right] \\
&= \frac{1}{3}+1=\frac{4}{3} \\
\lim_{n\to\infty} U(P,f) &= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}+1\right] \\
&= \frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}
\end{aligned}$$

จากตัวอย่าง 5.3.6 จะเห็นว่า $\lim\limits_{n\to\infty} L(P,f)$, $\lim\limits_{n\to\infty} U(P,f)$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} S^*(P,f)$ มีค่าเท่ากัน โดยขึ้นกับผลแบ่งกั้น P และพบว่าถ้าเลือก P ที่เหมาะสมค่าลิมิตทั้งสามจะเท่ากันเสมอดังที่จะกล่าวในทฤษฎีบทต่อไปนี้ (ไม่พิสูจน์ในวิชานี้)

ทฤษฎีบท 5.3.7 ให้ $y=f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ และ $P=\{x_0,x_1,x_2,...,x_n\}$ เป็นผลแบ่งกั้น $[a,b]$ ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty}\|P\|=0$ โดยที่

$$\|P\| = \max\{|x_i-x_{i-1}| \,:\, i=1,2,3,...,n\}$$

แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} L(P,f)$, $\lim\limits_{n\to\infty} S^*(P,f)$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} U(P,f)$ มีค่า และ

$$\lim_{n\to\infty} L(P,f)=\lim_{n\to\infty} S^*(P,f)=\lim_{n\to\infty} U(P,f)=A$$

เมื่อ A เป็นพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง $y=f(x)$ กับแกน X บนช่วง $[a,b]$

บทนิยาม 5.3.8 ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ และ P เป็นผลแบ่งกั้น $[a,b]$ ถ้า

$$\lim_{n\to\infty} S^*(P,f) = L$$

จะกล่าวว่า f **หาปริพันธ์ได้** (integrable) บน $[a,b]$ และเรียกค่าลิมิต L ว่า **ปริพันธ์จำกัดเขต** (definite integral) ของ f บน $[a,b]$ และเขียนแทนด้วย

$$\int_a^b f(x)\,dx = L$$

เรียก a และ b ว่า**ลิมิตล่าง** (lower limit) และ**ลิมิตบน** (upper limit) ตามลำดับ

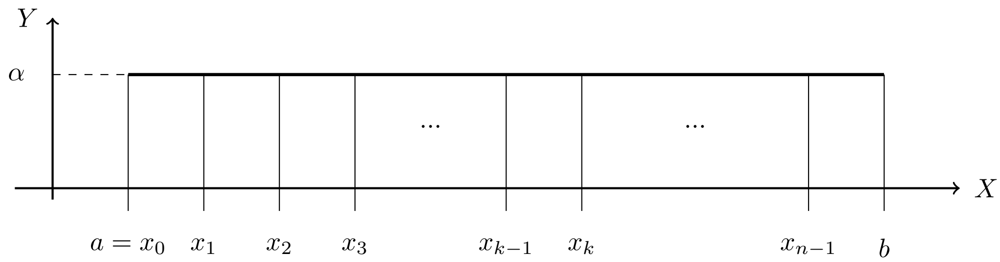
จากตัวอย่าง 5.3.6 จะได้ว่า

$$\int_0^1 x^2 + 1\,dx = \frac{4}{3}$$

ตัวอย่าง 5.3.9 กำหนดให้ $f(x) = \alpha$ สำหรับค่า $x \in [a,b]$ เมื่อ α เป็นค่าคงตัว จงแสดงว่า

$$\int_a^b f(x)\,dx = \alpha(b-a)$$

วิธีทำ ให้ $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ เป็นผลแบ่งกั้นของ $[a,b]$ โดยที่ $x_0 = a$, $x_n = b$ และ $x_k = a + \dfrac{k(b-a)}{n}$ เมื่อ $k = 0,1,2,...,n$ แสดงได้ดังรูป



ดังนั้น $\Delta x_k = \dfrac{b-a}{n}$ เมื่อ $k = 1,2,...,n$

ให้ $x_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$ จะได้ว่า $f(x_k^*) = \alpha$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
S^*(P,f) &= \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \alpha \cdot \frac{b-a}{n} \\
&= \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} \alpha \\
&= \frac{b-a}{n} \cdot \alpha n \\
&= \alpha(b-a)
\end{aligned}$$

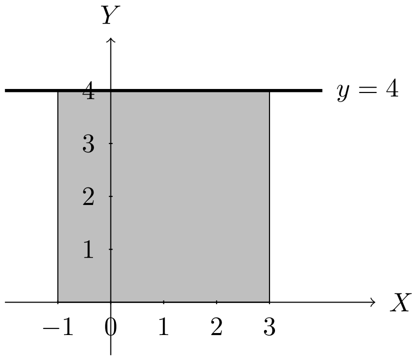
สรุปได้ว่า

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S^*(P,f) = \lim_{n\to\infty} \alpha(b-a) = \alpha(b-a)$$

จากตัวอย่างที่ผ่านมาจะเห็นว่าการหาปริพันธ์จำกัดเขตคำนวณได้ยาก เนื่องจากต้องเลือกผลแบ่งกั้นที่เหมาะสมและใช้กฎเกี่ยวกับอนุกรมจนสุดท้ายหาลิมิตอนันต์ของผลบวกนั้น ถ้าฟังก์ชันที่สนใจไม่สามารถหาผลลัพธ์ของอนุกรมในรูปของ n อาจทำให้การหาปริพันธ์จำกัดเขตไม่ได้ด้วยบทนิยามดังกล่าว แต่อาจใช้ความหมายของปริพันธ์จำกัดเขตซึ่งเท่ากับพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง $y = f(x)$ กับแกน X บนช่วง $[a, b]$ โดยให้ค่าพื้นที่เหนือแกน X มีเครื่องหมายบวก และค่าพื้นที่ใต้แกน X มีเครื่องหมายลบ

ตัวอย่าง 5.3.10 จงหา $\displaystyle\int_{-1}^{3} 4\,dx$ โดยใช้พื้นที่ใต้กราฟ

วิธีทำ ให้ $y = 4$ แสดงกราฟได้ดังนี้

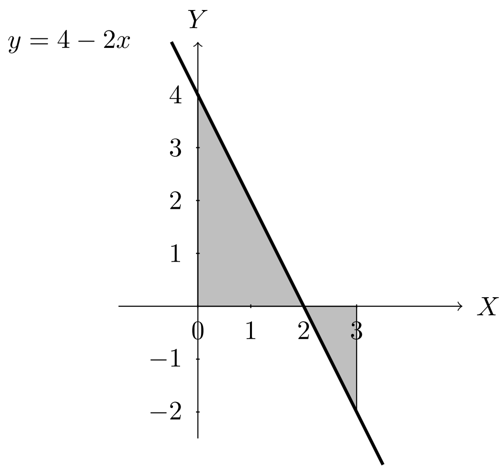


จากรูปปริพันธ์จำกัดเขตข้อนี้มีค่าเท่ากับพื้นที่สี่เหลี่ยมจตุรัสที่มีความยาวด้าน 4 หน่วย เหนือแกน X ดังนั้น

$$\int_{-1} 34\,dx = 4 \cdot 4 = 16$$

ตัวอย่าง 5.3.11 จงหา $\displaystyle\int_{0}^{3} (4-2x)\,dx$ โดยใช้พื้นที่ใต้กราฟ

วิธีทำ ให้ $y = 4 - 2x$ แสดงกราฟได้ดังนี้

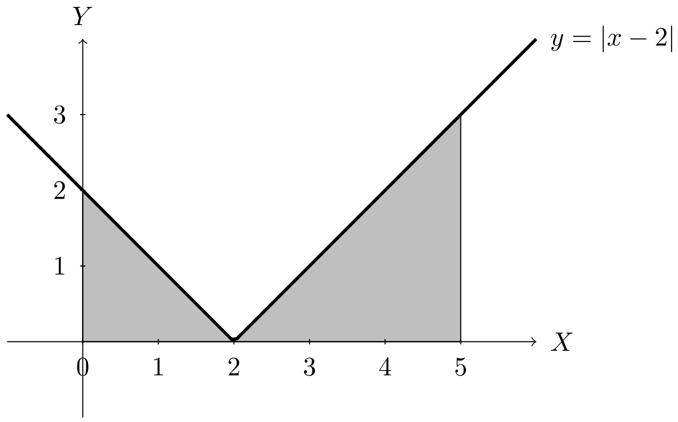


จากรูปปริพันธ์จำกัดเขตข้อนี้มีค่าเท่ากับพื้นที่สามเหลี่ยมที่มีฐานยาวเท่ากับ 2 หน่วย สูง 4 หน่วย เหนือแกน X และพื้นที่สามเหลี่ยมที่มีฐานยาวเท่ากับ 1 หน่วย สูง 2 หน่วย ใต้แกน X ดังนั้น

$$\int_0 3(4-2x)\,dx = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 3$$

ตัวอย่าง 5.3.12 จงหา $\displaystyle\int_0^5 |x-2|\,dx$ โดยใช้พื้นที่ใต้กราฟ

วิธีทำ ให้ $y = |x-2|$ แสดงกราฟได้ดังนี้

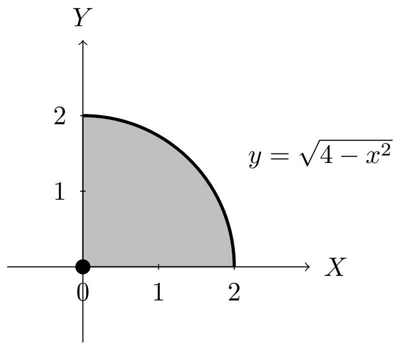


จากรูปปริพันธ์จำกัดเขตข้อนี้มีค่าเท่ากับพื้นที่สามเหลี่ยมมุมฉากที่มีฐานยาวเท่ากับ 2 หน่วย และสูง 2หน่วย เหนือแกน X รวมกับพื้นที่สามเหลี่ยมมุมฉากที่มีฐานยาวเท่ากับ 3 หน่วย และสูง 3 หน่วย เหนือแกน X ดังนั้น

$$\int_0^5 |x-2|\,dx = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3 = \frac{13}{2}$$

ตัวอย่าง 5.3.13 จงหา $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$ โดยใช้พื้นที่ใต้กราฟ

วิธีทำ ให้ $y = \sqrt{4-x^2}$ แสดงกราฟได้ดังนี้

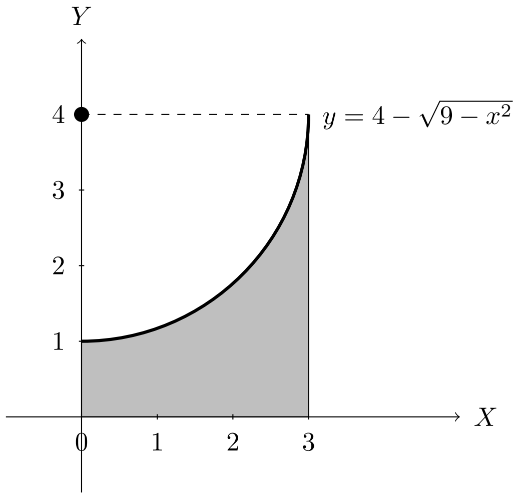


จากูปปริพันธ์จำกัดเขตข้อนี้มีค่าเท่ากับ 1/4 พื้นที่ของวงกลมที่มีรัศมี 2 หน่วย เหนือแกน X ดังนั้น

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx = \frac{1}{4}\pi(2)^2 = \pi$$

ตัวอย่าง 5.3.14 จงหา $\displaystyle\int_0^3 4 - \sqrt{9-x^2}\,dx$ โดยใช้พื้นที่ใต้กราฟ

วิธีทำ ให้ $y = 4 - \sqrt{9-x^2}$ แสดงกราฟได้ดังนี้



จากรูปปริพันธ์จำกัดเขตข้อนี้มีค่าเท่ากับพื้นที่ของรูปสีเหลี่ยมผืนผ้าที่มีความยาว 4 หน่วยและกว้าง 3 หน่วย เหนือแกน X ลบออกด้วย 1/4 ของพื้นที่วงกลมที่มีรัศมี 3 หน่วย เหนือแกน X ดังนั้น

$$\int_0^3 4 - \sqrt{9-x^2}\,dx = 3 \cdot 4 - \frac{1}{4}\pi(3)^2 = 12 - \frac{9\pi}{4}$$

ทฤษฎีบท 5.3.15 กำหนดให้ f และ g หาปริพันธ์ได้บนช่วง $[a,b]$ และ k เป็นค่าคงที่ แล้ว

1. $\displaystyle\int_c^c f(x)\,dx = 0$ เมื่อ $c \in [a,b]$
2. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
3. $\displaystyle\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$
4. $\displaystyle\int_a^b f(x)+g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
5. $\displaystyle\int_a^b f(x)-g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$
6. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ เมื่อ $c \in [a,b]$
7. ถ้า $f(x) \geq 0$ สำหรับ $x \in [a,b]$ แล้ว $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$
8. ถ้า $f(x) \leq g(x)$ สำหรับ $x \in [a,b]$ แล้ว $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$
9. $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

ตัวอย่าง 5.3.16 ให้ m, M เป็นค่าคงตัว และ f เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บนช่วง $[a,b]$ โดยที่

$$m \le f(x) \le M \qquad \text{ทุก ๆ } x \in [a,b]$$

จงแสดงว่า

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

วิธีทำ โดยทฤษฎีบท 5.3.15 ข้อ 8 และตัวอย่าง 5.3.9 จะได้ว่า

$$\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx$$

$$m(b-a)\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

โดยทฤษฎีบท 5.3.15 ข้อ 6 เมื่อ $c \in [a,b]$ จะได้ว่า

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx$$

หรือ
$$\int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx$$

เพื่อให้ง่ายต่อการนำไปใช้ กล่าวสั้น ๆ ได้ว่าส่วนที่สนใจเกิดจากทั้งหมดลบออกด้วยส่วนที่เหลือ

ตัวอย่าง 5.3.17 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บนช่วง $[0,5]$ โดยที่

$$\int_0^3 f(x)\,dx = 3, \quad \int_1^5 f(x)\,dx = 8 \quad \text{และ} \quad \int_0^5 f(x)\,dx = 10$$

จงหา

1. $\displaystyle\int_3^3 f(x)\,dx$

   วิธีทำ $\displaystyle\int_3^3 f(x)\,dx = 0$

2. $\displaystyle\int_5^1 f(x)\,dx$

   วิธีทำ $\displaystyle\int_5^1 f(x)\,dx = \int_1^5 f(x)\,dx = -8$

3. $\displaystyle\int_3^5 f(x)\,dx$

   วิธีทำ $\displaystyle\int_3^5 f(x)\,dx = \int_0^5 f(x)\,dx - \int_0^3 f(x)\,dx = 10 - 3 = 7$

4. $\displaystyle\int_5^3 f(x)\,dx$

   วิธีทำ โดยข้อ 3 จะได้ $\displaystyle\int_5^3 f(x)\,dx = -\int_3^5 f(x)\,dx = -7$

5. $\int_3^1 f(x)\,dx$

วิธีทำ โดยข้อ 3 จะได้

$$\int_3^1 f(x)\,dx = -\int_1^3 f(x)\,dx = -\left[\int_1^5 f(x)\,dx - \int_3^5 f(x)\,dx\right] = -[8-7] = -1$$

6. $\int_0^1 f(x)\,dx$

วิธีทำ โดยข้อ 5 จะได้ $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^3 f(x)\,dx + \int_3^1 f(x)\,dx = 3 + (-1) = 2$

ตัวอย่าง 5.3.18 ให้ f, g เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บนช่วง $[0,4]$ โดยที่

$$\int_1^4 f(x)\,dx = 5, \quad \int_0^1 g(x)\,dx = -2 \quad \text{และ} \quad \int_4^0 f(x)\,dx = 3$$

จงหา

1. $\int_0^1 f(x)\,dx$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx &= \int_0^4 f(x)\,dx - \int_1^4 f(x)\,dx \\ &= -\int_4^0 f(x)\,dx - \int_1^4 f(x)\,dx \\ &= -3-5 \\ &= -8\end{aligned}$$

2. $\int_0^1 [2f(x)+3g(x)]\,dx$

วิธีทำ โดยข้อ 1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int_0^1 [2f(x)+3g(x)]\,dx &= 2\int_0^1 f(x)\,dx + 3\int_0^1 g(x)\,dx \\ &= 2(-8)+3(-2) \\ &= -22\end{aligned}$$

แบบฝึกหัด 5.3

1. จงหา $L(P,f)$, $U(P,f)$ และ $S^*(P,f)$ เลือก x_i^* เป็นจุดกึ่งกลางช่วง

   1.1 $f(x) = x+1, \quad x \in [0,1]$ $\quad P = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$

   1.2 $f(x) = x^2 - x, \quad x \in [-1,1]$ $\quad P = \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right\}$

   1.3 $f(x) = x^3 + 1, \quad x \in [0,1]$ $\quad P = \left\{0, \frac{1}{8}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, 1\right\}$

   1.4 $f(x) = |x|, \quad x \in [-1,2]$ $\quad P = \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\right\}$

2. กำหนดให้ $f(x) = 1 - x^2$ สำหรับ $x \in [0,1]$ ให้ P เป็นผลแบ่งกั้นที่แบ่งช่วง $[0,1]$ เป็น n ช่องเท่าๆกัน จงหา $L(P,f)$, $U(P,f)$ และ $S^*(P,f)$ เลือก x_i^* เป็นจุดกึ่งกลางช่วง

3. กำหนดให้ $f(x) = x^2$ สำหรับค่า $x \in [a,b]$ จงแสดงว่า

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b^3 - a^3}{3}$$

4. กำหนดให้ $\int_1^5 f(x)\,dx = 5$, $\int_3^5 f(x)\,dx = 8$ และ $\int_1^{10} f(x)\,dx = 15$ จงหาค่าของ

   4.1 $\int_1^3 f(x)\,dx$ 4.3 $\int_5^{10} f(x)\,dx$ 4.5 $\int_5^3 f(x)\,dx$

   4.2 $\int_5^1 f(x)\,dx$ 4.4 $\int_3^{10} f(x)\,dx$ 4.6 $\int_5^5 f(x)\,dx$

5. จงหาปริพันธ์จำกัดเขตโดยใช้พื้นที่ใต้กราฟ

   5.1 $\int_{-3}^4 (2x+8)\,dx$ 5.4 $\int_{-2}^2 x + |x|\,dx$ 5.7 $\int_0^3 3 + \sqrt{4 - x^2}\,dx$

   5.2 $\int_1^2 |3x-2|\,dx$ 5.5 $\int_{-3}^3 \sqrt{9 - x^2}\,dx$ 5.8 $\int_0^3 4 + \sqrt{9 - x^2}\,dx$

   5.3 $\int_{-2}^3 |x+1| + |x|\,dx$ 5.6 $\int_0^1 \sqrt{2 - x^2}\,dx$ 5.9 $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1 - x^2}\,dx$

5.4 ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัสที่ถูกนำเสนอโดยนิวตัน แต่เขาเองได้รับอิทธิพลของทฤษฎีบทนี้มาจากแนวคิดของแบร์โรว์ ประกอบด้วย 2 ทฤษฎีบทคือ

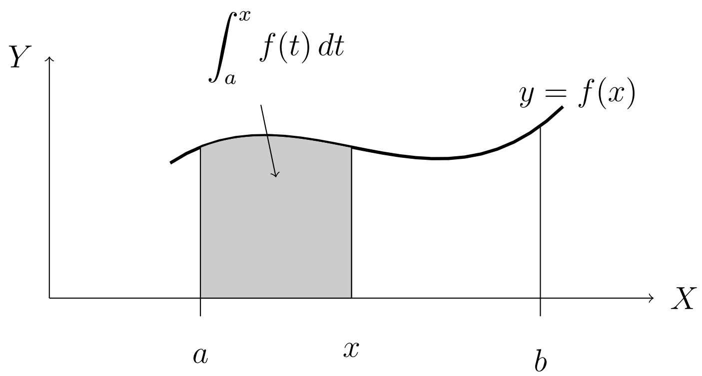
1. ทฤษฎีบทหลักมูลบทที่หนึ่งของแคลคูลัส (First fundamental theorem of calculus)

2. ทฤษฎีบทหลักมูลบทที่สองของแคลคูลัส (Second fundamental theorem of calculus)

เนื่องจากการพิสูจน์ต้องใช้ความรู้หลายอย่าง ดังนั้นในวิชานี้จะไม่กล่าวถึงการพิสูจน์ แต่จะนำทฤษฎีบทไปใช้เพื่อให้เห็นถึงประโยชน์ของทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส

พิจารณาฟังก์ชัน f ต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ และ $f(x) \geq 0$ ทุกๆ $x \in [a,b]$ พื้นที่ใต้กราฟของ f บน $[a,x]$ แสดงได้ดังรูป

รูปที่ 5.4 พื้นที่ใต้กราฟของ f บน $[a,x]$



ทฤษฎีบท 5.4.1 ทฤษฎีบทหลักมูลบทที่หนึ่งของแคลคูลัส
ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$ และ $c \in [a,b]$ กำหนดให้

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt \qquad \text{เมื่อ} \quad x \in [a,b]$$

แล้วจะได้ว่า F เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วง $[a,b]$ และ

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_c^x f(t)\,dt = f(x) \qquad \text{ทุก ๆ } x \in [a,b]$$

ตัวอย่างเช่น

1. $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^x \sqrt{1+t^2}\,dt = \sqrt{1+x^2}$

2. $\dfrac{d}{ds}\displaystyle\int_{-2}^s \sin(t^2)\,dt = \sin(s^2)$

3. $\dfrac{d}{dw}\displaystyle\int_w^e e^{\cos x}\,dx = \dfrac{d}{dw}\left(-\int_e^w e^{\cos x}\,dx\right) = -e^{\cos w}$

ทฤษฎีบท 5.4.2 ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$ และ $c \in [a,b]$ แล้ว

$$\frac{d}{dx}\int_c^u f(t)\,dt = f(u)\cdot\frac{du}{dx}$$

เมื่อ $u = u(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x และมีเรนจ์เป็นสับเซตของ $[a,b]$

บทพิสูจน์. ให้ $c \in [a,b]$ และสำหรับ $x \in [a,b]$ ให้ $F(x) = \int_c^x f(t)\,dt$ โดยกฎลูกโซ่จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_c^{u(x)} f(t)\,dt &= \frac{d}{dx}F(u(x))\\ &= \frac{d}{du}F(u)\cdot\frac{d}{dx}u(x)\\ &= f(u)\cdot\frac{du}{dx}\end{aligned}$$

□

ตัวอย่าง 5.4.3 จงหา $\frac{d}{dx}\int_1^{x^2+1} t\text{cos}t\,dt$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_1^{x^2+1} t\text{cos}t\,dt &= (x^2+1)\text{cos}(x^2+1)\cdot\frac{d}{dx}(x^2+1)\\ &= 2x(x^2+1)\text{cos}(x^2+1)\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.4.4 ให้ $F(x) = \int_x^{x^2}\frac{1}{1+e^t}\,dt$ จงหา $F(1)$ และ $F'(1)$

วิธีทำ จะได้ว่า $F(1) = \int_1^1 \frac{1}{1+e^t}\,dt = 0$ เนื่องจาก

$$\begin{aligned}F'(x) &= \frac{d}{dx}\int_x^{x^2}\frac{1}{1+e^t}\,dt\\ &= \frac{d}{dx}\left[\int_x^0\frac{1}{1+e^t}\,dt + \int_0^{x^2}\frac{1}{1+e^t}\,dt\right]\\ &= \frac{d}{dx}\left[-\int_0^x\frac{1}{1+e^t}\,dt + \int_0^{x^2}\frac{1}{1+e^t}\,dt\right]\\ &= -\frac{1}{1+e^x} + \frac{1}{1+e^{x^2}}(2x)\\ &= -\frac{1}{1+e^x} + \frac{2x}{1+e^{x^2}}\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$F'(1) = -\frac{1}{1+e} + \frac{2}{1+e} = \frac{1}{1+e}$$

ทฤษฎีบท 5.4.5 ทฤษฎีบทหลักมูลบทที่สองของแคลคูลัส
ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$ และ F เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f บนช่วง $[a,b]$ แล้ว

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

ตัวอย่าง 5.4.6 จงหาค่าของ $\displaystyle\int_0^1 x^2 + 1\,dx$

วิธีทำ จะเห็นว่า $F(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + x + C$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = x^2 + 1$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2 + 1\,dx &= [F(x)]_0^1 \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 + x + C\right]_0^1 \\ &= \left[\frac{1}{3} + 1 + C\right] - [0 + 0 + C] = \frac{4}{3}\end{aligned}$$

จากตัวอย่างนี้จะเห็นว่าปฏิยานุพันธ์จะมีค่าคงตัว C แต่เมื่อหาค่าปริพันธ์จำกัดเขตพบว่า C จะ หักล้างกันเสมอ ดังนั้นเราจึงไม่นิยมเขียน C ในพจน์ของปฏิยานุพันธ์ และปริพันธ์จำกัดเขตที่ได้ย่อมเท่ากับการคำนวณจากผลบวกรีมันน์ เช่นเดียวกับตัวอย่าง 5.3.6 แต่การใช้ทฤษฎีบทหลักมูลบทที่สองทำได้ง่ายกว่าถ้าฟังก์ชันนั้นมีปฏิยานุพันธ์

ตัวอย่าง 5.4.7 จงหาค่าของ

1. $\displaystyle\int_0^1 e^x - x + 1\,dx$

   วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^x - x + 1\,dx &= \left[e^x - \frac{1}{2}x^2 + x\right]_0^1 \\ &= \left[e - \frac{1}{2} + 1\right] - [1 - 0 + 0] \\ &= e - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

2. $\displaystyle\int_1^4 \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x}\,dx$

   วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int_1^4 \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x}\,dx &= \int_1^4 \frac{x - 2x^{\frac{1}{2}} + 1}{x}\,dx \\ &= \int_1^4 1 - 2x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{x}\,dx \\ &= \left[x - 4x^{\frac{1}{2}} + \ell\text{n}|x|\right]_1^4 \\ &= [4 - 8 + \ell\text{n}4] - [1 - 4 + \ell\text{n}1] \\ &= \ell\text{n}4 - 1\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.4.8 จงหาปริพันธ์จำกัดเขตต่อไปนี้

1. $\displaystyle\int_0^3 |x-2|\,dx$

   วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int_0^3 |x-2|\,dx &= \int_0^2 |x-2|\,dx + \int_2^3 |x-2|\,dx\\ &= \int_0^2 -(x-2)\,dx + \int_2^3 x-2\,dx\\ &= \left[-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_0^2 + \left[\frac{1}{2}x^2-2x\right]_2^3\\ &= [-2+4]-0+\left[\frac{9}{2}-6\right]-[2-4]\\ &= \frac{5}{2}\end{aligned}$$

2. $\displaystyle\int_{-1}^2 ||x|-1|\,dx$

   วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 ||x|-1|\,dx &= \int_{-1}^0 ||x|-1|\,dx + \int_0^2 ||x|-1|\,dx\\ &= \int_{-1}^0 |-x-1|\,dx + \int_0^2 |x-1|\,dx\\ &= \int_{-1}^0 |x+1|\,dx + \int_0^1 |x-1|\,dx + \int_1^2 |x-1|\,dx\\ &= \int_{-1}^0 x+1\,dx + \int_0^1 -(x-1)\,dx + \int_1^2 x-1\,dx\\ &= \left[\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-1}^0 + \left[-\frac{1}{2}x^2+x\right]_0^1 + \left[\frac{1}{2}x^2-x\right]_1^2\\ &= 0-\left[\frac{1}{2}-1\right]+\left[-\frac{1}{2}+1\right]-0+[2-2]-\left[\frac{1}{2}+=-1\right]\\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.4.9 จงหาค่าของ

1. $\displaystyle\int_0^\pi \text{sin}t\text{cos}(3t)\,dt$

   วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \text{sin}t\text{cos}(3t)\,dt &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \text{sin}(4t)-\text{sin}(2t)\,dt\\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{4}\text{cos}(4t)+\frac{1}{2}\text{cos}(2t)\right]_0^\pi\\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right]-\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right]=0\end{aligned}$$

2. $\displaystyle\int_1^3 \frac{x}{x^2+1}\,dx$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^2+1}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\cdot(2x)dx\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\cdot(x^2)'dx\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,d(x^2)\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,d(x^2+1)\\ &= \frac{1}{2}\ell\text{n}|x^2+1|+C\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\int_1^3 \frac{x}{x^2+1}\,dx = \left[\frac{1}{2}\ell\text{n}|x^2+1|\right]_1^3 = \frac{1}{2}\ell\text{n}10 - \frac{1}{2}\ell\text{n}2 = \frac{1}{2}\ell\text{n}5$$

ตัวอย่าง 5.4.10 จงหาค่าของ

1. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \text{cos}t(1-\text{sin}t)^2\,dt$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}\int \text{cos}t(1-\text{sin}t)^2\,dt &= \int (1-\text{sin}t)^2\,(\sin t)'dt\\ &= \int (1-\text{sin}t)^2\,d(\sin t)\\ &= -\int (1-\text{sin}t)^2\,d(-\sin t)\\ &= -\int (1-\text{sin}t)^2\,d(1-\sin t)\\ &= \frac{1}{3}(1-\text{sin}t)^3+C\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \text{cos}t(1-\text{sin}t)^2\,dt = \left[\frac{1}{3}(1-\text{sin}t)^3\right]_{-\frac{\pi}{2}}^0 = -\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot 8 = \frac{7}{3}$$

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\text{arctan}x}{1+x^2}\,dx$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}\int \frac{\text{arctan}x}{1+x^2}\,dx &= \int \text{arctan}x\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx\\ &= \int \text{arctan}x\cdot(\text{arctan}x)'\,dx\\ &= \int \text{arctan}x\,d(\text{arctan}x)\\ &= \frac{1}{2}(\text{arctan}x)^2+C\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\int_0^1 \frac{\text{arctan}x}{1+x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}(\text{arctan}x)^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}(\text{arctan}1)^2 - \frac{1}{2}(\text{arctan}0)^2 = \frac{\pi^2}{32}$$

โดยทฤษฎีบท 5.2.1 การหาปริพันธ์โดยการแทนค่า จะได้ว่าทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 5.4.11 ให้ $u = u(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้และมีเรจน์เป็นช่วง $[a,b]$ และ f เป็นฟังก์ชันที่หาปฏิยานุพันธ์ได้บน $[a,b]$ แล้ว

$$\int_a^b \left[f(u(x))\frac{du(x)}{dx}\right]\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du$$

ตัวอย่าง 5.4.12 จงหาค่าของ

1. $\displaystyle\int_{-1}^3 \frac{x^2+1}{x^3+3x}\,dx$

   วิธีทำ ให้ $u = x^3+3x$ นั่นคือ $du = (3x^2+3)dx = 3(x^2+1)dx$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int_{-1}^3 \frac{x^2+1}{x^3+3x}\,dx &= \frac{-1}{2}\int_{-1}^3 \frac{1}{x^3+3x}\,3(x^2+1)dx \\ &= \frac{1}{3}\int_{u(-1)}^{u(3)} \frac{1}{u}\,du \\ &= \frac{1}{3}\int_{-4}^{36} \frac{1}{u}\,du \\ &= \left[\frac{1}{3}\ell\text{n}|u|\right]_{-4}^{36} = \frac{1}{3}\ell\text{n}36 - \frac{1}{3}\ell\text{n}4 \\ &= \frac{1}{3}\ell\text{n}9\end{aligned}$$

2. $\displaystyle\int_1^5 x\sqrt{x-1}\,dx$

   วิธีทำ ให้ $u = x-1$ นั่นคือ $du = dx$ และ $x = u+1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int_1^5 x\sqrt{x-1}\,dx &= \int_{u(1)}^{u(5)} (u+1)\sqrt{u}\,du \\ &= \int_0^4 (u+1)u^{\frac{1}{2}}\,du \\ &= \int_0^4 u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}}\,du \\ &= \left[\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 \\ &= \left[\frac{2}{5}\cdot 32 + \frac{2}{3}\cdot 8\right] - 0 \\ &= \frac{272}{15}\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.4.13 กำหนดให้ $\int_0^1 f(x)\,dx = 10$ จงหาค่าของ

1. $\int_0^{\frac{1}{2}} f(2t)\,dt$

   วิธีทำ ให้ $u = 2t$ นั่นคือ $du = 2dt$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} f(2t)\,dt &= \frac{1}{2}\int_0^1 f(t)\,2dt \\ &= \frac{1}{2}\int_{u(0)}^{u(\frac{1}{2})} f(u)\,du \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 f(u)\,du \\ &= \frac{1}{2}\cdot 10 = 5\end{aligned}$$

2. $\int_0^1 f(1-y)\,dy$

   วิธีทำ ให้ $u = 1-y$ นั่นคือ $du = -dy$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(1-y)\,dy &= -\int_0^1 f(1-y)\,(-dy) \\ &= -\int_{u(0)}^{u(1)} f(u)\,du \\ &= -\int_1^0 f(u)\,du \\ &= \int_0^1 f(u)\,du \\ &= 10\end{aligned}$$

3. $\int_1^{\frac{3}{2}} f(3-2s)\,ds$

   วิธีทำ ให้ $u = 3-2s$ นั่นคือ $du = -2ds$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int_1^{\frac{3}{2}} f(3-2s)\,ds &= -\frac{1}{2}\int_1^{\frac{3}{2}} f(3-2s)\,(-2ds) \\ &= -\frac{1}{2}\int_{u(1)}^{u(\frac{3}{2})} f(u)\,du \\ &= -\frac{1}{2}\int_1^0 f(u)\,du \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 f(u)\,du \\ &= \frac{1}{2}\cdot 10 = 5\end{aligned}$$

แบบฝึกหัด 5.4

1. กำหนดให้ $F(x) = \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t^2+3}}\,dt$ จงหา

   1.1 $F(1)$ 1.2 $F'(1)$ 1.3 $F''(1)$

2. จงหา $F'(x)$ เมื่อกำหนดให้

   2.1 $F(x) = \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\,dt$

   2.2 $F(x) = \int_x^3 \cos t^2\,dt$

   2.3 $F(x) = \int_{1-x}^{1+x} e^t \arctan t\,dt$

   2.4 $F(x) = \int_{\sqrt{x}}^{\cos x} t\ell n(\tan t)\,dt$

3. จงหาค่าปริพันธ์จำกัดเขตต่อไปนี้

   3.1 $\int_1^2 \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + x\right)dx$

   3.2 $\int_1^3 \sqrt{x}\left(3 - x + \frac{1}{\sqrt{x^3}}\right)dx$

   3.3 $\int_0^1 |3-4x|\,dx$

   3.4 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(x + \frac{2}{\sin^2 x}\right)dx$

   3.5 $\int_{-2}^1 |x^2+3x+2|\,dx$

   3.6 $\int_0^{\frac{3\pi}{4}} |\cos x|\,dx$

   3.7 $\int_{-1}^4 ||x-2|-1|\,dx$

   3.8 $\int_{-1}^2 \sqrt{2+|x|}\,dx$

   3.9 $\int_1^4 \sqrt{x}(x-1)^2\,dx$

   3.10 $\int_0^2 |1-x|\,dx$

   3.11 $\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{4-3t}}\,dt$

   3.12 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\sin x)^2\,dx$

   3.13 $\int_{-1}^1 \frac{1}{(1+|x|)^3}\,dx$

   3.14 $\int_1^8 \frac{1}{(\sqrt[3]{t}+1)^4}\,dt$

   3.15 $\int_0^1 \frac{y}{\sqrt{(1+y^2)^3}}\,dy$

   3.16 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin 3x \cos 5x\,dx$

   3.17 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4 x}{1+\sin x}\,dx$

   3.18 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3z}{\sqrt{7-2\sin 3z}}\,dz$

