แคลคูลัส 2

Calculus 2

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์

มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

2566

MAC1303

แคลคูลัส 2

Calculus 2

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

สารบัญ

สารบัญตาราง

สารบัญรูป

บทที่ 1

ลำดับและอนุกรม

1.1 ลำดับของจำนวนจริง

บทนิยาม 1.1.1 ลำดับ (Sequence) ของจำนวนจริง คือฟังก์ชันที่โดเมนเป็นจำนวนเต็มบวก และค่าเป็นจำนวนจริง

ให้ $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง นิยมเขียน $a(n)$ แทนด้วย a_n ดังนั้น

$$a = \{(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), ..., (n, a_n), ...\}$$

เนื่องจาก a_n ต้องคู่กับ n เสมอ ในคู่อันดับ (n, a_n) ดังนั้นจะเขียนลำดับ a ด้วยสัญลักษณ์

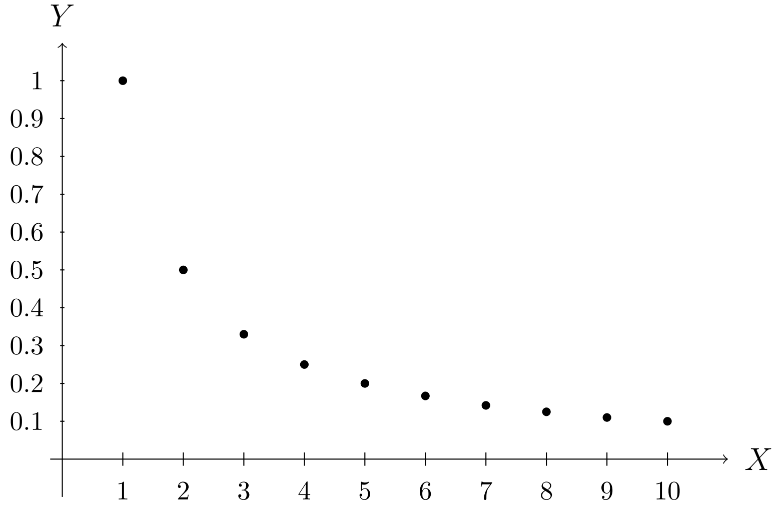
$$\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...\} \quad \text{หรือ} \quad a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... \quad \text{หรือ} \quad \{a_n\}$$

โดยเรียก a_n ว่าพจน์ที่ n หรือพจน์ทั่วไปของลำดับ $\{a_n\}$

ตัวอย่าง 1.1.2 จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับต่อไปนี้

1. $\{1, 3, 5, 7, ...\}$ คำตอบ $a_n = 2n - 1$
2. $2, 7, 12, 17, ...$ คำตอบ $a_n = 5n - 3$
3. $\{-1, 1, -1, 1, ...\}$ คำตอบ $a_n = (-1)^n$
4. $1, 3, 7, 15, ...$ คำตอบ $a_n = 2^n - 1$
5. $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ...\right\}$ คำตอบ $a_n = \frac{1}{2^n}$
6. $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}, ...\right\}$ คำตอบ $a_n = \frac{1}{n!}$

พิจารณากราฟของลำดับ $\{\frac{1}{n}\}$



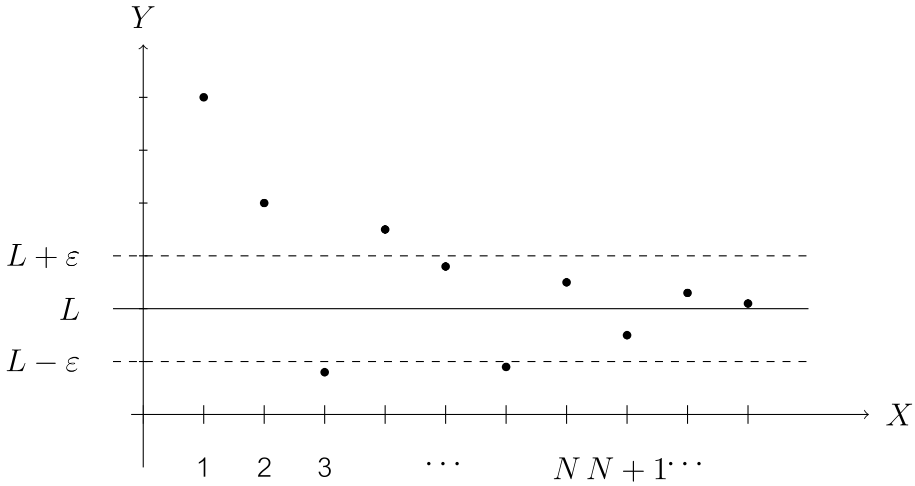
จากกราฟข้างต้นแนวโน้ม $\dfrac{1}{n}$ จะเข้าใกล้ 0 เมื่อ n มีค่ามาก ๆ นั่นหมายถึง $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$ แต่เป็นเพียงการคาดเดาเท่านั้นไม่ใช่การพิสูจน์ ซึ่งการยืนยันค่าดังกล่าวต้องอาศัยบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 1.1.3 ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง และ $L\in\mathbb{R}$ จะกล่าวว่า L เป็นลิมิตของ $\{a_n\}$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับจำนวนจริงบวก ε ใด ๆ จะมี $N\in\mathbb{N}$ ที่ทำให้

$$|a_n-L|<\varepsilon \qquad \text{ทุก ๆ จำนวนนับ } n\geq N$$

และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=L$ และแสดงความหมายได้ดังกราฟต่อไปนี้

รูปที่ 1.1: กราฟแสดงลิมิตของลำดับโดยบทนิยาม



ต่อไปจะเรากล่าวถึง **หลักการอาร์คีมิดีส** (Archimedes Principle) เพื่อใช้ในการพิสูจน์เกี่ยวกับลิมิตของลำดับ ซึ่งกล่าวไว้ว่า

$$\text{สำหรับจำนวนจริงบวก } x \text{ ใด ๆ จะได้ว่ามี } n\in\mathbb{N} \text{ ซึ่ง } \frac{1}{n}<x$$

ตัวอย่าง 1.1.4 จงพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

บทพิสูจน์. ให้ $\varepsilon > 0$ โดยหลักการอาร์คีมิดีส จะได้ว่ามี N เป็นจำนวนนับซึ่ง $\dfrac{1}{N} < \varepsilon$
ให้ $n \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $n \geq N$ จะได้ว่า

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ □

ทฤษฎีบท 1.1.5 ให้ t เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^t} = 0$$

บทพิสูจน์. ให้ $\varepsilon > 0$ และ $t \in \mathbb{Z}^+$ ทำให้ได้ว่า $\sqrt[t]{\varepsilon} > 0$
โดยหลักการอาร์คีมิดีส จะได้ว่ามี N เป็นจำนวนนับซึ่ง $\dfrac{1}{N} < \sqrt[t]{\varepsilon}$
ให้ $n \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $n \geq N$ จะได้ว่า $n^t \geq N^t$ ฉะนั้น

$$\left|\frac{1}{n^t} - 0\right| = \frac{1}{n^t} \leq \frac{1}{N^t} < \varepsilon$$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^t} = 0$ □

เราอาจขยายทฤษฎีบทนี้ไปยัง t ที่เป็นจำนวนจริงบวก ผลที่ได้ยังคงเหมือนเดิม

ทฤษฎีบท 1.1.6 สำหรับค่าคงตัว k ใด ๆ จงแสดงว่า

$$\lim_{n\to\infty} k = k$$

บทพิสูจน์. ให้ $a_n = k$ และ $\varepsilon > 0$ ไม่ว่า N เป็นจำนวนนับใด ๆ จะได้ว่า

$$|a_n - k| = |k - k| = 0 < \varepsilon \quad \text{ทุก ๆ จำนวนนับ } n \geq N$$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} k = k$ □

ทฤษฎีบท 1.1.7 ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง และ $L, k \in \mathbb{R}$ โดยที่ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} ka_n = k \lim_{n\to\infty} a_n = kL$$

บทพิสูจน์. สมมติว่า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ ให้ $\varepsilon > 0$ จะได้ว่ามีจำนวนนับ N ซึ่ง

$$|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{|k| + 1} \quad \text{ทุก ๆ จำนวนนับ } n \geq N$$

ให้ $n \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $n \geq N$ จะได้ว่า

$$|ka_n - kL| < |k||a_n - L| < |k| \cdot \frac{\varepsilon}{|k|+1} < \varepsilon$$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} ka_n = kL$ □

ทฤษฎีบท 1.1.8 ให้ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง และ $L, M \in \mathbb{R}$ โดยที่ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = M$ จะได้ว่า

1. $\lim\limits_{n\to\infty}[a_n + b_n] = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L + M$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = LM$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{L}{M}$ เมื่อ $M \neq 0$
4. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^m = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^m = L^m$ เมื่อ $m \in \mathbb{N}$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{\lim\limits_{n\to\infty} a_n} = \sqrt[m]{L}$ เมื่อ $m \in \mathbb{N}$ และ $\sqrt[m]{L} \in \mathbb{R}$

บทพิสูจน์. สมมติว่า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = M$ ให้ $\varepsilon > 0$ จะได้ว่ามีจำนวนนับ N_1, N_2 ซึ่ง

$$|a_n - L| < \tfrac{\varepsilon}{2} \quad \text{ทุก ๆ จำนวนนับ } n \geq N_1$$
$$|b_n - M| < \tfrac{\varepsilon}{2} \quad \text{ทุก ๆ จำนวนนับ } n \geq N_2$$

เลือก $N = \max\{N_1, N_2\}$ (ค่าสูงสุดของ N_1 และ N_2) ให้ $n \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $n \geq N$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
|(a_n + b_n) - (L + M)| &= |(a_n - L) + (b_n - M)| \\
&\leq |a_n - L| + |b_n - M| && \text{อสมการสามเหลี่ยม} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty}[a_n + b_n] = L + M$

ข้อ 2-5 ทำเป็นแบบฝึกหัด □

ตัวอย่าง 1.1.9 จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 + n + 3}{1 - 3n + 2n^2}$

   แนวคำตอบ จัดรูปและใช้ทฤษฎีบทของลิมิต จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + n + 3}{1 - 3n + 2n^2} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(1 + \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2})}{n^2(\frac{1}{n^2} - \frac{3}{n} + 2)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}}{\frac{1}{n^2} - \frac{3}{n} + 2} \\
&= \frac{1 + 0 + 0}{0 - 0 + 2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9n^2+1}}{n+\sqrt[3]{n^3+1}}$

แนวคำตอบ จัดรูปและใช้ทฤษฎีบทของลิมิต จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9n^2+1}}{n+\sqrt[3]{n^3+1}} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2(9+\frac{1}{n^2})}}{n+\sqrt[3]{n^3(1+\frac{1}{n^3})}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2}\sqrt{9+\frac{1}{n^2}}}{n+\sqrt[3]{n^3}\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^3}}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{|n|\sqrt{9+\frac{1}{n^2}}}{n+n\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^3}}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{9+\frac{1}{n^2}}}{n(1+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^3}})}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9+\frac{1}{n^2}}}{1+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^3}}}\\
&= \frac{\sqrt{9+0}}{1+\sqrt[3]{1+0}} = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.1.10 จงหาค่าลิมิต $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$

แนวคำตอบ จัดรูปและใช้ทฤษฎีบทของลิมิต จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n) &= \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)\cdot\frac{\sqrt{n^2+n}+n}{\sqrt{n^2+n}+n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+n)-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2(1+\frac{1}{n})}+n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2}\sqrt{1+\frac{1}{n}}+n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{|n|\sqrt{1+\frac{1}{n}}+n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}+n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1)}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 1.1.11 ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$$

บทพิสูจน์. สมมติว่า $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ให้ $\varepsilon > 0$ จะได้ว่ามีจำนวนนับ N ซึ่ง

$$|a_n| = |a_n - 0| < \varepsilon \quad \text{ทุก ๆ จำนวนนับ } n \geq N$$

ให้ $n \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $n \geq N$ จะได้ว่า

$$||a_n| - 0| = |a_n| < \varepsilon$$

ในทางกลับกัน สมมติว่า $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ ให้ $\varepsilon > 0$ จะได้ว่ามีจำนวนนับ N ซึ่ง

$$|a_n| = ||a_n|| = ||a_n| - 0| < \varepsilon \quad \text{ทุก ๆ จำนวนนับ } n \geq N$$

ให้ $n \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $n \geq N$ จะได้ว่า

$$|a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon$$

□

ตัวอย่าง 1.1.12 จงหาค่าลิมิตของ $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

โดยทฤษฎีบท 1.1.11 สรุปได้ว่า $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

ทฤษฎีบท 1.1.13 ทฤษฎีบทการบีบ (The Squeeze Theorem)
ให้ $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ และ $\{c_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง ถ้า $n_0 \in \mathbb{N}$ เมื่อ $L \in \mathbb{R}$ ซึ่ง

$$a_n \leq b_n \leq c_n \qquad \text{ทุกจำนวนนับ } n \geq n_0$$

และ $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$ แล้ว $\lim_{n\to\infty} b_n = L$

บทพิสูจน์. สมมติว่า $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$ โดยที่

$$a_n \leq b_n \leq c_n \qquad \text{ทุกจำนวนนับ } n \geq n_0$$

ให้ $\varepsilon > 0$ จะได้ว่ามีจำนวนนับ N_1, N_2 ซึ่ง

$$\begin{aligned} |a_n - L| < \varepsilon \quad &\text{หรือ} \quad L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon \qquad \text{ทุกจำนวนนับ } n \geq N_1 \\ |c_n - L| < \varepsilon \quad &\text{หรือ} \quad L - \varepsilon < c_n < L + \varepsilon \qquad \text{ทุกจำนวนนับ } n \geq N_2 \end{aligned}$$

เลือก $N = \max\{n_0, N_1, N_2\}$ สำหรับจำนวนนับ $n \geq N$ จะได้ว่า

$$L - \varepsilon < a_n < b_n < c_n < L + \varepsilon$$

ทำให้ได้ว่า $|b_n - L| < \varepsilon$ ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} b_n = L$ □

ตัวอย่าง 1.1.14 จงใช้ทฤษฎีบทการบีบแสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{\sqrt{n}} = 0$

แนวคำตอบ จากสมบัติของฟังก์ชันไซน์

$$-1 \leq \sin n < 1 \qquad \text{ทุก ๆ } n \in \mathbb{N}$$

จะได้ว่า

$$-\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{\sin n}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad \text{ทุก ๆ } n \in \mathbb{N}$$

เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty} -\dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$ โดยทฤษฎีบทการบีบสรุปได้ว่า $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{\sqrt{n}} = 0$

ทฤษฎีบท 1.1.15 ให้ r เป็นจำนวนจริงซึ่ง $|r| < 1$ จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} r^n = 0$$

บทพิสูจน์. ให้ r เป็นจำนวนจริงซึ่ง $|r| < 1$
กรณีที่ $r = 0$ เห็นได้ชัด โดยไม่เสียนัยทั่วไป $0 < r < 1$ จะได้ว่า $\frac{1}{r} > 1$ กำหนดให้ $M = \frac{1}{r} - 1 > 0$ หรือ $r = \frac{1}{M+1}$ ให้ $\varepsilon > 0$ โดยหลักการอาร์คีมิดีส จะได้ว่ามีจำนวนนับ N ซึ่ง

$$\frac{1}{N} < \varepsilon M$$

ให้ $n \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $n \geq N$ โดยสูตรของทวินาม (Binomial expansion)

$$(1+M)^n \geq 1 + nM$$

(พิสูจน์โดยหลักอุปนัยทางคณิตศาสตร์ : เป็นแบบฝึกหัด) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |r^n - 0| = r^n = \frac{1}{(1+M)^n} &\leq \frac{1}{1+nM} \\ &\leq \frac{1}{nM} \leq \frac{1}{NM} < \varepsilon \end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$ เมื่อ $|r| < 1$ □

ตัวอย่าง 1.1.16 จงหาค่าลิมิตของ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n + 2^{n+1}}{3^{n-1} - 3 \cdot 2^n}$

แนวคำตอบ จัดรูปและใช้ทฤษฎีบท 1.1.15 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{3^n + 2^{n+1}}{3^{n-1} - 3 \cdot 2^n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{3^n + 2 \cdot 2^n}{3^n \cdot 3^{-1} - 3 \cdot 2^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{3^n(1 + 2 \cdot \frac{2^n}{3^n})}{3^n(\frac{1}{3} - 3 \cdot \frac{2^n}{3^n})} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1 + 2\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{1}{3} - 3\left(\frac{2}{3}\right)^n} \\ &= \frac{1 + 2 \cdot 0}{\frac{1}{3} - 3 \cdot 0} = 3 \end{aligned}$$

ลำดับลู่เข้าและลำดับลู่ออก

บทนิยาม 1.1.17 ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง จะกล่าวว่า $\{a_n\}$ เป็น **ลำดับลู่เข้า** (convergent) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริง L ซึ่ง $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ นอกจากนั้น $\{a_n\}$ เป็น **ลำดับลู่ออก** (divergent)

ตัวอย่าง 1.1.18 จงพิจารณาว่าลำดับต่อไปนี้เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\left\{\dfrac{(n+1)^2}{\sqrt{n^4+1}}\right\}$

   แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{\sqrt{n^4+1}} &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{\sqrt{n^4(1+\frac{1}{n^4})}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})}{\sqrt{n^4}\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})}{n^2\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}}\\
&= \frac{1+0+0}{\sqrt{1+0}} = 1
\end{aligned}$$

   ดังนั้น $\left\{\dfrac{(n+1)^2}{\sqrt{n^4+1}}\right\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

2. $\{n-\sqrt{n}\}$

   แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n-\sqrt{n} &= \lim_{n\to\infty}(n-\sqrt{n})\cdot\frac{n+\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n}{n+\sqrt{n}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2(1-\frac{1}{n})}{n(1+\frac{1}{\sqrt{n}})}\\
&= \lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}\\
&= \infty\cdot\frac{1-0}{1+0} = \infty
\end{aligned}$$

   ดังนั้น $\{n-\sqrt{n}\}$ เป็นลำดับลู่ออก

ในบางกรณีเราสามารถหาลิมิต $\lim_{n\to\infty} a_n$ ได้จากการหาลิมิต

$$\lim_{x\to\infty} f(x)$$

เมื่อ f เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่กำหนดบนช่วง $[1,\infty)$ และ $f(n) = a_n$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$ โดยอาศัยความรู้ในวิชาแคลคูลัส 1 จะไดทำให้สรุปได้ว่า

$$\text{ถ้า } \lim_{x\to\infty} f(x) = L,\ \infty \ \text{ หรือ } -\infty \ \text{ แล้ว } \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} a_n$$

ตัวอย่าง 1.1.19 จงพิจารณาว่าลำดับต่อไปนี้เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\left\{\dfrac{2^n}{n}\right\}$

แนวคำตอบ ให้ $f(x) = \dfrac{2^x}{x}$ เมื่อ $x \in [1,\infty)$ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{2^x}{x} && \text{I.F. } \frac{\infty}{\infty} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{(2^x)'}{x'} && \text{หลักเกณฑ์ลอปีตาล} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{2^x \ln 2}{1} \\
&= \infty
\end{aligned}$$

จะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n} = \infty$ ดังนั้น $\left\{\dfrac{2^n}{n}\right\}$ เป็นลำดับลู่ออก

2. $\left\{\dfrac{\ln n}{n}\right\}$

แนวคำตอบ ให้ $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ เมื่อ $x \in [1,\infty)$ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} && \text{I.F. } \frac{\infty}{\infty} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)'}{x'} && \text{หลักเกณฑ์ลอปีตาล} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0
\end{aligned}$$

จะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$ ดังนั้น $\left\{\dfrac{\ln n}{n}\right\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

ตัวอย่าง 1.1.20 จงพิจารณาว่าลำดับต่อไปนี้เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\left\{n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right\}$

แนวคำตอบ ให้ $f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ เมื่อ $x \in [1, \infty)$ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) && \text{I.F. } \infty \cdot 0 \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} && \text{I.F. } \frac{0}{0} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{(\sin\left(\frac{1}{x}\right))'}{(\frac{1}{x})'} && \text{หลักเกณฑ์ลอปีตาล} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot(-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 1
\end{aligned}$$

จะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} n\sin\left(\frac{1}{n}\right) = 1$ ดังนั้น $\left\{n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

2. $\left\{n^{\frac{1}{n}}\right\}$

แนวคำตอบ ให้ $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ เมื่อ $x \in [1, \infty)$ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \ell\text{n} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \ell\text{n} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ell\text{n} x}{x} && \text{I.F. } \frac{\infty}{\infty} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{(\ell\text{n} x)'}{x'} && \text{หลักเกณฑ์ลอปีตาล} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0 \\
\ell\text{n}\left(\lim_{x\to\infty} f(x)\right) &= 0 \\
\lim_{x\to\infty} f(x) &= e^0 = 1
\end{aligned}$$

จะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$ ดังนั้น $\left\{n^{\frac{1}{n}}\right\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

ลำดับย่อย

บทนิยาม 1.1.21 ให้ $\{n_k\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง ซึ่ง

$$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$$

สำหรับลำดับ $\{a_n\}$ ใด ๆ ถ้าให้ $b_k = a_{n_k}$ จะได้ว่า $\{b_k\}$ เป็นลำดับที่มีพจน์ที่ k เป็นพจน์ที่ n_k ของลำดับ $\{a_n\}$ จะเรียกว่าลำดับ $\{b_k\}$ ว่า **ลำดับย่อย** (subsequence) ของ $\{a_n\}$

ตัวอย่าง 1.1.22 จงยกตัวอย่างของลำดับย่อยของ $\{2n-1\}$ มาอย่างน้อย 2 ลำดับ

แนวคำตอบ ให้ $a_n = 2n-1$ พิจารณาลำดับ $1, 3, 5, 7, 11, ...$
1. เลือก $n_k = 2k$ นั่นคือ

$$b_k = a_{n_k} = a_{2k} \text{ หรือ } a_2, a_4, a_6, ... \text{ หรือ } 3, 7, 11, ... \text{ เป็นลำดับย่อยของ } 1, 3, 5, 7, 11, ...$$

2. เลือก $n_k = 2k-1$ นั่นคือ

$$b_k = a_{n_k} = a_{2k-1} \text{ หรือ } a_1, a_3, a_5, ... \text{ หรือ } 1, 5, 9, ... \text{ เป็นลำดับย่อยของ } 1, 3, 5, 7, 11, ...$$

ทฤษฎีบท 1.1.23 ถ้าลำดับ $\{a_n\}$ มีลิมิตเป็นจำนวนจริง L แล้วจะได้ว่า

ทุกลำดับย่อยของ $\{a_n\}$ มีลิมิตเป็น L

บทพิสูจน์. สมมติว่า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ ให้ $\{b_{n_k}\}$ เป็นลำดับย่อยของ $\{a_n\}$
ให้ $\varepsilon > 0$ โดยสมมติฐานจะได้ว่ามี $N \in \mathbb{N}$ ซึ่ง

$$|x_n - a| < \varepsilon \qquad \text{ทุก ๆ จำนวนนับ } n \geq N$$

เนื่องจาก $n_k \in \mathbb{N}$ และ $n_1 < n_2 < n_3 < ...$ จะได้ว่า

$$n_k \geq k \qquad \text{ทุก ๆ } k \in \mathbb{N}$$

ให้ $k \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $k \geq N$ ฉะนั้น $n_k > k \geq N$ ทำให้ได้ว่า

$$|a_{n_k} - L| < \varepsilon$$

ดังนั้น $\{a_{n_k}\}$ ลำดับย่อยของ $\{a_n\}$ มีลิมิตเป็น L □

จากทฤษฎีบท 1.1.23 เราจะได้ข้อสรุปต่อไปนี้

1. ถ้าลำดับ $\{a_n\}$ มีลำดับย่อยที่ลู่ออก แล้ว $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก

2. ถ้าลำดับ $\{a_n\}$ มีสองลำดับย่อยที่ลิมิตต่างกัน แล้ว $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก

ตัวอย่าง 1.1.24 จงแสดงว่า $\left\{\dfrac{(-1)^n n}{n+1}\right\}$ เป็นลำดับลู่ออก

แนวคำตอบ ให้ $a_n = \dfrac{(-1)^n n}{n+1}$ เลือกลำดับย่อยแรก $n_k = 2k$ จะได้ว่า

$$b_k = a_{n_k} = a_{2k} = \frac{(-1)^{2k}2k}{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{2k+1}$$

จะได้ว่า $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = \lim\limits_{k\to\infty}\left(1 - \dfrac{1}{2k+1}\right) = 1$
เลือกลำดับย่อยที่สอง $n_k = 2k-1$ จะได้ว่า

$$b_k = a_{n_k} = a_{2k-1} = \frac{(-1)^{2k-1}(2k-1)}{(2k-1)+1} = \frac{-2k+1}{2k} = -1 + \frac{1}{2k}$$

จะได้ว่า $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = \lim\limits_{k\to\infty}\left(-1 + \dfrac{1}{2k}\right) = -1$
จะเห็นว่าลำดับย่อยทั้งสองมีค่าลิมิตไม่เท่ากัน โดยทฤษฎีบท 1.1.23 สรุปได้ว่า $\left\{\dfrac{(-1)^n n}{n+1}\right\}$ เป็นลำดับลู่ออก

ลำดับมีขอบเขต

บทนิยาม 1.1.25 จะกล่าวว่าลำดับของจำนวนจริง $\{a_n\}$ มี **ขอบเขต** (bounded) ก็ต่อเมื่อ

$$\text{มีจำนวนจริงบวก } M \text{ ซึ่ง } \quad |a_n| \leq M \quad \text{ทุก } n \in \mathbb{N}$$

เนื่องจาก $\left|\frac{1}{n}\right| \leq 1$ ทุก $n \in \mathbb{N}$ ดังนั้น $\{\frac{1}{n}\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต

ทฤษฎีบท 1.1.26 (ทฤษฎีบทการลู่เข้าแบบมีขอบเขต (Bounded Convergent Theorem))
ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า แล้ว $\{a_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต

บทพิสูจน์. สมมติว่า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ เลือก $\varepsilon = 1$ จะได้ว่ามี $N \in \mathbb{N}$ ซึ่ง

$$|a_n - L| < 1 \qquad \text{ทุก ๆ จำนวนนับ } n \geq N$$

ทำให้ได้ว่า $|a_n| - |L| \leq |a_n - L| < 1$ ฉะนั้น $|a_n| \leq 1 + |L|$ ทุก ๆ จำนวนนับ $n \geq N$
เลือก $K = \max\{|a_1|, |a_2|, |a_3|, ..., |a_N|, 1 + |L|\}$

$$|a_n| \leq K \qquad \text{ทุก ๆ จำนวนนับ } n \in \mathbb{N}$$

ดังนั้น $\{a_n\}$ มีขอบเขต □

ลำดับทางเดียว

บทนิยาม 1.1.27 ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับจำนวนจริง จะกล่าวว่า $\{a_n\}$ เป็น

1. **ลำดับไม่เพิ่ม** (nonincreasing sequence) ก็ต่อเมื่อ $a_n \geq a_{n+1}$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$
2. **ลำดับไม่ลด** (nondecreasing sequence) ก็ต่อเมื่อ $a_n \leq a_{n+1}$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$

และ $\{a_n\}$ เป็น **ลำดับทางเดียว** (monotone sequence) ก็ต่อเมื่อ $\{a_n\}$ เป็นลำดับไม่เพิ่มหรือเป็นลำดับไม่ลด

ตัวอย่าง 1.1.28 จงแสดงว่าลำดับต่อไปนี้เป็นลำดับทางเดียว

1. $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$

   แนวคำตอบ ให้ $a_n = \dfrac{1}{n}$ จะได้ว่า

   $$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0 \qquad \text{ทุก ๆ } n \in \mathbb{N}$$

   ดังนั้น $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ เป็นลำดับไม่เพิ่ม หรือเรียกว่าเป็นลำดับทางเดียว

2. $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$

   แนวคำตอบ ให้ $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ จะได้ว่า

   $$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0 \qquad \text{ทุก ๆ } n \in \mathbb{N}$$

   ดังนั้น $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$ เป็นลำดับไม่ลด หรือเรียกว่าเป็นลำดับทางเดียว

ทฤษฎีบท 1.1.29 (ทฤษฎีบทการลู่เข้าของลำดับทางเดียว (Monotone Convergent Theorem)**)**
ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขตและลำดับทางเดียว แล้ว $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

บทพิสูจน์. ขอละไว้ในวิชานี้ $\square$

ตัวอย่าง 1.1.30 จงแสดงว่า $\left\{\dfrac{2^n}{n!}\right\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

แนวคำตอบ ให้ $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$ สำหรับทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า $1 - n \leq 0$ ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{2^n}{n!} \\ &= \frac{2 \cdot 2^n}{(n+1)!} - \frac{(n+1)2^n}{(n+1)n!} \\ &= \frac{2^n(1-n)}{(n+1)!} \leq 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\left\{\dfrac{2^n}{n!}\right\}$ เป็นลำดับไม่เพิ่ม หรือเรียกว่าเป็นลำดับทางเดียว ทำให้ได้ด้วยว่า

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots$$

นั่นคือ $|a_n| \leq a_1 = 2$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$ ฉะนั้น $\{a_n\}$ มีขอบเขต
โดยทฤษฎีบทการลู่เข้าของลำดับทางเดียว สรุปได้ว่า $\left\{\dfrac{2^n}{n!}\right\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

แบบฝึกหัด 1.1

1. จงหาลิมิตต่อไปนี้

1.1 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{4n^2+1}+n}{\sqrt[3]{n^3+3}}$

1.2 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)^5(1-n)^2}{n^4(2n-1)^3}$

1.3 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$

1.4 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+1}-n+1\right)$

1.5 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$

1.6 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5-3n}{\sqrt{n+5}}$

1.7 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^n+n^2}{e^n+n}$

1.8 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$

1.9 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin(n)-2n^2}{n^2+1}$

1.10 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ell\text{n}(3n^2+1)}{\ell\text{n}(n+1)}$

1.11 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+1}}}{2n+\sqrt[3]{n^3+5}}$

1.12 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\cos^2 n}$

1.13 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos n\pi}{n^2+1}$

1.14 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n \cos n}{n^2+1}$

2. จงพิจารณาว่าลำดับต่อไปนี้เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก

2.1 $\left\{\dfrac{\sqrt{9^n+n}}{2^n+3^n}\right\}$

2.2 $\left\{\dfrac{n}{\ell\text{n}(e^n+1)}\right\}$

2.3 $\left\{\dfrac{3^n+2}{2^n+1}\right\}$

2.4 $\left\{\dfrac{e^n(2n^4+n^3+1)}{n^4(e^n+2^n)}\right\}$

2.5 $\left\{\dfrac{n+(-1)^n}{2n+1}\right\}$

2.6 $\left\{\dfrac{n}{n(-1)^n+2}\right\}$

2.7 $\left\{\dfrac{\ell\text{n} n}{\ell\text{n}(n+1)}\right\}$

2.8 $\left\{\dfrac{(2n-1)!}{(2n+1)!}\right\}$

2.9 $\left\{\dfrac{n!2^n}{(2n)!}\right\}$

3. จงพิจารณาว่าลำดับ $\{a_n\}$ ที่นิยามต่อไปนี้ เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก

3.1 $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 5a_n - 3$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, ...$

3.2 $a_1 = 6,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n}$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, ...$

3.3 $a_1 = 2,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1+a_n}$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, ...$

4. จงทดสอบว่าลำดับ $a_n = \dfrac{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{n!}$ เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก

1.2 อนุกรมของจำนวนจริง

บทนิยาม 1.2.1 ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง และ

$$
\begin{aligned}
S_1 &= a_1 \\
S_2 &= a_1 + a_2 \\
S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\
&\vdots \\
S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k
\end{aligned}
$$

เรียก S_n ว่า **ผลบวกย่อย** (partial sum) ของ n พจน์แรกของ $\{a_n\}$
และเรียก $\{S_n\}$ ว่า **อนุกรมอนันต์** (infinite series) ของจำนวนจริง หรือเรียกสั้น ๆ ว่า **อนุกรม** (series) ซึ่งจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

ต่อไปจะกล่าวถึงสมบัติเบื้องต้นเกี่ยวกับสัญลักษณ์แทนการบวก โดยให้ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง เมื่อ $m \in \mathbb{N}$ และ c เป็นค่าคงที่ จะได้ว่า

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c = cn$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

ตัวอย่าง 1.2.2 ถ้า $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} a_k = 25$ และ $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} b_k = 15$ จงหาค่า $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}(a_k + 2b_k - 4)$

แนวคำตอบ โดยใช้สมบัติเบื้องต้นเกี่ยวกับสัญลักษณ์แทนการบวก

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{5}(a_k + 2b_k - 4) &= \sum_{k=1}^{5} a_k + 2\sum_{k=1}^{5} b_k - \sum_{k=1}^{5} 4 \\
&= 25 + 2(15) - 4(5) \\
&= 35
\end{aligned}
$$

อนุกรมเทเลสโคป

ทฤษฎีบท 1.2.3 (**อนุกรมเทเลสโคป** (Telescoping Series))
ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง จะได้ว่า

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_{n+1}$$

บทพิสูจน์. โดยอาศัยบทนิยามสัญลักษณ์แทนการบวก จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1}) &= (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_n - a_{n+1}) \\ &= a_1 - a_{n+1}\end{aligned}$$

□

ตัวอย่าง 1.2.4 จงหาผลบวกต่อไปนี้

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{k(k+1)}$

   แนวคำตอบ เนื่องจาก $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$ จะได้ว่า

$$\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{100}\left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right] = \frac{1}{1} - \frac{1}{101} = \frac{100}{101}$$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{80}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

   แนวคำตอบ เนื่องจาก $\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\cdot\dfrac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}} = -(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})$
   จะได้ว่า

$$\sum_{n=1}^{80}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = -\sum_{n=1}^{80}\left[\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right] = -(\sqrt{1}-\sqrt{81}) = 8$$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{50}\ell\mathrm{n}\left(\frac{n}{n+1}\right)$

   แนวคำตอบ เนื่องจาก $\ell\mathrm{n}\left(\dfrac{n}{n+1}\right) = \ell\mathrm{n}n - \ell\mathrm{n}(n+1)$ จะได้ว่า

$$\sum_{n=1}^{50}\ell\mathrm{n}\left(\frac{n}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{50}\left[\ell\mathrm{n}n - \ell\mathrm{n}(n+1)\right] = \ell\mathrm{n}1 - \ell\mathrm{n}(51) = -\ell\mathrm{n}(51)$$

ทฤษฎีบท 1.2.5 (สูตรของเกาส์ (Gauss' Formula))

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

บทพิสูจน์. ให้ $a_k = k^2$ จะได้ว่า

$$a_k - a_{k+1} = k^2 - (k+1)^2 = -2k - 1$$

โดยอนุกรมเทเลสโคป

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1}) &= \sum_{k=1}^{n}(-2k - 1) \\
a_1 - a_{n+1} &= -2\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 \\
1 - (n+1)^2 &= -2\sum_{k=1}^{n} k - n \\
2\sum_{k=1}^{n} k &= (n+1)^2 - 1 - n = n^2 + n \\
\sum_{k=1}^{n} k &= \frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

$\square$

ทฤษฎีบท 1.2.6 จะได้ว่า

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

บทพิสูจน์. โดยทำนองเดียวกับการพิสูจน์สูตรของเกาส์ (เป็นแบบฝึกหัด) $\square$

ตัวอย่าง 1.2.7 จงหาผลบวกต่อไปนี้

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}(3k+1)$

   แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\sum_{n=1}^{10}(3k+1) = 3\sum_{n=1}^{10} k + \sum_{n=1}^{10} 1 = 3\cdot\frac{10(11)}{2} + 1\cdot 10 = 175$$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}(2k+1)^2$

   แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{10}(2k+1)^2 &= \sum_{n=1}^{10}(4k^2+4k+1) = 4\sum_{n=1}^{10}k^2 + 4\sum_{n=1}^{10}k + \sum_{n=1}^{10}1\\ &= 4\cdot\frac{10(11)(21)}{6} + 4\cdot\frac{10(11)}{2} + 1\cdot 10\\ &= 1540 + 220 + 10 = 1770\end{aligned}$$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}(k-1)^3$

   แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{10}(k-1)^3 &= 0^3 + 1^3 + 2^3 + \cdots + 9^3\\ &= \left[\frac{9(10)}{2}\right]^2 = 45^2 = 2025\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.2.8 จงหาผลบวกต่อไปนี้ $2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + 100^2$

แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + 100^2 &= 2^2(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 50^2)\\ &= 4\cdot\frac{50(51)(101)}{6} = 171700\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.2.9 จงแสดงว่า $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \cdots + n(n+1) &= \sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n}(k^2+k) = \sum_{k=1}^{n}k^2 + \sum_{k=1}^{n}k\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\\ &= \frac{n(n+1)}{2}\left[\frac{2n+1}{3} + 1\right] = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}\end{aligned}$$

อนุกรมเรขาคณิต

ทฤษฎีบท 1.2.10 (**อนุกรมเรขาคณิต** (Geometric Series))
ให้ a และ r เป็นค่าคงตัวที่ไม่ใช่ศูนย์ แล้ว $\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1}$ เรียกว่าอนุกรมเรขาคณิต โดยที่

$$\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \qquad \text{เมื่อ } r \neq 1$$

บทพิสูจน์. สำหรับ $r \neq 1$ พิจารณา $ar^{k-1} - ar^k = ar^{k-1}(1-r)$ ทำให้ได้ว่า

$$ar^{k-1} = \frac{ar^{k-1}}{1-r} - \frac{ar^k}{1-r} = \frac{a}{1-r}[r^{k-1} - r^k]$$

โดยอนุกรมเทเลสโคปจะได้ว่า

$$\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = \frac{a}{1-r}\sum_{k=1}^{n}\left[r^{k-1} - r^k\right] = \frac{a}{1-r}[1-r^n] = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

□

ตัวอย่าง 1.2.11 จงหาผลบวกต่อไปนี้

1. $\sum_{k=1}^{10} 2^k$

   แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} 2^k &= 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{10} \\ &= \frac{2(1-2^{10})}{1-2} = 2(2^{10}-1) = 2046\end{aligned}$$

2. $\sum_{k=1}^{10} 2^{-k}$

   แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} 2^{-k} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{10}} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\left(1-(\frac{1}{2})^{10}\right)}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^{10}} = \frac{1023}{1024}\end{aligned}$$

3. $2 + 6 + 18 + \cdots + 2 \cdot 3^9$

   แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$2 + 6 + 18 + \cdots + 2 \cdot 3^9 = \frac{2(1-3^{10})}{1-3} = 3^{10} - 1 = 59048$$

ผลบวกของอนุกรม

บทนิยาม 1.2.12 ถ้า $\{S_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า ซึ่ง $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ เมื่อ $S \in \mathbb{R}$ จะกล่าวว่า $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็น **อนุกรมลู่เข้า** (convergent) และเรียก S ว่า **ผลบวกของอนุกรม** ซึ่งเขียนแทนด้วย

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = S$$

ตัวอย่าง 1.2.13 จงพิจารณาว่าอนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

แนวคำตอบ พิจารณา

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right] = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

เนื่องจาก

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - 0 = 1$$

ดังนั้น $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ และเป็นอนุกรมลู่เข้า

ตัวอย่าง 1.2.14 จงพิจารณาว่าอนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}} = -(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})$$

จะได้ว่า

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = -\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k}-\sqrt{k+1}) = -(1-\sqrt{n+1}) = \sqrt{n+1} - 1$$

เนื่องจาก

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - 1\right) = \infty$$

ดังนั้น $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ตัวอย่าง 1.2.15 จงพิจารณาว่าอนุกรม $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

แนวคำตอบ เนื่องจาก

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{\frac{1}{2}\left(1-(\frac{1}{2})^n\right)}{1-\frac{1}{2}} = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

จะได้ว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 1-0 = 1$$

ดังนั้น $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$ และเป็นอนุกรมลู่เข้า

ทฤษฎีบท 1.2.16 (การทดสอบอนุกรมเทเลสโคป (Telescoping Series Test)**)**
ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง จะได้ว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$ เป็นอนุกรมลู่เข้า และ

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) = a_1 - \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$$

บทพิสูจน์. จากอนุกรมเทเลสโคป $\displaystyle S_n = \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_{n+1}$ ดังนั้น

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k - a_{k+1}) = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(a_1 - a_{n+1}) = a_1 - \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$$

ดังนั้น $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$ เป็นอนุกรมลู่เข้า □

ตัวอย่าง 1.2.17 จงพิจารณาว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$

   แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right]\\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2(n+1)-1}\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2(n+1)-1}\right] = \frac{1}{2}[1-0] = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

   ดังนั้น $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$ และเป็นอนุกรมลู่เข้า

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}[\ln n - \ln(n+1)]$$

เป็นอนุกรมเทเลสโคป โดยที่ $a_n = \ln n$ เนื่องจาก $\{\ln n\}$ เป็นลำดับลู่ออก ดังนั้น $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ตัวอย่าง 1.2.18 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}} &= \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \cdot \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \\
&= \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}((n+1)-n)} \\
&= \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} \\
&= \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}
\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right] = \frac{1}{1} - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}} = 1 - 0 = 1$$

ดังนั้น $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}} = 1$ และเป็นอนุกรมลู่เข้า