4. กำหนดให้ $\int_1^2 f(x)\,dx = 1$ จงหาค่าต่อไปนี้

   4.1 $\int_{0.5}^1 f(2t)\,dt$

   4.2 $\int_1^4 \frac{f(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}dt$

สรุป

ในบทนี้เราจะกล่าวถึงการดำเนินการย้อนกลับของการหาอนุพันธ์ เริ่มจากปฏิยานุพันธ์ของ f คือฟังก์ชัน F ซึ่ง $F' = f$ จากนั้นปฏิยานุพันธ์ทั่วไปของ f จะเรียกว่าปริพันธ์ไม่จำกัดเขต นั้นคือ $\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x) + C$ ต่อมากล่าวถึงการหาปริพันธ์โดยการแปรตัวแปรนั่นคือ

$$\int \left[f(u(x)) \frac{du(x)}{dx} \right] dx = \int f(u)\,du$$

โดยอาศัยกฎพื้นฐานของค่าเชิงอนุพันธ์ทำให้สามารถหาปริพันธ์ของฟังก์ชันต่าง ๆ ได้หลากหลายยิ่งขึ้น จากนั้นกล่าวถึงปริพันธ์จำกัดเขตเริ่มด้วยผลบวกบน ผลบวกล่าง และผลบวกของรีมันน์ ซึ่งเมืÉอเลือกผลแบ่งกั้นที่เหมาะสมจะได้ว่าลิมิตเข้าสู่อนันต์ของทั้ง 3 ผลบวกมีค่าเท่ากัน และเรียกว่าปริพันธ์จำกัดเขต จากที่มาปริพันธ์จำกัดเขตของ f บนช่วง $[a, b]$ มีค่าเท่ากับพื้นที่ ระหว่างเส้นโค้ง $y = f(x)$ กับแกน X บนช่วง $[a, b]$ และสุดท้ายกล่าวถึงทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัสประกอบด้วยทฤษฎีบทหลักมูลบทที่หนึ่ง และทฤษฎีบทหลักมูลบทที่สอง ของแคลคูลัส ซึ่งแสดงถึงการเชื่อมโยงปริพันธ์จำกัดเขตกับปฏิยานุพันธ์ว่าคือสิ่งเดียวกันแม้จะมาแนวคิดคนที่แตกต่างกัน

แบบฝึกหัดบทที่ 5

1. จงหาฟังก์ชัน f ที่มีปฏิยานุพันธ์เป็น F ต่อไปนี้

   1.1 $F(x) = 1 - x$

   1.2 $F(x) = xe^x + e^{\sin x}$

   1.3 $F(x) = \arcsin(\ln x + 1)$

   1.4 $F(x) = \tan^2(\ln x)$

2. จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตต่อไปนี้

   2.1 $\displaystyle\int x(\sqrt{x} + 2)^2\,dx$

   2.2 $\displaystyle\int \sin x(\csc x + 1)\,dx$

   2.3 $\displaystyle\int (1 - \sqrt{t})(1 + t)\,dt$

   2.4 $\displaystyle\int \frac{x^4 + x^2 - 1}{x^2 + 1}\,dx$

3. จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตต่อไปนี้

   3.1 $\displaystyle\int (x + 1)^3\,dx$

   3.2 $\displaystyle\int (2x + 1)^9\,dx$

   3.3 $\displaystyle\int \frac{2 - x^2}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$

   3.4 $\int \dfrac{1}{x\sqrt{x - 1}}\,dx$

   3.5 $\int \dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}\,dx$

   3.6 $\displaystyle\int \sin^2 \frac{x}{2}\,dx$

   3.7 $\displaystyle\int \cos x \cos 2x \cos 3x\,dx$

   3.8 $\displaystyle\int \sin^2 x \cos x\,dx$

   3.9 $\int \cos 3x \cos 5x\,dx$

   3.10 $\displaystyle\int \cot x \csc^5 x\,dx$

4. จงหา $L(P,f)$, $U(P,f)$ และ $S^*(P,f)$ เลือก x_i^* เป็นจุดกึ่งกลางช่วง

4.1 $f(x) = 2x+1, \quad x \in [0,1]$ $\quad P = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$

4.2 $f(x) = x^3, \quad x \in [-2,2]$ $\quad P = \{-2-1, 0, 1, 2\}$

5. จงหาปริพันธ์จำกัดเขตโดยใช้พื้นที่ใต้กราฟ

5.1 $\int_{-1}^{3} (8-2x)\,dx$

5.2 $\int_{1}^{3} |4x-1|\,dx$

5.3 $\int_{-3}^{3} |x+1|+|x-1|\,dx$

5.4 $\int_{-2}^{2} ||x|-1|\,dx$

5.5 $\int_{a}^{b} |x-a|+|x-b|\,dx$

5.6 $\int_{0}^{5} \sqrt{25-x^2}\,dx$

5.7 $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}-|x|\,dx$

5.8 $\int_{0}^{2} 4+\sqrt{4-x^2}\,dx$

5.9 $\int_{0}^{2} 4-\sqrt{4-x^2}\,dx$

6. จงหา $F'(x)$ เมื่อกำหนดให้

6.1 $F(x) = \int_{1}^{x} \text{arctan}(e^t)\,dt$

6.2 $F(x) = \int_{1+x}^{x^2} \frac{1}{\sqrt[3]{t+t^3}}\,dt$

7. จงหาค่าปริพันธ์จำกัดเขตต่อไปนี้

7.1 $\int_{-1}^{0} (2x+1)^{100}\,dx$

7.2 $\int_{0}^{1} |1-x|\,dx$

7.3 $\int_{1}^{e} \frac{1}{x(\ell\text{n}x)}\,dx$

7.4 $\int_{1}^{4} \sqrt{x}(x-1)\,dx$

7.5 $\int_{-1}^{1} ||x|+x|\,dx$

7.6 $\int_{0}^{\pi} |1-\text{sin}x|\,dx$

7.7 $\int_{0}^{2} x\sqrt{4-x^2}\,dx$

7.8 $\int_{-1}^{0} t^2(t^3+1)^{10}\,dt$

7.9 $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \text{sec}^4\theta\sqrt{\text{tan}\theta}\,d\theta$

7.10 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \text{tan}^3 2\theta \text{sec} 2\theta\,d\theta$

เอกสารอ้างอิง

ดำรง ทิพย์โยธา, ยุวรีย์ พันธ์กล้า และณัฏฐนาถ ไตรภพ. (2548). **แคลคูลัส ๑**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

James Stewart. (2012). **Calculus Early Transcendentals**. Seventh Edition. Canada. Nelson Education Ltd.

แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 6

หัวข้อเนื้อหาประจำบท

1. การหาปริพันธ์โดยการแยกส่วน
2. ปริพันธ์ของฟังก์ชันตรรกยะ
3. ปริพันธ์ของฟังก์ชันตรรกยะในรูปตรีโกณมิติ
4. ปริพันธ์ของฟังก์ชันในรูปกรณฑ์
5. ปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
6. ปริพันธ์โดยการแทนค่าตรีโกณมิติ

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. สามารถหาปริพันธ์โดยการแยกส่วน
2. สามารถหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรรกยะ
3. สามารถหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรรกยะในรูปตรีโกณมิติ
4. สามารถหาปริพันธ์ของฟังก์ชันในรูปกรณฑ์
5. สามารถหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
6. สามารถหาปริพันธ์โดยการแทนค่าตรีโกณมิติ

วิธีและกิจกรรมการเรียนการสอน

1. **วิธีสอน**
   1.1 วิธีสอนแบบบรรยาย ประกอบสื่ออิเล็กทรอนิกส์
   1.2 ใช้สื่อทางอินเตอร์เน็ต และให้แต่ละคนแสดงความคิดเห็น
   1.3 วิธีสอนแบบอภิปราย โดยให้หัวข้อเป็นกลุ่มและมานำเสนอหน้าชั้น
2. **กิจกรรมการเรียนการสอน**
   2.1 บรรยายสรุปโดยใช้สื่อการสอนประกอบ
   2.2 ให้ผู้เรียนศึกษาเนื้อหาจากชุดการสอน หนังสือ ตำรา เอกสารเพิ่มเติม และสื่อออนไลน์
   2.3 อภิปรายรายกลุ่มตามหัวข้อที่ได้รับมอบหมาย

สื่อการเรียนการสอน

1. ชุดการสอน เรื่อง "เทคนิคการหาปริพันธ์"
2. สื่ออิเล็กทรอนิกส์ เรื่อง "เทคนิคการหาปริพันธ์"
3. หนังสือ ตำรา เอกสารที่เกี่ยวข้อง
4. แอพพลิเคชั่น Wolfram alpha

การวัดผลและประเมินผล

1. สังเกตการตอบคำถามและตั้งคำถามของผู้เรียนในระหว่างการบรรยายและซักถาม
2. วัดผลจากการทำแบบฝึกหัดระหว่างเรียนตามเนื้อหาที่ได้รับมอบหมาย
3. ประเมินการอภิปรายรายกลุ่ม แล้วบันทึกคะแนนลงในใบบันทึกคะแนน
4. ตรวจการทำการบ้าน บันทึกคะแนนลงในบันทึกผลงาน

บทที่ 6

เทคนิคการหาปริพันธ์

การหาปริพันธ์นั้นขึ้นกับตัวถูกปริพันธ์ ถ้าปฏิยานุพันธ์ของตัวถูกปริพันธ์ที่จะหาทำได้ยาก เราอาจจะต้องอาศัยวิธีการและเทคนิคที่แตกต่างกัน ดังจะกล่าวในบทนี้

6.1 การหาปริพันธ์โดยการแยกส่วน

ให้ $u = u(x)$ และ $v = v(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ขึ้นกับตัวแปร x โดยกฎการคูณของค่าเชิงอนุพันธ์ $d(uv) = udv + vdu$ จะได้ว่า

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

เรียกวิธีการนี้ว่า **การหาปริพันธ์โดยการแยกส่วน** (integration by part)

ตัวอย่าง 6.1.1 จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้ $\displaystyle\int xe^x\,dx$

วิธีทำ ทำได้ 2 วิธีคือ

วิธีที่ 1 ให้ $u = x$ และ $dv = e^x dx$ จะได้ว่า

$$du = dx \qquad \text{และ} \qquad v = e^x$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int xe^x\,dx &= xe^x - \int e^x\,dx \\ &= xe^x - e^x + C\end{aligned}$$

วิธีที่ 2

$$\begin{aligned}\int xe^x\,dx &= \int x \cdot (e^x)'dx \\ &= \int x\,d(e^x) && (u = x,\ v = e^x) \\ &= xe^x - \int e^x\,dx \\ &= xe^x - e^x + C\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.1.2 จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

1. $\displaystyle\int x\cos 2x\,dx$

วิธีทำ ให้ $u = x$ และ $dv = \cos 2x dx$ จะได้ว่า $du = dx$ และ $v = \dfrac{1}{2}\sin 2x$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int x\cos 2x\,dx &= \frac{1}{2}x\sin 2x - \int \frac{1}{2}\sin 2x\,dx \\ &= \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C\end{aligned}$$

2. $\displaystyle\int \ell n x\,dx$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int \ell n x\,dx &= (\ell n x)x - \int x\,d(\ell n x) \\ &= x\ell n x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx \\ &= x\ell n x - \int 1\,dx \\ &= x\ell n x - x + C\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.1.3 จงหา $\displaystyle\int x^5\arctan(x^2)\,dx$

วิธีทำ ให้ $u = \arctan(x^2)$ และ $dv = x^5dx$ จะได้ว่า $du = \dfrac{2x}{1+x^4}dx$ และ $v = \dfrac{1}{6}x^6$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int x^5\arctan(x^2)\,dx &= \frac{1}{6}x^6\arctan(x^2) - \int \frac{1}{6}x^6\cdot\frac{2x}{1+x^4}dx \\ &= \frac{1}{6}x^6\arctan(x^2) - \frac{1}{3}\int \frac{x^7}{1+x^4}dx \\ &= \frac{1}{6}x^6\arctan(x^2) - \frac{1}{3}\int x^3 - \frac{x^3}{1+x^4}dx \\ &= \frac{1}{6}x^6\arctan(x^2) - \frac{1}{3}\int x^3\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{1+x^4}dx \\ &= \frac{1}{6}x^6\arctan(x^2) - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{3\cdot 4}\int \frac{1}{1+x^4}(4x^3)dx \\ &= \frac{1}{6}x^6\arctan(x^2) - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{12}\int \frac{1}{1+x^4}(x^4)'dx \\ &= \frac{1}{6}x^6\arctan(x^2) - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{12}\int \frac{1}{1+x^4}\,d(x^4) \\ &= \frac{1}{6}x^6\arctan(x^2) - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{12}\int \frac{1}{1+x^4}\,d(x^4+1) \\ &= \frac{1}{6}x^6\arctan(x^2) - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{12}\ell n(x^4+1) + C\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.1.4 จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

1. $\int_1^2 x^2 \ell\text{n}x\,dx$

วิธีทำ ให้ $u = \ell\text{n}x$ และ $dv = x^2 dx$ จะได้ว่า $du = \frac{1}{x}dx$ และ $v = \frac{1}{3}x^3$ ฉะนั้น

$$\begin{aligned}\int x^2\ell\text{n}x\,dx &= \frac{1}{3}x^3\ell\text{n}x - \int \frac{1}{3}x^3 \cdot \frac{1}{x}dx\\ &= \frac{1}{3}x^3\ell\text{n}x - \frac{1}{3}\int x^2\,dx\\ &= \frac{1}{3}x^3\ell\text{n}x - \frac{1}{9}x^3 + C\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int_1^2 x^2\ell\text{n}x\,dx &= \left[\frac{1}{3}x^3\ell\text{n}x - \frac{1}{9}x^3\right]_1^2\\ &= \left[\frac{8}{3}\ell\text{n}2 - \frac{8}{9}\right] - \left[0 - \frac{1}{9}\right]\\ &= \frac{8}{3}\ell\text{n}2 - \frac{7}{9}\end{aligned}$$

2. $\int_0^1 \text{arctan}x\,dx$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}\int \text{arctan}x\,dx &= x\text{arctan}x - \int x\,d(\text{arctan}x)\\ &= x\text{arctan}x - \int x \cdot \frac{1}{x^2+1}\,dx\\ &= x\text{arctan}x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1} \cdot (x^2)'\,dx\\ &= x\text{arctan}x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,d(x^2)\\ &= x\text{arctan}x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,d(x^2+1)\\ &= x\text{arctan}x - \frac{1}{2}\ell\text{n}(x^2+1) + C\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int_0^1 \text{arctan}x\,dx &= \left[x\text{arctan}x - \frac{1}{2}\ell\text{n}(x^2+1)\right]_0^1\\ &= \left[\text{arctan}1 - \frac{1}{2}\ell\text{n}2\right] - [0-0]\\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ell\text{n}2\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.1.5 จงหาปริพันธ์ $\int x^2 e^x\,dx$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int x^2 e^x\,dx &= \int x^2\cdot(e^x)'dx = \int x^2\cdot d(e^x)\\
&= x^2e^x - \int e^x\,d(x^2)\\
&= x^2e^x - \int e^x\cdot 2x\,dx\\
&= x^2e^x - 2\int x\,(e^x)'dx\\
&= x^2e^x - 2\int x\,d(e^x)\\
&= x^2e^x - 2\left[xe^x - \int e^x dx\right]\\
&= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.1.6 จงหาปริพันธ์ $\int x^3 \sin x\,dx$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int x^3\sin x\,dx &= -\int x^3(\cos x)'\,dx = -\int x^3\,d(\cos x)\\
&= -\left[x^3\cos x - \int \cos x\,d(x^3)\right]\\
&= -x^3\cos x + \int \cos x\,\cdot 3x^2\,dx\\
&= -x^3\cos x + 3\int x^2(\sin x)'dx\\
&= -x^3\cos x + 3\int x^2\,d(\sin x)\\
&= -x^3\cos x + 3\left[x^2\sin x - \int \sin x\,d(x^2)\right]\\
&= -x^3\cos x + 3x^2\sin x - 3\int \sin x\cdot(2x)\,dx\\
&= -x^3\cos x + 3x^2\sin x - 6\int x(-\cos x)'\,dx\\
&= -x^3\cos x + 3x^2\sin x - 6\int x\,d(-\cos x)\\
&= -x^3\cos x + 3x^2\sin x + 6\int x\,d(\cos x)\\
&= -x^3\cos x + 3x^2\sin x + 6\left[x\cos x - \int \cos x\,dx\right]\\
&= -x^3\cos x + 3x^2\sin x + 6x\cos x - 6\int \cos x\,dx\\
&= -x^3\cos x + 3x^2\sin x + 6x\cos x - 6\sin x + C
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.1.7 จงหาปริพันธ์ $\int e^x \text{sin} x\, dx$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int e^x \text{sin} x\, dx &= \int \text{sin} x \cdot (e^x)' dx = \int \text{sin} x\, d(e^x) \\
&= e^x \text{sin} x - \int e^x\, d(\text{sin} x) \\
&= e^x \text{sin} x - \int e^x\, \text{cos} x\, dx \\
&= e^x \text{sin} x - \int \text{cos} x \cdot (e^x)' dx \\
&= e^x \text{sin} x - \int \text{cos} x\, d(e^x) \\
&= e^x \text{sin} x - \left[e^x \text{cos} x - \int e^x\, d(\text{cos} x) \right] \\
&= e^x \text{sin} x - e^x \text{cos} x + \int e^x\, (-\text{sin} x)\, dx \\
&= e^x \text{sin} x - e^x \text{cos} x - \int e^x \text{sin} x\, dx \\
2 \int e^x \text{sin} x\, dx &= e^x \text{sin} x - e^x \text{cos} x \\
\int e^x \text{sin} x\, dx &= \frac{e^x}{2} \left[\text{sin} x - \text{cos} x \right] + C
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.1.8 จงหาปริพันธ์ $\int e^x \text{cos} x\, dx$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int e^x \text{cos} x\, dx &= \int \text{cos} x \cdot (e^x)' dx = \int \text{cos} x\, d(e^x) \\
&= e^x \text{cos} x - \int e^x\, d(\text{cos} x) \\
&= e^x \text{cos} x - \int e^x\, (-\text{sin} x)\, dx \\
&= e^x \text{cos} x + \int \text{sin} x \cdot (e^x)' dx \\
&= e^x \text{cos} x + \int \text{sin} x\, d(e^x) \\
&= e^x \text{cos} x + \left[e^x \text{sin} x - \int e^x\, d(\text{sin} x) \right] \\
&= e^x \text{cos} x + e^x \text{sin} x - \int e^x\, \text{cos} x\, dx \\
2 \int e^x \text{cos} x\, dx &= e^x \text{cos} x + e^x \text{sin} x \\
\int e^x \text{cos} x\, dx &= \frac{e^x}{2} \left[\text{sin} x + \text{cos} x \right] + C
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.1.9 จงหาปริพันธ์ $\int xe^x \text{sin}x\,dx$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\int xe^x\text{sin}x\,dx &= \int x\text{sin}x\cdot(e^x)'dx = \int x\text{sin}x\,d(e^x) \\
&= xe^x\text{sin}x - \int e^x\,d(x\text{sin}x) \\
&= xe^x\text{sin}x - \int e^x\,(\text{sin}x + x\text{cos}x)\,dx \\
&= xe^x\text{sin}x - \int e^x\text{sin}x\,dx - \int xe^x\text{cos}x\,dx \\
&= xe^x\text{sin}x - \int e^x\text{sin}x\,dx - \int x\text{cos}x\cdot(e^x)'dx \\
&= xe^x\text{sin}x - \int e^x\text{sin}x\,dx - \int x\text{cos}x\,d(e^x) \\
&= xe^x\text{sin}x - \int e^x\text{sin}x\,dx - \left[xe^x\text{cos}x - \int e^x\,d(x\text{cos}x)\right] \\
&= xe^x\text{sin}x - \int e^x\text{sin}x\,dx - xe^x\text{cos}x + \int e^x(\text{cos}x - x\text{sin}x)\,dx \\
&= xe^x\text{sin}x - \int e^x\text{sin}x\,dx - xe^x\text{cos}x + \int e^x\text{cos}x\,dx - \int xe^x\text{sin}x\,dx \\
2\int xe^x\text{sin}x\,dx &= xe^x\text{sin}x - xe^x\text{cos}x - \int e^x\text{sin}x\,dx + \int e^x\text{cos}x\,dx \\
&= xe^x\text{sin}x - xe^x\text{cos}x - \frac{e^x}{2}[\text{sin}x - \text{cos}x] + \frac{e^x}{2}[\text{sin}x + \text{cos}x] \\
\int xe^x\text{sin}x\,dx &= \frac{e^x}{2}[x\text{sin}x - x\text{cos}x] - \frac{e^x}{4}[\text{sin}x - \text{cos}x] + \frac{e^x}{4}[\text{sin}x + \text{cos}x] + C \\
&= \frac{e^x}{2}[x\text{sin}x - x\text{cos}x + \text{cos}x] + C
\end{aligned}
$$

การหาปริพันธ์ในตัวอย่าง 6.1.5−6.1.6 ใช้วิธีการหาปริพันธ์โดยการแยกส่วนมากกว่าหนึ่งครั้ง และตัวอย่าง 6.1.7−6.1.9 ใช้วิธีการหาปริพันธ์โดยการแยกส่วนสองครั้งแล้วมีปริพันธ์ที่คล้ายกับสิ่งที่ต้องการหาผู้เขียนจะเรียกว่า การปริพันธ์ที่ละส่วนแบบวน ดังนั้นการใช้วิธีการหาปริพันธ์โดยการแยกส่วนอาจเกิดได้หลายรูปแบบ เช่น ทำเพียงหนึ่งครั้ง มากกว่าหนึ่งครั้ง และแบบวน ขึ้นกับรูปแบบของตัวถูกปริพันธ์

การใช้วิธีการหาปริพันธ์โดยการแยกส่วนทำให้ทราบปริพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึมและฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผันบางส่วนดังนี้

ทฤษฎีบท 6.1.10

1. $\displaystyle\int \ell\text{n}x\,dx = x\ell\text{n}x - x + C$
2. $\displaystyle\int \text{arcsin}x dx = x\text{arcsin}x + \sqrt{1-x^2} + C$
3. $\displaystyle\int \text{arccos}x dx = x\text{arccos}x - \sqrt{1-x^2} + C$
4. $\displaystyle\int \text{arctan}x dx = x\text{arctan}x - \frac{1}{2}\ell\text{n}(1+x^2) + C$
5. $\displaystyle\int \text{arccot}x dx = x\text{arccot}x + \frac{1}{2}\ell\text{n}(1+x^2) + C$

บทพิสูจน์. 1. โดยตัวอย่าง 6.1.2 ข้อ 2
2. จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int \text{arcsin}x dx &= x\text{arcsin}x - \int x\, d(\text{arcsin}x) \\
&= x\text{arcsin}x - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \\
&= x\text{arcsin}x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,(2x)dx \\
&= x\text{arcsin}x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,(x^2)'dx \\
&= x\text{arcsin}x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,d(x^2) \\
&= x\text{arcsin}x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,d(-x^2) \\
&= x\text{arcsin}x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,d(1-x^2) \\
&= x\text{arcsin}x + \sqrt{1-x^2} + C
\end{aligned}$$

3. ทำนองเดียวกับข้อ 2
4. โดยตัวอย่าง 6.1.4 ข้อ 2
5. ทำนองเดียวกับข้อ 4 $\square$

แบบฝึกหัด 6.1

1. จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

1.1 $\int x\sin x\,dx$

1.2 $\int x^2 2^x\,dx$

1.3 $\int (x^3+x)e^{x^2}\,dx$

1.4 $\int x^3\cos x\,dx$

1.5 $\int \csc^3 x\,dx$

1.6 $\int x^n \ln x\,dx$ เมื่อ $n \neq -1$

1.7 $\int x\sin x\,dx$

1.8 $\int \ln(3x+5)\,dx$

1.9 $\int (\ln x)^2\,dx$

1.10 $\int e^{-x}\sin x\,dx$

1.11 $\int \frac{\operatorname{arccot}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

1.12 $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$

1.13 $\int x\tan^2 x\,dx$

1.14 $\int x^2\arctan x\,dx$

1.15 $\int \ln(x^2+5)\,dx$

1.16 $\int (x^2+3x+1)\cos x\,dx$

1.17 $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$

1.18 $\int e^x\sin^2 x\,dx$

1.19 $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}\,dx$

1.20 $\int xe^{\sqrt{2-x}}\,dx$

2. จงหาค่าของปริพันธ์จำกัดเขตต่อไปนี้

2.1 $\int_0^1 xe^{-\sqrt{x}}\,dx$

2.2 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} x\cot x\csc x\,dx$

2.3 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^3\cos 2x\,dx$

2.4 $\int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

2.5 $\int_1^e (\ln x)^2\,dx$

2.6 $\int_{-1}^{0} \arcsin x\,dx$

6.2 ปริพันธ์ของฟังก์ชันตรรกยะ

ในหัวข้อนี้จะศึกษาการหา **ปริพันธ์ของฟังก์ชันตรรกยะ** (integral of rational function) $f(x)$ โดยที่ $p(x)$ และ $q(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามในรูปแบบ

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \qquad \text{โดยที่} \quad \deg p(x) < \deg q(x)$$

สามารถเขียนในรูป

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p_1(x)}{q_1(x)} + \frac{p_2(x)}{q_2(x)} + \cdots + \frac{p_n(x)}{q_n(x)}$$

โดยแต่ละ $p_i(x)$ และ $q_i(x)$ มีระดับขั้นน้อยกว่า $p(x)$ และ $q(x)$ ตามลำดับ
เรียกแต่ละ $\dfrac{p_i(x)}{q_i(x)}$ ว่า**เศษส่วนย่อย** (partial fraction) ของ $f(x)$ สำหรับ $i = 1, 2, ..., n$
โดยทฤษฎีบทเกี่ยวกับฟังก์ชันตรรกยะ (ไม่พิสูจน์ในวิชานี้) เขียนได้ 3 รูปแบบคือ

1. $q(x)$ มี n รากที่ไม่ซ้ำกัน
2. $q(x)$ มีรากซ้ำ
3. $q(x)$ ไม่มีรากเป็นจำนวนจริง

รูปแบบที่ 1. $q(x)$ มี n รากที่ไม่ซ้ำกัน

ให้ $q(x) = (x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_n)$ เมื่อ $a_1, a_2, ..., a_n$ เป็นจำนวนจริงที่แตกต่างกัน แล้ว

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \cdots + \frac{A_n}{x - a_n}$$

เมื่อ $A_1, A_2, ..., A_n$ เป็นค่าคงตัว

ตัวอย่างเช่น

1. $\dfrac{2}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+1}$
2. $\dfrac{x-2}{x(x+1)(x-3)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{C}{x-3}$

สิ่งสำคัญของการเขียนรูปเศษส่วนย่อยคือการหาค่าคงตัว โดยความรู้เรื่องการเท่ากันของพหุนาม ทำได้ 2 วิธีคือ การแทนค่า และการเทียบสัมประสิทธิ์ จากข้อ 1 จัดรูปใหม่จะได้ว่า

$$\frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{A(x+1) + B(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

ดังนั้น $2 = A(x+1) + B(x-1)$ เมื่อแทน $x = 1$ จะได้ $A = 1$ และแทน $x = -1$ จะได้ $B = -1$ ฉะนั้น

$$\frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$$

โดยทั่วไปเมื่อ $f(x)$ อยู่ในรูปเศษส่วนย่อยจะได้ปริพันธ์คือ

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \int \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \cdots + \frac{A_n}{x-a_n}\,dx \\ &= A_1\ell\text{n}|x-a_1| + A_2\ell\text{n}|x-a_2| + \cdots + A_n\ell\text{n}|x-a_n| + C\end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 6.2.1 ให้ a และ b เป็นจำนวนจริงที่ต่างกัน จะได้ว่า

$$\frac{1}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+b}\right]$$

บทพิสูจน์. พิจารณา

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x+a)(x+b)} &= \frac{A}{x+a} + \frac{B}{x+b} \\ 1 &= A(x+b) + B(x+a)\end{aligned}$$

เมื่อแทน $x = -a$ จะได้ $A = \dfrac{1}{b-a}$ และแทน $x = -b$ จะได้ $B = -\dfrac{1}{b-a}$
ดังนั้นทฤษฎีบทนี้เป็นจริง □

ตัวอย่าง 6.2.2 จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

1. $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,dx$

   วิธีทำ โดยทฤษฎีบท 6.2.1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,dx &= \int \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\,dx \\ &= \ell\text{n}|x+1| - \ell\text{n}|x+2| + C \\ &= \ell\text{n}\left|\frac{x+1}{x+2}\right| + C\end{aligned}$$

2. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-4}\,dx$

   วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}\frac{x}{x^2-4} &= \frac{x}{(x-2)(x+2)} \\ &= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} \\ x &= A(x+2) + B(x-2)\end{aligned}$$

   เมื่อแทน $x = 2$ จะได้ $A = \dfrac{1}{2}$ และแทน $x = -2$ จะได้ $B = -\dfrac{1}{2}$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^2-4}\,dx &= \int \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+2}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\ell\text{n}|x-2| - \frac{1}{2}\ell\text{n}|x+2| + C \\ &= \frac{1}{2}\ell\text{n}\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.2.3 จงหาปริพันธ์ $\displaystyle\int \frac{x}{(x-1)(4x^2-1)}\,dx$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}\frac{x}{(x-1)(4x^2-1)} &= \frac{x}{(x-1)(2x-1)(2x+1)}\\ &= \frac{A}{x-1}+\frac{B}{2x-1}+\frac{C}{2x+1}\\ x &= A(2x-1)(2x+1)+B(x-1)(2x+1)+C(x-1)(2x-1)\end{aligned}$$

เมื่อแทน $x=1$ จะได้ $A=\frac{1}{3}$ แทน $x=\frac{1}{2}$ จะได้ $B=-\frac{1}{2}$ และแทน $x=-\frac{1}{2}$ จะได้ $C=-\frac{1}{6}$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{(x-1)(4x^2-1)}\,dx &= \int \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2x+1}\,dx\\ &= \frac{1}{3}\ell\text{n}|x-1|-\frac{1}{4}\ell\text{n}|2x-1|-\frac{1}{12}\ell\text{n}|2x+1|+C\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.2.4 จงหาปริพันธ์ของ $\displaystyle\int \frac{x^4+5}{x^3+2x^2-x-2}\,dx$

วิธีทำ เนื่องจาก $\displaystyle\frac{x^4+5}{x^3+2x^2-x-2}=(x-2)+\frac{5x^2+1}{x^3+2x^2-x-2}$ พิจารณา

$$\begin{aligned}\frac{5x^2+1}{x^3+2x^2-x-2} &= \frac{5x^2+1}{(x-1)(x+1)(x+2)}\\ &= \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+2}\\ 5x^2+1 &= A(x+1)(x+2)+B(x-1)(x+2)+C(x-1)(x+1)\end{aligned}$$

เมื่อแทน $x=1$ จะได้ $A=1$ แทน $x=-1$ จะได้ $B=-3$ และแทน $x=-2$ จะได้ $C=7$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4+5}{x^3+2x^2-x-2}\,dx &= \int (x-2)+\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x+1}+\frac{7}{x+2}\,dx\\ &= \frac{1}{2}x^2-2x+\ell\text{n}|x-1|-3\ell\text{n}|x+1|+7\ell\text{n}|x+2|+C\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.2.5 จงหาปริพันธ์ของ $\displaystyle\int \frac{\cos x}{(1+2\sin x)(1-\sin x)}\,dx$

วิธีทำ ให้ $u=\sin x$ จะได้ว่า $du=\cos x\,dx$ ฉะนั้น

$$\int \frac{\cos x}{(1+2\sin x)(1-\sin x)}\,dx=\int \frac{1}{(1+2u)(1-u)}\,du$$

พิจารณา

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+2u)(1-u)} &= \frac{A}{1+2u}+\frac{B}{1-u}\\ 1 &= A(1-u)+B(1+2u)\end{aligned}$$

เมื่อแทน $u=1$ จะได้ $B=\frac{1}{3}$ และแทน $u=-\frac{1}{2}$ จะได้ $A=\frac{2}{3}$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(1+2u)(1-u)}\,du &= \int \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1+2u}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-u}\,du\\ &= \frac{1}{3}\ell\text{n}|1+2u|-\frac{1}{3}\ell\text{n}|1-u|+C\end{aligned}$$

สรุปได้ว่า

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos x}{(1+2\sin x)(1-\sin x)}\,dx &= \frac{1}{3}\ell\text{n}|1+2\sin x|-\frac{1}{3}\ell\text{n}|1-\sin x|+C\\ &= \frac{1}{3}\ell\text{n}\left|\frac{1+2\sin x}{1-\sin x}\right|+C\end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 6.2.6 ปริพันธ์ของฟังก์ชันเซแคนต์กับโคเซแคนต์

1. $\int \sec x dx = \ell\text{n}|\sec x+\tan x|+C$
2. $\int \csc x dx = \ell\text{n}|\csc x-\cot x|+C$

บทพิสูจน์. 1. พิจารณา

$$\begin{aligned}\int \sec x\,dx = \int \frac{1}{\cos x}\,dx = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}\,dx &= \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\,dx\\ = \int \frac{1}{(1-\sin x)(1+\sin x)}\,d\sin x &= \int \frac{1}{(1-u)(1+u)}\,du \qquad \text{เมื่อ } u=\sin x\end{aligned}$$

ดังนั้น $\frac{1}{(1-u)(1+u)}=\frac{A}{1-u}+\frac{B}{1+u}$ และ $1=A(1+u)+B(1-u)$
เมื่อแทน $u=1$ จะได้ $A=\frac{1}{2}$ และแทน $u=-1$ จะได้ $B=\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(1-u)(1+u)}\,du &= \int \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-u}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+u}\,du\\ &= -\frac{1}{2}\ell\text{n}|1-u|+\frac{1}{2}\ell\text{n}|1+u|+C=\frac{1}{2}\ell\text{n}\left|\frac{1+u}{1-u}\right|+C\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int \sec x\,dx &= \frac{1}{2}\ell\text{n}\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C\\ &= \frac{1}{2}\ell\text{n}\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\cdot\frac{1+\sin x}{1+\sin x}\right|+C\\ &= \frac{1}{2}\ell\text{n}\left|\frac{(1+\sin x)^2}{1-\sin^2 x}\right|+C\\ &= \frac{1}{2}\ell\text{n}\left|\frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x}\right|+C\\ &= \ell\text{n}\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right|+C\\ &= \ell\text{n}|\sec x+\tan x|+C\end{aligned}$$

2. ทำนองเดียวกันกับข้อ 1 (เป็นแบบฝึกหัด) □

รูปแบบที่ 2. $q(x)$ มีรากซ้ำ

ใน $q(x)$ มีตัวประกอบ $(x-a)^k$ จะได้ว่า

$$\frac{p(x)}{(x-a)^k} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-a)^k}$$

เมื่อ $A_1, A_2, ..., A_k$ เป็นค่าคงตัว

ตัวอย่างเช่น

1. $\dfrac{x}{(x-1)^3} = \dfrac{A_1}{x-1} + \dfrac{A_2}{(x-1)^2} + \dfrac{A_3}{(x-1)^3}$
2. $\dfrac{x^2-3}{x(x+2)^2} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+2} + \dfrac{C}{(x+2)^2}$
3. $\dfrac{x^3-1}{x^2(x-3)^2} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{C}{x-3} + \dfrac{D}{(x-3)^2}$

ตัวอย่าง 6.2.7 จงหาปริพันธ์ $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)(x+1)^2}\,dx$

วิธีทำ พิจารณา

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$
$$1 = A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1)$$

เมื่อแทน $x=1$ จะได้ $A = \dfrac{1}{4}$ แทน $x=-1$ จะได้ $C = -\dfrac{1}{2}$ และแทน $x=0$ จะได้

$$1 = A - B - C = \frac{1}{4} - B + \frac{1}{2}$$

ฉะนั้น $B = -\dfrac{1}{4}$ ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x-1)(x+1)^2}\,dx &= \int \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}\,dx\\ &= \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+2} + C\\ &= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{1}{2(x+2)} + C\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.2.8 จงหาปริพันธ์ $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2(x-1)^2}\,dx$

วิธีทำ พิจารณา

$$\frac{x+1}{x^2(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2}$$
$$x+1 = Ax(x-1)^2 + B(x-1)^2 + Cx^2(x-1) + Dx^2$$

เมื่อแทน $x = 0$ จะได้ $B = 1$ แทน $x = 1$ จะได้ $D = 2$ และแทน $x = -2, 2$ จะได้

$$\begin{aligned} 2A + C &= 3 \\ 2A + 4C &= -6 \end{aligned}$$

ทำให้ได้ว่า $A = 3$ และ $C = -3$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{x^2(x-1)^2}\,dx &= \int \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} + -\frac{3}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}\,dx \\ &= \ell\mathsf{n}|x| - \frac{1}{x} - 3\ell\mathsf{n}|x-1| - \frac{2}{x-1} + C \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.2.9 จงหาปริพันธ์ $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x^2-1)^2(x-2)}\,dx$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned} \frac{x^2+1}{(x^2-1)^2(x-2)} &= \frac{x^2+1}{(x-1)^2(x+1)^2(x-2)} \\ &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2} + \frac{E}{x-2} \\ x^2+1 &= A(x-1)(x+1)^2(x-2) + B(x+1)^2(x-2) + C(x-1)^2(x+1)(x-2) + \\ &\quad D(x-1)^2(x-2) + E(x-1)^2(x+1)^2 \end{aligned}$$

เมื่อแทน $x = 1$ จะได้ $B = -\frac{1}{2}$ แทน $x = -1$ จะได้ $D = -\frac{1}{6}$ แทน $x = 2$ จะได้ $E = \frac{5}{9}$ และแทน $x = 0, -2$ จะได้

$$\begin{aligned} 9A - 9C &= -4 \\ 3A + 9C &= -2 \end{aligned}$$

ทำให้ได้ว่า $A = -\frac{1}{2}$ และ $C = -\frac{1}{18}$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+1}{(x^2-1)^2(x-2)}\,dx &= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx - \frac{1}{18}\int \frac{1}{x+1}\,dx \\ &\quad - \frac{1}{6}\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx + \frac{5}{9}\int \frac{1}{x-2}\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\ell\mathsf{n}|x-1| - \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{18}\ell\mathsf{n}|x+1| + \frac{1}{16(x+1)} + \frac{5}{9}\ell\mathsf{n}|x-2| + C \end{aligned}$$

รูปแบบที่ 3. $q(x)$ ไม่มีรากเป็นจำนวนจริง

ใน $q(x)$ มีตัวประกอบ $(ax^2+bx+c)^k$ โดยที่ $b^2-4ac<0$ แล้ว

$$\frac{p(x)}{(ax^2+bx+c)^k}=\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{A_kx+B_k}{(ax^2+bx+c)^k}$$

เมื่อ $A_1,A_2,...,A_k$ และ $B_1,B_2,...,B_k$ เป็นค่าคงตัว

ตัวอย่างเช่น

1. $\dfrac{1}{(x^2+1)^2}=\dfrac{A_1x+B_1}{x^2+1}+\dfrac{A_2x+B_2}{(x^2+1)^2}$
2. $\dfrac{x+1}{x(x^2+1)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{Bx+C}{x^2+1}$
3. $\dfrac{2x+3}{(x-1)^2(x^2+2)^2}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{(x-1)^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+2}+\dfrac{Ex+F}{(x^2+2)^2}$

ตัวอย่าง 6.2.10 จงหาปริพันธ์ $\displaystyle\int\frac{1}{x(x^2+1)}\,dx$

วิธีทำ พิจารณา

$$\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$
$$1=A(x^2+1)+(Bx+C)x$$

เมื่อแทน $x=0$ จะได้ $A=1$ และแทน $x=0,-1$ จะได้

$$B+C=-1 \qquad \text{และ} \qquad B-C=-1$$

ทำให้ได้ว่า $B=-1$ และ $C=0$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x(x^2+1)}\,dx&=\int\frac{1}{x}\,dx-\int\frac{x}{x^2+1}\,dx\\&=\ell\text{n}|x|-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}\,d(x^2+1)=\ell\text{n}|x|-\frac{1}{2}\ell\text{n}(x^2+1)+C\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.2.11 จงหาปริพันธ์ $\displaystyle\int\frac{1}{x^4-1}\,dx$

วิธีทำ พิจารณา

$$\frac{1}{x^4-1}=\frac{1}{(x^2+1)(x-1)(x+1)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{x+1}$$
$$1=(Ax+B)(x+1)(x-1)+C(x^2+1)(x+1)+D(x^2+1)(x-1)$$

เมื่อแทน $x=-1$ จะได้ $D=-\dfrac{1}{4}$ แทน $x=1$ จะได้ $C=\dfrac{1}{4}$ แทน $x=0$ จะได้ $B=-\dfrac{1}{2}$ และแทน $x=2$ จะได้ $A=0$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x^4-1}\,dx&=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{4}\int\frac{1}{x-1}\,dx-\frac{1}{4}\int\frac{1}{x+1}\,dx\\&=-\frac{1}{2}\text{arctan}x+\frac{1}{4}\ell\text{n}|x-1|-\frac{1}{4}\ell\text{n}|x+1|+C\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.2.12 จงหาปริพันธ์ของ $\displaystyle\int \frac{\tan\theta}{1+\cos^2\theta}\,d\theta$

วิธีทำ พิจารณา

$$\int \frac{\tan\theta}{1+\sin\theta}\,d\theta = \int \frac{\sin\theta}{\cos\theta(1+\cos^2\theta)}\,d\theta = -\int \frac{1}{\cos\theta(1+\cos^2\theta)}\,d\cos\theta$$

ให้ $x = \cos\theta$ ดังนั้น

$$\int \frac{\tan\theta}{1+\sin\theta}\,d\theta = -\int \frac{1}{x(1+x^2)}\,dx$$

โดยตัวอย่าง 6.2.10 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int \frac{\tan\theta}{1+\sin\theta}\,d\theta &= -\left[\ell\text{n}|x| - \frac{1}{2}\ell\text{n}(x^2+1)\right] + C\\ &= -\ell\text{n}|\cos\theta| + \frac{1}{2}\ell\text{n}(\cos^2\theta+1) + C\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.2.13 จงหาปริพันธ์ของ $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^{2t}}\,dt$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+e^{2t}}\,dt &= \int \frac{1}{e^t(1+e^{2t})}\cdot e^t\,dt\\ &= \int \frac{1}{e^t(1+e^{2t})}\cdot (e^t)'\,dt\\ &= \int \frac{1}{e^t(1+e^{2t})}\,d(e^t)\end{aligned}$$

ให้ $x = e^t$ ดังนั้น

$$\int \frac{1}{1+e^{2t}}\,dt = \int \frac{1}{x(1+x^2)}\,dx$$

โดยตัวอย่าง 6.2.10 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+e^{2t}}\,dt &= \ell\text{n}|x| - \frac{1}{2}\ell\text{n}(x^2+1) + C\\ &= \ell\text{n}|e^t| - \frac{1}{2}\ell\text{n}(e^{2t}+1) + C\\ &= t - \frac{1}{2}\ell\text{n}(e^{2t}+1) + C\end{aligned}$$

แบบฝึกหัด 6.2

1. จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

1.1 $\displaystyle\int \frac{1}{16x^2-1}\,dx$

1.2 $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-x-6}\,dx$

1.3 $\displaystyle\int \frac{2x^3-5x^2+2x-3}{x^2-2x-2}\,dx$

1.4 $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^3-x^2-2x}\,dx$

1.5 $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x-1)^3}\,dx$

1.6 $\displaystyle\int \frac{20x-11}{(3x+2)(x^2-4x+5)}\,dx$

1.7 $\displaystyle\int \frac{x^4-8}{x^3+2x^2}\,dx$

1.8 $\displaystyle\int \frac{10x^2+13x}{(2x-1)(x^2+2)}\,dx$

1.9 $\displaystyle\int \frac{11x^2+13x}{(x+3)(x+2)(x^2+3)}\,dx$

1.10 $\displaystyle\int \frac{11x^2+13x}{(x+3)(x+2)(x^2+3)}\,dx$

1.11 $\displaystyle\int \frac{2x}{(x^2+1)(x+1)^2}\,dx$

1.12 $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x^2-2x+10)^2}\,dx$

1.13 $\displaystyle\int \frac{4x^2+2x+8}{x(x^2+2)^2}\,dx$

1.14 $\displaystyle\int \frac{(1+\sec^2 x)\sec^2 x}{(1+\tan^3 x)}\,dx$

1.15 $\displaystyle\int \frac{\cos t}{\sin t+\sin^3 t}\,dt$

1.16 $\displaystyle\int \frac{1}{x\ell\mathrm{n}x(1-\ell\mathrm{n}x)}\,dx$

2. จงหาค่าปริพันธ์จำกัดเขตต่อไปนี้

2.1 $\displaystyle\int_{-2}^{0} \frac{5x+7}{x^2+2x-3}\,dx$

2.2 $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x^3-x^2-11x+10}{x^3-2x+4}\,dx$

2.3 $\displaystyle\int_{3}^{4} \frac{5x^3-4x}{x^4-16}\,dx$

2.4 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\sec\theta\tan\theta}{\sec^3\theta+\sec\theta}\,d\theta$

6.3 ปริพันธ์ของฟังก์ชันตรรกยะในรูปตรีโกณมิติ

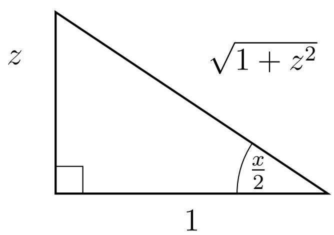
พิจารณาการหาปริพันธ์ $\int \frac{1}{1+\text{sin}x}\,dx$ โดยอาศัยเอกลักษณ์ $\text{sin}^2x + \text{cos}^2x = 1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+\text{sin}x}\,dx &= \int \frac{1-\text{sin}x}{(1+\text{sin}x)(1-\text{sin}x)}\,dx \\
&= \int \frac{1-\text{sin}x}{1-\text{sin}^2x}\,dx \\
&= \int \frac{1-\text{sin}x}{\text{cos}^2x}\,dx \\
&= \int \text{sec}^2x - \text{sec}x\text{tan}x\,dx \\
&= \text{tan}x - \text{sec}x + C
\end{aligned}$$

แต่ปริพันธ์ของ $\int \frac{1}{\text{cos}x+\text{sin}x}\,dx$ ไม่สามารถหาปริพันธ์โดยอาศัยเพียงเอกลักษณ์ได้ ในหัวข้อนี้จึงสนใจการเปลี่ยนฟังก์ชันตรรกยะในรูป $\text{sin}x$ และ $\text{cos}x$ ในรูปตัวแปรใหม่คือ z โดยกำหนดให้

$$z = \text{tan}\frac{x}{2}$$

ถ้า z เป็นจำนวนจริงบวก เขียนรูปแสดงความสัมพันธ์ได้ดังนี้



จากรูปจะได้ว่า

$$\text{sin}\frac{x}{2} = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \qquad \text{และ} \qquad \text{cos}\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\text{sin}x &= 2\text{sin}\frac{x}{2}\text{cos}\frac{x}{2} = \frac{2z}{1+z^2} \\
\text{cos}x &= \text{cos}^2\frac{x}{2} - \text{sin}^2\frac{x}{2} = \frac{1-z^2}{1+z^2} \\
dz &= \left(\text{sec}^2\frac{x}{2}\right)\frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}(1+z^2)dx
\end{aligned}$$

สรุปได้ว่า

$$\text{sin}x = \frac{2z}{1+z^2} \qquad \text{และ} \qquad \text{cos}x = \frac{1-z^2}{1+z^2} \qquad \text{และ} \qquad dx = \frac{2}{1+z^2}dz$$

ตัวอย่าง 6.3.1 จงหาปริพันธ์ $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x + \sin x}\, dx$

วิธีทำ ให้ $z = \tan\frac{x}{2}$ จะได้ว่า

$$\sin x = \frac{2z}{1+z^2} \qquad \text{และ} \qquad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2} \qquad \text{และ} \qquad dx = \frac{2}{1+z^2}dz$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\cos x + \sin x}\, dx &= \int \frac{1}{\frac{1-z^2}{1+z^2} + \frac{2z}{1+z^2}} \cdot \frac{2}{1+z^2} dz \\
&= \int \frac{2}{2z + 1 - z^2}\, dz \\
&= -\int \frac{2}{(z-1)^2 - 2}\, dz \\
&= -\int \frac{2}{(z-1-\sqrt{2})(z-1+\sqrt{2})}\, dz \\
&= -\frac{2}{(-1+\sqrt{2}) - (-1-\sqrt{2})} \int \frac{1}{z-1-\sqrt{2}} - \frac{1}{z-1+\sqrt{2}}\, dz \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\ell\text{n}|z-1-\sqrt{2}| - \ell\text{n}|z-1+\sqrt{2}| \right) + C \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{2}\ell\text{n} \left|\tan\frac{x}{2} - 1 - \sqrt{2}\right| + \frac{\sqrt{2}}{2}\ell\text{n}\left|\tan\frac{x}{2} - 1 + \sqrt{2}\right| + C
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.3.2 จงหาปริพันธ์ $\displaystyle\int \frac{1}{4\cos x + 3\sin x}\, dx$

วิธีทำ ให้ $z = \tan\frac{x}{2}$ จะได้ว่า

$$\sin x = \frac{2z}{1+z^2} \qquad \text{และ} \qquad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2} \qquad \text{และ} \qquad dx = \frac{2}{1+z^2}dz$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{4\cos x + 3\sin x}\, dx &= \int \frac{1}{4 \cdot \frac{1-z^2}{1+z^2} + 3 \cdot \frac{2z}{1+z^2}} \cdot \frac{2}{1+z^2} dz \\
&= \int \frac{1}{2 - 2z^2 + 3z}\, dz \\
&= -\int \frac{1}{(2z+1)(z-2)}\, dz \\
&= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{(z+\frac{1}{2})(z-2)}\, dz \\
&= -\frac{1}{2(-2-\frac{1}{2})} \int \frac{1}{z+\frac{1}{2}} - \frac{1}{z-2}\, dz \\
&= \frac{1}{5}\left(\ell\text{n}\left|z + \frac{1}{2}\right| - \ell\text{n}|z-2| \right) + C \\
&= \frac{1}{5}\ell\text{n}\left|\tan\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right| - \frac{1}{5}\ell\text{n}\left|\tan\frac{x}{2} - 2\right| + C
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.3.3 จงหาปริพันธ์ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3+5\sin x}\,dx$

วิธีทำ ให้ $z = \tan\frac{x}{2}$ จะได้ว่า

$$\sin x = \frac{2z}{1+z^2} \quad \text{และ} \quad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2} \quad \text{และ} \quad dx = \frac{2}{1+z^2}dz$$

พิจารณา

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{3+5\sin x}\,dx &= \int \frac{1}{3+5\cdot\frac{2z}{1+z^2}}\cdot\frac{2}{1+z^2}dz \\
&= \int \frac{2}{3z^2+10z+3}\,dz \\
&= 2\int \frac{1}{(3z+1)(z+3)}\,dz \\
&= \frac{2}{3}\int \frac{1}{(z+\frac{1}{3})(z+3)}\,dz \\
&= \frac{2}{3(3-\frac{1}{3})}\int \frac{1}{z+\frac{1}{3}} - \frac{1}{z+3}\,dz \\
&= \frac{1}{4}\left(\ell\text{n}\left|z+\frac{1}{3}\right| - \ell\text{n}|z+3|\right) + C \\
&= \frac{1}{4}\ell\text{n}\left|\frac{z+\frac{1}{3}}{z+3}\right| + C \\
&= \frac{1}{4}\ell\text{n}\left|\frac{\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{3}}{\tan\frac{x}{2}+3}\right| + C
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3+5\sin x}\,dx &= \left[\frac{1}{4}\ell\text{n}\left|\frac{\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{3}}{\tan\frac{x}{2}+3}\right|\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{4}\ell\text{n}\left|\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\frac{1}{3}}{\tan\frac{\pi}{4}+3}\right| - \frac{1}{4}\ell\text{n}\left|\frac{\tan 0+\frac{1}{3}}{\tan 0+3}\right| \\
&= \frac{1}{4}\ell\text{n}\left|\frac{1+\frac{1}{3}}{1+3}\right| - \frac{1}{4}\ell\text{n}\left|\frac{0+\frac{1}{3}}{0+3}\right| \\
&= \frac{1}{4}\ell\text{n}\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4}\ell\text{n}\left(\frac{1}{9}\right) \\
&= \frac{1}{4}\ell\text{n}3
\end{aligned}$$

แบบฝึกหัด 6.3

1. จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

   1.1 $\displaystyle\int \frac{1}{2-\sin x}\,dx$

   1.2 $\displaystyle\int \frac{1}{3+2\cos x}\,dx$

   1.3 $\displaystyle\int \frac{2}{\tan x+\sin x}\,dx$

   1.4 $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x-\sin x+1}\,dx$

   1.5 $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x-\sin x+3}\,dx$

   1.6 $\displaystyle\int \frac{1}{3\sec x-1}\,dx$

   1.7 $\displaystyle\int \frac{\sec x}{1+\sin x}\,dx$

2. จงหาค่าของ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{4-3\cos^2 x+5\sin^2 x}\,dx$

6.4 ปริพันธ์ของฟังก์ชันในรูปกรณฑ์

ในหัวข้อนี้เราจะพิจารณาการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันที่มีกรณฑ์โดยการเปลี่ยนตัวแปร ตัวอย่างเช่น

$$\int x\sqrt{x-1}\,dx$$

กำหนด $u = x-1$ จะได้ว่า $du = dx$ และ $x = u+1$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x-1}\,dx &= \int (u+1)\sqrt{u}\,du\\ &= \int u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}}\,du\\ &= \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C\\ &= \frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + C\end{aligned}$$

แต่เมื่อกำหนด $u = \sqrt{x-1}$ จะได้ว่า $du = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}dx = \dfrac{1}{2u}dx$ นั่นคือ

$$x = u^2+1 \quad \text{และ} \quad dx = 2udu$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x-1}\,dx &= \int (u^2+1)u\,\cdot 2u\,du\\ &= \int 2u^4 + 2u^2\,du\\ &= \frac{2}{5}u^5 + \frac{2}{3}u^3 + C\\ &= \frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + C\end{aligned}$$

เมื่อพิจารณากำหนด u ทั้ง 2 แบบ การหาปริพันธ์มีความยากง่ายต่างกัน จะเห็นรูปแบบที่สองเลขชี้กำลังของการปริพันธ์จะเป็นจำนวนเต็มทำให้ง่ายต่อการหาค่า ดังนั้นในหัวข้อนี้จะสนใจวิธีการในรูปแบบที่สอง นั่นคือ พิจารณาฟังก์ชันทีมีรูปแบบ $\sqrt[n]{ax+b}$ จะกำจัดเครื่องหมายกรณฑ์เพื่อให้ง่ายต่อการหาปริพันธ์โดยให้

$$u = \sqrt[n]{ax+b}$$

ตัวอย่าง 6.4.1 จงหาปริพันธ์ $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$

วิธีทำ ให้ $u = \sqrt{x}$ จะได้ว่า $du = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx = \dfrac{1}{2u}dx$ นั่นคือ $x = u^2$ และ $dx = 2udu$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx &= \int \frac{1}{1+u}\,\cdot 2u\,du\\ &= 2\int 1 - \frac{1}{1+u}\,du\\ &= 2u - 2\ln|1+u| + C\\ &= 2\sqrt{x} - 2\ln(1+\sqrt{x}) + C\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.4.2 จงหาปริพันธ์ $\displaystyle\int x^3(x-1)^{\frac{5}{3}}\,dx$

วิธีทำ ให้ $u=(x-1)^{\frac{1}{3}}$ จะได้ว่า $du=\dfrac{1}{3(x-1)^{\frac{2}{3}}}dx=\dfrac{1}{3u^2}dx$ นั่นคือ

$$x=u^3+1 \qquad \text{และ} \qquad dx=3u^2du$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int x^3(x-1)^{\frac{5}{3}}\,dx &= \int (u^3+1)^3u^5\ \cdot 3u^2\,du\\
&= 3\int (u^9+3u^6+3u^3+1)u^7\,du\\
&= 3\int u^{16}+3u^{13}+3u^{10}+u^7\,du\\
&= \frac{3}{17}u^{17}+\frac{9}{14}u^{14}+\frac{9}{11}u^{10}+\frac{3}{8}u^8+C\\
&= \frac{3}{17}(x-1)^{\frac{17}{3}}+\frac{9}{14}(x-1)^{\frac{14}{3}}+\frac{9}{11}(x-1)^{\frac{10}{3}}+\frac{3}{8}(x-1)^{\frac{8}{3}}+C
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.4.3 จงหาปริพันธ์ $\displaystyle\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^{\frac{1}{3}}}\,dx$

วิธีทำ ให้ $u=x^{\frac{1}{6}}$ จะได้ว่า $du=\dfrac{1}{6x^{\frac{5}{6}}}dx=\dfrac{1}{6u^5}dx$ นั่นคือ

$$x=u^6 \qquad \text{และ} \qquad dx=6u^5du$$

ดังนั้น

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^{\frac{1}{3}}}\,dx=\int \frac{(u^6)^{\frac{1}{2}}}{1+(u^6)^{\frac{1}{3}}}\ \cdot 6u^5\,du=\int \frac{u^3}{1+u^2}\ \cdot 6u^5\,du=\int \frac{6u^8}{1+u^2}\,du$$

โดยวิธีหารยาวจะได้ว่า

$$\frac{6u^8}{1+u^2}=6u^6-6u^4+6u^2-6+\frac{6}{1+u^2}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^{\frac{1}{3}}}\,dx &= \int 6u^6-6u^4+6u^2-6+\frac{6}{1+u^2}\,du\\
&= \frac{6}{7}u^7-\frac{6}{5}u^5+2u^3-6u+6\text{arctan}u+C\\
&= \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}}-\frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}}+2x^{\frac{1}{2}}-6x^{\frac{1}{6}}+6\text{arctan}(x^{\frac{1}{6}})+C
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.4.4 จงหาปริพันธ์ $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

วิธีทำ ให้ $u = \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}$ จะได้ว่า $u^3 = 1+\sqrt[4]{x}$ นั่นคือ $\sqrt[4]{x} = u^3 - 1$ หรือ $\sqrt{x} = (u^3-1)^2$ และ

$$\begin{aligned} du &= \frac{1}{3(1+\sqrt[4]{x})^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{1}{4x^{\frac{3}{4}}}\,dx \\ &= \frac{1}{3u^2} \cdot \frac{1}{4(x^{\frac{1}{4}})^3}\,dx \\ &= \frac{1}{3u^2} \cdot \frac{1}{4(u^3-1)^3}\,dx \end{aligned}$$

ดังนั้น $dx = 12u^2(u^3-1)^3du$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx &= \int \frac{u}{(u^3-1)^2} \cdot 12u^2(u^3-1)^3du \\ &= \int 12u^3(u^3-1)\,du \\ &= \int 12u^6 - 12u^3\,du \\ &= \frac{12}{7}u^7 - 3u^4 + C \\ &= \frac{12}{7}(1+\sqrt[4]{x})^{\frac{7}{3}} - 3(1+\sqrt[4]{x})^{\frac{4}{3}} + C \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.4.5 จงหาปริพันธ์ $\displaystyle\int \frac{1}{(1+e^t)^{\frac{3}{2}} + (1+e^t)^{\frac{1}{2}}}\,dt$

วิธีทำ ให้ $u = (1+e^t)^{\frac{1}{2}}$ จะได้ว่า $u^2 = 1+e^t$ นั่นคือ $e^t = u^2 - 1$ และ

$$du = \frac{1}{2(1+e^t)^{\frac{1}{2}}} \cdot e^t\,dt = \frac{1}{2u} \cdot (u^2-1)\,dt$$

ดังนั้น $dt = \dfrac{2u}{u^2-1}\,du$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(1+e^t)^{\frac{3}{2}} + (1+e^t)^{\frac{1}{2}}}\,dt &= \int \frac{1}{u^3+u} \cdot \frac{2u}{u^2-1}\,du \\ &= \int \frac{2}{(u^2+1)(u^2-1)}\,du \\ &= \int \frac{1}{u^2-1} - \frac{1}{u^2+1}\,du \\ &= \int \frac{1}{(u-1)(u+1)} - \frac{1}{u^2+1}\,du \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\,du - \int \frac{1}{u^2+1}\,du \\ &= \frac{1}{2}\ell\text{n}|u-1| - \frac{1}{2}\ell\text{n}|u+1| - \text{arctan}u + C \\ &= \frac{1}{2}\ell\text{n}|(1+e^t)^{\frac{1}{2}} - 1| - \frac{1}{2}\ell\text{n}|(1+e^t)^{\frac{1}{2}} + 1| - \text{arctan}(1+e^t)^{\frac{1}{2}} + C \end{aligned}$$

แบบฝึกหัด 6.4

จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

1. $\int x^3\sqrt{7x+2}\,dx$
2. $\int \frac{\sqrt{5x}}{x+5}\,dx$
3. $\int \frac{1}{(x+7)\sqrt{x-2}}\,dx$
4. $\int \frac{x}{\sqrt[4]{3x-5}}\,dx$
5. $\int \frac{1}{2\sqrt{x-1}+3}\,dx$
6. $\int \frac{\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}\,dx$
7. $\int \frac{x^{\frac{4}{3}}-2x}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx$
8. $\int \frac{1}{x^{\frac{1}{4}}(1+x^{\frac{1}{6}})}\,dx$
9. $\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x+x^{\frac{4}{3}}}\,dx$
10. $\int \frac{1+x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}+x}\,dx$
11. $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x}}\,dx$
12. $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt[4]{x+1}}\,dx$

6.5 ปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงวิธีการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติใน 3 รูปแบบคือ

$$\sin^m x\cos^n x \qquad \text{และ} \qquad \tan^m x\sec^n x \qquad \text{และ} \qquad \cot^m x\csc^n x$$

เมื่อ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ (อาจขยายไปยังจำนวนตรรกยะและจำนวนเต็ม)

รูปแบบที่ 1. $\sin^m x\cos^n x$

การหาปริพันธ์รูปแบบนี้อาจใช้เอกลักษณ์ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ และการลดกำลังสองด้วยกฎ

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x) \qquad\qquad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

บางครั้งอาจร่วมกับการเปลี่ยนตัวแปร ดังจะแสดงดังตัวอย่าง

ตัวอย่าง 6.5.1 จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

1. $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx$

   วิธีทำ จะได้ว่า

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int 1+\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

2. $\displaystyle\int \sin^3 x\,dx$

   วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x\,dx &= \int \sin^2 x\cdot\sin x, dx\\ &= -\int (1-\cos^2 x)\cdot(\cos x)' dx\\ &= \int \cos^2 x - 1\,d(\cos x)\\ &= \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C\end{aligned}$$

3. $\displaystyle\int \sin^4 x\,dx$

   วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x\,dx = \int (\sin^2 x)^2\,dx &= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2\,dx\\ &= \frac{1}{4}\int 1-2\cos 2x+\cos^2 2x\,dx\\ &= \frac{1}{4}\int 1-2\cos 2x+\frac{1}{2}(1+\cos 4x)\,dx\\ &= \frac{1}{8}\int 3-4\cos 2x+\cos 4x\,dx\\ &= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.5.2 จงหาปริพันธ์ $\displaystyle\int \text{cos}^5 x\,dx$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int \text{cos}^5 x\,dx &= \int \text{cos}^4 x \cdot \text{cos}x, dx \\
&= \int (1-\text{sin}^2 x)^2 \cdot (\text{sin}x)' dx \\
&= \int 1 - 2\text{sin}^2 x + \text{sin}^4 x\, d(\text{sin}x) \\
&= \text{sin}x - \frac{2}{3}\text{sin}^3 x + \frac{1}{5}\text{sin}^5 x + C
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.5.3 จงหาปริพันธ์ $\displaystyle\int \text{cos}^6 x\,dx$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int \text{cos}^6 x\,dx &= \int (\text{cos}^2 x)^3\,dx \\
&= \int \left(\frac{1+\text{cos}2x}{2}\right)^3 dx \\
&= \frac{1}{8}\int 1 + 3\text{cos}2x + 3\text{cos}^2 2x + \text{cos}^3 2x\,dx \\
&= \frac{1}{8}\int 1 + 3\text{cos}2x + 3\left(\frac{1+\text{cos}4x}{2}\right) + \text{cos}^2 2x\text{cos}2x\,dx \\
&= \frac{1}{8}\int \frac{2+6\text{cos}2x+3+3\text{cos}4x}{2}\,dx + \frac{1}{8}\int \text{cos}^2 2x\text{cos}2x\,dx \\
&= \frac{1}{16}\int 5 + 6\text{cos}2x + 3\text{cos}4x\,dx + \frac{1}{16}\int (1-\text{sin}^2 2x)(\text{sin}2x)'\,dx \\
&= \frac{5}{16}x + \frac{3}{16}\text{sin}2x + \frac{3}{64}\text{sin}4x + \frac{1}{16}\int 1 - \text{sin}^2 2x\,d(\text{sin}2x) \\
&= \frac{5}{16}x + \frac{3}{16}\text{sin}2x + \frac{3}{64}\text{sin}4x + \frac{1}{16}\text{sin}2x - \frac{1}{48}\text{sin}^3 2x + C
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.5.4 จงหาปริพันธ์ $\displaystyle\int \text{cos}^2 x\text{sin}^3 x\,dx$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int \text{cos}^2 x\text{sin}^3 x\,dx &= \int \text{cos}^2 x\text{sin}^2 x \cdot \text{sin}x dx \\
&= -\int \text{cos}^2 x(1-\text{cos}^2 x)\cdot(\text{cos}x)' dx \\
&= \int \text{cos}^4 x - \text{cos}^2 x\,d(\text{cos}x) \\
&= \frac{1}{5}\text{cos}^5 x - \frac{1}{3}\text{cos}^3 x + C
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.5.5 จงหาปริพันธ์ $\int \cos^4 x \sin^2 x\,dx$

วิธีทำ จะเห็นว่า

$$\int \cos^4 x \sin^2 x\,dx = \int \cos^4 x(1-\cos^2 x)\,dx = \int \cos^6 x\,dx - \int \cos^4 x\,dx$$

เนื่องจาก

$$\begin{aligned}\int \cos^4 x\,dx = \int (\cos^2 x)^2\,dx &= \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2\,dx \\ &= \frac{1}{4}\int 1+2\cos 2x+\cos^2 2x\,dx \\ &= \frac{1}{4}\int 1+2\cos 2x+\frac{1}{2}(1+\cos 4x)\,dx \\ &= \frac{1}{8}\int 3+4\cos 2x+\cos 4x\,dx \\ &= \frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C\end{aligned}$$

และจากตัวอย่าง 6.5.3 สรุปได้ว่า

$$\begin{aligned}\int \cos^4 x \sin^2 x\,dx = &\frac{5}{16}x+\frac{3}{16}\sin 2x+\frac{3}{64}\sin 4x+\frac{1}{16}\sin 2x-\frac{1}{48}\sin^3 2x \\ &-\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{32}\sin 4x+C\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.5.6 จงหาปริพันธ์ $\int \cos^3 x \sin^5 x\,dx$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x \sin^5 x\,dx &= \int \cos^2 x \sin^4 x\cdot \sin x dx \\ &= -\int \cos^2 x(1-\cos^2 x)^2\cdot(\cos x)' dx \\ &= -\int \cos^2 x - 2\cos^4 x+\cos^6 x\,d(\cos x) \\ &= -\frac{1}{3}\cos^3 x+\frac{2}{5}\cos^5 x-\frac{1}{7}\cos^7 x+C\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.5.7 จงหาปริพันธ์ $\int \sin^3 x\sqrt[3]{\cos^5 x}\,dx$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x\sqrt[3]{\cos^5 x}\,dx &= \int \sin^2 x\cos^{\frac{5}{3}} x\cdot \sin x dx \\ &= -\int (1-\cos^2 x)\cos^{\frac{5}{3}} x\cdot(\cos x)' dx \\ &= \int \cos^{\frac{11}{3}} x-\cos^{\frac{5}{3}} x\,d(\cos x) \\ &= \frac{3}{14}\cos^{\frac{14}{3}} x-\frac{3}{11}\cos^{\frac{11}{3}} x+C\end{aligned}$$

รูปแบบที่ 2. $\sec^m x \tan^n x$

การหาปริพันธ์รูปแบบนี้อาจใช้เอกลักษณ์ $\sec^2 x - \tan^2 x = 1$ และการการหาปริพันธ์โดยการแยกส่วน บางครั้งอาจร่วมกับการเปลี่ยนตัวแปร ดังจะแสดงดังตัวอย่าง

ตัวอย่าง 6.5.8 จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

1. $\int \tan^2 x \, dx$

   วิธีทำ จะได้ว่า

$$\int \tan^2 x \, dx = \int \sec^2 x - 1 dx = \tan x - x + C$$

2. $\int \tan^3 x \, dx$

   วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int \tan^3 x \, dx &= \int \tan^2 x \cdot \tan x dx \\
&= \int (\sec^2 x - 1) \tan x \, dx \\
&= \int \sec^2 x \tan x - \tan x \, dx \\
&= \int \sec x (\sec x \tan x) \, dx - \int \tan x \, dx \\
&= \int \sec x \cdot (\sec x)' \, dx - \ell\text{n}|\sec x| \\
&= \int \sec x \, d(\sec x) - \ell\text{n}|\sec x| \\
&= \frac{1}{2} \sec^2 x - \ell\text{n}|\sec x| + C
\end{aligned}$$

3. $\int \sec^4 x \, dx$

   วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int \sec^4 x \, dx &= \int \sec^2 x \cdot \sec^2 x dx \\
&= \int (1 + \tan^2 x) \, (\tan x)' dx \\
&= \int 1 + \tan^2 x \, d(\tan x) \\
&= \tan x + \frac{1}{3} \tan^3 x + C
\end{aligned}$$

4. $\int \tan^4 x\,dx$

วิธีทำ โดยข้อ 3 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int \tan^4 x\,dx &= \int (\tan^2 x)^2 dx\\ &= \int (\sec^2 x - 1)^2\,dx\\ &= \int \sec^4 x - 2\sec^2 x + 1\,dx\\ &= \int \sec^4 x\,dx - 2\int \sec^2 x\,dx + \int 1\,dx\\ &= \tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x - 2\tan x + x + C\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.5.9 จงหาปริพันธ์ $\int \sec^3 x\,dx$

วิธีทำ ใช้การหาปริพันธ์โดยการแยกส่วน

$$\begin{aligned}\int \sec^3 x\,dx &= \int \sec x(\sec^2 x)dx\\ &= \int \sec x(\tan x)'dx\\ &= \int \sec x\,d(\tan x)\\ &= \sec x\tan x - \int \tan x\,d(\sec x)\\ &= \sec x\tan x - \int \tan x\,(\sec x\tan x)dx\\ &= \sec x\tan x - \int \tan^2 x\sec x\,dx\\ &= \sec x\tan x - \int (\sec^2 x - 1)\sec x\,dx\\ &= \sec x\tan x - \int \sec^3 x\,dx + \int \sec x\,dx\\ 2\int \sec^3 x\,dx &= \sec x\tan x + \int \sec x\,dx\\ 2\int \sec^3 x\,dx &= \sec x\tan x + \ell\text{n}|\sec x + \tan x|\\ \int \sec^3 x\,dx &= \frac{1}{2}[\sec x\tan x + \ell\text{n}|\sec x + \tan x|] + C\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.5.10 จงหาปริพันธ์ $\int \text{sec}^5 x\,dx$