ตัวอย่าง 1.2.19 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

แนวคำตอบ เนื่องจาก $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2+3+\cdots+n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} 2\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right] \\
&= 2\left[\frac{1}{1} - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\right] = 2(1-0) = 2
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2+3+\cdots+n} = 2$ และเป็นอนุกรมลู่เข้า

การทดสอบอนุกรมเรขาคณิต

ทฤษฎีบท 1.2.20 (การทดสอบอนุกรมเรขาคณิต (Geometric series Test))

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} \text{ เป็นอนุกรมลู่เข้า เมื่อ } |r| < 1 \text{ โดยมีผลบวกของอนุกรมเป็น } \frac{a}{1-r}$$

และเป็นอนุกรมลู่ออกเมื่อ $|r| \geq 1$

บทพิสูจน์. สำหรับ $|r| \geq 1$ จะเห็นได้ว่า $\lim\limits_{n\to\infty} r^n$ ไม่มีลิมิต สรุปได้ว่า $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

สำหรับ $|r| < 1$ จะได้ว่า $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$ เนื่องจาก

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

ดังนั้น

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r}$$

ดังนั้น $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ $|r| < 1$ และ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \dfrac{a}{1-r}$ □

ตัวอย่าง 1.2.21 จงพิจารณาว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3^n}$

   แนวคำตอบ เนื่องจาก $r = \frac{1}{2}$ ดังนั้น

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

   ดังนั้น $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt{2}-1)^{-n}$

   แนวคำตอบ เนื่องจาก $r = \dfrac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1 > 1$

   ดังนั้น $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt{2}-1)^{-n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}\right)^n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ทฤษฎีบท 1.2.22 ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า โดยที่ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ เป็นค่าคงตัว จะได้ว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) \text{ เป็นอนุกรมลู่เข้า}$$

และ $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

บทพิสูจน์. ให้ $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ และ $t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ สมมติว่า $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ และ $\lim_{n\to\infty} t_n = t$

$$\alpha s_n + \beta t_n = \sum_{k=1}^{n}(\alpha a_k + \beta b_k)$$

จะได้ว่า

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k + \beta b_k) = \lim_{n\to\infty}(\alpha s_n + \beta t_n) = \alpha s + \beta t = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)$ เป็นอนุกรมลู่เข้า □

ตัวอย่าง 1.2.23 จงพิจารณาว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^{n+1}}{4^n}$

   แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^{n+1}}{4^n} &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3^n}{4^n} + \frac{2^{n+1}}{4^n}\right)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{3}{4}\right)^n + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]\\ &= \frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3 + 2 = 5\end{aligned}$$

   ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^{n+1}}{4^n} = 5$ และเป็นอนุกรมลู่เข้า

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+2^n)^2}{5^n}$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+2^n)^2}{5^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2\cdot 2^n+4^n}{5^n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5^n} + \frac{2\cdot 2^n}{5^n} + \frac{4^n}{5^n}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{5}\right)^n + 2\left(\frac{2}{5}\right)^n + \left(\frac{4}{5}\right)^n\right] \\
&= \frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} + \frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{2}{5}} + \frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}} = \frac{1}{4} + \frac{4}{3} + 5 = \frac{79}{12}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+2^n)^2}{5^n} = \frac{79}{12}$ และเป็นอนุกรมลู่เข้า

ตัวอย่าง 1.2.24 จงพิจารณาว่า $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{(n-1)(n+1)} &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right]
\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} &= \frac{1}{2}\left[\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1} - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{2} - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2}\right] = \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

ตัวอย่าง 1.2.25 จงพิจารณาว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n(n+1)(n+2)} &= \frac{1}{n}\left[\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right] = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right] \\
&= \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{n(n+2)} \\
&= \left[\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right] \\
&= \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)-\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right]
\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)} &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)-\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\right)-\left(\frac{1}{2}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[(1-0)-\left(\frac{1}{2}-0\right)\right] = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$ และเป็นอนุกรมลู่เข้า

การทดสอบอนุกรมลู่ออก

ทฤษฎีบท 1.2.26 ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แล้วจะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

บทพิสูจน์. สมมติว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าและมีผลบวกเป็น s จะได้ว่า

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad \text{และ} \qquad \lim_{n\to\infty} S_n = s$$

เนื่องจาก $a_n = S_{n+1} - S_n$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_{n+1} - S_n) = s - s = 0$$

ดังนั้น a_n มีลิมิตเป็น 0 □

โดยกฎแย้งสลับที่ของทฤษฎีบทนี้เรียกว่า **การทดสอบอนุกรมลู่ออก** (Divergent Test)

$$\text{ถ้า } \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \text{ หรือไม่มีลิมิต แล้ว } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ เป็นอนุกรมลู่ออก}$$

ตัวอย่าง 1.2.27 จงแสดงว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^2+1}$ อนุกรมลู่ออก

แนวคำตอบ เนื่องจาก

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{n^2+1} = 1 \neq 0$$

โดยการทดสอบอนุกรมลู่ออก สรุปได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ตัวอย่าง 1.2.28 จงแสดงว่า $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ อนุกรมลู่ออก

แนวคำตอบ ให้ $a_n = (-1)^n$ เลือกลำดับย่อยแรก $n_k = 2k$ จะได้ว่า

$$b_k = a_{n_k} = a_{2k} = (-1)^{2k} = 1$$

จะได้ว่า $\lim_{k\to\infty} b_k = \lim_{k\to\infty} 1 = 1$
เลือกลำดับย่อยที่สอง $n_k = 2k-1$ จะได้ว่า

$$b_k = a_{n_k} = a_{2k-1} = (-1)^{2k-1} = -1$$

จะได้ว่า $\lim_{k\to\infty} b_k = \lim_{k\to\infty} -1 = -1$
จะเห็นว่าลำดับย่อยทั้งสองมีค่าลิมิตไม่เท่ากัน ทำให้ได้ว่า $\lim_{n\to\infty} (-1)^n$ ไม่มีลิมิต โดยการทดสอบอนุกรมลู่ออก สรุปได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ทฤษฎีบท 1.2.29 ให้ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า และ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก จะได้ว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) \text{ เป็นอนุกรมลู่ออก}$$

บทพิสูจน์. เป็นแบบฝึกหัด $\square$

ตัวอย่าง 1.2.30 จงพิจารณาว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n} + \frac{n}{n+1}\right)$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

แนวคำตอบ จะเห็นว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า เนื่องจาก เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี $r = \frac{1}{2}$ และ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$$

โดยการทดสอบอนุกรมลู่ออก จะได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$ เป็นอนุกรมลู่ออก ทำให้สรุปได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n} + \frac{n}{n+1}\right)$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ตัวอย่าง 1.2.31 จงพิจารณาว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+2^n)^2}{3^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\frac{(1+2^n)^2}{3^n} = \frac{1+2\cdot 2^n + 4^n}{3^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n + 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

จะเห็นว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ และ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}2\left(\frac{2}{3}\right)^n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า เนื่องจากเป็นเรขาคณิตที่มี $r = \frac{1}{3}$ และ $r = \frac{2}{3}$ ตามลำดับ แต่ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n$ เป็นอนุกรมลู่ออก เนื่องจากเป็นเรขาคณิตที่มี $r = \frac{4}{3} > 1$ สรุปได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+2^n)^2}{3^n}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

แบบฝึกหัด 1.2

1. ถ้า $\sum_{k=1}^{8} a_k = 20$ และ $\sum_{k=1}^{8} b_k = 5$ จงหาค่า

   1.1 $\sum_{k=1}^{8}(3a_k - 2b_k)$

   1.2 $\sum_{k=1}^{8} 2(a_k + 3b_k - 1)$

2. จงหาค่าผลบวกต่อไปนี้

   2.1 $\sum_{k=1}^{11} k(3-2k)$

   2.2 $\sum_{k=1}^{11}(k+1)^3$

   2.3 $\sum_{k=1}^{15} \sqrt{(k-2)^2}$

   2.4 $\sum_{k=1}^{100} k(1+(-1)^k)$

   2.5 $\sum_{k=1}^{99} \frac{1}{k^2+4k+3}$

   2.6 $\sum_{k=1}^{100} \ell\text{n}\left(\frac{n^2+n}{n^2+3n+2}\right)$

   2.7 $1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + 3\cdot 4\cdot 5 + \cdots + 50\cdot 51\cdot 52$

   2.8 $1\cdot 99 + 2\cdot 97 + 3\cdot 95 + \cdots + 49\cdot 3$

   2.9 $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + 99^2$

   2.10 $1 + (1+3) + (1+3+5) + \cdots + (1+3+5+\cdots+99)$

3. จงแสดงว่า $1+3+5+7+\cdots+(2n-1) = n^2$

4. จงแสดงว่า $1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + 3\cdot 4\cdot 5 + \cdots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

5. จงใช้อนุกรมเทเลสโคปพิสูจน์ว่า

   5.1 $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

   5.2 $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

6. จงพิจารณาว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้าจงหาผลบวกของอนุกรมนั้น

6.1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+3)}$

6.2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^4+n-1}}{3n^2+1}$

6.3 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$

6.4 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ell\text{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)$

6.5 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{3^n}+\left(-\frac{3}{5}\right)^n\right)$

6.6 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n}}{3^n+5^n}$

6.7 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n}-4^n}{10^n}$

6.8 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{-n}+1}{2^n}$

6.9 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$

6.10 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$

6.11 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2+4n+3}+4^{-n}\right)$

6.12 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-3n+2}$

6.13 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

6.14 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(n-\frac{n^2}{n+1}\right)$

6.15 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}$

6.16 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$

6.17 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$

6.18 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

6.19 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^3-n}$

6.20 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin n$

6.21 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(-\frac{2}{3}\right)^n+\frac{1}{n(n+1)}\right)$

6.22 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2+4+6+\cdots+(2n)}$

7. จงยกตัวอย่างอนุกรม $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ และ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก ที่ทำให้

7.1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ เป็นอนุกรมลู่ออก

7.2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

8. ให้ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า และ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก จงพิสูจน์ว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) \text{ เป็นอนุกรมลู่ออก}$$

1.3 การทดสอบแบบปริพันธ์

ทฤษฎีบท 1.3.1 การทดสอบแบบปริพันธ์ (Integral Test)
ให้ $n_0 \in \mathbb{N}$ และ $f : [n_0, \infty) \to \mathbb{R}$ มีค่าเป็นบวก เป็นฟังก์ชันไม่เพิ่ม และเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง บนช่วง $[n_0, \infty)$ จะได้ว่า

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} f(k) \text{ เป็นอนุกรมลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ } \lim_{n\to\infty} \int_{n_0}^{n} f(x)\,dx \text{ มีค่าเป็นจำนวนจริง}$$