วิธีทำ ใช้การหาปริพันธ์โดยการแยกส่วน และผลของตัวอย่าง 6.5.9

$$\begin{aligned}
\int \text{sec}^5 x\,dx &= \int \text{sec}^3 x(\text{sec}^2 x)dx \\
&= \int \text{sec}^3 x(\text{tan}x)'dx \\
&= \int \text{sec}^3 x\,d(\text{tan}x) \\
&= \text{sec}^3 x\text{tan}x - \int \text{tan}x\,d(\text{sec}^3 x) \\
&= \text{sec}^3 x\text{tan}x - \int \text{tan}x\,(3\text{sec}^2 x\text{sec}x\text{tan}x)dx \\
&= \text{sec}^3 x\text{tan}x - 3\int \text{sec}^3 x\text{tan}^2 x\,dx \\
&= \text{sec}^3 x\text{tan}x - 3\int \text{sec}^3 x(\text{sec}^2 x - 1)\,dx \\
&= \text{sec}^3 x\text{tan}x - 3\int \text{sec}^5 x\,dx + 3\int \text{sec}^3 x\,dx \\
4\int \text{sec}^5 x\,dx &= \text{sec}^3 x\text{tan}x + 3\int \text{sec}^3 x\,dx \\
4\int \text{sec}^5 x\,dx &= \text{sec}^3 x\text{tan}x + \frac{1}{2}[\text{sec}x\text{tan}x + \ell\text{n}|\text{sec}x + \text{tan}x|] \\
\int \text{sec}^5 x\,dx &= \frac{1}{4}\text{sec}^3 x\text{tan}x + \frac{1}{8}[\text{sec}x\text{tan}x + \ell\text{n}|\text{sec}x + \text{tan}x|] + C
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.5.11 จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

1. $\int \text{sec}x\text{tan}^2 x\,dx$

   วิธีทำ โดยตัวอย่าง 6.5.9 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int \text{sec}x\text{tan}^2 x\,dx &= \int \text{sec}x(\text{sec}^2 x - 1)dx \\
&= \int \text{sec}^3 x\,dx - \int \text{sec}x\,dx \\
&= \frac{1}{2}[\text{sec}x\text{tan}x + \ell\text{n}|\text{sec}x + \text{tan}x|] - \ell\text{n}|\text{sec}x + \text{tan}x| + C \\
&= \frac{1}{2}[\text{sec}x\text{tan}x - \ell\text{n}|\text{sec}x + \text{tan}x|] + C
\end{aligned}$$

2. $\int \text{sec}^2 x\text{tan}^3\,dx$

   วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int \text{sec}^2 x\text{tan}^3\,dx &= \int \text{tan}^3 x(\text{sec}^2 x)dx = \int \text{tan}^3 x(\text{tan}x)'dx \\
&= \int \text{tan}^3 x\,d(\text{tan}x) \\
&= \frac{1}{4}\text{tan}^4 x + C
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.5.12 จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

1. $\int \sec^4 x \tan^2 x \, dx$

   วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int \sec^4 x \tan^2 \, dx &= \int \sec^2 x \tan^2 x (\sec^2 x) dx \\ &= \int (1+\tan^2 x)\tan^2 x (\tan x)' dx \\ &= \int \tan^2 x + \tan^4 x \, d(\tan x) \\ &= \frac{1}{3}\tan^3 x + \frac{1}{5}\tan^5 x + C\end{aligned}$$

2. $\int \sec^3 x \tan^5 x \, dx$

   วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int \sec^3 x \tan^5 \, dx &= \int \sec^2 x \tan^4 x (\sec x \tan x) dx \\ &= \int \sec^2 x (\sec^2 x - 1)^2 (\sec x)' dx \\ &= \int \sec^2 x (\sec^4 x - 2\sec^2 x + 1) \, d(\sec x) \\ &= \int \sec^6 x - 2\sec^4 x + \sec^2 x \, d(\sec x) \\ &= \frac{1}{7}\sec^7 x - \frac{2}{5}\sec^5 x + \frac{1}{3}\sec^3 x + C\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.5.13 จงหาค่าของ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^4 x}{1+\tan x} \, dx$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}\int \frac{\sec^4 x}{1+\tan x} \, dx &= \int \frac{\sec^2 x}{1+\tan x} (\sec^2 x) dx \\ &= \int \frac{1+\tan^2 x}{1+\tan x} (\tan x)' dx \\ &= \int \tan x - 1 + \frac{2}{1+\tan x} \, d(\tan x) \\ &= \frac{1}{2}\tan^2 x - \tan x + 2\ell n|1+\tan x| + C\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^4 x}{1+\tan x} \, dx &= \left[\frac{1}{2}\tan^2 x - \tan x + 2\ell n|1+\tan x|\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \left[\frac{1}{2} - 1 + 2\ell n 2\right] - [0 - 0 + 0] \\ &= 2\ell n 2 - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

รูปแบบที่ 3. $\csc^m x \cot^n x$

การหาปริพันธ์รูปแบบนี้อาจใช้เอกลักษณ์ $\csc^2 x - \cot^2 x = 1$ และการการหาปริพันธ์โดยการแยกส่วน บางครั้งอาจร่วมกับการเปลี่ยนตัวแปรคล้ายคลึงกับรูปแบบที่ 2 ดังจะแสดงดังตัวอย่าง

ตัวอย่าง 6.5.14 จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

1. $\displaystyle\int \cot^2 x\,dx$

   วิธีทำ จะได้ว่า

$$\int \cot^2 x\,dx = \int \csc^2 x - 1 dx = -\cot x - x + C$$

2. $\displaystyle\int \cot^3 x\,dx$

   วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int \sec^4 x\,dx &= \int \sec^2 x \cdot \sec^2 x dx \\ &= \int (1+\tan^2 x)\,(\tan x)' dx \\ &= \int 1+\tan^2 x\,d(\tan x) \\ &= \tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x + C\end{aligned}$$

3. $\displaystyle\int \csc^4 x\,dx$

   วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int \csc^4 x\,dx &= \int \csc^2 x \cdot \csc^2 x dx \\ &= -\int (1+\cot^2 x)\,(\cot x)' dx \\ &= -\int 1+\cot^2 x\,d(\cot x) \\ &= -\cot x - \frac{1}{3}\cot^3 x + C\end{aligned}$$

4. $\displaystyle\int \cot^4 x\,dx$

   วิธีทำ โดยข้อ 3 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int \cot^4 x\,dx = \int (\cot^2 x)^2 dx &= \int (\csc^2 x - 1)^2\,dx \\ &= \int \csc^4 x - 2\csc^2 x + 1\,dx \\ &= \int \csc^4 x\,dx - 2\int \csc^2 x\,dx + \int 1\,dx \\ &= -\cot x - \frac{1}{3}\cot^3 x + 2\cot x + x + C\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.5.15 จงหาปริพันธ์ $\int \csc^3 x\,dx$

วิธีทำ ใช้การหาปริพันธ์โดยการแยกส่วน

$$\begin{aligned}
\int \csc^3 x\,dx &= \int \csc x(\csc^2 x)dx \\
&= -\int \csc x(\cot x)'dx \\
&= \int \csc x\,d(\cot x) \\
&= -\csc x\cot x + \int \cot x\,d(\csc x) \\
&= -\csc x\cot x + \int \cot x(-\csc x\cot x)\,dx \\
&= -\csc x\cot x - \int \cot^2 x\csc x\,dx \\
&= -\csc x\cot x - \int (\csc^2 x - 1)\csc x\,dx \\
&= -\csc x\cot x - \int \csc^3 x\,dx + \int \csc x\,dx \\
2\int \csc^3 x\,dx &= -\csc x\cot x + \int \csc x\,dx \\
2\int \csc^3 x\,dx &= -\csc x\cot x + \ell\text{n}|\csc x - \cot x| \\
\int \csc^3 x\,dx &= \frac{1}{2}[-\csc x\cot x + \ell\text{n}|\csc x - \cot x|] + C
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.5.16 จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

1. $\int \cot x c\csc^3 x\,dx$

   วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int \cot x\csc^3 x\,dx &= \int \csc^2 x\cdot(\csc x\cot x)dx = -\int \csc^2 x\cdot(\csc x)'dx \\
&= -\int \csc^2 x\,d(\csc x) = -\frac{1}{3}\csc^3 x + C
\end{aligned}$$

2. $\int \csc^2 x\cot^4 x\,dx$

   วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int \csc^2 x\cot^4 x\,dx &= \int \cot^4 x\cdot(\csc^2 x)dx = -\int \cot^4 x\cdot(\cot x)'dx \\
&= -\int \cot^4 x\,d(\cot x) = -\frac{1}{5}\cot^5 x + C
\end{aligned}$$

แบบฝึกหัด 6.5

1. จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

1.1 $\int \sin^8 x\,dx$

1.2 $\int \cos^6 x\,dx$

1.3 $\int \sin^5 x\,dx$

1.4 $\int \cos^5 x\,dx$

1.5 $\int \sin^5 x \cos^5 x\,dx$

1.6 $\int \cos^3 x \sin^7 x\,dx$

1.7 $\int \tan^6 x\,dx$

1.8 $\int \tan^7 x\,dx$

1.9 $\int \sec^7 x\,dx$

1.10 $\int \cot^7 x\,dx$

1.11 $\int \cot^8 x\,dx$

1.12 $\int \sec^6 x\,dx$

1.13 $\int \sec^7 x \tan^7 x\,dx$

1.14 $\int \sec^9 x \tan^6 x\,dx$

1.15 $\int \sec^3 x \sqrt{\tan x}\,dx$

1.16 $\int \sec^6 x \tan^{\frac{11}{5}} x\,dx$

1.17 $\int \cot^5 x \sqrt{\csc x}\,dx$

1.18 $\int \dfrac{\tan^3 x \sec^2 x}{\sin^2 x}\,dx$

2. จงหาปริพันธ์จำกัดเขตต่อไปนี้

2.1 $\int_0^{\pi} \sin^2 x \cos^3 x\,dx$

2.2 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos 3x \sin 2x\,dx$

2.3 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^5 x\,dx$

2.4 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^4 x \sqrt{\tan x}\,dx$

2.5 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin x}{1+\cos x}\,dx$

2.6 $\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}} \cot^3 x \csc^7 x\,dx$

6.6 ปริพันธ์โดยการแทนค่าตรีโกณมิติ

การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันที่อยู่ในรูปแบบ

$$\sqrt{a^2-u^2} \quad \text{และ} \quad \sqrt{a^2+u^2} \quad \text{และ} \quad \sqrt{u^2-a^2}$$

เมื่อ $u = u(x)$ และ $a > 0$ เป็นค่าคงตัว อาศัยการเปลี่ยนตัวแปรในรูปฟังก์ชันของตรีโกณมิติ เพื่อใช้เอกลักษณ์

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \text{และ} \qquad \sec^2 x - \tan^2 x = 1$$

เรียกวิธีนี้ว่า **การหาปริพันธ์โดยการแทนค่าตรีโกณมิติ** (integration by trigonometric substitution)

รูปแบบที่ 1. $\sqrt{a^2-u^2}$

ให้ $u = a\sin\theta$ เมื่อ $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ และ $a > 0$ จะได้ว่า $\cos\theta \geq 0$

ตัวอย่าง 6.6.1 จงหาปริพันธ์ $\displaystyle\int \sqrt{9-x^2}\,dx$

วิธีทำ ให้ $x = 3\sin\theta$ แล้ว $dx = 3\cos\theta\,d\theta$ และ

$$\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}\sqrt{9-x^2}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{9-x^2}\,dx &= \int \sqrt{9-9\sin^2\theta}\,3\cos\theta\,d\theta = 3\int \sqrt{9(1-\sin^2\theta)}\cos\theta\,d\theta \\
&= 3\int 3\sqrt{\cos^2\theta}\cos\theta\,d\theta = 9\int \cos\theta\cos\theta\,d\theta \\
&= 9\int \cos^2\theta\,d\theta = \frac{9}{2}\int 1+\cos2\theta\,d\theta \\
&= \frac{9}{2}\theta + \frac{9}{4}\sin2\theta + C = \frac{9}{2}\theta + \frac{9}{4}\cdot 2\sin\theta\cos\theta + C \\
&= \frac{9}{2}\arcsin\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{9}{2}\cdot\frac{x}{3}\cdot\frac{1}{3}\sqrt{9-x^2} + C \\
&= \frac{9}{2}\arcsin\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{9-x^2} + C
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.6.2 จงหาปริพันธ์ $\displaystyle\int \sqrt{25-4x^2}\,dx$

วิธีทำ ให้ $2x = 5\sin\theta$ แล้ว $dx = \frac{5}{2}\cos\theta\,d\theta$ และ

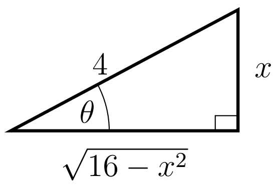
$$\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-\left(\frac{2x}{5}\right)^2} = \frac{1}{5}\sqrt{25-4x^2}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{25-4x^2}\,dx &= \int \sqrt{25-25\sin^2\theta}\cdot\frac{5}{2}\cos\theta\,d\theta = \frac{5}{2}\int\sqrt{25(1-\sin^2\theta)}\cos\theta\,d\theta \\
&= \frac{5}{2}\int 5\sqrt{\cos^2\theta}\cos\theta\,d\theta = \frac{25}{2}\int\cos\theta\cos\theta\,d\theta \\
&= \frac{25}{2}\int\cos^2\theta\,d\theta = \frac{25}{4}\int 1+\cos 2\theta\,d\theta \\
&= \frac{25}{4}\theta + \frac{25}{8}\sin 2\theta + C = \frac{25}{4}\theta + \frac{25}{8}\cdot 2\sin\theta\cos\theta + C \\
&= \frac{25}{4}\arcsin\left(\frac{2x}{5}\right) + \frac{25}{4}\cdot\frac{2x}{5}\cdot\frac{1}{5}\sqrt{25-4x^2} + C \\
&= \frac{25}{4}\arcsin\left(\frac{2x}{5}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{25-4x^2} + C
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.6.3 จงหาปริพันธ์ $\displaystyle\int \frac{1}{(16-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$

วิธีทำ ให้ $x = 4\sin\theta$ แล้ว $dx = 4\cos\theta\,d\theta$

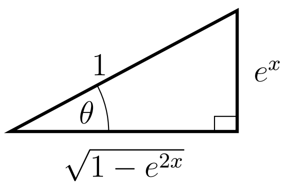


จะได้ว่า $\tan\theta = \dfrac{x}{\sqrt{16-x^2}}$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(16-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx &= \int \frac{1}{(16-16\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}\cdot 4\cos\theta\,d\theta = 4\int\frac{\cos\theta}{(16(1-\sin^2\theta))^{\frac{3}{2}}}\,d\theta \\
&= 4\int\frac{\cos\theta}{4^3(\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}}\,d\theta = \frac{1}{16}\int\frac{\cos\theta}{\cos^3\theta}\,d\theta \\
&= \frac{1}{16}\int\sec^2\theta\,d\theta = \frac{1}{16}\tan\theta + C \\
&= \frac{x}{16\sqrt{16-x^2}} + C
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.6.4 จงหาปริพันธ์ $\displaystyle\int \sqrt{1-e^{2x}}\,dx$

วิธีทำ ให้ $e^x = \sin\theta$ แล้ว $e^x dx = \cos\theta\,d\theta$ นั่นคือ $dx = \dfrac{1}{e^x}\cos\theta\,d\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\,d\theta$

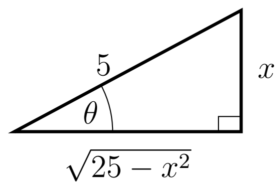


จะได้ว่า $\cos\theta = \sqrt{1-e^{2x}}$ และ $\csc\theta = \dfrac{1}{e^x}$ และ $\cot\theta = \dfrac{\sqrt{1-e^{2x}}}{e^x}$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1-e^{2x}}\,dx &= \int \sqrt{1-\sin^2\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\,d\theta = \int \sqrt{\cos^2\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\,d\theta \\
&= \int \cos\theta\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\,d\theta = \int \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\,d\theta \\
&= \int \frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta}\,d\theta = \int \csc\theta - \sin\theta\,d\theta \\
&= \ell n|\csc\theta - \cot\theta| + \cos\theta + C \\
&= \ell n\left|\frac{1}{e^x} - \frac{\sqrt{1-e^{2x}}}{e^x}\right| + \sqrt{1-e^{2x}} + C \\
&= \ell n\left|\frac{1-\sqrt{1-e^{2x}}}{e^x}\right| + \sqrt{1-e^{2x}} + C \\
&= \ell n\left|1-\sqrt{1-e^{2x}}\right| - x + \sqrt{1-e^{2x}} + C
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.6.5 จงหาค่าของ $\displaystyle\int_3^4 \frac{1}{x^2\sqrt{25-x^2}}\,dx$

วิธีทำ ให้ $x = 5\sin\theta$ แล้ว $dx = 5\cos\theta\,d\theta$



จะได้ว่า $\cot\theta = \dfrac{\sqrt{25-x^2}}{x}$ ฉะนั้น

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2\sqrt{25-x^2}}\,dx &= \int \frac{1}{25\sin^2\theta\sqrt{25-25\sin^2\theta}}\cdot 5\cos\theta\,d\theta \\
&= \frac{1}{5}\int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta\sqrt{25(1-\sin^2\theta)}}\,d\theta = \frac{1}{5}\int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta\cdot 5\sqrt{\cos^2\theta}}\,d\theta \\
&= \frac{1}{25}\int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta\cdot\cos\theta}\,d\theta = \frac{1}{25}\int \csc^2\theta\,d\theta \\
&= -\frac{1}{25}\cot\theta + C = -\frac{\sqrt{25-x^2}}{25x} + C
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int_3^4 \frac{1}{x^2\sqrt{25-x^2}}\,dx &= \left[-\frac{\sqrt{25-x^2}}{25x}\right]_3^4 \\
&= \left[-\frac{3}{25(4)}\right] - \left[-\frac{4}{25(3)}\right] \\
&= \frac{1}{25}\left[-\frac{3}{4}+\frac{4}{3}\right] \\
&= \frac{7}{300}
\end{aligned}$$

รูปแบบที่ 2. $\sqrt{a^2+u^2}$

ให้ $u = a\text{tan}\theta$ เมื่อ $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ และ $a > 0$ จะได้ว่า sec$\theta > 0$

ตัวอย่าง 6.6.6 จงหาปริพันธ์ $\int \sqrt{4+x^2}\,dx$

วิธีทำ ให้ $x = 2\text{tan}\theta$ แล้ว $dx = 2\text{sec}^2\theta\,d\theta$ จะได้ว่า

$$\text{sec}\theta = \sqrt{1+\text{tan}^2\theta} = \sqrt{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{4+x^2}}{2}$$

และโดยตัวอย่าง 6.5.9 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int \sqrt{4+x^2}\,dx &= \int \sqrt{4+4\text{tan}^2\theta}\,2\text{sec}^2\theta\,d\theta = 2\int \sqrt{4(1+\text{tan}^2\theta)}\,\text{sec}^2\theta\,d\theta \\ &= 2\int 2\sqrt{\text{sec}^2\theta}\,\text{sec}^2\theta\,d\theta = 4\int \text{sec}^3\theta\,d\theta \\ &= 2\text{sec}\theta\text{tan}\theta + 2\ell\text{n}|\text{sec}\theta+\text{tan}\theta| + C \\ &= \frac{x\sqrt{4+x^2}}{2} + 2\ell\text{n}\left|\frac{x+\sqrt{4+x^2}}{2}\right| + C\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.6.7 จงหาค่าของ $\int_0^2 (9+4x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx$

วิธีทำ ให้ $2x = 3\text{tan}\theta$ แล้ว $dx = \frac{3}{2}\text{sec}^2\theta\,d\theta$ จะได้ว่า

$$\text{sec}\theta = \sqrt{1+\text{tan}^2\theta} = \sqrt{1+\left(\frac{2x}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{9+4x^2}}{3}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int (9+4x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx &= \int (9+9\text{tan}^2\theta)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{3}{2}\text{sec}^2\theta\,d\theta = \frac{3}{2}\int (9(1+\text{tan}^2\theta))^{\frac{3}{2}}\,\text{sec}^2\theta\,d\theta \\ &= \frac{3}{2}\int 27(\text{sec}^2\theta)^{\frac{3}{2}}\,\text{sec}^2\theta\,d\theta \\ &= \frac{81}{2}\int \text{sec}^5\theta\,d\theta\end{aligned}$$

โดยตัวอย่าง 6.5.10

$$\begin{aligned}\int (9+4x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx &= \frac{81}{8}\text{sec}^3\theta\text{tan}\theta + \frac{81}{16}[\text{sec}\theta\text{tan}\theta + \ell\text{n}|\text{sec}\theta+\text{tan}\theta|] + C \\ &= \frac{x(9+4x^2)^{\frac{3}{2}}}{4} + \frac{9x\sqrt{9+4x^2}}{8} + \frac{81}{16}\ell\text{n}\left|\frac{\sqrt{9+4x^2}}{3}+\frac{2x}{3}\right| + C\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int_0^2 (9+4x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx &= \left[\frac{x(9+4x^2)^{\frac{3}{2}}}{4} + \frac{9x\sqrt{9+4x^2}}{8} + \frac{81}{16}\ell\text{n}\left|\frac{\sqrt{9+4x^2}}{3}+\frac{2x}{3}\right|\right]_0^2 \\ &= \left[\frac{250}{4} + \frac{18(5)}{8} + \frac{81}{16}\ell\text{n}\left|\frac{5}{3}+\frac{4}{3}\right|\right] - [0+0+0] \\ &= \frac{205}{4} - \frac{81}{16}\ell\text{n}3\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.6.8 จงหาปริพันธ์ $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$

วิธีทำ ให้ $x+1=\tan\theta$ แล้ว $dx=\sec^2\theta\,d\theta$ จะได้ว่า

$$\sec\theta=\sqrt{1+\tan^2\theta}=\sqrt{1+(x+1)^2}=\sqrt{x^2+2x+2}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx &= \int \frac{1}{\sqrt{1+(x+1)^2}}\,dx=\int \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}\cdot\sec^2\theta\,d\theta\\
&= \int \frac{\sec^2\theta}{\sqrt{\sec^2\theta}}\,d\theta=\int\frac{\sec^2\theta}{\sec\theta}\sec^2\theta\,d\theta\\
&= \int \sec\theta\,d\theta\\
&= \ell\text{n}|\sqrt{x^2+2x+2}+x+1|+C
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.6.9 จงหาปริพันธ์ $\displaystyle\int \frac{x^2+3x}{\sqrt{x^2+6x+10}}\,dx$

วิธีทำ พิจารณา

$$\int \frac{x^2+3x}{\sqrt{x^2+6x+10}}\,dx=\int\frac{x(x+3)}{\sqrt{1+(x+3)^2}}\,dx$$

ให้ $x+3=\tan\theta$ แล้ว $dx=\sec^2\theta\,d\theta$ และ $x=\tan\theta-3$ จะได้ว่า

$$\sec\theta=\sqrt{1+\tan^2\theta}=\sqrt{1+(x+3)^2}=\sqrt{x^2+6x+10}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2+3x}{\sqrt{x^2+6x+10}}\,dx &= \int \frac{(\tan\theta-3)\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}\cdot\sec^2\theta\,d\theta\\
&= \int \frac{\tan^2\theta-3\tan\theta}{\sqrt{\sec^2\theta}}\cdot\sec^2\theta\,d\theta\\
&= \int \frac{\tan^2\theta-3\tan\theta}{\sec\theta}\cdot\sec^2\theta\,d\theta\\
&= \int (\tan^2\theta-3\tan\theta)\sec\theta\,d\theta\\
&= \int \tan^2\theta\sec\theta-3\tan\theta\sec\theta\,d\theta\\
&= \int (\sec^2\theta-1)\sec\theta\,d\theta-3\int\tan\theta\sec\theta\,d\theta\\
&= \int \sec^3\theta-\sec\theta\,d\theta-3\sec\theta\\
&= \int \sec^3\theta\,d\theta-\int\sec\theta\,d\theta-3\sec\theta\\
&= \frac{1}{2}[\sec\theta\tan\theta+\ell\text{n}|\sec\theta+\tan\theta|]-\ell\text{n}|\sec\theta+\tan\theta|-3\sec\theta+C\\
&= \frac{1}{2}\sec\theta\tan\theta-\frac{1}{2}\ell\text{n}|\sec\theta+\tan\theta|-3\sec\theta+C\\
&= \frac{1}{2}(x+3)\sqrt{x^2+6x+10}-\frac{1}{2}\ell\text{n}\left|x+3+\sqrt{x^2+6x+10}\right|\\
&\quad -3\sqrt{x^2+6x+10}+C
\end{aligned}$$

รูปแบบที่ 3. $\sqrt{u^2 - a^2}$

ให้ $u = a\sec\theta$ เมื่อ $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup [\frac{\pi}{2}, \pi)$ และ $a > 0$

ตัวอย่าง 6.6.10 จงหาปริพันธ์ $\displaystyle\int \sqrt{x^2 - 4}\, dx$

วิธีทำ ให้ $x = 2\sec\theta$ แล้ว $dx = 2\sec\theta\tan\theta\, d\theta$
กรณี 1 ถ้า $x > 0$ จะได้ว่า $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$ นั่นคือ $\tan\theta > 0$ และ

$$\tan\theta = \sqrt{\sec^2\theta - 1} = \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1} = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{2}$$

และโดยตัวอย่าง 6.5.9 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x^2 - 4}\, dx &= \int \sqrt{4\sec^2\theta - 4}\, 2\sec\theta\tan\theta\, d\theta = 2\int \sqrt{4(\sec^2\theta - 1)}\, \sec\theta\tan\theta\, d\theta \\
&= 2\int 2\sqrt{\tan^2\theta}\, \sec\theta\tan\theta\, d\theta = 4\int \sec\theta\tan^2\theta\, d\theta \\
&= 4\int \sec\theta(\sec^2\theta - 1)\, d\theta = 4\int \sec^3\theta\, d\theta - 4\int \sec\theta\, d\theta \\
&= 2\sec\theta\tan\theta + 2\ell\text{n}|\sec\theta + \tan\theta| - 4\ell\text{n}|\sec\theta + \tan\theta| + C \\
&= 2\sec\theta\tan\theta - 2\ell\text{n}|\sec\theta + \tan\theta| + C \\
&= \frac{x\sqrt{x^2 - 4}}{2} - 2\ell\text{n}\left|\frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2}\right| + C
\end{aligned}$$

กรณี 2 ถ้า $x < 0$ จะได้ว่า $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$ นั่นคือ $\tan\theta < 0$ ทำนองเดียวกับกรณีที่ 1

$$\int \sqrt{x^2 - 4}\, dx = -\frac{x\sqrt{x^2 - 4}}{2} + 2\ell\text{n}\left|\frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2}\right| + C$$

เนื่องจาก

$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } x > 0 \\ -1 & \text{เมื่อ } x > 0 \end{cases}$$

สรุปได้ว่า

$$\int \sqrt{x^2 - 4}\, dx = \frac{|x|}{x}\left(\frac{x\sqrt{x^2 - 4}}{2} - 2\ell\text{n}\left|\frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2}\right|\right) + C \qquad (*)$$

จากตัวอย่างนี้จะเห็นได้ว่าในรูปแบบที่ 3 เราหาปริพันธ์ในกรณีที่ $x > 0$ เพียงกรณีเดียวจากนั้นสรุปคำตอบได้ดังสมการ $(*)$ เสมอ แต่ในกรณีปริพันธ์จำกัดเขตไม่จำเป็นต้องเขียนในรูปแบบของ $(*)$ เราอาจพิจารณาเครื่องหมายของ $\tan\theta$ จากขอบเขตของ x ได้โดยตรง

ตัวอย่าง 6.6.11 จงหาปริพันธ์ $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$

วิธีทำ ให้ $x = \sec\theta$ แล้ว $dx = \sec\theta\tan\theta\, d\theta$
ถ้า $x > 0$ จะได้ว่า $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$ นั่นคือ $\tan\theta > 0$ และ $\tan\theta = \sqrt{\sec^2\theta - 1} = \sqrt{x^2-1}$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx &= \int \frac{1}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}\sec\theta\tan\theta\,d\theta = \int \frac{1}{\sqrt{\tan^2\theta}}\sec\theta\tan\theta\,d\theta \\
&= \int \sec\theta\,d\theta = \ell\text{n}|\sec\theta+\tan\theta| + C \\
&= \ell\text{n}\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + C
\end{aligned}$$

สรุปได้ว่า

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \frac{|x|}{x}\ell\text{n}\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + C$$

ทฤษฎีบท 6.6.12 ปริพันธ์ของฟังก์ชันอาร์กเซแคนต์และอาร์โคเซแคนต์

1. $\displaystyle\int \text{arcsec}x\,dx = x\text{arcsec}x - \ell\text{n}\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + C$
2. $\displaystyle\int \text{arccsc}x\,dx = x\text{arccsc}x + \ell\text{n}\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + C$

บทพิสูจน์. 1. พิจารณากรณี $x > 0$ โดยวิธีการหาปริพันธ์โดยการแยกส่วน และตัวอย่าง 6.6.11

$$\begin{aligned}
\int \text{arcsec}x\,dx &= x\text{arcsec}x - \int x\,d(\text{arcsec}x) \\
&= x\text{arcsec}x - \int x\cdot\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}\,dx \\
&= x\text{arcsec}x - \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx \\
&= x\text{arcsec}x - \ell\text{n}\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + C
\end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกันสำหรับกรณี $x < 0$ จะได้ว่าผลลัพธ์เช่นเดียวกัน สรุปได้ว่า

$$\int \text{arcsec}x\,dx = x\text{arcsec}x - \ell\text{n}\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + C$$

2. พิสูจน์ในทำนองเดียวกับข้อ 1 □

ตัวอย่าง 6.6.13 จงหาค่าของ $\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{3} \frac{\sqrt{4x^2-9}}{x}\,dx$

วิธีทำ ให้ $2x = 3\sec\theta$ แล้ว $dx = \dfrac{3}{2}\sec\theta\tan\theta\,d\theta$ และ $x = \dfrac{3}{2}\sec\theta$
พิจารณา $x \in [\frac{3}{2}, 3]$ จะได้ว่า $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$ นั่นคือ $\tan\theta > 0$ และ

$$\tan\theta = \sqrt{\sec^2\theta-1} = \sqrt{\left(\frac{2x}{3}\right)^2 - 1} = \frac{\sqrt{4x^2-9}}{3}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{4x^2-9}}{x}\,dx &= \int \frac{\sqrt{9\sec^2\theta-9}}{\frac{3}{2}\sec\theta}\cdot\frac{3}{2}\sec\theta\tan\theta\,d\theta \\
&= \int \sqrt{9(\sec^2\theta-1)}\cdot\tan\theta\,d\theta = \int 3\sqrt{\tan^2\theta}\cdot\tan\theta\,d\theta \\
&= 3\int \tan^2\theta\,d\theta = 3\int(\sec^2\theta-1)\,d\theta \\
&= 3\tan\theta - 3\theta + C \\
&= \sqrt{4x^2-9} - 3\operatorname{arcsec}\left(\frac{2x}{3}\right) + C
\end{aligned}$$

ฉะนั้น

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{3}{2}}^{3} \frac{\sqrt{4x^2-9}}{x}\,dx &= \left[\sqrt{4x^2-9} - 3\operatorname{arcsec}\left(\frac{2x}{3}\right)\right]_{\frac{3}{2}}^{3} \\
&= \left[\sqrt{27} - 3\operatorname{arcsec}(2)\right] - [0 - 3\operatorname{arcsec}(1)] \\
&= 3\sqrt{3} - \pi
\end{aligned}$$

แบบฝึกหัด 6.6

1. จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

1.1 $\int \sqrt{16-x^2}\,dx$

1.2 $\int (9+16x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx$

1.3 $\int \sqrt{4x^2+4x-3}\,dx$

1.4 $\int \frac{1}{(25-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$

1.5 $\int \frac{x^3}{(x^2+4)^{\frac{3}{2}}}\,dx$

1.6 $\int \frac{x^2}{(9-x^2)^{\frac{5}{2}}}\,dx$

1.7 $\int \frac{5x^2-2x+1}{(25-x^2)^{\frac{1}{2}}}\,dx$

1.8 $\int \frac{x^2}{\sqrt{9-8x-x^2}}\,dx$

1.9 $\int (t^2-6t+13)^{\frac{3}{2}}\,dt$

1.10 $\int \frac{1}{(4s^2-24s+27)^{\frac{3}{2}}}\,ds$

1.11 $\int \frac{e^x}{(4e^{2x}+25)^{\frac{3}{2}}}\,dx$

1.12 $\int \frac{1}{e^{2t}\sqrt{e^{2t}-9}}\,dt$

2. จงหาค่าปริพันธ์จำกัดเขตต่อไปไปนี้

2.1 $\int_0^6 \sqrt{49-x^2}\,dx$

2.2 $\int_0^2 x^3\sqrt{2x-x^2}\,dx$

3. จงหาปริพันธ์ $\int \frac{1}{(\sqrt{x}-1)(3-x-2\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}}\,dx$

สรุป

การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันรูปแบบต่าง ๆ จะขึ้นกับวิธีการที่นำมาใช้ว่าเหมาะสมหรือไม่ ในบทนี้นำเสนอทั้งหมด 6 วิธี เริ่มด้วยการหาปริพันธ์โดยการแยกส่วนซึ่งได้จากกฎการคูณของค่าเชิงอนุพันธ์ $d(uv) = odv + vdu$ นำไปใช้กับรูปแบบฟังก์ชันเลขชี้กำลังและฟังก์ชันตรีโกณมิติที่คูณกับพหุนาม หรือฟังก์ชันลอการิทึม โดยการเลือกตัวแปร u และ v ที่เหมาะสม ต่อมากล่าวถึงการหาปริพันธ์ฟังก์ชันตรรกยะซึ่งอาศัยความรูปเกี่ยวพหุนามเศษส่วน ที่เรียกว่าเศษส่วนย่อยมี 3 รูปแบบ คือตัวหาร มีรากไม่ซ้ำกัน มีรากซ้ำกัน และไม่มีรากเป็นจำนวนจริง จากนั้นกล่าวถึงหาปริพันธ์ฟังก์ชันตรรกยะในรูปตรีโกณมิติโดยอาศัยการเปลี่ยนตัวแปร $z = \tan(\frac{x}{2})$ เมื่อเปลี่ยนแล้วจะสามารถเขียนรูปเศษส่วนย่อยทำให้หาปริพันธ์ได้ ต่อมาปริพันธ์ของฟังก์ชันที่อยู่ในรูปกรณฑ์อาศัยการเปลี่ยนตัวแปรในพจน์ที่มีกรณฑ์โดยให้ $u = \sqrt[n]{ax+b}$ จะทำให้อยู่ในรูปที่ง่ายต่อการหาปริพันธ์เมื่อเลือกตัวแปรที่เหมาะสม ปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติมี 3 รูปแบบคือ $\sin^m x\cos^n x$ ใช้เอกลักษณ์ $\sin^2 x+\cos^2 x = 1$ และการลดกำลังคู่ บางครั้งอาจร่วมกับการเปลี่ยนตัวแปร $\tan^m x\sec^n x$ ใช้เอกลักษณ์ $\sec^2 x - \tan^2 x = 1$ และการการหาปริพันธ์โดยการแยกส่วน บางครั้งอาจร่วมกับการเปลี่ยนตัวแปร และ $\cot^m x\csc^n x$ ใช้เอกลักษณ์ $\csc^2 x - \cot^2 x = 1$ วิธีการคล้ายคลึงกับรูปแบบที่ 2 สุดท้ายการหาปริพันธ์โดยการแทนค่าตรีโกณมิติมี 3 รูปแบบคือ $\sqrt{a^2-u^2}$ ให้ $u = a\sin\theta$ และ $\sqrt{a^2+u^2}$ ให้ $u = a\tan\theta$ และ $\sqrt{u^2-a^2}$ ให้ $u = a\sec\theta$

แบบฝึกหัดบทที่ 6

1. จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

1.1 $\int \cos(\ell n x)\,dx$

1.2 $\int \sin x\,\ell n(\cos x)\,dx$

1.3 $\int (x+1)^2\sin x\,dx$

1.4 $\int \frac{x\ell n x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}\,dx$

1.5 $\int \sin\sqrt{x}\,dx$

1.6 $\int \frac{x^2e^x}{(x+2)^2}\,dx$

1.7 $\int x\ell n^3 x\,dx$

1.8 $\int xe^x\cos x\,dx$

2. จงหาค่าของปริพันธ์จำกัดเขตต่อไปนี้

2.1 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3x}\sin 4x\,dx$

2.2 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x\arctan x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

2.3 $\int_0^{\frac{1}{2}} \arccos x\,dx$

2.4 $\int_0^{1} x\,\mathrm{arccot}\,x\,dx$

3. จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

3.1 $\int \frac{1}{x^2-4}\,dx$

3.2 $\int \frac{x}{x^2-x-12}\,dx$

3.3 $\int \frac{x^3+5}{x^2-25}\,dx$

3.4 $\int \frac{4x^3+2x^2+1}{4x^3-x}\,dx$

3.5 $\int \frac{35x+47}{(3x+5)^2(x^2+3x+6)}\,dx$

3.6 $\int \frac{1}{e^{3x}+e^{2x}+e^x}\,dx$

3.7 $\int \frac{x^2-1}{x(2x+1)(x+2)}\,dx$

3.8 $\int \frac{x^3-1}{x^2(x-2)^3}\,dx$

4. จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

4.1 $\int \frac{\sin x}{2-\sin x+1}\,dx$

4.2 $\int \frac{\cot x}{1+\sin x}\,dx$

4.3 $\int \frac{\tan x}{1+\tan x+\sec x}\,dx$

5. จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

5.1 $\int \frac{1-\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$

5.2 $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^2}\,dx$

5.3 $\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}\,dx$

5.4 $\int \sqrt{3x^{\frac{1}{2}}-1}\,dx$

5.5 $\int \frac{\sqrt[3]{1-\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

5.6 $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{e^x+1}}\,dx$

6. จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

6.1 $\int \sin^6 x\,dx$

6.2 $\int \cos^3 x \sin x\,dx$

6.3 $\int \sin^5 x \cos^2 x\,dx$

6.4 $\int \cos x\sqrt{\sin x}\,dx$

6.5 $\int \tan^5 x \sec^5 x\,dx$

6.6 $\int \sec^7 x\,dx$

6.7 $\int \csc^5 x \cot x\,dx$

6.8 $\int \cot^7 x\,dx$

6.9 $\int \tan^5 x \sec^3 x\,dx$

6.10 $\int \tan^3\frac{x}{3}\left(2+\sec\frac{x}{3}\right)^2\,dx$

7. จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

7.1 $\int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x}\,dx$

7.2 $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\,dx$ เมื่อ $a>0$

7.3 $\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x^3}\,dx$

7.4 $\int \frac{1}{\sqrt{12+4x-y^2}}\,dx$

7.5 $\displaystyle\int \frac{1}{(y-1)\sqrt{y^2-1}}\,dy$

7.6 $\displaystyle\int \frac{1}{(a^2+x^2)^2}\,dx$ เมื่อ $a > 0$

7.7 $\displaystyle\int \frac{1}{(e^t+1)^{\frac{3}{2}}}\,dt$

7.8 $\displaystyle\int (36-49x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx$

7.9 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{16-x^2}}\,dx$

7.10 $\displaystyle\int \sqrt{3-x^2}\,dx$

7.11 $\displaystyle\int (36-49x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx$

7.12 $\displaystyle\int_3^4 \frac{1}{x^2\sqrt{25-x^2}}\,dx$

8. จงหาค่าของ $\displaystyle\int_{\sqrt{5}}^{3} \frac{x^3}{(x^4-2x^2-3)^{\frac{3}{2}}}\,dx$

เอกสารอ้างอิง

ดำรง ทิพย์โยธา, ยุวรีย์ พันธ์กล้า และณัฏฐนาถ ไตรภพ. (2548). **แคลคูลัส ๑**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

James Stewart. (2012). **Calculus Early Transcendentals.** Seventh Edition. Canada. Nelson Education Ltd.

แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 7

หัวข้อเนื้อหาประจำบท

1. พื้นที่นะหว่างเส้นโค้ง
2. ปริมาตรของรูปทรงตันซึ่งหาพื้นภาคตัดได้
3. ปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุน

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. สามารถหาพื้นที่นะหว่างเส้นโค้ง
2. สามารถหาปริมาตรของรูปทรงตันซึ่งหาพื้นภาคตัดได้
3. สามารถหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุน โดยวิธีแบบจาน และแบบเปลือกทรงกระบอก

วิธีและกิจกรรมการเรียนการสอน

1. **วิธีสอน**
   1.1 วิธีสอนแบบบรรยาย ประกอบสื่ออิเล็กทรอนิกส์
   1.2 ใช้สื่อทางอินเตอร์เน็ต และให้แต่ละคนแสดงความคิดเห็น
   1.3 วิธีสอนแบบอภิปราย โดยให้หัวข้อเป็นกลุ่มและมานำเสนอหน้าชั้น
2. **กิจกรรมการเรียนการสอน**
   2.1 บรรยายสรุปโดยใช้สื่อการสอนประกอบ
   2.2 ให้ผู้เรียนศึกษาเนื้อหาจากชุดการสอน หนังสือ ตำรา เอกสารเพิ่มเติม และสื่อออนไลน์
   2.3 อภิปรายรายกลุ่มตามหัวข้อที่ได้รับมอบหมาย

สื่อการเรียนการสอน

1. ชุดการสอน เรื่อง "การประยุกต์ปริพันธ์"
2. สื่ออิเล็กทรอนิกส์ เรื่อง "การประยุกต์ปริพันธ์"
3. หนังสือ ตำรา เอกสารที่เกี่ยวข้อง
4. แอพพลิเคชั่น Geogebra
5. แอพพลิเคชั่น Wolfram alpha

การวัดผลและประเมินผล

1. สังเกตการตอบคำถามและตั้งคำถามของผู้เรียนในระหว่างการบรรยายและซักถาม
2. วัดผลจากการทำแบบฝึกหัดระหว่างเรียนตามเนื้อหาที่ได้รับมอบหมาย
3. ประเมินการอภิปรายรายกลุ่ม แล้วบันทึกคะแนนลงในใบบันทึกคะแนน
4. ตรวจการทำการบ้าน บันทึกคะแนนลงในบันทึกผลงาน

บทที่ 7

การประยุกต์ของปริพันธ์

แนวคิดเรื่องระเบียบวิธีเกษียณที่เกิดขึ้นมายาวนาน จนพัฒนามาเป็นปริพันธ์จำกัดเขตในบทที่ 5 ซึ่งหมายถึงพื้นที่ใต้เส้นโค้งกับแกน X ในบทนี้จะกล่าวถึงการประยุกต์ใช้ปริพันธ์จำกัดเขตในการหาพื้นที่และปริมาตร

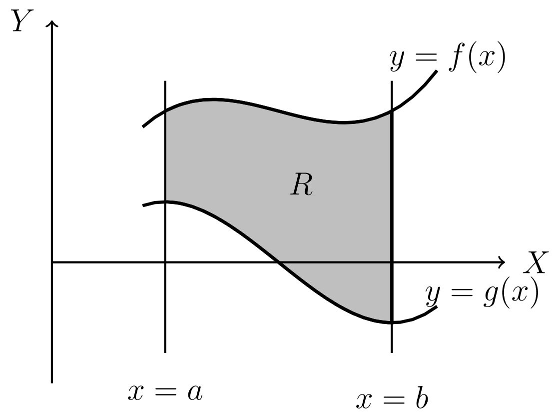
7.1 พื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง

ให้ฟังก์ชัน f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ โดยที่ $f(x) \geq g(x)$ ทุก $x \in [a,b]$ ให้

$$R = \{(x,y) : a \leq x \leq b \text{ และ } g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

หรือกล่าวได้ว่า R คืออาณาบริเวณซึ่งปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$, $y = g(x)$ และ $x = a$, $x = b$ แสดงตัวอย่างได้ดังรูป

รูปที่ 7.1 อาณาบริเวณ R ซึ่งปิดล้อมด้วย $y = f(x)$, $y = g(x)$ และ $x = a$, $x = b$



ให้ A แทนพื้นที่อาณาบริเวณ R โดยไม่เสียนัยทั่วไปสมมติว่า $f(x) \geq g(x) \geq 0$ ทุก $x \in [a,b]$ จะได้ว่า **พื้นระหว่างเส้นโค้ง** (arera between curve) $y = f(x)$ และ $y = g(x)$ บนช่วง $[a,b]$ เท่ากับพื้นที่ใต้เส้นโค้ง $y = f(x)$ บนช่วง $[a,b]$ ลบออกจากพื้นที่ใต้เส้นโค้ง $y = g(x)$ บนช่วง $[a,b]$ สรุปได้ว่า

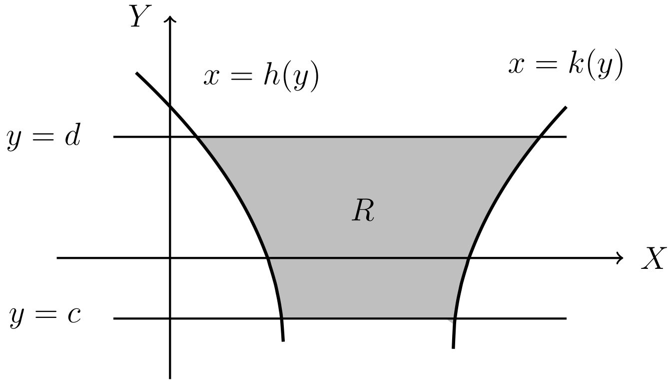
$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

โดยแนวคิดเดียวกันขยายไปยังการหาปริพันธ์เทียบ dy ให้

$$R = \{(x, y) : c \leq y \leq d \text{ และ } h(y) \leq x \leq k(y)\}$$

แสดงตัวอย่างอาณาบริเวณ R ได้ดังรูป

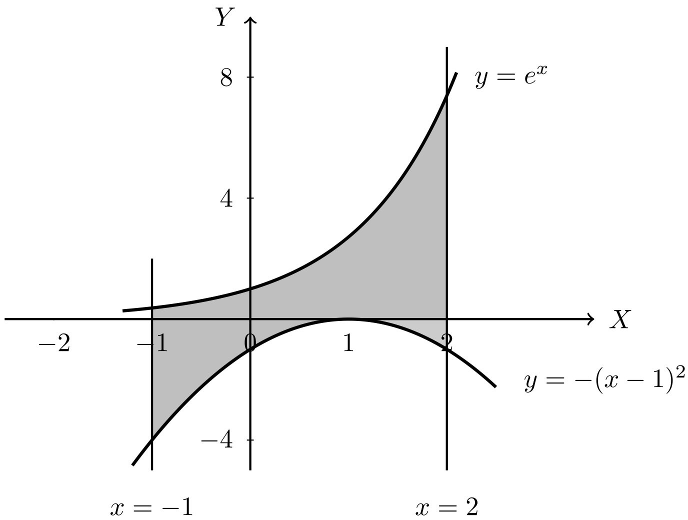
รูปที่ 7.2 อาณาบริเวณ R ซึ่งปิดล้อมด้วย $x = h(y)$, $x = k(y)$ และ $y = c$, $y = d$



ในทำนองเดียวกันจะได้พื้นที่ A คือ $A = \displaystyle\int_c^d [k(y) - h(y)]\, dy$

ตัวอย่าง 7.1.1 จงหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง $y = e^x$ และ $y = -(x-1)^2$ จาก $x = -1$ ถึง $x = 2$

วิธีทำ ให้ $R = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 2 \text{ และ } -(x-1)^2 \leq y \leq e^x\}$ แสดงได้ดังรูป

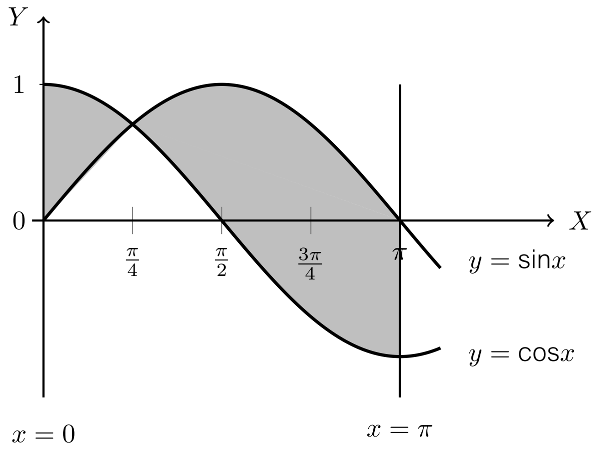


ให้ A แทนพื้นที่อาณาบริเวณ R ดังนั้น

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{2} e^x - [-(x-1)^2]\, dx = \left[e^x + \frac{(x-1)^3}{3}\right]_{-1}^{2} \\ &= \left[e^2 + \frac{1}{3}\right] - \left[e^{-1} + \frac{8}{3}\right] \\ &= e^2 - \frac{1}{e} - \frac{7}{3} \approx 4.68784 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 7.1.2 จงหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง $y = \cos x$ และ $y = \sin x$ จาก $x = 0$ ถึง $x = \pi$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sin x \leq \cos x$ เมื่อ $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ และ $\cos x \leq \sin x$ เมื่อ $x \in [\frac{\pi}{4}, \pi]$ ดังรูป



จากรูปกำหนดให้

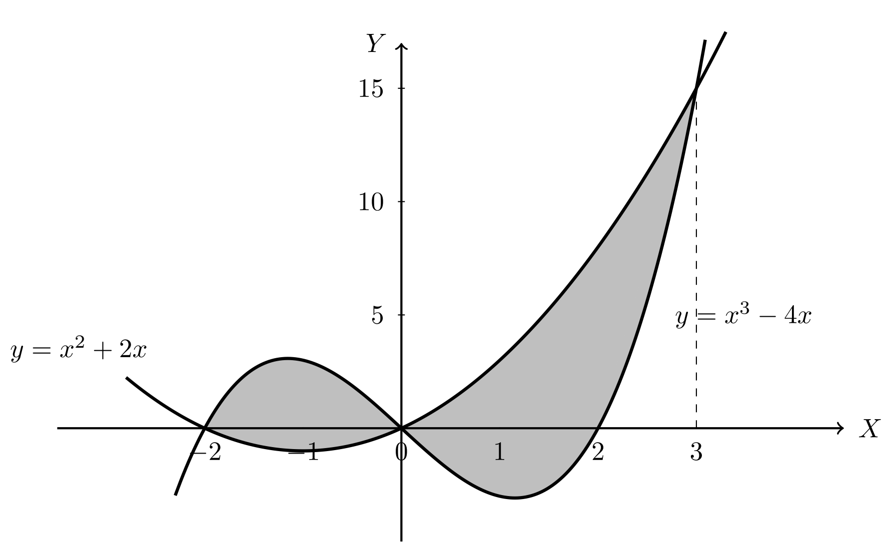
$$R_1 = \left\{(x, y) \, : \, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \text{ และ } \sin x \leq y \leq \cos x\right\}$$
$$R_2 = \left\{(x, y) \, : \, \frac{\pi}{4} \leq x \leq \pi \text{ และ } \cos x \leq y \leq \sin x\right\}$$

ให้ A แทนพื้นที่แรเงา ดังนั้น A เท่ากับพื้นที่อาณาบริเวณ R_1 และ R_2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x - \sin x \, dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin x - \cos x \, dx \\
&= [\sin x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} + [-\cos x - \sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \\
&= \left[\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right] - [0 + 1] + [1 - 0] - \left[-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \\
&= 2\sqrt{2} \approx 2.82843
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 7.1.3 จงหาพื้นที่ปิดล้อมด้วยเส้นตรง $y = x^2 + 2x$ และ $y = x^3 - 4x$

วิธีทำ แสดงอาณาบริเวณได้ดังรูป



จากรูปกำหนดให้

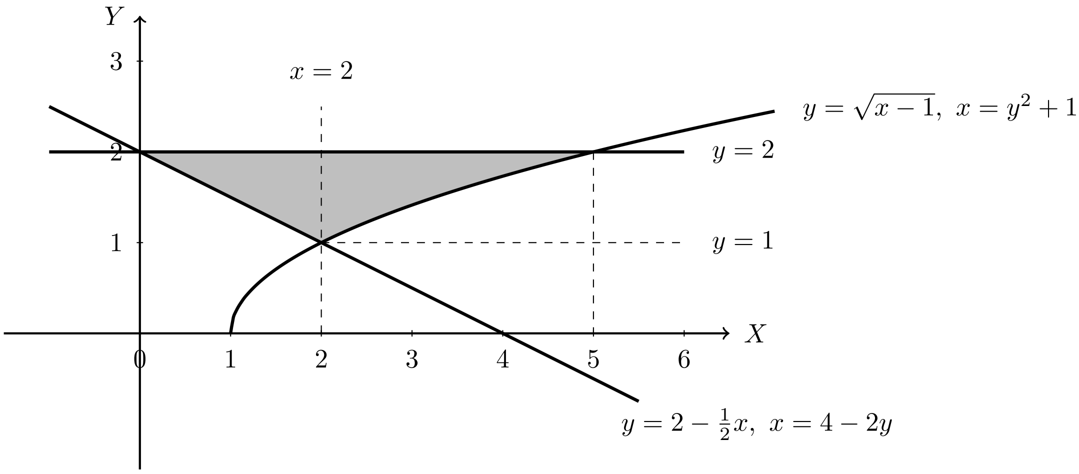
$$R_1 = \{(x,y) : -2 \le x \le 0 \text{ และ } x^2+2x \le y \le x^3-4x\}$$
$$R_2 = \{(x,y) : 0 \le x \le 3 \text{ และ } x^3-4x \le y \le x^2+2x\}$$

ให้ A แทนพื้นที่แรเงา ดังนั้น A เท่ากับพื้นที่อาณาบริเวณ R_1 และ R_2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-2}^{0} (x^3-4x)-(x^2+2x)\,dx + \int_{0}^{3} (x^2+2x)-(x^3-4x)\,dx \\
&= \int_{-2}^{0} x^3-x^2-6x\,dx + \int_{0}^{3} x^2-x^3+6x\,dx \\
&= \left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-3x^2\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+3x^2\right]_{0}^{3} \\
&= 0-\left[4+\frac{8}{3}-12\right]+\left[9-\frac{81}{4}+27\right]-0 \\
&= \frac{253}{12} \approx 21.08333
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 7.1.4 จงหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง $y=\sqrt{x-1}$ เส้นตรง $y=2$ และ $x+2y=4$

วิธีทำ แสดงอาณาบริเวณได้ดังรูป



<u>วิธีที่ 1</u> จากรูปกำหนดให้ $R = \{(x,y) : 1 \le y \le 2 \text{ และ } 4-2y \le x \le y^2+1\}$
และ A แทนพื้นอาณาบริเวณ R ดังนั้น

$$\begin{aligned}
A &= \int_{1}^{2} (y^2+1)-(4-2y)\,dy = \int_{1}^{2} y^2+2y-3\,dy \\
&= \left[\frac{y^3}{3}+y^2-3y\right]_{1}^{2} \\
&= \left[\frac{8}{3}+4-6\right]-\left[\frac{1}{3}+1-3\right] \\
&= \frac{7}{3} \approx 2.33333
\end{aligned}$$

<u>วิธีที่ 2</u> จากรูปกำหนดให้

$$R_1 = \left\{(x,y)\ :\ 0 \le x \le 2 \text{ และ } 2 - \frac{1}{2}x \le x \le 2\right\}$$
$$R_2 = \left\{(x,y)\ :\ 2 \le x \le 5 \text{ และ } \sqrt{x-1} \le x \le 2\right\}$$

ให้ A แทนพื้นที่แรเงา ดังนั้น A เท่ากับพื้นที่อาณาบริเวณ R_1 และ R_2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 2 - \left(2 - \frac{1}{2}x\right)\, dx + \int_2^5 2 - \sqrt{x-1}\, dx \\ &= \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^2 + \left[2x - \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]_2^5 \\ &= 1 - 0 + \left[10 - \frac{16}{3}\right] - \left[4 - \frac{2}{3}\right] \\ &= \frac{7}{3} \approx 2.33333 \end{aligned}$$

แบบฝึกหัด 7.1

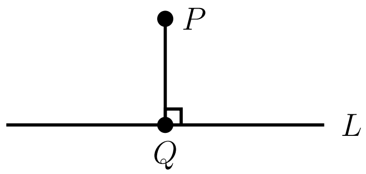
จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $y = x$ และ $y = x^2 - 4x + 6$
2. $y = 4x - x^2$ และ $y = x$ จาก $x = 0$ ถึง $x = 4$
3. $y = 2^x$ และ $y = 2x - x^2$ จาก $x = 0$ ถึง $x = 2$
4. $y = \dfrac{\sqrt{3x+1}}{x}$ และ $y = 0$ จาก $x = 1$ ถึง $x = 8$
5. $y = x\cos x$ และแกน X จาก $x = 0$ ถึง $x = \pi$
6. $y = 2 - x^2$ และ $y = |x|$
7. $y = \sin x$ และ $y = \cos x$ จาก $x = -\frac{3\pi}{4}$ ถึง $x = \frac{\pi}{4}$
8. $y = x^2 - x$ และ $y = x - x^2$
9. $y = \sin 2x$ และ $y = \cos x$ จาก $x = -\frac{\pi}{2}$ ถึง $x = \frac{\pi}{4}$
10. $y = \sqrt{1+x^2}$ และแกน X จาก $x = 0$ ถึง $x = 2\sqrt{2}$
11. $y = x^2 - x$ และ $y = \sin \pi x$
12. $y = 2 + |x-1|$ และ $5y + x = 35$
13. $y = x\sin x$ และ $y = x$ จาก $x = 0$ ถึง $x = \frac{\pi}{2}$
14. $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ และแกน X จาก $x = 0$ ถึง $x = 4$
15. $y^2 = x + 2$ และ $y = x$

7.2 ปริมาตรของรูปทรงตันซึ่งหาพื้นที่ภาคตัดได้

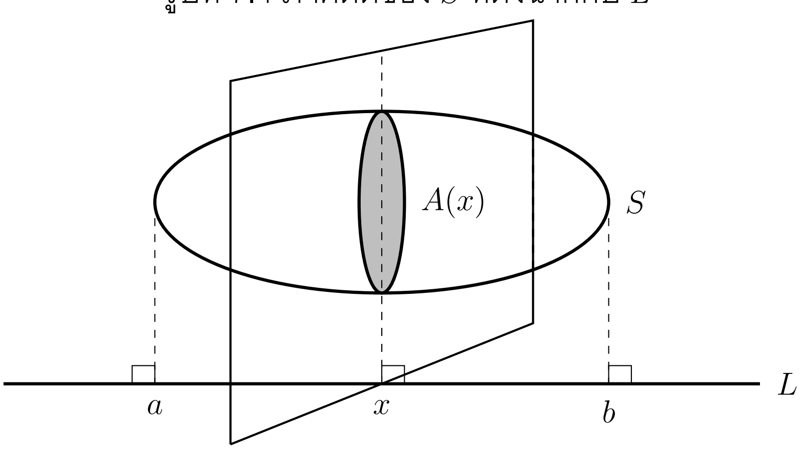
ให้ L เป็นเส้นตรงในสามมิติ และ P เป็นจุดในสามมิติ เมื่อลากเส้นตรงจากจุด P ไปตั้งฉากกับ L ที่จุด Q จะเรียก Q ว่า **ภาพฉาย** (projection) ของ P บน L ดังรูป

รูปที่ 7.3 ภาพฉายของ P บน L



ถ้า S เป็นรูปทรงตันในสามมิติ S จะประกอบไปด้วยจุดในสามมิติ **ภาพฉายของ S บน L** คือเซตของจุดที่เป็นภาพฉายของจุดต่าง ๆ ที่เป็นสมาชิกของ S บน L และเรียกอาณาบริเวณระนาบซึ่งได้จากการตัด S ด้วยระนาบที่ตั้งฉากกับ L ว่า **ภาคตัด** (cross section) **ของ S ที่ตั้งฉากกับ L** ซึ่งแสดงได้ดังรูป

รูปที่ 7.4 ภาคตัดของ S ที่ตั้งฉากกับ L



เมื่อพิจารณาภาคตัดของ S ที่ตั้งฉากกับแกน X ที่จุด x ใด ๆ จะมีพื้นที่ $A(x)$ มีความหนา Δx ถ้าภาคตัดมีทั้งหมด n ชิ้น ปริมาตรของ S เรียกว่า V จะได้ว่า

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} A_k(x)\Delta x_k$$

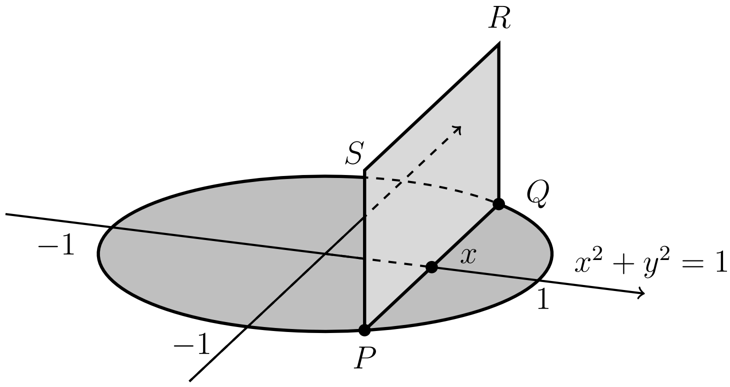
เมื่อ $A_k(x)$ คือพื้นที่ภาคตัดชิ้นที่ k และ Δx_k คือความหนาของภาคตัดชิ้นที่ k ให้ $x \in [a, b]$ โดยที่ A เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ เมื่อเลือกผลแบ่งกั้นบน $[a, b]$ ที่เหมาะสมโดยนิยามของปริพันธ์จำกัดเขตจะได้ปริมาตร V ของรูปทรงตัน S ดังนั้น

$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$

ในหัวข้อนี้จะศึกษาเฉพาะกรณีที่ภาคตัดหาพื้นที่ได้เท่านั้น

ตัวอย่าง 7.2.1 จงหาปริมาตรรูปทรงตันที่มีฐานล้อมรอบด้วยวงกลม $x^2 + y^2 = 1$ ถ้าภาคตัดของรูปทรงตันนี้ที่ตั้งฉากกับแกน X เป็นรูปสี่เหลี่ยมจตุรัส

วิธีทำ แสดงพื้นที่ฐานของรูปทรงตันและภาคตัดตั้งฉากกับแกน X ที่จุด x เมื่อ $x \in [-1, 1]$ ได้ดังรูปต่อไปนี้



จากรูปจะได้ P และ Q มีพิกัดเป็น $(x, -\sqrt{1-x^2})$ และ $(x, \sqrt{1-x^2})$ ดังนั้นความยาวของสี่เหลี่ยมจตุรัส $PQRS$ เท่ากับ

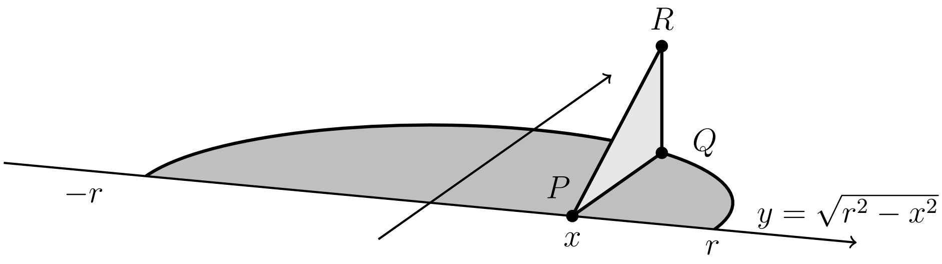
$$PQ = 2\sqrt{1-x^2}$$

ให้ $A(x)$ แทนพื้นที่ของสี่เหลี่ยมจตุรัส $PQRS$ นั่นคือ $A(x) = 2\sqrt{1-x^2} \times 2\sqrt{1-x^2} = 4(1-x^2)$ และ V แทนปริมาตราของรูปทรงตันนี้ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^{1} A(x)\,dx = \int_{-1}^{1} 4(1-x^2)\,dx \\ &= \left[4x - \frac{4}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \left[4 - \frac{4}{3}\right] - \left[-4 + \frac{4}{3}\right] = \frac{16}{3} \approx 5.33333 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 7.2.2 ลิ่มไม้ (wooden wedge) มีฐานเป็นรูปครึ่งวงกลมรัศมี r เมื่อตัดตั้งฉากกับเส้นผ่านศูนย์กลางจะได้รูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีความยาวด้านเท่ากัน 2 ด้าน โดยที่มุกฉากอยู่บนครึ่งวงกลม จงหาปริมาตรของลิ่มไม้อันนี้

วิธีทำ แสดงพื้นที่ฐานของรูปทรงตันและภาคตัดตั้งฉากกับแกน X ที่จุด x เมื่อ $x \in [-r, r]$ ได้ดังรูปต่อไปนี้



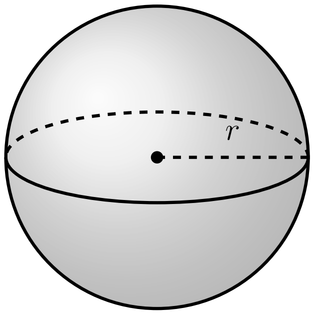
จากรูปจะได้ P และ Q มีพิกัดเป็น $(x,0)$ และ $(x,\sqrt{r^2-x^2})$ ดังนั้น $QR = PQ = \sqrt{r^2-x^2}$ ให้ $A(x)$ แทนพื้นที่ของสามเหลี่ยม $PQRS$ โดยมี $P\hat{Q}R$ เป็นมุมฉาก นั่นคือ

$$A(x) = \frac{1}{2} \times \sqrt{r^2-x^2} \times \sqrt{r^2-x^2} = \frac{1}{2}(r^2-x^2)$$

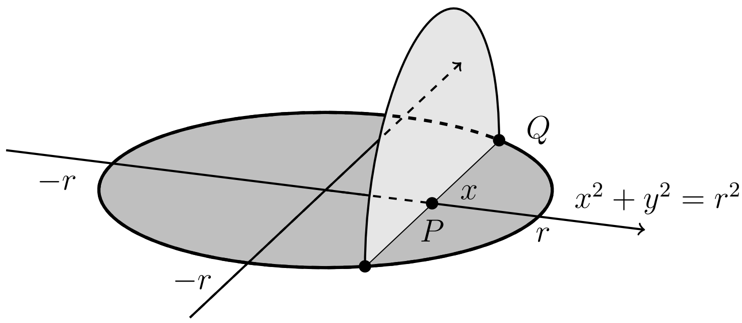
และ V แทนปริมาตราของรูปทรงตันนี้ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^{r} A(x)\,dx = \int_{-r}^{r} \frac{1}{2}(r^2-x^2)\,dx \\ &= \left[\frac{1}{2}r^2x - \frac{1}{6}x^3\right]_{-r}^{r} = \left[\frac{1}{2}r^3 - \frac{1}{6}r^3\right] - \left[-\frac{1}{2}r^3 + \frac{1}{6}r^3\right] = \frac{2r^3}{3} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 7.2.3 จงหาปริมาตรของ **ทรงกลม** (sphere) ที่มีรัศมี r หน่วย



วิธีทำ พิจารณครึ่งทรงกลม พื้นที่ฐานของรูปครึ่งทรงกลและภาคตัดตั้งฉากกับแกน X ที่จุด x เมื่อ $x \in [-r, r]$ เป็นรูปครึ่งวงกลม แสดงดังรูปต่อไปนี้



จากรูปจะได้ P และ Q มีพิกัดเป็น $(x,0)$ และ $(x,\sqrt{r^2-x^2})$ ดังนั้น $PQ = \sqrt{r^2-x^2}$
ให้ $A(x)$ แทนพื้นที่ของครึ่งวงกลม โดยมี PQ เป็นรัศมี นั่นคือ

$$A(x) = \frac{1}{2}\pi(\sqrt{r^2-x^2})^2 = \frac{1}{2}\pi(r^2-x^2)$$

และ V แทนปริมาตราของรูปทรงกลม จะได้ว่า

$$\begin{aligned} V &= 2\int_{-r}^{r} A(x)\,dx = \int_{-r}^{r} \pi(r^2-x^2)\,dx \\ &= \left[\pi r^2x - \frac{1}{3}\pi x^3\right]_{-r}^{r} = \left[\pi r^3 - \frac{1}{3}\pi r^3\right] - \left[-\pi r^3 + \frac{1}{3}\pi r^3\right] = \frac{4\pi}{3}r^3 \end{aligned}$$

แบบฝึกหัด 7.2

1. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันซึ่งมีฐานเป็นวงกลมรัศมี 3 หน่วยและทุกภาคตัดที่ตั้งฉากกับเส้นผ่านศูนย์กลางของฐานเป็น

   1.1 รูปสี่เหลี่ยมจตุรัส

   1.2 รูปสี่เหลี่ยมหน้าจั่วที่มีส่วนสูงเท่ากับฐาน

2. จงหาปริมาตรของรปทรงตันที่มีฐานล้อมรอบด้วยวงรี $x^2 + 4y^2 = 4$ และถ้าตัดรูปทรงตันนี้ด้วยระนาบที่ตั้งฉากกับแกน X ภาคตัดจะเป็นรูปครึ่งวงรีที่มีแกนโทอยู่บนฐาน และมีครึ่งแกนเอกยาว 2 หน่วย (กำหนดให้พื้นที่วงรีเท่ากับ πab เมื่อ a คือความยางครึ่งแกนเอก และ b คือความยาวครึ่งแกนโท)

3. อ่างเก็บน้ำรูปครึ่งทรงกลมมีเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 40 เมตรมีน้ำบรรจุอยู่ที่ระดับต่ำกว่าขอบอ่าง 5 เมตร จงหาปริมาตรของน้ำในอ้าง

4. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่มีฐานอยู่บนระนาบ XY ล้อมรอบด้วย $4x^2 + 4y^2 = 36$ และถ้าตัดรูปทรงตันนี้ด้วยระนาบที่ตั้งฉากกับแกน X แล้วภาคตัดจะเป็นรูปครึ่งวงกลม โดยที่เส้นผ่านศูนย์กลางอยู่บนฐาน

5. ฐานของรูปทรงตันรูปหนึ่ง คืออาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยแกน X แกน Y เส้นตรง $x = e$ และเส้นโค้ง $y = e^x$ จงหาปริมาตรของรูปทรงตัน ซึ่งภาคตัดตั้งฉากกับแกน Y เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

7.3 ปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุน

รูปทรงตันที่เกิดจากการหมุน (Solid by rotation) คือรูปทรงตันที่ได้จากการหมุนอาณาบริเวณในระนาบรอบเส้นตรงเส้นตรงซึ่งอยู่ระนาบเดียวกัน โดยเรียกเส้นตรงนั้นว่า**แกนหมุน** (axis of rotation) และเรียกปริมาตรของรูปทรงตันนั้นว่า **ปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุน**

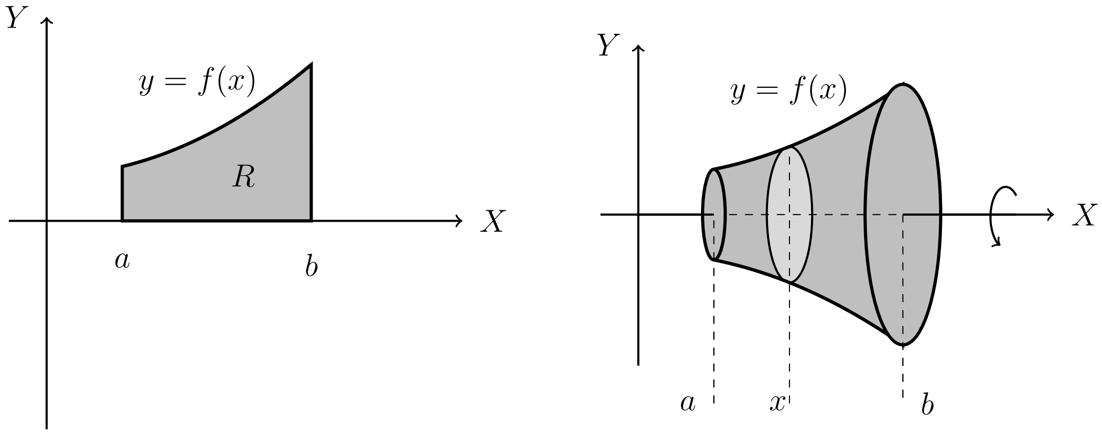
การหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนของอาณาบริเวณในระนาบ XY รอบแกน X หรือเส้นตรงที่ขนานกันแกน X และรอบแกน Y หรือเส้นตรงที่ขนานกับแกน Y โดยหาปริมาตรดังกล่าวมี 2 วิธีคือ

1. วิธีแบบจาน (method of dishs)
2. วิธีแบบเปลือกทรงกระบอก (method of cylindrical shells)

1. การหาปริมาตรของรูปทรงตันโดยวิธีแบบจาน

ให้ $y = f(x)$ เป็นเส้นโค้งที่มีค่าบนช่วง $[a, b]$ และ R เป็นอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วย $y = f(x)$ กับแกน X และเส้นตรง $x = a, x = b$ เมื่อนำ R ไปหมุนรอบแกน X จะได้รูปทรงตัน แสดงดังรูป

รูปที่ 7.5 การหมุน R รอบแกน X โดยวิธีแบบจาน



จากรูปภาคตัดตั้งฉากกับแกน X ที่จุด x เมื่อ $x \in [a, b]$ เป็นรูปวงกลม ให้ $A(x)$ แทนพื้นที่ของวงกลมของภาคตัดที่จุด x นั่นคือรัศมีเท่ากับ $|f(x)|$ จะได้ว่า

$$A(x) = \pi(|f(x)|)^2 = \pi[f(x)]^2$$

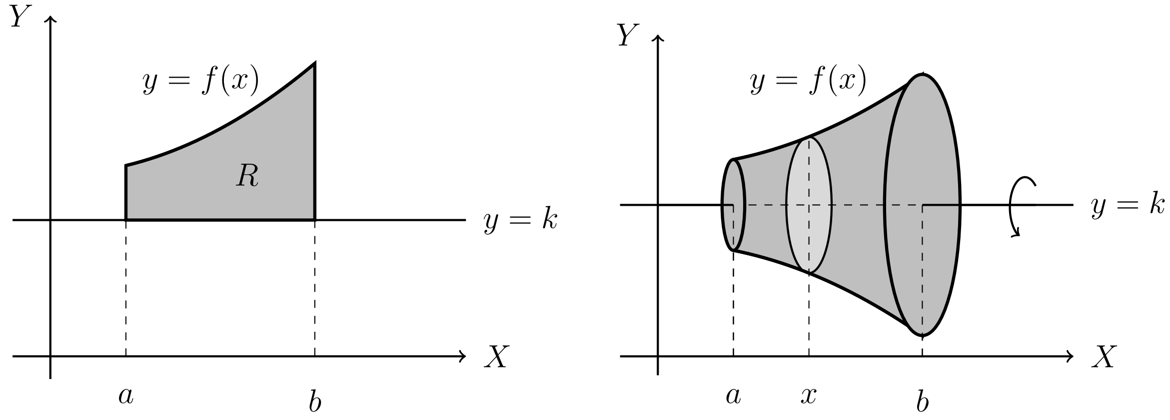
และ V แทนปริมาตรของรูปทรงทรงตันดังกล่าว จาก $V = \int_a^b A(x)\,dx$ สรุปได้ว่า

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2\,dx$$

เรียกปริมาตร V ที่ได้โดยวิธีนี้ว่าปริมาตรของรูปทรงตันโดยวิธีแบบจาน

ในทำนองเดียวกันถ้าให้ R เป็นอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วย $y = f(x)$ กับเส้นตรง $y = k$ และ $x = a, x = b$ เมื่อนำ R ไปหมุนรอบเส้นตรง $y = k$ จะได้รูปทรงตัน แสดงดังรูป

รูปที่ 7.6 การหมุน R รอบเส้นตรง $y = k$ โดยวิธีแบบจาน



จากรูปภาคตัดตั้งฉากกับแกน X ที่จุด x เมื่อ $x \in [a, b]$ เป็นรูปวงกลม ให้ $A(x)$ แทนพื้นที่ของวงกลมของภาคตัดที่จุด x นั่นคือรัศมีเท่ากับ $|f(x) - k|$ จะได้ว่า

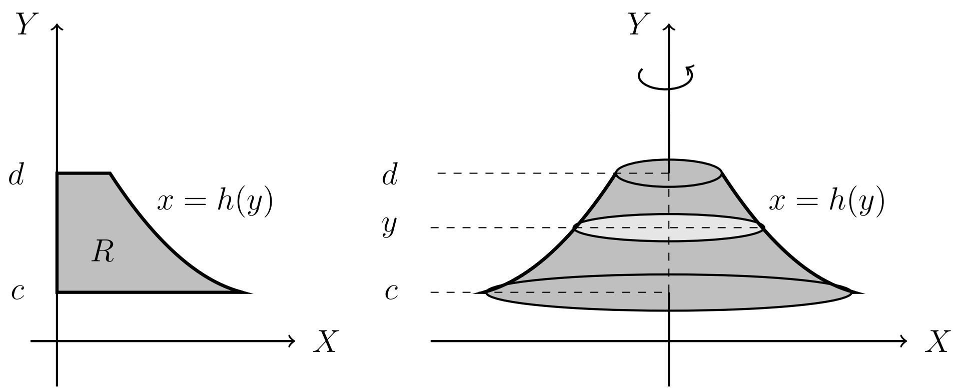
$$A(x) = \pi(|f(x) - k|)^2 = \pi[f(x) - k]^2$$

และ V แทนปริมาตรของรูปทรงทรงตันดังกล่าว สรุปได้ว่า

$$V = \int_a^b \pi[f(x) - k]^2 \, dx$$

ให้ $x = h(y)$ เป็นเส้นโค้งที่มีค่าบนช่วง $[c, d]$ และ R เป็นอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วย $x = h(y)$ กับแกน Y และเส้นตรง $y = c, y = d$ เมื่อนำ R ไปหมุนรอบแกน Y จะได้รูปทรงตัน แสดงดังรูป

รูปที่ 7.7 การหมุน R รอบแกน Y โดยวิธีแบบจาน



จากรูปภาคตัดตั้งฉากกับแกน Y ที่จุด y เมื่อ $y \in [c, d]$ เป็นรูปวงกลม ให้ $A(y)$ แทนพื้นที่ของวงกลมของภาคตัดที่จุด y นั่นคือรัศมีเท่ากับ $|h(y)|$ จะได้ว่า

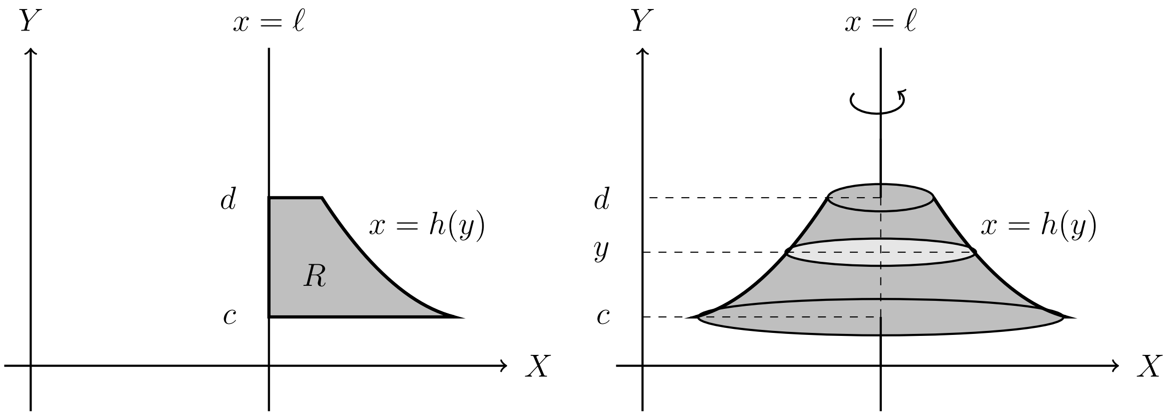
$$A(y) = \pi(|h(y)|)^2 = \pi[h(y)]^2$$

และ V แทนปริมาตรของรูปทรงทรงตันดังกล่าว จาก $V = \int_c^d A(y) \, dy$ สรุปได้ว่า

$$V = \int_c^d \pi[h(y)]^2 \, dy$$

ในทำนองเดียวกันถ้าให้ R เป็นอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วย $x = h(y)$ กับเส้นตรง $x = \ell$ และเส้นตรง $y = c, y = d$ เมื่อนำ R ไปหมุนรอบเส้นตรง $x = \ell$ จะได้รูปทรงตัน แสดงดังรูป

รูปที่ 7.8 การหมุน R รอบเส้นตรง $x = \ell$ โดยวิธีแบบจาน



จากรูปภาคตัดตั้งฉากกับเส้นตรง $x = \ell$ ที่จุด y เมื่อ $y \in [c, d]$ เป็นรูปวงกลม ให้ $A(y)$ แทนพื้นที่ของวงกลมของภาคตัดที่จุด y นั่นคือรัศมีเท่ากับ $|h(y) - \ell|$ จะได้ว่า

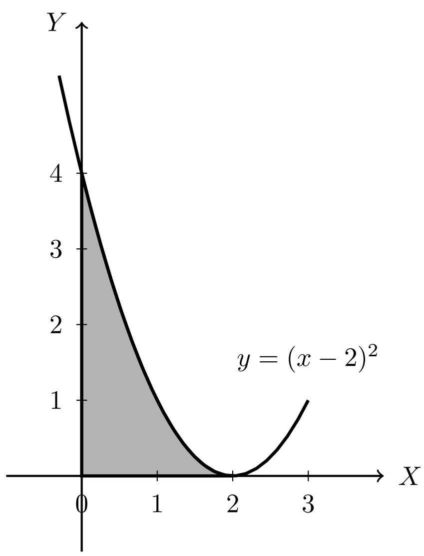
$$A(y) = \pi(|h(y) - \ell|)^2 = \pi[h(y) - \ell]^2$$

และ V แทนปริมาตรของรูปทรงทรงตันดังกล่าว สรุปได้ว่า

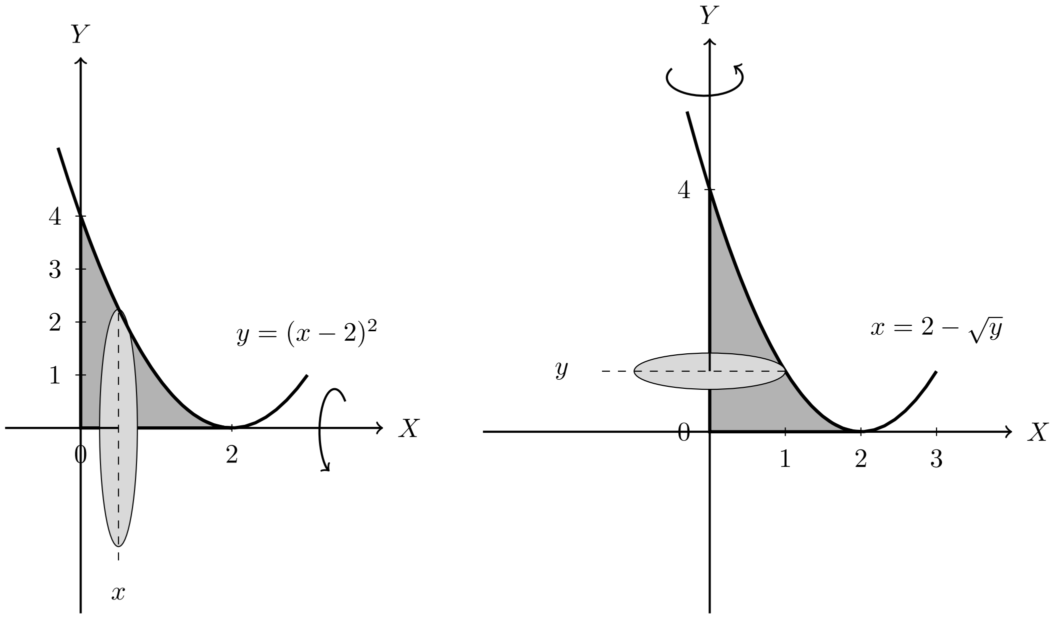
$$V = \int_c^d \pi[h(y) - \ell]^2 \, dy$$

ตัวอย่าง 7.3.1 จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยแกน X แกน Y และเส้นโค้ง $y = (x - 2)^2$ รอบแกน X และรอบแกน Y

วิธีทำ ให้ R คืออาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยแกน X แกน Y และเส้นโค้ง $y = (x - 2)^2$ แสดงได้ดังรูป



แสดงรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุน R รอบแกน X และแกน Y ได้ดังนี้



<u>กรณี หมุน R รอบแกน X</u>

จากรูปภาคตัดตั้งฉากกับแกน X ที่จุด x เมื่อ $x \in [0, 2]$ เป็นรูปวงกลม ให้ $A(x)$ แทนพื้นที่ของวงกลมของภาคตัดที่จุด x มีรัศมีเท่ากับ $(x-2)^2$ และ V แทนปริมาตรของรูปทรงทรงตันที่เกิดจากการหมุน R จะได้ว่า

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 \pi[(x-2)^2]^2\,dx \\ &= \int_0^2 \pi(x-2)^4\,dx \\ &= \left[\frac{(x-2)^5\pi}{5}\right]_0^2 \\ &= 0 - \frac{-32\pi}{5} = \frac{32\pi}{5} \approx 20.10619 \end{aligned}$$

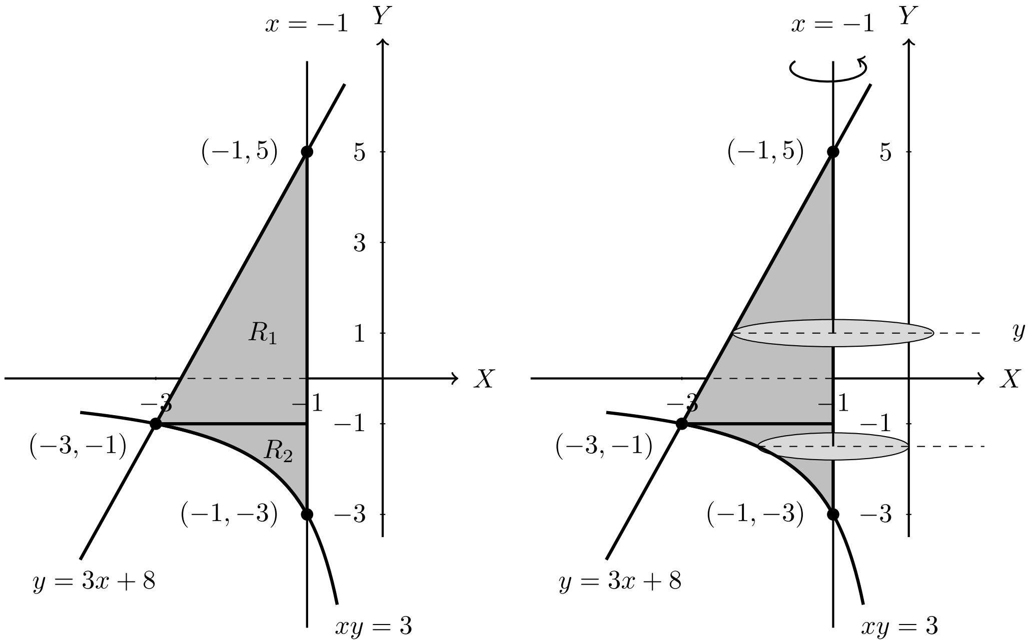
<u>กรณี หมุน R รอบแกน Y</u>

จากรูปภาคตัดตั้งฉากกับแกน Y ที่จุด y เมื่อ $y \in [0, 4]$ เป็นรูปวงกลม ให้ $A(y)$ แทนพื้นที่ของวงกลมของภาคตัดที่จุด y มีรัศมีเท่ากับ $2 - \sqrt{y}$ และ V แทนปริมาตรของรูปทรงทรงตันที่เกิดจากการหมุน R จะได้ว่า

$$\begin{aligned} V &= \int_0^4 \pi[2-\sqrt{y}]^2\,dy \\ &= \int_0^4 \pi(4 - 4\sqrt{y} + y)\,dx \\ &= \pi\left[4y - \frac{8}{3}y^{\frac{3}{2}} + \frac{y^2}{2}\right]_0^4 \\ &= \pi\left[16 - \frac{64}{3} + 8\right] - 0 = \frac{8\pi}{3} \approx 8.37758 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 7.3.2 จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $xy = 3$ เส้นตรง $x = -1$ และ $y = 3x + 8$ รอบเส้นตรง $x = -1$

วิธีทำ อาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $xy = 3$ เส้นตรง $x = -1$ และ $y = 3x + 8$ รอบเส้นตรง $x = -1$ โดยแบ่งออกเป็น 2 อาณาบริเวณคือ R_1 และ R_2 ดังรูป

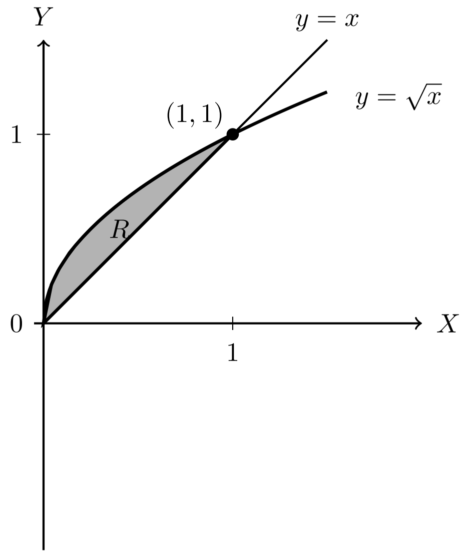


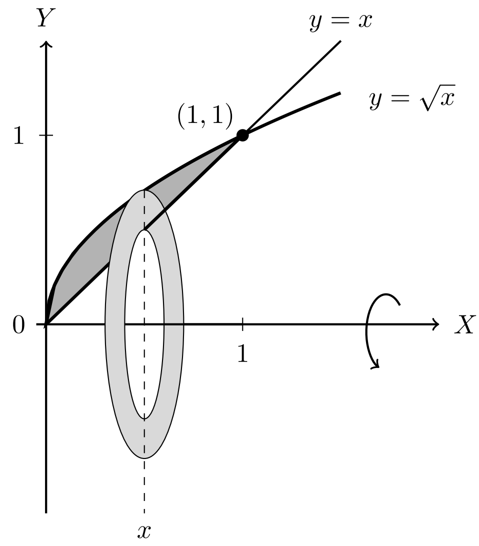
จากรูปภาคตัดตั้งฉากกับเส้นตรง $x = -1$ ที่จุด $(-1, y)$ เมื่อ $y \in [-1, 5]$ เป็นรูปวงกลม ให้ $A_1(y)$ แทนพื้นที่ของวงกลมของภาคตัดที่จุด $(-1, y)$ มีรัศมีเท่ากับ $\left|-1 - \dfrac{y-8}{3}\right|$
และ V_1 แทนปริมาตรของรูปทรงทรงตันที่เกิดจากการหมุน R_1 นั่นคือ $V_1 = \displaystyle\int_{-1}^{5} \pi \left(-1 - \frac{y-8}{3}\right)^2 dy$
และภาคตัดตั้งฉากกับเส้นตรง $x = -1$ ที่จุด $(-1, y)$ เมื่อ $y \in [-3, -1]$ เป็นรูปวงกลม ให้ $A_2(y)$ แทนพื้นที่ของวงกลมของภาคตัดที่จุด $(-1, y)$ มีรัศมีเท่ากับ $\left|-1 - \dfrac{3}{y}\right|$
และ V_2 แทนปริมาตรของรูปทรงทรงตันที่เกิดจากการหมุน R_2 นั่นคือ $V_2 = \displaystyle\int_{-3}^{-1} \pi \left(-1 - \frac{3}{y}\right)^2 dy$
ดังนั้นปริมาตร V ของรูปทรงทรงตันดังกล่าวเท่ากับ $V_1 + V_2$ นั่นคือ

$$
\begin{aligned}
V = V_1 + V_2 &= \int_{-1}^{5} \pi \left(-1 - \frac{y-8}{3}\right)^2 dy + \int_{-3}^{-1} \pi \left(-1 - \frac{3}{y}\right)^2 dy \\
&= \int_{-1}^{5} \frac{\pi}{9}(y-5)^2\, dy + \int_{-3}^{-1} \pi \left(1 + \frac{6}{y} + 9y^{-2}\right) dy \\
&= \left[\frac{\pi}{27}(y-5)^3\right]_{-1}^{5} + \left[\pi\left(y + 6\ell\text{n}|y| - \frac{9}{y}\right)\right]_{-3}^{-1} \\
&= 0 - \frac{\pi}{27}(-216) + \pi(-1 + 0 + 9) - \pi(-3 + 6\ell\text{n}3 + 3) \\
&= 16\pi - 6\pi\ell\text{n}3 \approx 29.55713
\end{aligned}
$$

ตัวอย่าง 7.3.3 จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = \sqrt{x}$ เส้นตรง $y = x$ รอบแกน X

วิธีทำ ให้ R คืออาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = \sqrt{x}$ เส้นตรง $y = x$ จากนั้นหมุน R รอบแกน X ซึ่งแสดงได้ดังรูป





จากรูปภาคตัดตั้งฉากกับแกน X ที่จุด x เมื่อ $x \in [0,1]$ เป็นรูปวงแหวน ให้ $A(x)$ แทนพื้นที่ของวงแหวนของภาคตัดที่จุด x มีรัศมีภายในเท่ากับ x และรัศมีภายนอกเท่ากับ $\sqrt{x}$ นั่นคือ

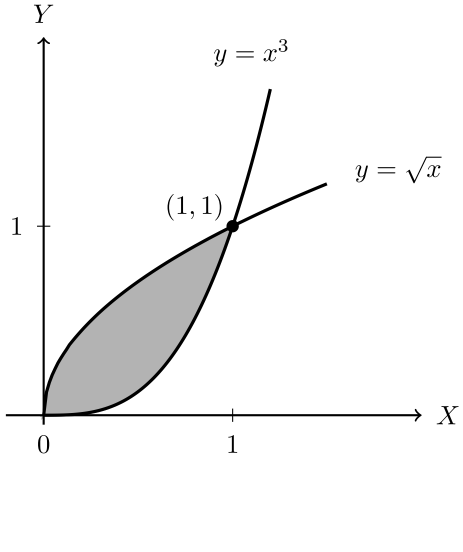
$$A(x) = \pi(\sqrt{x})^2 - \pi x^2 = \pi x - \pi x^2$$

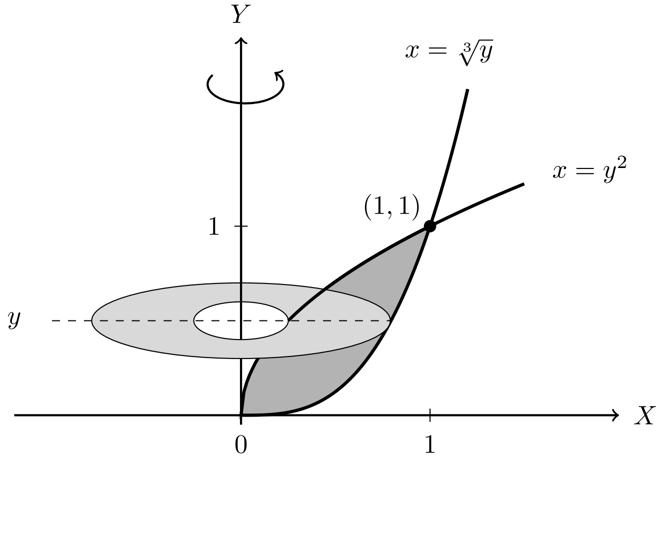
ถ้า V แทนปริมาตรของรูปทรงทรงตันที่เกิดจากการหมุน R จะได้ว่า

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 A(x)\,dx = \int_0^1 \pi x - \pi x^2\,dx \\ &= \left[\frac{\pi}{2}x^2 - \frac{\pi}{3}x^3\right]_0^1 = \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right] - 0 = \frac{\pi}{6} \approx 0.52360 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 7.3.4 จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = \sqrt{x}$ และ $y = x^3$ รอบแกน Y

วิธีทำ ให้ R คืออาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = \sqrt{x}$ และ $y = x^3$ จากนั้นหมุน R รอบแกน Y ซึ่งแสดงได้ดังรูป





จากรูปภาคตัดตั้งฉากกับแกน Y ที่จุด y เมื่อ $y \in [0,1]$ เป็นรูปวงแหวน ให้ $A(y)$ แทนพื้นที่ของวงแหวนของภาคตัดที่จุด y มีรัศมีภายในเท่ากับ y^2 และรัศมีภายนอกเท่ากับ $\sqrt[3]{y}$ นั่นคือ

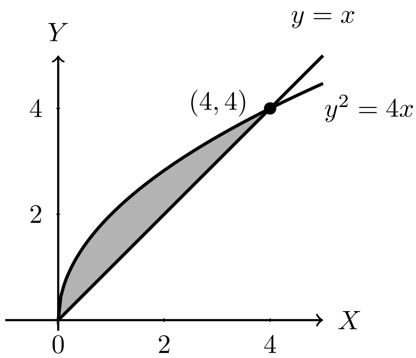
$$A(y) = \pi(\sqrt[3]{y})^2 - \pi(y^2)^2 = \pi y^{\frac{2}{3}} - \pi y^4$$

ถ้า V แทนปริมาตรของรูปทรงทรงตันที่เกิดจากการหมุน R จะได้ว่า

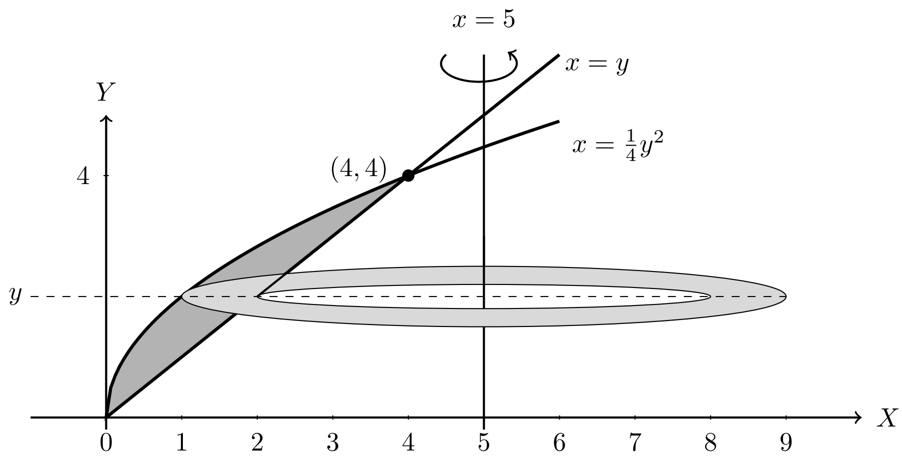
$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 A(y)\,dx = \int_0^1 \pi y^{\frac{2}{3}} - \pi y^4\,dy \\ &= \left[\frac{3\pi}{5}y^{\frac{5}{3}} - \frac{\pi}{5}y^5\right]_0^1 = \left[\frac{3\pi}{5} - \frac{\pi}{5}\right] - 0 = \frac{2\pi}{5} \approx 1.25664 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 7.3.5 จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y^2 = x$ และ $y = x$ รอบเส้นตรง $x = 5$ และรอบเส้นตรง $y = 4$

วิธีทำ ให้ R คืออาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y^2 = x$ และ $y = x$ แสดงได้ดังรูป



กรณี หมุน R รอบเส้นตรง $x = 5$



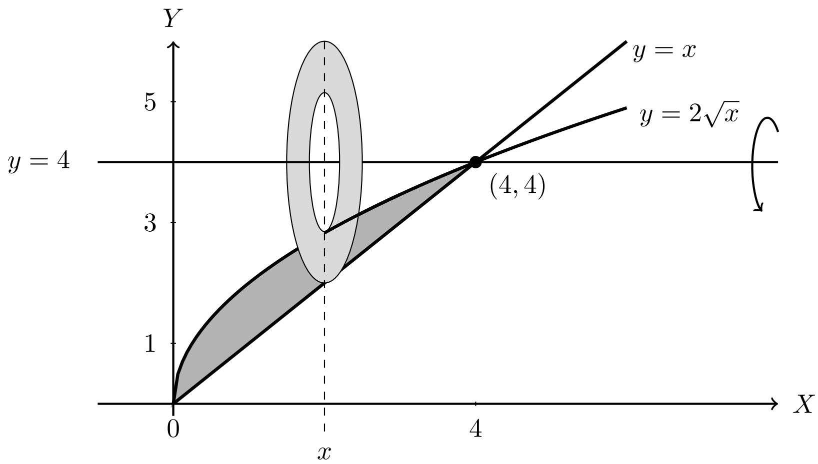
จากรูปภาคตัดตั้งฉากกับเส้นตรง $x = 5$ ที่จุด $(5, y)$ เมื่อ $y \in [0,4]$ เป็นรูปวงแหวน ให้ $A(y)$ แทนพื้นที่ของวงแหวนของภาคตัดที่จุด $(5, y)$ มีรัศมีภายในเท่ากับ $5-y$ และรัศมีภายนอกเท่ากับ $5-\frac{1}{4}y^2$ นั่นคือ

$$\begin{aligned} A(y) &= \pi\left(5 - \frac{1}{4}y^2\right)^2 - \pi(5-y)^2 \\ &= \pi\left(25 - \frac{5}{2}y^2 + \frac{1}{16}y^4\right) - \pi(25 - 10y + y^2) = \pi\left(\frac{1}{16}y^4 - \frac{7}{2}y^2 + 10y\right) \end{aligned}$$

ถ้า V แทนปริมาตรของรูปทรงทรงตันที่เกิดจากการหมุน R จะได้ว่า

$$\begin{aligned} V &= \int_0^4 A(y)\,dy = \int_0^4 \pi\left(\frac{1}{16}y^4 - \frac{7}{2}y^2 + 10y\right)\,dy \\ &= \pi\left[\frac{1}{80}y^5 - \frac{7}{6}y^3 + 5y^2\right]_0^4 \\ &= \pi\left[\frac{1}{80}(1024) - \frac{7}{6}(64) + 5(16)\right] - 0 = \frac{272\pi}{15} \approx 18.13333 \end{aligned}$$

กรณี หมุน R รอบเส้นตรง $y = 4$



จากรูปภาคตัดตั้งฉากกับเส้นตรง $y = 4$ ที่จุด $(x, 4)$ เมื่อ $x \in [0, 4]$ เป็นรูปวงแหวน ให้ $A(x)$ แทนพื้นที่ของวงแหวนของภาคตัดที่จุด $(x, 4)$ มีรัศมีภายในเท่ากับ $4 - 2\sqrt{x}$ และรัศมีภายนอกเท่ากับ $4 - x$ นั่นคือ

$$\begin{aligned} A(x) &= \pi(4 - x)^2 - \pi(4 - 2\sqrt{x})^2 \\ &= \pi(16 - 8x + x^2) - \pi(16 - 16\sqrt{x} + 4x) = \pi(x^2 - 12x + 16x^{\frac{1}{2}}) \end{aligned}$$

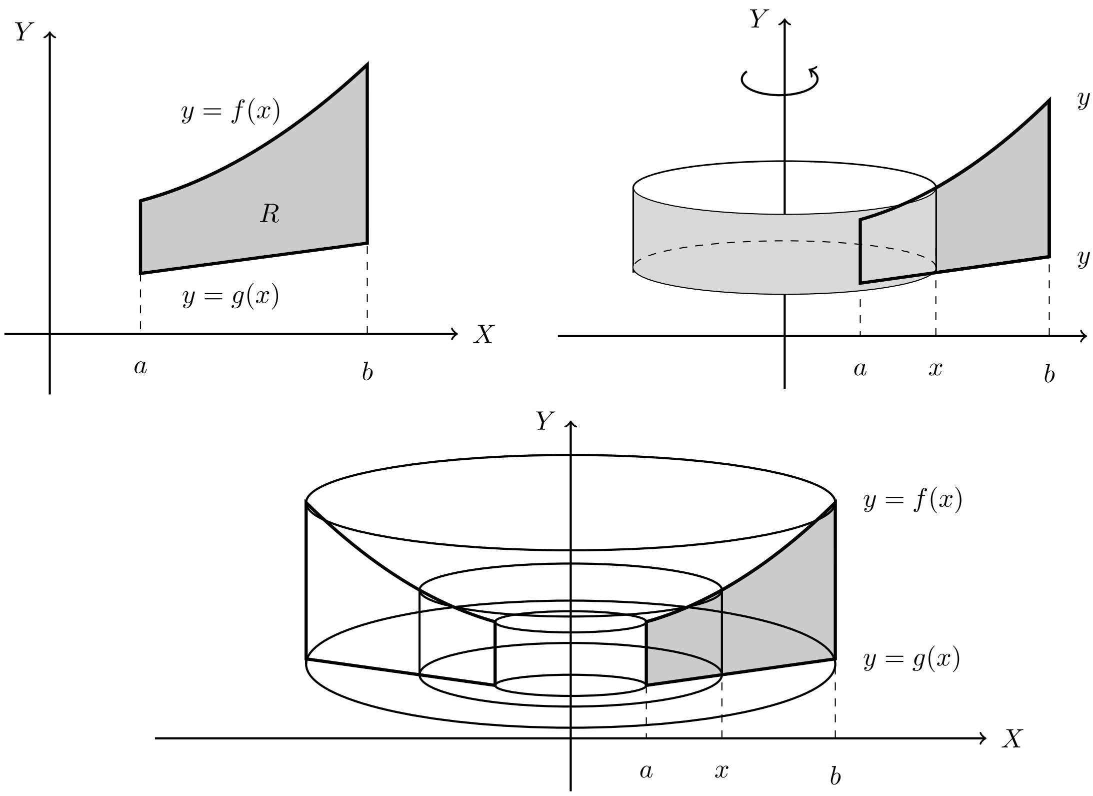
ถ้า V แทนปริมาตรของรูปทรงทรงตันที่เกิดจากการหมุน R จะได้ว่า

$$\begin{aligned} V &= \int_0^4 A(x)\,dx = \int_0^4 \pi(x^2 - 12x + 16x^{\frac{1}{2}})\,dx \\ &= \pi\left[\frac{1}{3}x^3 - 6x^2 + \frac{32}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 \\ &= \pi\left[\frac{1}{3}(64) - 6(16) + \frac{32}{3}(8)\right] - 0 \\ &= \frac{32\pi}{3} \approx 10.66667 \end{aligned}$$