บทพิสูจน์. ให้ $s_n = \sum_{k=n_0}^{n} f(k)$ และ $t_n = \int_{n_0}^{n} f(x)\,dx$ สำหรับ $n \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $n \geq n_0$ เนื่องจาก f มีค่าเป็นบวก เป็นฟังก์ชันไม่เพิ่ม และเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง บนช่วง $[n_0, \infty)$ ดังนั้น f หาปริพันธ์ได้บน $[n_0, \infty)$ สำหรับ $k \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า

$$f(k+1) \leq f(x) \leq f(k) \qquad \text{ทุก ๆ } x \in [k, k+1]$$

ทำให้ได้ว่า

$$f(k+1) = \int_{k}^{k+1} f(k+1)\,dx \leq \int_{k}^{k+1} f(x)\,dx \leq \int_{k}^{k+1} f(k)\,dx = f(k)$$

หาผลบวกตั้งแต่ $k = n_0, n_0+1, ..., n-1$

$$\begin{array}{ccccc}
\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n-1} f(k+1) & \leq & \displaystyle\sum_{k=n_0}^{n-1} \int_{k}^{k+1} f(k+1)\,dx & \leq & \displaystyle\sum_{k=n_0}^{n-1} f(k) \\
s_n - f(n_0) & \leq & \displaystyle\int_{n_0}^{n} f(k+1)\,dx & \leq & s_n - f(n) \\
s_n - f(n_0) & \leq & t_n & \leq & s_n - f(n) \\
-f(n_0) & \leq & t_n - s_n & \leq & -f(n) \\
f(n) & \leq & s_n - t_n & \leq & f(n_0)
\end{array}$$

ดังนั้น $\{s_n\}$ มีขอบเขตก็ต่อเมื่อ $\{t_n\}$ มีขอบเขต เนื่องจาก f มีค่าเป็นบวก ทำให้ได้ว่า s_n และ t_n เป็นลำดับไม่เพิ่ม โดยทฤษฎีบทการลู่เข้าของลำดับทางเดียวสรุปได้ว่า $\{s_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ $\{t_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า □

ตัวอย่าง 1.3.2 จงพิจารณาว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

   แนวคำตอบ ให้ $f(x) = \dfrac{1}{x}$ เมื่อ $x \in [1, \infty)$ แล้ว f มีค่าเป็นบวก และ

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \qquad \text{ทุก ๆ } x \geq 1$$

   นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันไม่เพิ่มบน $[1, \infty)$ พิจารณา

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{1}{x}\,dx &= \lim_{n\to\infty} [\ell\text{n} x]_1^n \\ &= \lim_{n\to\infty} [\ell\text{n} n - \ell\text{n} 1] = \infty \end{aligned}$$

   โดยการทดสอบแบบปริพันธ์ สรุปได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ลู่ออก

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

   แนวคำตอบ ให้ $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ เมื่อ $x \in [1, \infty)$ แล้ว f มีค่าเป็นบวก และ

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3} < 0 \qquad \text{ทุก ๆ } x \geq 1$$

   นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันไม่เพิ่มบน $[1, \infty)$ พิจารณา

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{1}{x^2}\,dx &= \lim_{n\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^n \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[-\frac{1}{n} + 1\right] = 1 \end{aligned}$$

   โดยการทดสอบแบบปริพันธ์ สรุปได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ลู่เข้า

ตัวอย่าง 1.3.3 จงพิจารณาว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

แนวคำตอบ ให้ $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ เมื่อ $x \in [1, \infty)$ แล้ว f มีค่าเป็นบวก และ

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2} < 0 \qquad \text{ทุก ๆ } x \geq 1$$

นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันไม่เพิ่มบน $[1, \infty)$ พิจารณา

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{n\to\infty} [\text{arctan}x]_1^n \\ &= \lim_{n\to\infty} [\text{arctan}n - \text{arctan}1] = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

โดยการทดสอบแบบปริพันธ์ สรุปได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ ลู่เข้า

ตัวอย่าง 1.3.4 จงพิจารณาว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}e^{\sqrt{n}}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

แนวคำตอบ ให้ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}}$ เมื่อ $x \in [1, \infty)$ แล้ว f มีค่าเป็นบวก และ

$$f'(x) = -\frac{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}e^{\sqrt{x}})^2} = -\frac{\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}e^{\sqrt{x}})^2} < 0 \qquad \text{ทุก ๆ } x \geq 1$$

นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันไม่เพิ่มบน $[1, \infty)$ พิจารณา

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{1}{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}}\,dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_1^n 2e^{-\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[-2e^{-\sqrt{x}}\right]_1^n \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[-\frac{2}{e^{\sqrt{n}}} + \frac{2}{e}\right] = \frac{2}{e} \end{aligned}$$

โดยการทดสอบแบบปริพันธ์ สรุปได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}e^{\sqrt{n}}}$ ลู่เข้า

อนุกรมพีและการทดสอบอนุกรมพี

บทนิยาม 1.3.5 อนุกรมพี (p-Series) คืออนุกรมที่เขียนในรูป $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ เมื่อ $p \in \mathbb{R}$ เป็นค่าคงตัว

ทฤษฎีบท 1.3.6 (การทดสอบอนุกรมพี (p-Series Test))

อนุกรมพีจะเป็นอนุกรมลู่เข้า เมื่อ $p > 1$ และเป็นอนุกรมลู่ออก เมื่อ $p \leq 1$

บทพิสูจน์. กรณี $p < 0$ จะได้ว่า $\{\frac{1}{n^p}\}$ ไม่มีลิมิต โดยการทดสอบอนุกรมลู่ออกจะได้ว่า อนุกรมพีลู่ออก

กรณี $p = 1$ จากตัวอย่าง 1.3.2 จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

กรณี $p > 1$ ให้ $f(x) = x^{-p}$ เมื่อ $x \in [1, \infty)$ แล้ว f มีค่าเป็นบวก และ

$$f'(x) = -px^{-p-1} = -\frac{p}{x^{p+1}} < 0 \qquad \text{เมื่อ } x \geq 1$$

นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันไม่เพิ่มบน $[1, \infty)$ พิจารณา

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty} \int_1^n x^{-p}\,dx = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^n \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-p}\left[\frac{1}{n^{p-1}} - 1\right] = \frac{1}{1-p}[0-1] = \frac{1}{p-1}\end{aligned}$$

โดยการทดสอบแบบปริพันธ์ สรุปได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ ลู่เข้า □

ตัวอย่าง 1.3.7 จงพิจารณาว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$

   แนวคำตอบ จะเห็นว่า $p = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} > 1$ ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^3}}$

   แนวคำตอบ จะเห็นว่า $p = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} < 1$ ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{n}}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ตัวอย่าง 1.3.8 จงพิจารณาว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{-2} + (-2)^n\right)$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

แนวคำตอบ จะเห็นว่า $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ ลู่เข้าเนื่องจากเป็นอนุกรมพีซึ่ง $p = 2 > 1$ และ $\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^n$ ลู่ออก เนื่องจากเป็นอนุกรมเรขาคณิตซึ่ง $r = -2$ ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{-2} + (-2)^n\right)$ เป็นอนุกรมลู่ออก

แบบฝึกหัด 1.3

1. จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก โดยใช้การทดสอบแบบปริพันธ์

1.1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4+1}$

1.2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n-1}}$

1.3 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+2)}{n+2}$

1.4 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$

1.5 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(n)}{n^2+1}$

1.6 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^4+4}$

1.7 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{1}{n})}{n^2}$

1.8 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)}$

1.9 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{2n^2+1}}$

1.10 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$

1.11 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$

1.12 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-\ln n}}{n(2^{-\ln n}+1)}$

1.13 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-n} + \frac{1}{n\sqrt[3]{n}}\right)$

1.14 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n}}$

1.15 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

1.16 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$

1.17 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$

1.18 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n+1}}$

2. จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

2.1 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n^5}}$

2.2 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n}}$

2.3 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-n} + \frac{1}{n\sqrt[3]{n}}\right)$

2.4 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{n} + \frac{1}{n^4}\right)$

2.5 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{3^{-n}} + \sqrt{\frac{n}{\sqrt{n^5}}}\right)$

2.6 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{n} + \frac{1}{n^4}\right)$

2.7 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{n^2}\right)$

2.8 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3^n}{2^n} + \frac{1}{n^3}\right)$

1.4 การทดสอบโดยใช้การเปรียบเทียบ

ทฤษฎีบท 1.4.1 (**การทดสอบโดยใช้การเปรียบเทียบ** (The Comparision Test))
ให้ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง สมมติว่ามี $n_0 \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้

$$0 \leq a_n \leq b_n \qquad \text{สำหรับ} \quad n \geq n_0$$

จะได้ว่า

1. ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า
2. ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

บทพิสูจน์. สมมติว่ามี $n_0 \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $0 \leq a_n \leq b_n$ ทุก ๆ $k \geq n_0$
ให้ $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ และ $t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ สำหรับแต่ละ $n \geq n_0$ หาผลบวกตั้งแต่ $k = n_0 + 1, n_0 + 2, ..., n$

$$0 \leq \sum_{k=n_0+1}^{n} a_k \leq \sum_{k=n_0+1}^{n} b_k$$
$$0 \leq s_n - s_{n_0} \leq t_n - t_{n_0}$$

เนื่องจาก n_0 เป็นค่าคงตัว นั่นคือ t_{n_0} และ s_{n_0} เป็นค่าคงตัว ทำให้สรุปได้ว่า s_n มีขอบเขต เมื่อ t_n มีขอบเขต และ t_n ไม่มีขอบเขตเมื่อ s_n ไม่มีขอบเขต โดยทฤษฎีบทการบีบจะได้ทฤษฎีบทนี้ □

ตัวอย่าง 1.4.2 จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$

   แนวคำตอบ ให้ $n \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า $n^2 + 1 > n^2$ ฉะนั้น
   $$0 \leq \frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2}$$
   จะเห็นว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ลู่เข้า เนื่องจากเป็นอนุกรมพีซึ่ง $p = 2 > 1$ โดยการทดสอบโดยใช้การเปรียบเทียบสรุปได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin n}{n}\right)^2$

   แนวคำตอบ สำหรับ $n \in \mathbb{N}$ ใด ๆ จะได้ว่า $0 \leq \sin^2 n \leq 1$ ฉะนั้น
   $$0 \leq \left(\frac{\sin n}{n}\right)^2 \leq \frac{1}{n^2}$$