2. การหาปริมาตรของรูปทรงตันโดยวิธีแบบเปลือกทรงกระบอก

ให้ $y = f(x)$ และ $y = g(x)$ เป็นเส้นโค้งที่มีค่าบนช่วง $[a, b]$ โดยที่ $g(x) \le f(x)$ เมื่อ $x \in [a, b]$ และ R เป็นอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วย $y = f(x)$ และ $y = g(x)$ และเส้นตรง $x = a, x = b$ เมื่อนำ R ไปหมุนรอบแกน Y แสดงได้ดังรูป

รูปที่ 7.9 การหมุน R รอบแกน X โดยวิธีแบบเปลือกทรงกระบอก



จากรูปเมื่อตัด R ตั้งฉากกับแกน X ที่จุด x เมื่อ $x \in [a, b]$ จะได้เส้นตรงที่ขนานแกน Y และเมื่อนำไปหมุนรอบแกน Y จะได้รูปทรงกระบอกที่มีความสูงเท่ากับ $f(x) - g(x)$ และรัศมีเท่ากับ $|x|$ ให้ $A(x)$ แทนพื้นที่ผิวข้างทรงกระบอกจะได้ว่า

$$A(x) = 2\pi |x| [f(x) - g(x)]$$

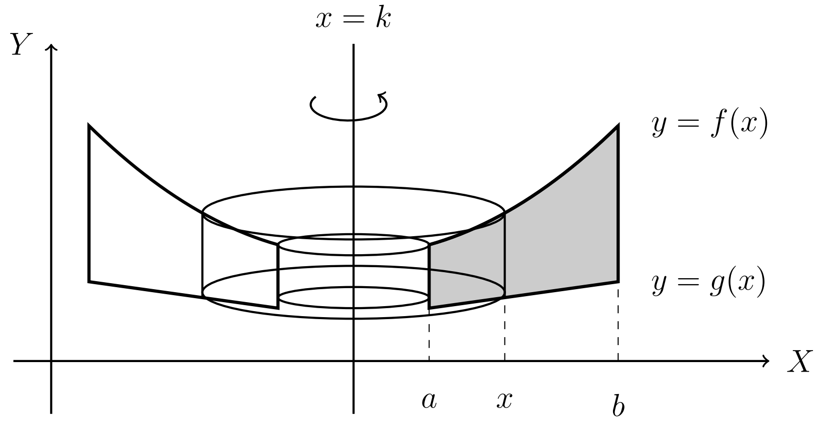
และ V แทนปริมาตรของรูปทรงทรงตันดังกล่าว จาก $V = \displaystyle\int_a^b A(x)\,dx$ สรุปได้ว่า

$$V = \int_a^b 2\pi |x| [f(x) - g(x)]\,dx$$

เรียกปริมาตร V ที่ได้โดยวิธีนี้ว่าปริมาตรของรูปทรงตันโดยวิธีแบบเปลือกทรงกระบอก

ในทำนองเดียวกันถ้าหมุน R รอบเส้นตรง $x = k$ ดังรูป

รูปที่ 7.10 การหมุน R รอบเส้นตรง $x = k$ โดยวิธีแบบเปลือกทรงกระบอก



โดยวิธีแบบเปลือกทรงกระบอกสรุปได้ว่า

$$V = \int_a^b 2\pi|x-k|[f(x)-g(x)]\,dx$$

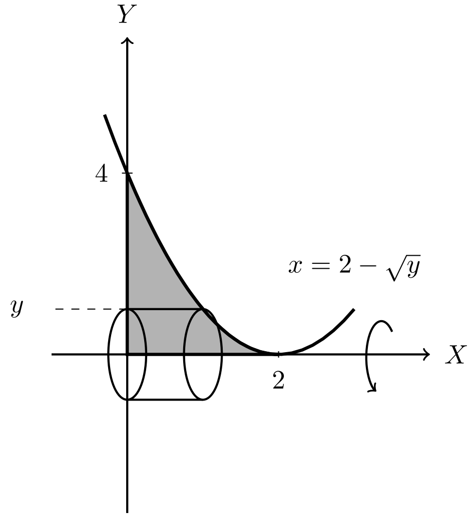
โดยแนวคิดเดียวกันกับการหมุนรอบแกน Y จะพิจารณาการหมุนรอบแกน X เมื่อให้ $x = p(y)$ และ $x = q(y)$ เป็นเส้นโค้งที่มีค่าบนช่วง $[c, d]$ โดยที่ $p(y) \leq q(y)$ เมื่อ $y \in [c, d]$ และ R เป็นอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วย $x = p(y)$ และ $x = q(y)$ และเส้นตรง $y = c, y = d$ เมื่อนำ R ไปหมุนรอบแกน X จะได้ปริมาตรที่เกิดจากการหมุนโดยวิธีแบบเปลือกทรงกระบอกเท่ากับ

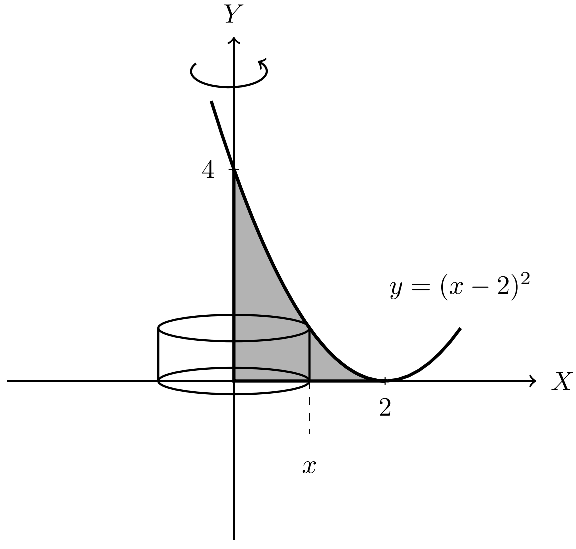
$$V = \int_c^d 2\pi|y|[q(y)-p(y)]\,dy$$

และหมุนรอบเส้นตรง $y = \ell$ ปริมาตรคือ $V = \displaystyle\int_c^d 2\pi|y-\ell|[q(y)-p(y)]\,dy$

ตัวอย่าง 7.3.6 จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยแกน X แกน Y และเส้นโค้ง $y = (x-2)^2$ รอบแกน X และรอบแกน Y โดยวิธีแบบเปลือกทรงกระบอก

วิธีทำ ให้ R คืออาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยแกน X แกน Y และเส้นโค้ง $y = (x-2)^2$ แสดงรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุน R รอบแกน X และแกน Y โดยวิธีแบบเปลือกทรงกระบอกได้ดังนี้





กรณี หมุน R รอบแกน X

จากรูปเมื่อตัด R ตั้งฉากกับแกน Y ที่จุด y เมื่อ $y \in [0,4]$ จะได้เส้นตรงที่ขนานแกน X และเมื่อนำไปหมุนรอบแกน X จะได้รูปทรงกระบอกที่มีความสูงเท่ากับ $2-\sqrt{y}$ และรัศมีเท่ากับ y ให้ $A(y)$ แทนพื้นที่ผิวข้างทรงกระบอกจะได้ว่า

$$A(y) = 2\pi y[2-\sqrt{y}] = 2\pi(2y - y^{\frac{3}{2}})$$

และ V แทนปริมาตรของรูปทรงทรงตันดังกล่าว จะได้ว่า

$$\begin{aligned} V &= \int_0^4 A(y)\,dy = \int_0^4 2\pi(2y - y^{\frac{3}{2}})\,dy \\ &= 2\pi\left[y^2 - \frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}\right]_0^4 = 2\pi\left[16 - \frac{64}{5}\right] - 0 = \frac{32\pi}{5} \approx 20.10619 \end{aligned}$$

กรณี หมุน R รอบแกน Y

จากรูปเมื่อตัด R ตั้งฉากกับแกน X ที่จุด x เมื่อ $x \in [0,2]$ จะได้เส้นตรงที่ขนานแกน Y และเมื่อนำไปหมุนรอบแกน Y จะได้รูปทรงกระบอกที่มีความสูงเท่ากับ $(x-2)^2$ และรัศมีเท่ากับ x ให้ $A(x)$ แทนพื้นที่ผิวข้างทรงกระบอกจะได้ว่า

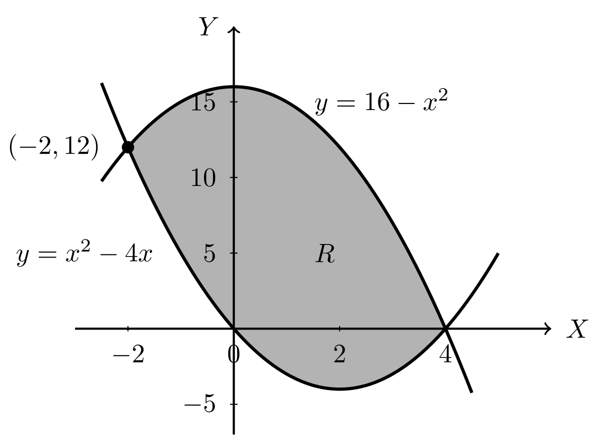
$$A(x) = 2\pi x(x-2)^2 = 2\pi(x^3 - 4x^2 + 4x)$$

และ V แทนปริมาตรของรูปทรงทรงตันดังกล่าว จะได้ว่า

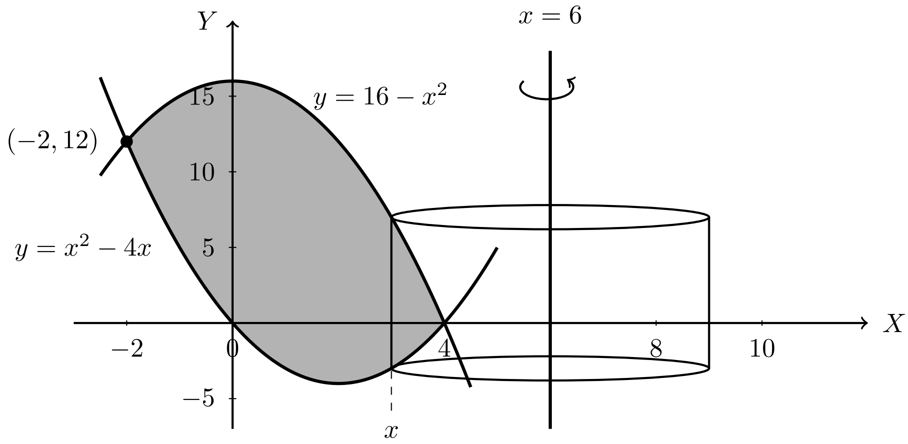
$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 A(x)\,dx = \int_0^2 2\pi(x^3 - 4x^2 + 4x)\,dx \\ &= 2\pi\left[\frac{x^4}{4} - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2\right]_0^2 = 2\pi\left[4 - \frac{4}{3}(8) + 8\right] - 0 = \frac{8\pi}{3} \approx 8.37758 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 7.3.7 จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยแกน X แกน Y เส้นโค้ง $y = x^2 - 4x$ และ $y = 16 - x^2$ รอบแกนเส้นตรง $x = 6$ โดยวิธีแบบเปลือกทรงกระบอก

วิธีทำ ให้ R คืออาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยแกน X แกน Y เส้นโค้ง $y = x^2 - 4x$ และ $y = 16 - x^2$ แสดงรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุน R รอบแกนเส้นตรง $x = 6$ ได้ดังนี้



รูปทรงตันที่เกิดจากการหมุน R รอบแกนเส้นตรง $x = 6$ โดยวิธีแบบเปลือกทรงกระบอก แสดงได้ดังนี้



จากรูปเมื่อตัด R ตั้งฉากกับแกน X ที่จุด x เมื่อ $x \in [-2, 4]$ จะได้เส้นตรงที่ขนานเส้นตรง $x = 6$ และเมื่อนำไปหมุนรอบเส้นตรง $x = 6$ จะได้รูปทรงกระบอกที่มีความสูงเท่ากับ

$$(16 - x^2) - (x^2 - 4x) = 16 + 4x - 2x^2$$

และรัศมีเท่ากับ $6 - x$ ให้ $A(x)$ แทนพื้นที่ผิวข้างทรงกระบอกจะได้ว่า

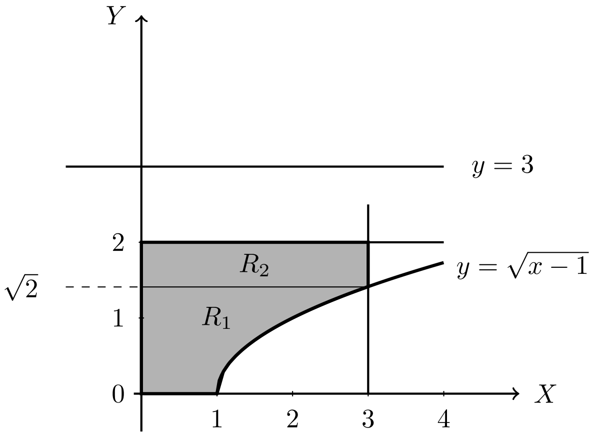
$$A(x) = 2\pi(6 - x)(16 + 4x - 2x^2) = 4\pi(x^3 - 8x^2 + 4x + 48)$$

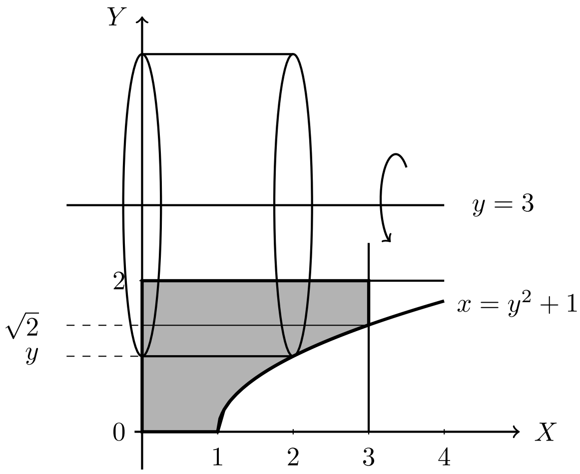
และ V แทนปริมาตรของรูปทรงทรงตันดังกล่าว จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
V &= \int_{-2}^{4} A(x)\,dx = \int_{-2}^{4} 4\pi(x^3 - 8x^2 + 4x + 48)\,dx \\
&= 4\pi\left[\frac{x^4}{4} - \frac{8}{3}x^3 + 2x^2 + 48x\right]_{-2}^{4} \\
&= 4\pi\left[64 - \frac{512}{3} + 32 + 192\right] - 4\pi\left[4 + \frac{64}{3} + 8 - 96\right] = 720\pi \approx 2261.94671
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 7.3.8 จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยแกน X แกน Y เส้นโค้ง $y = \sqrt{x - 1}$ เส้นตรง $x = 3$ และเส้นตรง $y = 2$ รอบแกน X และเส้นตรง $y = 3$ โดยวิธีแบบเปลือกทรงกระบอก

วิธีทำ อาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยแกน X แกน Y เส้นโค้ง $y = \sqrt{x - 1}$ เส้นตรง $x = 3$ และเส้นตรง $y = 2$ รอบเส้นตรง $y = 3$ โดยแบ่งออกเป็น 2 อาณาบริเวณคือ R_1 และ R_2 แสดงรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนรอบเส้นตรง $y = 3$ โดยวิธีแบบเปลือกทรงกระบอกได้ดังนี้





จากรูปเมื่อตัดอาณาบริเวณดังกล่าวตั้งฉากกับแกน Y ที่จุด y เมื่อ $y \in [0,2]$ จะได้เส้นตรงที่ขนานเส้นตรง $y=3$ และเมื่อนำไปหมุนรอบเส้นตรง $y=3$ จะได้รูปทรงกระบอกที่มีรัศมีเท่ากับ $3-y$

กรณี $y \in [0,\sqrt{2}]$ รูปทรงกระบอกมีความสูงเท่ากับ y^2+1

ให้ $A_1(y)$ แทนพื้นที่ผิวข้างทรงกระบอกจะได้ว่า

$$A_1(y) = 2\pi(3-y)(y^2+1) = 2\pi(3y^2+3-y^3-y)$$

และ V_1 แทนปริมาตรของรูปทรงทรงตันที่เกิดจากการหมุน R_1 นั่นคือ

$$V_1 = \int_0^{\sqrt{2}} A_1(y)\,dy = \int_0^{\sqrt{2}} 2\pi(3y^2+3-y^3-y)\,dy$$

กรณี $y \in [\sqrt{2},2]$ รูปทรงกระบอกมีความสูงเท่ากับ 3

ให้ $A_2(y)$ แทนพื้นที่ผิวข้างทรงกระบอกจะได้ว่า

$$A_2(y) = 2\pi(3-y)3 = 6\pi(3-y)$$

และ V_2 แทนปริมาตรของรูปทรงทรงตันที่เกิดจากการหมุน R_2 นั่นคือ

$$V_2 = \int_{\sqrt{2}}^2 A_2(y)\,dy = \int_{\sqrt{2}}^2 6\pi(3-y)\,dy$$

ดังนั้นปริมาตร V ของรูปทรงทรงตันดังกล่าวเท่ากับ V_1+V_2 นั่นคือ

$$\begin{aligned}
V = V_1+V_2 &= \int_0^{\sqrt{2}} 2\pi(3y^2+3-y^3-y)\,dy + \int_{\sqrt{2}}^2 6\pi(3-y)\,dy \\
&= 2\pi\left[y^3+3y-\frac{y^4}{4}-\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{2}} + 6\pi\left[3y-\frac{y^2}{2}\right]_{\sqrt{2}}^2 \\
&= 2\pi\left[2\sqrt{2}+3\sqrt{2}-1-1\right] - 0 + 6\pi\,[6-2] - 6\pi\left[3\sqrt{2}-1\right] \\
&= 2\pi(5\sqrt{2}-2) + 6\pi(5-3\sqrt{2}) \\
&= (26-8\sqrt{2})\pi \approx 46.13834
\end{aligned}$$

แบบฝึกหัด 7.3

1. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งต่อไปนี้ โดยใช้**วิธีแบบจาน**

1.1 $y = x,\ x = 1$ และ $y = 0$	รอบแกน X
1.2 $y = x^2 - 4x$ และแกน X	รอบแกน X
1.3 $y = 4x - x^2$ และแกน X จาก $x = 0$ ถึง $x = 5$	รอบแกน Y
1.4 $y = \cos x,\ x = 0$ และ $y = 0$ ในจตุภาคที่1	รอบแกน Y
1.5 $y + x + 1 = 0,\ x - 2y = 2$ และ $y = 0$	รอบแกน X
1.6 $y = x^2 - x$ และ $y = 2x - x^2$	รอบเส้นตรง $y = 2$

2. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งต่อไปนี้ โดยใช้**วิธีแบบเปลือกทรงกระบอก**

2.1 $y = x^3,\ x = 2,\ x = 3$ และแกน X	รอบแกน Y
2.2 $x = \sqrt{9 - y^2}$ และแกน Y	รอบแกน Y
2.3 $y = 2x,\ x = 6$ และ $x = 0$	รอบแกน X
2.4 $x + y = 4,\ y = 2\sqrt{x - 1}$ และแกน X	รอบแกน X
2.5 $y = x^2,\ x = 1$ และ $y = 0$	รอบเส้นตรง $x = 1$
2.6 $y = 2 - \vert x \vert$ และแกน X	รอบเส้นตรง $y = -1$

3. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งต่อไปนี้

3.1 $y = \sin x,\ y = \cos x,\ x = 0$ และ $x = \frac{\pi}{4}$	รอบแกน X
3.2 $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$	รอบแกน Y
3.3 $y^2 = x^3,\ x = 4$ และแกน X	รอบเส้นตรง $y = 8$

สรุป

ในบทนี้จะกล่าวถึงการประยุกต์ใช้ปริพันธ์จำกัดเขตเริ่มจากการหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้งถ้า $R = \{(x,y) \,:\, a \leq x \leq b$ และ $g(x) \leq y \leq f(x)\}$ พื้นที่ของ R เท่ากับ $\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$ ถ้า $R = \{(x,y) \,:\, c \leq y \leq d$ และ $h(y) \leq x \leq k(y)\}$ พื้นที่ของ R เท่ากับ $\int_c^d [k(y) - h(y)]\, dy$ ต่อมากล่าวถึงปริมาตรของรูปทรงตันซึ่งหาพื้นภาคตัดได้ถ้า S เป็นรูปทรงตันเมื่อภาคตัดของ S ที่ตั้งฉากกับแกน X ที่จุด $x \in [a,b]$ จะมีพื้นที่ $A(x)$ แล้วปริมาตร V ของรูปทรงตัน S คือ $V = \int_a^b A(x)\, dx$ สุดท้ายกล่าวถึงปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนทำได้ 2 วิธีคือ 1. วิธีแบบจาน
ถ้า $R = \{(x,y) \,:\, a \leq x \leq b$ และ $f(x) \geq 0\}$ ปริมาตรของรูปทรงทรงตันที่เกิดจากการหมุน R รอบแกน X โดยวิธีแบบจาน $V = \int_a^b \pi[f(x)]^2\, dx$ และหมุนรอบเส้นตรง $y = k$ ปริมาตรคือ $V = \int_a^b \pi[f(x) - k]^2\, dx$ ถ้า $R = \{(x,y) \,:\, c \leq y \leq d$ และ $h(y) \geq 0\}$ ปริมาตรของรูปทรงทรงตันที่เกิดจากการหมุน R รอบแกน Y โดยวิธีแบบจาน $V = \int_c^d \pi[h(y)]^2\, dy$ และหมุนรอบเส้นตรง $x = \ell$ ปริมาตรคือ $V = \int_c^d \pi[h(y) - \ell]^2\, dy$ และ 2. วิธีแบบเปลือกทรงกระบอก
ถ้า $R = \{(x,y) \,:\, a \leq x \leq b$ และ $g(x) \leq y \leq f(x)\}$ จะได้ปริมาตรที่เกิดจากการหมุนรอบแกน Y โดยวิธีแบบจาน $V = \int_a^b 2\pi|x|[f(x) - g(x)]\, dx$ และหมุนรอบเส้นตรง $x = k$ ปริมาตรคือ $V = \int_a^b 2\pi|x - k|[f(x) - g(x)]\, dx$ ถ้า $R = \{(x,y) \,:\, c \leq y \leq d$ และ $p(y) \leq x \leq q(y)\}$ จะได้ปริมาตรที่เกิดจากการหมุนรอบแกน X โดยวิธีแบบเปลือกทรงกระบอก $V = \int_c^d 2\pi|y|[q(y) - p(y)]\, dy$ และหมุนรอบเส้นตรง $y = \ell$ ปริมาตรคือ $V = \int_c^d 2\pi|y - \ell|[q(y) - p(y)]\, dy$

แบบฝึกหัดบทที่ 7

1. จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งในแต่ละข้อต่อไปนี้

   1.1 $x = y - y^2$ และ $y = x + 2$

   1.2 $x = y^3 + 1$ และ $x = 3y - 1$

   1.3 $x = y^2 - 4y - 3$ และ $x = 1 - 2y^2$

   1.4 $y = x^2,\ x = y^3$ และ $x + y = 2$

   1.5 $y = x^2 - x,\ y = x^2 - 9x + 16$ และ $y = -x$

   1.6 $x + y = 1,\ x + y = 5,\ y = 2x + 1$ และ $y = 2x + 6$

   1.7 $y = x^3 - x,\ x + y + 1 = 0$ และ $x = \sqrt{y+1}$

   1.8 $xy = 1$ และ $2x + 2y = 5$

   1.9 $x^2 - 2x - 4y + 9 = 0,\ x + 2y = 5$ และ $y^2 - 4y + x = 0$

   1.10 $x^2 + y^2 = 25$ และ $x^2 + y^2 - 16x + 39 = 0$

2. จงหาปริมาตรรูปทรงตันที่มีฐานล้อมรอบด้วยวงกลม $x^2 + y^2 = 1$ ถ้าภาคตัดของรูปทรงตันนี้ที่ตั้งฉากกับแกน X เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีความยาวด้านเท่ากัน 2 ด้าน โดยที่ด้านตรงข้ามมุมฉากตั้งฉากกับแกน X

3. จงหาปริมาตรรูปทรงตันที่มีฐานล้อมรอบด้วยวงกลม $x = y^2$ และเส้นตรง $x = 1$ ถ้าภาคตัดของรูปทรงตันนี้ที่ตั้งฉากกับแกน X เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีความยาวด้านเท่ากัน 2 ด้าน โดยที่ด้านตรงข้ามมุมฉากตั้งฉากกับแกน X

4. จงหาปริมาตรรูปทรงตันที่มีฐานล้อมรอบด้วยวงกลม $x = y^2$ และเส้นตรง $x = 1$ ถ้าภาคตัดของรูปทรงตันนี้ที่ตั้งฉากกับแกน X เป็นรูปสี่เหลี่ยมจตุรัส

5. จงหาปริมาตรของพีระมิดตรงที่มีความสูงตรง h หน่วย และมีฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมจตุรัสซึ่งมีความยาวด้านละ r หน่วย

6. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งต่อไปนี้โดยใช้**วิธีแบบจาน**

   6.1 $y = x,\ x = 1$ และ $y = 0$ รอบแกน Y

   6.2 $y = 4x - x^2$ และแกน X จาก $x = 0$ ถึง $x = 5$ รอบแกน X

   6.3 $y = \cos x,\ x = 0$ และ $y = 0$ ในจตุภาคที่1 รอบแกน X

   6.4 $y = x^2,\ x = 1$ และ $y = 0$ รอบแกน Y

   6.5 $x = 2y - y^2 - 2$ และ $x = -5$ รอบแกน Y

   6.6 $y = x^2,\ x = 1$ และแกน X รอบเส้นตรง $x = -1$ และ รอบเส้นตรง $y = -1$

7. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งต่อไปนี้ โดยใช้**วิธีแบบเปลือกทรงกระบอก**

   7.1 $y = x^3,\ x = 3$ และแกน X รอบแกน X

   7.2 $y = x$ และ $y = x^2$ รอบแกน Y

   7.3 $y = x^2 - x^3$ และแกน X รอบแกน Y

   7.4 $x = y^2,\ x = 0$ และ $x + y = 2$ รอบเส้นตรง $y = -3$

8. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งต่อไปนี้

   8.1 $y = |x|^3,\ x = -1,\ x = 1$ และแกน X รอบแกน X

   8.2 $y = |x|$ และ $y = 1$ รอบแกน Y

   8.3 $y^2 = x^3,\ y = 6$ และแกน Y รอบเส้นตรง $y = 8$

เอกสารอ้างอิง

ดำรง ทิพย์โยธา, ยุวรีย์ พันธ์กล้า และณัฏฐนาถ ไตรภพ. (2548). **แคลคูลัส ๑**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

James Stewart. (2012). **Calculus Early Transcendentals**. Seventh Edition. Canada. Nelson Education Ltd.

แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 8

หัวข้อเนื้อหาประจำบท

1. ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง
2. ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สอง
3. ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดผสม

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. สามารถระบุชนิดของปริพันธ์ไม่ตรงแบบได้
2. สามารถหาปริพันธ์ไม่ตรงแบบรูปแบบต่าง ๆ ที่กำหนดให้ได้อย่างถูกต้อง
3. สามารถหาอธิบายการลู่เข้าและลู่ออกของปริพันธ์ไม่ตรงแบบแต่ละชนิดได้

วิธีและกิจกรรมการเรียนการสอน

1. **วิธีสอน**
   1.1 วิธีสอนแบบบรรยาย ประกอบสื่ออิเล็กทรอนิกส์
   1.2 ใช้สื่อทางอินเตอร์เน็ต และให้แต่ละคนแสดงความคิดเห็น
   1.3 วิธีสอนแบบอภิปราย โดยให้หัวข้อเป็นกลุ่มและมานำเสนอหน้าชั้น
2. **กิจกรรมการเรียนการสอน**
   2.1 บรรยายสรุปโดยใช้สื่อการสอนประกอบ
   2.2 ให้ผู้เรียนศึกษาเนื้อหาจากชุดการสอน หนังสือ ตำรา เอกสารเพิ่มเติม และสื่อออนไลน์
   2.3 อภิปรายรายกลุ่มตามหัวข้อที่ได้รับมอบหมาย

สื่อการเรียนการสอน

1. ชุดการสอน เรื่อง "ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ"
2. สื่ออิเล็กทรอนิกส์ เรื่อง "ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ"
3. หนังสือ ตำรา เอกสารที่เกี่ยวข้อง
4. แอพพลิเคชั่น Geogebra
5. แอพพลิเคชั่น Wolfram alpha

การวัดผลและประเมินผล

1. สังเกตการตอบคำถามและตั้งคำถามของผู้เรียนในระหว่างการบรรยายและซักถาม
2. วัดผลจากการทำแบบฝึกหัดระหว่างเรียนตามเนื้อหาที่ได้รับมอบหมาย
3. ประเมินการอภิปรายรายกลุ่ม แล้วบันทึกคะแนนลงในใบบันทึกคะแนน
4. ตรวจการทำการบ้าน บันทึกคะแนนลงในบันทึกผลงาน

บทที่ 8

ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ

จากแนวคิดการหาปริพันธ์จำกัดเขต $\int_a^b f(x)\,dx$ เมื่อ f เป็นฟังก์ชันบนช่วง $[a,b]$ เราจะขยายแนวคิดไปยังกรณีการหาปริพันธ์บนช่วงอนันต์เช่น $\int_0^\infty \sqrt{x}\,dx$ หรือการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันที่ไม่มีขอบเขตบนช่วงการหาปริพันธ์เช่น $\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx$ เนื่องจาก $\frac{1}{x}$ ไม่มีค่าเมื่อ $x=0$ เรียกปริพันธ์ลักษณะนี้ว่า **ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ** (improper integral) แบ่งออกเป็น 3 ลักษณะดังนี้

1. ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่ช่วงการหาปริพันธ์เป็นช่วงอนันต์
2. ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่ช่วงการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันที่ไม่มีขอบเขตบนช่วงการหาปริพันธ์
3. ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่ช่วงการหาปริพันธ์เป็นช่วงอนันต์ และช่วงการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันที่ไม่มีขอบเขตบนช่วงการหาปริพันธ์

8.1 ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง

ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง คือปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่ช่วงการหาปริพันธ์เป็นช่วงอนันต์ ตัวอย่างเช่น

1. $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง
2. $\int_{-1}^\infty \frac{1}{x}\,dx$ ไม่ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง เนื่องจาก $\frac{1}{x}$ ไม่มีค่าเมื่อ $x=0$
3. $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2+1}\,dx$ ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง
4. $\int_{-\infty}^0 \ell\mathrm{n}|x|\,dx$ ไม่ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง เนื่องจาก $\ell\mathrm{n}|x|$ ไม่มีค่าเมื่อ $x=0$
5. $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{|x|-1}\,dx$ ไม่ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง เนื่องจาก $\frac{1}{|x|-1}$ ไม่มีค่าเมื่อ $x=-1,1$

บทนิยาม 8.1.1 ให้ a, b เป็นจำนวนจริง และ $a < b$

1. ให้ f เป็นฟังก์ชันมีขอบเขตและหาปริพันธ์ได้บนช่วง $[a, t]$ ทุก ๆ $t > a$
   ถ้า $\lim\limits_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx$ มีค่า จะกล่าวว่า ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_a^\infty f(x)\,dx$ **ลู่เข้า** (convergence) และ
   $$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx$$
   ถ้า $\lim\limits_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx$ ไม่มีค่า จะกล่าวว่า ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_a^\infty f(x)\,dx$ **ลู่ออก** (divergence)

2. ให้ f เป็นฟังก์ชันมีขอบเขตและหาปริพันธ์ได้บนช่วง $[t, b]$ ทุก ๆ $t < b$
   ถ้า $\lim\limits_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)\,dx$ มีค่า จะกล่าวว่า ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ **ลู่เข้า** และ
   $$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)\,dx$$
   ถ้า $\lim\limits_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)\,dx$ ไม่มีค่า จะกล่าวว่า ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ **ลู่ออก**

3. ให้ $c \in \mathbb{R}$ และ f เป็นฟังก์ชันมีขอบเขตและหาปริพันธ์ได้บนช่วง $[a, b]$ ทุก ๆ a, b

   $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ **ลู่เข้า** ก็ต่อเมื่อ $\int_{-\infty}^c f(x)\,dx$ และ $\int_c^\infty f(x)\,dx$ **ลู่เข้า**
   $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ **ลู่ออก** ก็ต่อเมื่อ $\int_{-\infty}^c f(x)\,dx$ หรือ $\int_c^\infty f(x)\,dx$ **ลู่ออก**

ตัวอย่าง 8.1.2 จงพิจารณาปริพันธ์ไม่ตรงแบบต่อไปนี้ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\int_3^\infty \frac{1}{(x-2)^3}\,dx$

   วิธีทำ เนื่องจาก $\frac{1}{(x-2)^3}$ เป็นฟังก์ชันมีขอบเขตและหาปริพันธ์ได้บน $[3, t]$ ทุก ๆ $t > 3$ และ
   $$\begin{aligned}\int_3^\infty \frac{1}{(x-2)^3}\,dx &= \lim_{t\to\infty} \int_3^t \frac{1}{(x-2)^3}\,dx \\ &= \lim_{t\to\infty} \left[-\frac{1}{2(x-2)^2}\right]_3^t \\ &= \lim_{t\to\infty} \left[-\frac{1}{2(t-2)^2} + \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}\end{aligned}$$
   ดังนั้น $\int_3^\infty \frac{1}{(x-2)^3}\,dx$ ลู่เข้า

2. $\displaystyle\int_3^\infty \frac{1}{x-2}\,dx$

วิธีทำ เนื่องจาก $\dfrac{1}{x-2}$ เป็นฟังก์ชันมีขอบเขตและหาปริพันธ์ได้บน $[3,t]$ ทุก ๆ $t>3$ และ

$$\begin{aligned}\int_3^\infty \frac{1}{x-2}\,dx &= \lim_{t\to\infty}\int_3^t \frac{1}{x-2}\,dx\\ &= \lim_{t\to\infty}\left[\ell\text{n}|x-2|\right]_3^t\\ &= \lim_{t\to\infty}\ell\text{n}|t-2| = \infty\end{aligned}$$

ดังนั้น $\displaystyle\int_3^\infty \frac{1}{x-2}\,dx$ ลู่ออก

ตัวอย่าง 8.1.3 จงพิจารณาว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\displaystyle\int_{-\infty}^0 x2^{-x^2}\,dx$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ เนื่องจาก $x2^{-x^2}$ เป็นฟังก์ชันมีขอบเขตและหาปริพันธ์ได้บน $[t,0]$ ทุก ๆ $t<0$ และ

$$\begin{aligned}\int x2^{-x^2}\,dx &= -\frac{1}{2}\int 2^{-x^2}(-2x)dx = -\frac{1}{2}\int 2^{-x^2}(-x^2)'dx\\ &= -\frac{1}{2}\int 2^{-x^2}\,d(-x^2) = -\frac{1}{2\ell\text{n}2\cdot 2^{x^2}}+C\end{aligned}$$

พิจารณา

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^0 x2^{-x^2}\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^0 x2^{-x^2}\,dx &= \lim_{t\to-\infty}\left[-\frac{1}{2\ell\text{n}2\cdot 2^{x^2}}\right]_t^0\\ &= \lim_{t\to-\infty}\left[-\frac{1}{2\ell\text{n}2}+\frac{1}{2\ell\text{n}2\cdot 2^{t^2}}\right] = -\frac{1}{2\ell\text{n}2}\end{aligned}$$