จะเห็นว่า $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ ลู่เข้า เนื่องจากเป็นอนุกรมพีซึ่ง $p = 2 > 1$ โดยการทดสอบโดยใช้การเปรียบเทียบสรุปได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n}{n}\right)^2$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

ตัวอย่าง 1.4.3 จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$

   แนวคำตอบ ให้ $n \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า $n \geq 1$ ฉะนั้น $n2^n \geq 2^n$ นั่นคือ
$$0 \leq \frac{1}{n2^n} \leq \frac{1}{2^n}$$
   จะเห็นว่า $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ ลู่เข้า เนื่องจากเป็นอนุกรมเรขาคณิตซึ่ง $r = \frac{1}{2}$ โดยการทดสอบโดยใช้การเปรียบเทียบสรุปได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ell\text{n}\, n}{\sqrt{n}}$

   แนวคำตอบ ให้ $n \in \mathbb{N}$ พิจารณา $n \geq 3 > e$ ฉะนั้น $\ell\text{n}\, n > \ell\text{n}\, e = 1$ นั่นคือ
$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{\ell\text{n}\, n}{\sqrt{n}} \qquad \text{เมื่อ } n \geq 3$$
   จะเห็นว่า $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ ลู่ออก เนื่องจากเป็นอนุกรม ซึ่ง $p = \frac{1}{2} < 1$ โดยการทดสอบโดยใช้การเปรียบเทียบสรุปได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ell\text{n}\, n}{\sqrt{n}}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ทฤษฎีบท 1.4.4 (การทดสอบโดยใช้การเปรียบเทียบด้วยลิมิต (The Limit Comparision Test))
ให้ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง ถ้า $a_n \geq 0$ และ $b_n \geq 0$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$ และ
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = L$$
เมื่อ L เป็นจำนวนจริง หรือ ∞ จะได้ว่า

1. ถ้า $L > 0$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า
2. ถ้า $L = 0$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า
3. ถ้า $L = \infty$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

บทพิสูจน์. ให้ $a_n \geq 0$ และ $b_n \geq 0$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$ โดยที่ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = L$
กรณี $0 < L < \infty$ เลือก $\varepsilon = \dfrac{L}{2}$ จะได้ว่ามี $N \in \mathbb{N}$ ซึ่ง

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - L\right| < \frac{L}{2} \qquad \text{เมื่อ } n \geq N$$

สำหรับ $n \geq N$ จะได้ว่า $-\dfrac{L}{2} < \dfrac{a_n}{b_n} - L < \dfrac{L}{2}$ นั่นคือ

$$0 < \frac{L}{2} \cdot b_n < a_n < \frac{3L}{2} \cdot b_n$$

โดยการทดสอบโดยใช้การเปรียบเทียบได้ข้อสรุปในข้อที่ 1
สำหรับข้อ 2 และ 3 พิสูจน์ในทำนองเดียวกัน □

ตัวอย่าง 1.4.5 จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$

   แนวคำตอบ ให้ $a_n = \dfrac{1}{n^2+1}$ เลือก $b_n = \dfrac{1}{n^2}$ จะได้ว่า

   $$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2(1+\frac{1}{n^2})} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} = 1 > 0$$

   จะเห็นว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ลู่เข้า เนื่องจากเป็นอนุกรมพีซึ่ง $p = 2 > 1$ โดยการทดสอบโดยใช้การเปรียบเทียบด้วยลิมิตข้อ 1 สรุปได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3n^4+n+1}$

   แนวคำตอบ ให้ $a_n = \dfrac{n+1}{3n^4+n+1}$ เลือก $b_n = \dfrac{1}{n^3}$ จะได้ว่า

   $$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3(n+1)}{3n^4+n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4(1+\frac{1}{n})}{n^4(3+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4})} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}} = \frac{1}{3} > 0$$

   จะเห็นว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ ลู่เข้า เนื่องจากเป็นอนุกรมพีซึ่ง $p = 3 > 1$ โดยการทดสอบโดยใช้การเปรียบเทียบด้วยลิมิตข้อ 1 สรุปได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3n^4+n+1}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2+n+1}$

แนวคำตอบ ให้ $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n^2+n+1}$ เลือก $b_n = \dfrac{1}{n}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n^2+1}}{n^2+n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n^2(1+\frac{1}{n^2})}}{n^2(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{n^2(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = 1 > 0 \end{aligned}$$

จะเห็นว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ลู่ออก เนื่องจากเป็นอนุกรมพีซึ่ง $p = 1 \leq 1$ โดยการทดสอบโดยใช้การเปรียบเทียบด้วยลิมิตข้อ 1 สรุปได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2+n+1}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ตัวอย่าง 1.4.6 จงทดสอบว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{4^n-3^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

แนวคำตอบ ให้ $a_n = \dfrac{2^n}{4^n-3^n}$ เลือก $b_n = \dfrac{1}{2^n}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n\cdot 2^n}{4^n-3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n}{4^n(1-\frac{3^n}{4^n})} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-(\frac{3}{4})^n} = 1 > 0 \end{aligned}$$

จะเห็นว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ ลู่เข้า เนื่องจากเป็นอนุกรมเรขาคณิตซึ่ง $r = \frac{1}{2}$ โดยการทดสอบโดยใช้การเปรียบเทียบด้วยลิมิตข้อ 1 สรุปได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{4^n-3^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

ตัวอย่าง 1.4.7 จงทดสอบว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

แนวคำตอบ ให้ $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{2^n}$ เลือก $b_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ จะได้ว่า

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0 \qquad \text{โดยใช้หลักเกณฑ์ลอปีตาล}$$

จะเห็นว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ ลู่เข้า เนื่องจากเป็นอนุกรมพีซึ่ง $p = \frac{3}{2} > 1$ โดยการทดสอบโดยใช้การเปรียบเทียบด้วยลิมิตข้อ 2 สรุปได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

ตัวอย่าง 1.4.8 จงทดสอบว่า $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ell\text{n}(n+1)}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

แนวคำตอบ ให้ $a_n = \frac{1}{\ell\text{n}(n+1)}$ เลือก $b_n = \frac{1}{n}$ จะได้ว่า

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ell\text{n}(n+1)} = \infty \qquad \text{โดยใช้หลักเกณฑ์ลอปีตาล}$$

จะเห็นว่า $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ลู่ออก เนื่องจากเป็นอนุกรมพีซึ่ง $p = 1 \leq 1$ โดยการทดสอบโดยใช้การเปรียบเทียบด้วยลิมิตข้อ 3 สรุปได้ว่า $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ell\text{n}(n+1)}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

แบบฝึกหัด 1.4

---

1. จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^3+3n^2+1}$

1.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{(3n-1)^4}$

1.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+\cos n}{n}\right)^4$

1.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\,\ell\text{n}(n+1)}$

1.5 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n3^n+5}$

1.6 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt{n^3+1}}$

1.7 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ell\text{n}n}{n\sqrt{n}}$

1.8 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{n}$

1.9 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ell\text{n}n}{e^n\ell\text{n}(n+2)}$

1.10 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n3^n-2}$

1.11 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n+2)^{-2\ell\text{n}n}$

1.12 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n3^n-1}$

1.13 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{6^n+5^n}$

1.14 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^5}$

1.15 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$

1.16 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^{-n^2}$

2. ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต และ $a_n \geq 0$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$ จงพิสูจน์ว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(n+1)^p} \quad \text{เป็นอนุกรมลู่เข้า ทุก ๆ } p > 1$$

1.5 การลู่เข้าแบบสัมบูรณ์

ทฤษฎีบท 1.5.1 ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

บทพิสูจน์. สมมติว่า $s_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$ และ $t_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ โดยที่ $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ จาก $|a_k| \leq |a_k|$ จะได้ว่า

$$-|a_k| \leq a_k \leq |a_k|$$

ฉะนั้น $-\sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|$ จะได้ว่า

$$-t_n \leq s_n \leq t_n$$

จากทฤษฎีบทการบีบ ถ้า $\{t_n\}$ ลู่เข้า จะสรุปได้ว่า $\{s_n\}$ ลู่เข้า □

ตัวอย่าง 1.5.2 จงทดสอบว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n^3}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

จะเห็นว่า $= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ ลู่เข้า เนื่องจากเป็นอนุกรมพีซึ่ง $p = 3 > 1$ ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n^3}\right|$ เป็นอนุกรมลู่เข้า สรุปได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

บทนิยาม 1.5.3 ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แล้วเรียกอนุกรมนี้ว่าเป็นอนุกรม

1. **ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์** (absolute convergece) ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

2. **ลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข** (conditional convergence) ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ตัวอย่าง 1.5.4 จงทดสอบว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์หรือไม่

แนวคำตอบ พิจารณา $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin n}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^2}$ เนื่องจาก $0 \leq |\sin n| \leq 1$ จะได้ว่า

$$0 \leq \frac{\sin n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \qquad \text{ทุก ๆ } n \in \mathbb{N}$$

จะเห็นว่า $= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ลู่เข้า เนื่องจากเป็นอนุกรมพีซึ่ง $p = 2 > 1$ ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n}{n^2} \right|$ เป็นอนุกรมลู่เข้า สรุปได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์

ตัวอย่าง 1.5.5 จงแสดงว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^3+5}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์

แนวคำตอบ พิจารณา $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n n}{n^3+5} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+5}$ เนื่องจาก $n^3 + 5 > n^3$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า

$$0 \leq \frac{n}{n^3+5} \leq \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$$

จะเห็นว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ลู่เข้า เนื่องจากเป็นอนุกรมพีซึ่ง $p = 2 > 1$ ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n n}{n^3+5} \right|$ เป็นอนุกรมลู่เข้า สรุปได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์

การทดสอบโดยใช้อัตราส่วน

ทฤษฎีบท 1.5.6 (การทดสอบโดยใช้อัตราส่วน (The Ratio Test))
ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง โดยที่ $a_n \neq 0$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$ และ

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$$

เมื่อ L เป็นจำนวนจริง หรือ ∞ จะได้ว่า

1. ถ้า $L < 1$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์
2. ถ้า $L > 1$ และ $L = \infty$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

บทพิสูจน์. ขอละไว้ในวิชานี้ □

ตัวอย่าง 1.5.7 จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

   แนวคำตอบ ให้ $a_n = \frac{2^n}{n!}$ พิจารณา

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{(n+1)} = 0 < 1$$

   โดยการทดสอบโดยใช้อัตราส่วนสรุปได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2^n}$

แนวคำตอบ ให้ $a_n = \frac{(-1)^n n}{2^n}$ พิจารณา

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{(-1)^n n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1$$