ดังนั้น $\displaystyle\int_{-\infty}^0 x2^{-x^2}\,dx$ ลู่เข้า

ตัวอย่าง 8.1.4 จงพิจารณาว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2-2x+2}\,dx$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ เนื่องจาก $\dfrac{1}{x^2-2x+2}$ เป็นฟังก์ชันมีขอบเขตและหาปริพันธ์ได้บน $[0,t]$ ทุก ๆ $t>0$ และ

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{1}{x^2-2x+2}\,dx &= \lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{1}{x^2-2x+2}\,dx\\ &= \lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{1}{(x-1)^2+1}\,dx\\ &= \lim_{t\to\infty}\left[\arctan(x-1)\right]_0^t\\ &= \lim_{t\to\infty}\left[\arctan(x-1)-\arctan(-1)\right]\\ &= \frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{4}\end{aligned}$$

ดังนั้น $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2-2x+2}\,dx$ ลู่เข้า

ตัวอย่าง 8.1.5 จงพิจารณาว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2-2x+2}\,dx$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ เนื่องจาก $\dfrac{1}{x^2-2x+2}$ เป็นฟังก์ชันมีขอบเขตและหาปริพันธ์ได้บน $[a,b]$ ทุก ๆ $a<b$ และ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2-2x+2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2-2x+2}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^2-2x+2}\,dx$$

โดยตัวอย่าง 8.1.4 จะได้ $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^2-2x+2}\,dx = \frac{3\pi}{4}$ และ

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2-2x+2}\,dx &= \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{0} \frac{1}{x^2-2x+2}\,dx \\
&= \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{0} \frac{1}{(x-1)^2+1}\,dx \\
&= \lim_{t\to-\infty}\left[\arctan(x-1)\right]_t^0 \\
&= \lim_{t\to-\infty}\left[\arctan(-1)-\arctan(t-1)\right] \\
&= -\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2-2x+2}\,dx = \frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{4} = \pi$$

ดังนั้น $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2-2x+2}\,dx$ ลู่เข้า

ตัวอย่าง 8.1.6 จงพิจารณาว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}\,dx$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ เนื่องจาก $\dfrac{x}{\sqrt{2x^2+1}}$ เป็นฟังก์ชันมีขอบเขตและหาปริพันธ์ได้บน $[a,b]$ ทุก ๆ $a<b$ และ

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}\,dx &= \frac{1}{4}\int \frac{1}{\sqrt{2x^2+1}}\,(4x)dx = \frac{1}{4}\int (2x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\,(2x^2)'dx \\
&= \frac{1}{4}\int (2x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\,d(2x^2) = \frac{1}{4}\int (2x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\,d(2x^2+1) \\
&= \frac{1}{2}(2x^2+1)^{\frac{1}{2}}+C = \frac{1}{2}\sqrt{2x^2+1}+C
\end{aligned}$$

พิจารณา

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}\,dx$$

เนื่องจาก

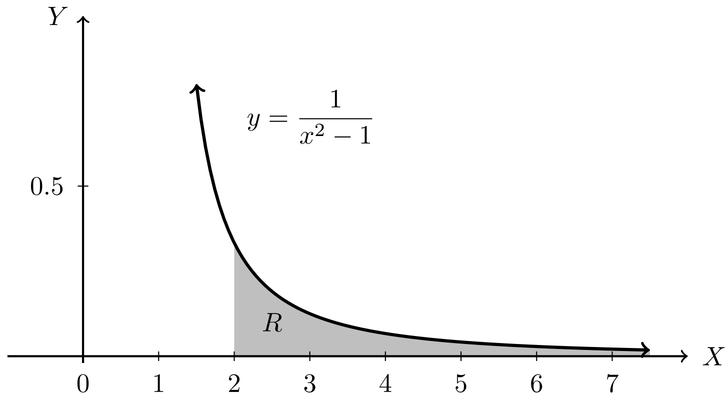
$$\begin{aligned}
\int_{0}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}\,dx &= \lim_{t\to\infty}\int_{0}^{t} \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}\,dx \\
&= \lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+1}\right]_0^t \\
&= \lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{2}\sqrt{2t^2+1}-\frac{1}{2}\right] = \infty
\end{aligned}$$

นั่นคือ $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}\,dx$ ลู่ออก สรุปได้ว่า $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}\,dx$ ลู่ออก

ตัวอย่าง 8.1.7 จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่อยู่ระหว่างเส้นโค้ง

$$y = \frac{1}{x^2-1} \text{ กับแกน X เมื่อ } x \geq 2$$

วิธีทำ ให้ R แทนอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วย $y = \dfrac{1}{x^2-1}$ กับแกน X เมื่อ $x \geq 2$ แสดงได้ดังรูป



พื้นที่ของ R คือ $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x^2-1}\,dx$ พิจารณา

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = \int \frac{1}{(x-1)(x+1)}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\,dx \\ &= \frac{1}{2}[\ell\text{n}|x-1| - \ell\text{n}|x+1|] + C \\ &= \frac{1}{2}\ell\text{n}\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\dfrac{1}{x^2-1}$ เป็นฟังก์ชันมีขอบเขตและหาปริพันธ์ได้บน $[2, t]$ ทุก ๆ $t > 2$ และ

$$\begin{aligned}\int_2^\infty \frac{1}{x^2-1}\,dx &= \lim_{t\to\infty} \int_2^t \frac{1}{x^2-1}\,dx \\ &= \lim_{t\to\infty} \left[\frac{1}{2}\ell\text{n}\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right]_2^t \\ &= \lim_{t\to\infty} \left[\frac{1}{2}\ell\text{n}\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\ell\text{n}\left(\frac{1}{3}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\ell\text{n}3\end{aligned}$$

ดังนั้นพื้นที่ของ R เท่ากับ $\dfrac{1}{2}\ell\text{n}3$

แบบฝึกหัด 8.1

1. จงพิจารณาว่าอินทริกรัลไม่ตรงแบบต่อไปนี้ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก

1.1 $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{(x+1)^2}\,dx$

1.2 $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ell\text{n}x}{x}\,dx$

1.3 $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{1+2^x}\,dx$

1.4 $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{4+x^2}\,dx$

1.5 $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{-x}\,dx$

1.6 $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{e^x+e^{2x}}\,dx$

1.7 $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{3-2x}\,dx$

1.8 $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

1.9 $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{3-2e^x}\,dx$

1.10 $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2x^2+2x+1}\,dx$

1.11 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$

1.12 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$

2. จงหาค่าของ a ที่ทำให้ $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax}\,dx = 5$

3. จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่อยู่ระหว่างเส้นโค้ง $y = \dfrac{8}{x^2-4}$ กับแกน X เมื่อ $x \geq 3$

8.2 ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สอง

ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สอง คือปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่ช่วงการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันที่ไม่มีขอบเขตบนช่วงการหาปริพันธ์ ตัวอย่างเช่น

1. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x+1}\, dx$ ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สอง
2. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{|x|+1}\, dx$ ไม่ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สองเนื่องจาก $\dfrac{1}{|x|+1}$ มีค่าเมื่อ $x \in [-1,1]$
3. $\displaystyle\int_{0}^{3} \ell\text{n} x\, dx$ ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สอง

บทนิยาม 8.2.1 ให้ a, b เป็นจำนวนจริง และ $a < b$

1. ให้ f เป็นฟังก์ชันมีขอบเขตและหาปริพันธ์ได้บนช่วง $[t, b]$ ทุก ๆ $a < t < b$
   โดยที่ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ หรือ $+\infty$
   ถ้า $\displaystyle\lim_{t\to a^+}\int_a^t f(x)\,dx$ มีค่า จะกล่าวว่า ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ **ลู่เข้า** และ
   $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\,dx$$
   ถ้า $\displaystyle\lim_{t\to a^+}\int_a^t f(x)\,dx$ ไม่มีค่า จะกล่าวว่า ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ **ลู่ออก** และ
2. ให้ f เป็นฟังก์ชันมีขอบเขตและหาปริพันธ์ได้บนช่วง $[a, t]$ ทุก ๆ $a < t < b$
   โดยที่ $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = -\infty$ หรือ $+\infty$
   ถ้า $\displaystyle\lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\,dx$ มีค่า เราจะกล่าวว่า ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ **ลู่เข้า** และ
   $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\,dx$$
   ถ้า $\displaystyle\lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\,dx$ ไม่มีค่า เราจะกล่าวว่า ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ **ลู่ออก**
3. ให้ f เป็นฟังก์ชันมีขอบเขตและหาปริพันธ์ได้บนช่วง (a, b) และ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ หรือ $+\infty$ และ $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$ โดยที่มี $c \in (a, b)$ ที่ทำให้ f มีขอบเขตและหาปริพันธ์ได้บนช่วง $[s, c]$ และ $[c, s]$ ทุก ๆ s, t ซึ่ง $a < s < c < t < b$ ถ้าปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx$ และ $\displaystyle\int_c^b f(x)\,dx$ **ลู่เข้า** เราจะกล่าวว่า ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ **ลู่เข้า** และ
   $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$
   ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ **ลู่ออก** ก็ต่อเมื่อ $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx$ หรือ $\displaystyle\int_c^b f(x)\,dx$ **ลู่ออก**

ตัวอย่าง 8.2.2 จงพิจารณาว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_1^2 \frac{1}{(x-1)^2}\, dx$ ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$ และ $\frac{1}{(x-1)^2}$ เป็นฟังก์ชันมีขอบเขตและหาปริพันธ์ได้บน $[t,2]$ เมื่อ $1<t<2$ พิจารณา

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1}{(x-1)^2}\, dx &= \lim_{t\to 1^+} \int_t^2 \frac{1}{(x-1)^2}\, dx = \lim_{t\to 1^+} \left[-\frac{1}{x-1}\right]_t^2 \\ &= \lim_{t\to 1^+} \left[-1+\frac{1}{t-1}\right] = +\infty\end{aligned}$$

ดังนั้น $\int_1^2 \frac{1}{(x-1)^2}\, dx$ ลู่ออก

ตัวอย่าง 8.2.3 จงพิจารณาว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty$ และ $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ เป็นฟังก์ชันมีขอบเขตและหาปริพันธ์ได้บน $[0,t]$ เมื่อ $0<t<1$ พิจารณา

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx &= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,(-2x)dx = -\frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,(-x^2)'dx \\ &= -\frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\, d(-x^2) = -\frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\, d(1-x^2) \\ &= -\sqrt{1-x^2}+C\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx &= \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \lim_{t\to 1^-} \left[-\sqrt{1-x^2}\,\right]_0^t \\ &= \lim_{t\to 1^+} \left[-\sqrt{1-t^2}+1\right] = 1\end{aligned}$$

ดังนั้น $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ ลู่เข้า

ตัวอย่าง 8.2.4 จงพิจารณาว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_0^1 \frac{1}{x(x-1)}\, dx$ ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ พิจารณา

$$\int_0^1 \frac{1}{x(x-1)}\, dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(x-1)}\, dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x(x-1)}\, dx$$

เนื่องจาก $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x(x-1)} = +\infty$ และ $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x(x-1)} = -\infty$ และ $\frac{1}{x(x-1)}$ เป็นฟังก์ชันมีขอบเขตและหาปริพันธ์ได้บน $[t,\frac{1}{2}]$ และ $[\frac{1}{2},s]$ เมื่อ $0<t<\frac{1}{2}$ และ $\frac{1}{2}<s<1$ พิจารณา

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(x-1)}\,dx &= \lim_{t\to 0^+}\int_t^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(x-1)}\,dx = \lim_{t\to 0^+}\int_t^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\,dx\\ &= \lim_{t\to 0^+}\left[\ell\text{n}|x-1|-\ell\text{n}|x|\right]_t^{\frac{1}{2}} = \lim_{t\to 0^+}\left[\ell\text{n}\left|\frac{x-1}{x}\right|\right]_t^{\frac{1}{2}}\\ &= \lim_{t\to 0^+}\left[\ell\text{n}1-\ell\text{n}\left|\frac{t-1}{t}\right|\right] = -\infty\end{aligned}$$

ดังนั้น $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(x-1)}\,dx$ ลู่ออก สรุปได้ว่า $\int_0^{1} \frac{1}{x(x-1)}\,dx$ ลู่ออก

ตัวอย่าง 8.2.5 จงพิจารณาว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{1}{x\sqrt[5]{\ell\text{n}x}}\,dx$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ พิจารณา

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{1}{x\sqrt[5]{\ell\text{n}x}}\,dx = \int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{1}{x\sqrt[5]{\ell\text{n}x}}\,dx + \int_{1}^{e} \frac{1}{x\sqrt[5]{\ell\text{n}x}}\,dx$$

เนื่องจาก $\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x\sqrt[5]{\ell\text{n}x}} = +\infty$ และ $\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x\sqrt[5]{\ell\text{n}x}} = -\infty$ และ $\frac{1}{x\sqrt[5]{\ell\text{n}x}}$ เป็นฟังก์ชันมีขอบเขตและหาปริพันธ์ได้บน $[\frac{1}{e},t]$ และ $[s,1]$ เมื่อ $\frac{1}{2}<t<0$ และ $1<s<e$ พิจารณา

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x\sqrt[5]{\ell\text{n}x}}\,dx &= \int (\ell\text{n}x)^{-\frac{1}{5}}\,(\ell\text{n}x)'dx\\ &= \int (\ell\text{n}x)^{-\frac{1}{5}}\,d(\ell\text{n}x) = \frac{5}{4}(\ell\text{n}x)^{\frac{4}{5}}+C\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{1}{x\sqrt[5]{\ell\text{n}x}}\,dx &= \lim_{t\to 1^-}\int_{\frac{1}{e}}^{t} \frac{1}{x\sqrt[5]{\ell\text{n}x}}\,dx = \lim_{t\to 1^-}\left[\frac{5}{4}(\ell\text{n}x)^{\frac{4}{5}}\right]_{\frac{1}{e}}^{t}\\ &= \lim_{t\to 1^-}\left[\frac{5}{4}(\ell\text{n}t)^{\frac{4}{5}}-\frac{5}{4}\right] = -\frac{5}{4}\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}\int_{1}^{e} \frac{1}{x\sqrt[5]{\ell\text{n}x}}\,dx &= \lim_{s\to 1^+}\int_{s}^{e} \frac{1}{x\sqrt[5]{\ell\text{n}x}}\,dx = \lim_{s\to 1^+}\left[\frac{5}{4}(\ell\text{n}x)^{\frac{4}{5}}\right]_{s}^{e}\\ &= \lim_{s\to 1^+}\left[\frac{5}{4}-\frac{5}{4}(\ell\text{n}s)^{\frac{4}{5}}\right] = \frac{5}{4}\end{aligned}$$

ดังนั้น

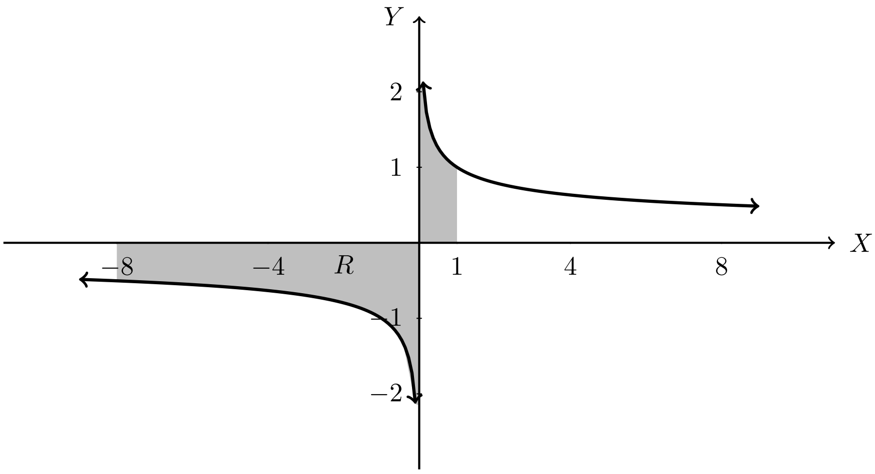
$$\int \frac{1}{x\sqrt[5]{\ell\text{n}x}}\,dx = -\frac{5}{4}+\frac{5}{4} = 0$$

สรุปได้ว่า $\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{1}{x\sqrt[5]{\ell\text{n}x}}\,dx$ ลู่เข้า

ตัวอย่าง 8.2.6 จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่อยู่ระหว่างเส้นโค้ง

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \quad \text{กับแกน X เมื่อ } x \in [-8, 1]$$

วิธีทำ ให้ R แทนอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วย $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ กับแกน X เมื่อ $x \in [-8, 1]$ แสดงได้ดังรูป



พื้นที่ของ R คือ $\displaystyle\int_{-8}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ เนื่องจาก $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = +\infty$ และ $\displaystyle\lim_{x\to0^-} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = -\infty$ และ $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ เป็นฟังก์ชันมีขอบเขตและหาปริพันธ์ได้บน $[-8, t]$ และ $[s, 1]$ เมื่อ $-8 < t < 0$ และ $0 < s < 1$ พิจารณา

$$\int_{-8}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \int_{-8}^{0} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \int_{-8}^{0} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx &= \lim_{t\to0^-} \int_{-8}^{t} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \lim_{t\to0^-} \left[\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\right]_{-8}^{t} \\ &= \lim_{t\to0^-} \left[\frac{3}{2}t^{\frac{2}{3}} - 6\right] = -6 \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx &= \lim_{s\to0^+} \int_{s}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \lim_{s\to0^+} \left[\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\right]_{s}^{1} \\ &= \lim_{s\to0^+} \left[\frac{3}{2} - \frac{3}{2}s^{\frac{2}{3}}\right] = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

ดังนั้น $\displaystyle\int_{-8}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ ลู่เข้า สรุปได้ว่าพื้นที่ของ R เท่ากับ $|-6| + \dfrac{3}{2} = \dfrac{15}{2} = 7.5$

แบบฝึกหัด 8.2

1. จงพิจารณาว่าอินทริกรัลไม่ตรงแบบต่อไปนี้ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก

1.1 $\displaystyle\int_0^9 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

1.2 $\displaystyle\int_3^4 \frac{1}{(x-3)^2}\,dx$

1.3 $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx$

1.4 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{1-2\sin x}\,dx$

1.5 $\displaystyle\int_0^2 \frac{2x+1}{x^2+x-6}\,dx$

1.6 $\displaystyle\int_0^4 \frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

1.7 $\displaystyle\int_2^4 \frac{x}{\sqrt[3]{x-2}}\,dx$

1.8 $\displaystyle\int_{-1}^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

1.9 $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,dx$

1.10 $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{x^2+2x-3}\,dx$

1.11 $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\,dx$

1.12 $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{1}{x^2-x-2}\,dx$

2. จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่อยู่ระหว่างเส้นโค้ง $y = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ กับแกน X เมื่อ $x \in [0,4]$

3. จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่อยู่ระหว่างเส้นโค้ง $y = \dfrac{1}{x}$ และ $y = \dfrac{1}{x(x^2+1)}$ เมื่อ $x \in [0,1]$

8.3 ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดผสม

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงรูปแบบของปริพันธ์ไม่ตรงแบบที่ผสมระหว่างชนิดที่หนึ่งและชนิดที่สอง โดยการพิจารณาเป็นช่วงย่อย และพิจารณาการลู่เข้าลู่ออกตามนิยามตามหัวข้อที่กล่าวมาแล้ว

ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดผสมจะลู่เข้าก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ ช่วงย่อยที่พิจารณาลู่เข้าทั้งหมด แต่ถ้ามีอย่างน้อยช่วงย่อยลู่ออกจะสรุปได้ว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดผสมลู่ออก

ตัวอย่าง 8.3.1 จงพิจารณาว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ พิจารณา

$$\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx = \int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx + \int_3^\infty \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx$$

เนื่องจาก $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{\sqrt{x-2}} = +\infty$ และ $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{x-2}}$ เป็นฟังก์ชันมีขอบเขตและหาปริพันธ์ได้บน $[t,3]$ และ $[3,s]$ เมื่อ $2<t<3$ และ $s>3$ พิจารณา

$$\begin{aligned}\int_3^\infty \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx &= \lim_{s\to\infty}\int_3^s \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx = \lim_{s\to\infty}\int_3^s (x-2)^{-\frac{1}{2}}\,dx\\ &= \lim_{s\to\infty}\left[2\sqrt{x-2}\right]_3^s = \lim_{s\to\infty}\left[2\sqrt{s-2}-1\right] = +\infty\end{aligned}$$

ดังนั้น $\displaystyle\int_3^\infty \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx$ ลู่ออก สรุปได้ว่า $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx$ ลู่ออก

ตัวอย่าง 8.3.2 จงพิจารณาว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\displaystyle\int_{-\infty}^1 \frac{1}{(1-x)^{\frac{2}{3}}}\,dx$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ พิจารณา

$$\int_{-\infty}^1 \frac{1}{(1-x)^{\frac{2}{3}}}\,dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{(1-x)^{\frac{2}{3}}}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{(1-x)^{\frac{2}{3}}}\,dx$$

เนื่องจาก $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{(1-x)^{\frac{2}{3}}} = +\infty$ และ $\displaystyle\frac{1}{(1-x)^{\frac{2}{3}}}$ เป็นฟังก์ชันมีขอบเขตและหาปริพันธ์ได้บน $[t,0]$ และ $[0,s]$ เมื่อ $t<0$ และ $0<s<1$ พิจารณา

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^0 \frac{1}{(1-x)^{\frac{2}{3}}}\,dx &= \lim_{t\to-\infty}\int_t^0 \frac{1}{(1-x)^{\frac{2}{3}}}\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^0 (1-x)^{-\frac{2}{3}}\,dx\\ &= \lim_{t\to-\infty}\left[\frac{1}{3}(1-x)^{\frac{1}{3}}\right]_t^0 = \lim_{t\to-\infty}\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{3}(1-t)^{\frac{1}{3}}\right] = -\infty\end{aligned}$$

ดังนั้น $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{1}{(1-x)^{\frac{2}{3}}}\,dx$ ลู่ออก สรุปได้ว่า $\displaystyle\int_{-\infty}^1 \frac{1}{(1-x)^{\frac{2}{3}}}\,dx$ ลู่ออก

ตัวอย่าง 8.3.3 จงพิจารณาว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{2^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ พิจารณา

$$\int_0^\infty \frac{2^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 \frac{2^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx + \int_1^\infty \frac{2^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$$

เนื่องจาก $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{2^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = +\infty$ และ $\displaystyle\frac{2^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ เป็นฟังก์ชันมีขอบเขตและหาปริพันธ์ได้บน $[t,1]$ และ $[1,s]$ เมื่อ $0 < t < 1 < s$ พิจารณา

$$\begin{aligned}\int \frac{2^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx &= -2\int 2^{-\sqrt{x}}\,(-\sqrt{x})'dx \\ &= -2\int 2^{-\sqrt{x}}\,d(-\sqrt{x}) \\ &= -2\cdot\frac{2^{-\sqrt{x}}}{\ell\text{n}2} + C = -\frac{2}{\ell\text{n}2\cdot 2^{\sqrt{x}}} + C\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{2^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx &= \lim_{t\to 0^+}\int_t^1 \frac{2^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{t\to 0^+}\left[-\frac{2}{\ell\text{n}2\cdot 2^{\sqrt{x}}}\right]_t^1 \\ &= \lim_{t\to 0^+}\left[-\frac{1}{\ell\text{n}2} + \frac{2}{\ell\text{n}2\cdot 2^{\sqrt{t}}}\right] = \frac{1}{\ell\text{n}2}\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{2^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx &= \lim_{s\to\infty}\int_1^s \frac{2^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{s\to\infty}\left[-\frac{2}{\ell\text{n}2\cdot 2^{\sqrt{x}}}\right]_1^s \\ &= \lim_{s\to\infty}\left[-\frac{2}{\ell\text{n}2\cdot 2^{\sqrt{s}}} + \frac{1}{\ell\text{n}2}\right] = \frac{1}{\ell\text{n}2}\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\int_0^\infty \frac{2^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{\ell\text{n}2} + \frac{1}{\ell\text{n}2} = \frac{2}{\ell\text{n}2}$$

สรุปได้ว่า $\displaystyle\int_0^\infty \frac{2^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ ลู่เข้า

ตัวอย่าง 8.3.4 จงพิจารณาว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+1}}\,dx$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ จะเห็นว่า $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{x^2-2x+1}} = \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2}} = \frac{1}{|x-1|}$ พิจารณา

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2-2x+1}\,dx &= \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{|x-1|}\,dx \\ &= \int_{-\infty}^0 \frac{1}{|x-1|}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{|x-1|}\,dx \\ &\quad + \int_1^2 \frac{1}{|x-1|}\,dx + \int_2^\infty \frac{1}{|x-1|}\,dx\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{|x-1|}=+\infty$ และ $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{|x-1|}=+\infty$ และ $\dfrac{1}{|x-1|}$ เป็นฟังก์ชันมีขอบเขตและหาปริพันธ์ได้บน $[t,0]$, $[0,s]$, $[u,2]$ และ $[2,v]$ เมื่อ $t<0<s<1<u<2<v$ จะเห็นได้ว่า

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2-2x+1}\,dx &= \lim_{t\to-\infty}\int_t^0\frac{1}{|x-1|}\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^0\frac{1}{1-x}\,dx\\ &= \lim_{t\to-\infty}\left[-\ell\text{n}|1-x|\right]_t^0 = \lim_{t\to-\infty}\left[0+\ell\text{n}|1-t|\right]=+\infty\end{aligned}$$

ดังนั้น $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2-2x+1}\,dx$ ลู่ออก สรุปได้ว่า $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2-2x+1}\,dx$ ลู่ออก

แบบฝึกหัด 8.3

จงพิจารณาว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบต่อไปนี้ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}\,dx$
2. $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$
3. $\displaystyle\int_{-1}^{\infty}\frac{1}{x^2-1}\,dx$
4. $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{x\ell\text{n}x}\,dx$
5. $\displaystyle\int_0^{\infty}x^{-0.1}\,dx$
6. $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x}(x+4)}\,dx$
7. $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2-6x+8}\,dx$
8. $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\,dx$
9. $\displaystyle\int_2^{\infty}\frac{1}{(x+7)\sqrt{x-2}}\,dx$
10. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+2x+1}\,dx$

สรุป

ในบทนี้จะกล่าวถึงปริพันธ์บนช่วงอนันต์ หรือปริพันธ์ของฟังก์ชันที่ไม่มีขอบเขตบนช่วงการหาปริพันธ์ เรียกว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบแบ่งออกเป็น 3 ชนิด เริ่มด้วยปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง คือ ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่ช่วงการหาปริพันธ์เป็นช่วงอนันต์ ถ้า f เป็นฟังก์ชันมีขอบเขตและหาปริพันธ์ได้บน $[a,t]$ ทุก ๆ $t>a$ ถ้า $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx$ มีค่า แล้ว $\displaystyle\int_a^{\infty}f(x)\,dx$ ลู่เข้า และ

$$\int_a^{\infty}f(x)\,dx=\lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx$$

ถ้า $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx$ ไม่มีค่า แล้ว $\displaystyle\int_a^{\infty}f(x)\,dx$ ลู่ออก ถ้า f เป็นฟังก์ชันมีขอบเขตและหาปริพันธ์ได้บน $[t,b]$ ทุก ๆ $t<b$ ถ้า $\displaystyle\lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\,dx$ มีค่า แล้ว $\displaystyle\int_{-\infty}^{b}f(x)\,dx$ ลู่เข้า และ

$$\int_{-\infty}^{b}f(x)\,dx=\lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\,dx$$

ถ้า $\lim\limits_{t\to-\infty}\displaystyle\int_t^b f(x)\,dx$ ไม่มีค่า จะกล่าวว่า ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\displaystyle\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ ลู่ออก ให้ $c \in \mathbb{R}$ และ f เป็นฟังก์ชันมีขอบเขตและหาปริพันธ์ได้บน $[a,b]$ ทุก ๆ a,b $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ ลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ $\displaystyle\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx$ และ $\displaystyle\int_{c}^{\infty} f(x)\,dx$ ลู่เข้า $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ ลู่ออก ก็ต่อเมื่อ $\displaystyle\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx$ หรือ $\displaystyle\int_{c}^{\infty} f(x)\,dx$ ลู่ออก

จากนั้นกล่าวถึงปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สอง คือปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่ช่วงการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันที่ไม่มีขอบเขตบนช่วงการหาปริพันธ์ ให้ f เป็นฟังก์ชันมีขอบเขตและหาปริพันธ์ได้บน $[t,b]$ ทุก ๆ $a<t<b$ โดยที่ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ หรือ $+\infty$

ถ้า $\lim\limits_{t\to a^+}\displaystyle\int_a^t f(x)\,dx$ มีค่า แล้ว $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ ลู่เข้า และ

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\,dx$$

ถ้า $\lim\limits_{t\to a^+}\displaystyle\int_a^t f(x)\,dx$ ไม่มีค่า แล้ว $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ ลู่ออก และ ให้ f เป็นฟังก์ชันมีขอบเขตและหาปริพันธ์ได้บน $[a,t]$ ทุก ๆ $a<t<b$ โดยที่ $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = -\infty$ หรือ $+\infty$ ถ้า $\lim\limits_{t\to b^-}\displaystyle\int_a^t f(x)\,dx$ มีค่า แล้ว $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ ลู่เข้า และ

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\,dx$$

ถ้า $\lim\limits_{t\to b^-}\displaystyle\int_a^t f(x)\,dx$ ไม่มีค่า แล้ว $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ ลู่ออก ให้ f เป็นฟังก์ชันมีขอบเขตและหาปริพันธ์ได้บน (a,b) และ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ หรือ $+\infty$ และ $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$ โดยที่มี $c \in (a,b)$ ที่ทำให้ f มีขอบเขตและหาปริพันธ์ได้บน $[s,c]$ และ $[c,s]$ ทุก ๆ s,t ซึ่ง $a<s<c<t<b$ ถ้า $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx$ และ $\displaystyle\int_c^b f(x)\,dx$ ลู่เข้า แล้ว $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ ลู่เข้า และ

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

แล้ว $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ ลู่ออก ก็ต่อเมื่อ $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx$ หรือ $\displaystyle\int_c^b f(x)\,dx$ ลู่ออก สุดท้ายกล่าวถึงปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดผสม คือปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่ช่วงการหาปริพันธ์เป็นช่วงอนันต์ และช่วงการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันที่ไม่มีขอบเขตบนช่วงการหาปริพันธ์ สำหรับปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดผสมจะลู่เข้าก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ ช่วงย่อยที่พิจารณาลู่เข้าทั้งหมด แต่ถ้ามีอย่างน้อยช่วงย่อยลู่ออกจะสรุปได้ว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดผสมลู่ออก

แบบฝึกหัดบทที่ 8

1. จงพิจารณาว่าอินทริกรัลไม่ตรงแบบต่อไปนี้ลู่เข้าหรือลู่ออก

1.1 $\int_0^{\infty} \cos x \, dx$

1.2 $\int_e^{\infty} \frac{1}{x \ln^3 x} \, dx$

1.3 $\int_{-1}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} \, dx$

1.4 $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x}} \, dx$

1.5 $\int_0^{\infty} e^{-x} \cos x \, dx$

1.6 $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+e^{\sqrt{x}})} \, dx$

1.7 $\int_{-\infty}^{0} e^{3x} \, dx$

1.8 $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(1-x)^{\frac{5}{2}}} \, dx$

1.9 $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(x-8)^{\frac{2}{3}}} \, dx$

1.10 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x+1|}{x^2+1} \, dx$

1.11 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+3)^2} \, dx$

1.12 $\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} \, dx$

2. จงพิจารณาว่าอินทริกรัลไม่ตรงแบบต่อไปนี้ลู่เข้าหรือลู่ออก

2.1 $\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$

2.2 $\int_0^{4} \frac{1}{(4-x)^{\frac{3}{2}}} \, dx$

2.3 $\int_0^{1} x \ln x \, dx$

2.4 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec^2 x \, dx$

2.5 $\int_0^{1} \ln x \, dx$

2.6 $\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{x}}} \, dx$

2.7 $\int_0^{2} \frac{x}{(x^2-1)^2} \, dx$

2.8 $\int_{-2}^{7} \frac{1}{(x+1)^{\frac{2}{3}}} \, dx$

2.9 $\int_2^{4} \frac{1}{(x-3)^7} \, dx$

2.10 $\int_1^{3} \frac{x}{(x^2-4)^3} \, dx$

2.11 $\int_0^{2} \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} \, dx$

2.12 $\int_0^{1} \frac{1}{x(\ln x)^{\frac{1}{5}}} \, dx$

3. จงพิจารณาว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบต่อไปนี้ลู่เข้าหรือลู่ออก

3.1 $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{|x|}} \, dx$

3.2 $\int_0^{\infty} \frac{e^x}{e^x-1} \, dx$

3.3 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2-3x+2} \, dx$

3.4 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{e^x-1} \, dx$

3.5 $\int_0^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx$

3.6 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x-2|} \, dx$

4. จงหาเงื่อนไขของ p ที่ทำให้ $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} \, dx$ ลู่เข้า

5. จงหาเงื่อนไขของ s ที่ทำให้ $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-st} t\, dt$ ลู่เข้า

6. จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่อยู่ระหว่างเส้นโค้ง $y = \dfrac{1}{x}$ และ $y = \dfrac{1}{x^2}$ เมื่อ $x \geq 1$

7. จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่อยู่ระหว่างเส้นโค้ง $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1-x}}$ กับแกน X เมื่อ $x \in [0, 4]$

เอกสารอ้างอิง

ดำรง ทิพย์โยธา, ยุวรีย์ พันธ์กล้า และณัฏฐนาถ ไตรภพ. (2548). **แคลคูลัส ๑**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

James Stewart. (2012). **Calculus Early Transcendentals**. Seventh Edition. Canada. Nelson Education Ltd.

Joel Hass, Christopher Heil and Maurice D. Weir. (2019). **Thomas' Calculus: Early Transcendentals.** Fourteenth Edition. USA. Pearson Education, Inc.

บรรณานุกรม

กรรณิกา กวักเพฑูรย์. (2542). **หลักคณิตศาสตร์**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ดำรง ทิพย์โยธา, ยุวรีย์ พันธ์กล้า และณัฏฐนาถ ไตรภพ. (2548). **แคลคูลัส ๑**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ธนัชยศ จำปาหวาย. (2559). **เอกสารประกอบการสอนวิชาหลักการคณิตศาสตร์สำหรับครู**. กรุงเทพฯ: เอกสารอัดสำเนา

อนุกรรมการปรับปรุงหลักสูตรวิทยาศาสตร์ทบวงมหาวิทยาลัย. (2545). **เซต ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์พิทักษ์การพิมพ์

Brian Clegg. (2003). **A brief history of infinity.** UK: CPI group (UK) Ltd

David Eugene Smith. (1958). **History of mathematics.** New York: Dover Publications, Inc.

James Stewart. (2012). **Calculus Early Transcendentals.** Seventh Edition. Canada. Nelson Education Ltd.

Joel Hass, Christopher Heil and Maurice D. Weir. (2019). **Thomas' Calculus: Early Transcendentals.** Fourteenth Edition. USA. Pearson Education, Inc.

Josip Hercet, Lorraine Heienrichs, Palmira Mariz Seiler and Marlence Torres Skoumal. (2012). **Mathematics higher level.** New York: Oxford university press.

Michael Haese, Sandra Haese, Mark umphries, Edward Kemp and Pamela Vollma. (2014). **Mathematics for the international student 10E MYP5 (Extended).** Marleston, Australia : Haese& Harris Publications

Pual Glendinning. (2012). **Maths in minutes.** London, England: Quercus Editions Ltd.

Tom Jackson. (2012). **Mathematics an illustrated history of numbers.** New York: Shelter Harbor Press and Worth Press Ltd

ดัชนี