โดยการทดสอบโดยใช้อัตราส่วนสรุปได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์

ตัวอย่าง 1.5.8 จงทดสอบว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{3^{\ell \mathrm{n} n}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

แนวคำตอบ ให้ $a_n = \frac{e^n}{3^{\ell \mathrm{n} n}}$ พิจารณา

$$\begin{aligned} L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{e^{n+1}}{3^{\ell \mathrm{n}(n+1)}} \cdot \frac{3^{\ell \mathrm{n} n}}{e^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{e}{3^{\ell \mathrm{n}(n+1) - \ell \mathrm{n} n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{e}{3^{\ell \mathrm{n}\left(\frac{n+1}{n}\right)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e}{3^{\ell \mathrm{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)}} = e > 1 \end{aligned}$$

โดยการทดสอบโดยใช้อัตราส่วนสรุปได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{3^{\ell \mathrm{n} n}}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ตัวอย่าง 1.5.9 จงทดสอบว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

แนวคำตอบ ให้ $a_n = \frac{n^n}{n!}$ พิจารณา

$$\begin{aligned} L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)n^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e > 1 \qquad \text{โดยใช้หลักเกณฑ์ลอปีตาล} \end{aligned}$$

โดยการทดสอบโดยใช้อัตราส่วนสรุปได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

การทดสอบโดยใช้การถอดกรณฑ์

ทฤษฎีบท 1.5.10 (การทดสอบโดยใช้การถอดกรณฑ์ (The Root Test))
ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง และ

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$$

เมื่อ L เป็นจำนวนจริง หรือ ∞ จะได้ว่า

1. ถ้า $L < 1$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์
2. ถ้า $L > 1$ และ $L = \infty$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

บทพิสูจน์. ขอละไว้ในวิชานี้ □

ตัวอย่าง 1.5.11 จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n^2}$

   แนวคำตอบ พิจารณา

   $$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left(\left|\left(\frac{2}{3}\right)^{n^2}\right|\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n} = 0 < 1$$

   โดยการทดสอบโดยใช้การถอดกรณฑ์สรุปได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n^2}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{n+2}\right)^{n}$

   แนวคำตอบ พิจารณา

   $$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left(\left|\left(\frac{3n+1}{n+2}\right)^{n}\right|\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{n+2} = 3 > 1$$

   โดยการทดสอบโดยใช้การถอดกรณฑ์สรุปได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{n+2}\right)^{n}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

แบบฝึกหัด 1.5

1. จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1.1 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ell\text{n}(n+1)}{e^n}$

1.2 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$

1.3 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

1.4 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{4^n+n+1}$

1.5 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^n}$

1.6 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n5^n}$

1.7 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$

1.8 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{\ell\text{n}(n+1)}\right)^n$

1.9 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n^2)}{2^n}$

1.10 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}$

1.11 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\ell\text{n}(n+1)}{3^n}$

1.12 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\ell\text{n}(n+1)}$

1.13 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^3}$

1.14 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{(2n+1)!}$

1.15 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arctan n}{n^2+1}$

1.16 $\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{2}{3}\right)^n$

1.17 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n^n}$

1.18 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2n}{n+1}\right)^{-5n}$

1.19 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{100}100^n}{n!}$

1.20 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e^{n+1}+2^n}{3e^n+5}\right)^n$

1.21 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{\ell\text{n}(2^n+1)}\right)^n$

2. จงหาจำนวนจริง x ที่ทำให้อนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้า

2.1 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^n}$

2.2 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

1.6 อนุกรมสลับ

บทนิยาม 1.6.1 ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง และ $a_n > 0$ ทุก $n \in \mathbb{N}$ อนุกรมในรูป

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n \quad \text{หรือ} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$$

เรียกว่า **อนุกรมสลับ** (alternating series)

ทฤษฎีบท 1.6.2 (การทดสอบอนุกรมสลับ (Alternating Series Test : AST))
อนุกรมสลับ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ถ้าสอดคล้อง 2 เงื่อนไขต่อไปนี้

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \text{ และ } \{a_n\} \text{ เป็นลำดับลด หรือมี } n_0 \in \mathbb{N} \text{ ซึ่ง } \quad a_{n+1} < a_n \quad \text{ทุก } n \geq n_0$$

บทพิสูจน์. ขอละไว้ในวิชานี้ □

ตัวอย่าง 1.6.3 จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$

   แนวคำตอบ ให้ $a_n = \frac{1}{n}$ จะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ และ

   $$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = a_n \qquad \text{ทุก ๆ } n \in \mathbb{N}$$

   โดยการทดสอบอนุกรมสลับ สรุปได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

   หมายเหตุ เนื่องจาก $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ เป็นอนุกรมลู่ออก จึงกล่าวได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n+1}$

   แนวคำตอบ ให้ $a_n = \frac{n}{n+1}$ จะได้ว่า

   $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$$

   โดยการทดสอบอนุกรมสลับ สรุปได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n+1}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ตัวอย่าง 1.6.4 จงแสดงว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ell\text{n}(n+1)}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข

แนวคำตอบ ให้ $a_n = \frac{1}{\ell\text{n}(n+1)}$ เมื่อ $n \geq 1$ และ

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ell\text{n}(n+1)} = 0$$

เนื่องจาก $n+2 > n+1 > 1$, $\ell\text{n}(n+2) > \ell\text{n}(n+1) > 0$ จะได้ว่า

$$a_{n+1} = \frac{1}{\ell\text{n}(n+2)} < \frac{1}{\ell\text{n}(n+1)} = a_n \qquad \text{ทุก ๆ } n \geq 1$$

โดยการทดสอบอนุกรมสลับ สรุปได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ell\text{n}(n+1)}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า โดยตัวอย่าง 1.4.8 จะได้ว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\ell\text{n}(n+1)} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ell\text{n}(n+1)} \text{ เป็นอนุกรมลู่ออก}$$

สรุปได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ell\text{n}(n+1)}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข

แบบฝึกหัด 1.6

---

1. จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์หรือลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข

1.1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$

1.2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

1.3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\ell\text{n}(n+2)}$

1.4 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{\ell\text{n} n}}$

1.5 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{n^4-n+1}$

1.6 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$

1.7 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{4^n+3^n}$

1.8 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \text{arctan} n}{4n^3-1}$

1.9 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$

1.10 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \text{arctan} n$

2. จงหาค่า p ที่ทำให้อนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้า

2.1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$

2.2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{p^n}$

2.3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+p}$

2.4 $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(\ell\text{n} n)^p}{n}$

สรุป

ในบทนี้เราถึงลำดับของจำนวนจริงศึกษาการลู่เข้าเมื่อลิมิตของลำดับนั้นหาค่าได้ ถ้าหาค่าไม่ได้เรียกลำดับลู่ออก โดยอาศัยทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต และทฤษฎีบทการลู่เข้าของลำดับทางเดียว จากนั้นกล่าวถึงอนุกรมซึ่งคือลำดับของผลบวกย่อยและสนใจศึกษาการลู่เข้าของอนุกรม โดยเฉพาะกรณีอนุกรมเรขาคณิตและอนุกรมเทเลสโคปซึ่งสามารถตรวจสอบการลู่เข้าและหาผลบวกของอนุกรมได้ กรณีอื่น ๆ อาจใช้การตรวจสอบลู่เข้าหรือลู่ออกโดย การทดสอบแบบปริพันธ์ หรือการทดสอบโดยการเปรียบเทียบ ถ้า $\sum |a_k|$ ลู่เข้า จะได้ว่า $\sum a_k$ ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ โดยอาศัยการตรวจสอบคือการทดสอบโดยอัตราส่วนและการถอดกรณฑ์ ถ้า $\sum |a_k|$ ลู่ออก และ $\sum a_k$ ลู่เข้า ซึ่งเรียกว่าลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข อาจใช้การทดสอบอนุกรมสลับ

แบบฝึกหัดบทที่ 1

---

1. จงหาลิมิตต่อไปนี้

1.1 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{n^2+n}+1}$

1.2 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^2(1-n)^3}{n(2n-1)^4}$

1.3 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)$

1.4 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n$

2. จงพิจารณาว่าลำดับต่อไปนี้เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก

2.1 $\left\{\dfrac{\ell\text{n}\, n}{n^2}\right\}$

2.2 $\left\{\dfrac{n\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n+1}\right\}$

2.3 $\left\{\dfrac{(3n+1)^2}{\sqrt{n^4+4}}\right\}$

3. จงหาลิมิตของลำดับ $\left\{\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, ...\right\}$

4. จงหาค่าผลบวกต่อไปนี้

4.1 $\sum\limits_{k=1}^{15}(2-k)(1-k)$

4.2 $\sum\limits_{k=1}^{20}(2k+1)^2$

4.3 $\sum\limits_{k=1}^{100}\dfrac{1}{k^2+4k+3}$

4.4 $2^2+4^2+6^2+\cdots+100^2$

4.5 $2+(2+4)+(2+4+6)+\cdots+(2+4+6+\cdots+100)$

5. จงพิจารณาว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้าจงหาผลบวกของอนุกรมนั้น

5.1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+4)}$

5.2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^4+n+1}}{n^2+3}$

5.3 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{5^n}+\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right)$

5.4 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2^n+1)^2}{5^n}$

6. จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

6.1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{(2n+3)^2}$

6.2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sec^4 n}{\sqrt[3]{n}}$

6.3 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}+n^{-n}\right)$

6.4 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^3 3^{-n}$

6.5 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos n}{n+1}\right)^2$

6.6 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+\ln n}{n(n+1)^3}$

6.7 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

6.8 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{\sqrt{n^7+3}}$

6.9 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)$

6.10 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n-1}$

6.11 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{3^n n!}$

6.12 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)\ln(n+3)}$

6.13 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n4^{-n^2}$

6.14 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{5^n-n}$

6.15 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\frac{2}{2n+1}\right)$

6.16 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)^{-\ln(e^n+n)}$

6.17 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n+4)}$

6.18 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\pi-2\arctan n)$

6.19 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{\ln(n+1)}$

6.20 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n^2}n^n$

6.21 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n\sqrt[4]{n}}$

6.22 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(3^n+1)}$

6.23 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(3+\cos n)^{-n}$

6.24 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^3}{(3n)!}$

6.25 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n+10}{n+5}\right)$

6.26 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^4+1}-n^2\right)$

6.27 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n^2+1}}$

6.28 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n!}$

6.29 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2+\ln n)^2}$

6.30 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}9^{-\ln n}$

6.31 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{3^n-n}$

6.32 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\sqrt{n}2^n+1}$

6.33 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{3^n}{4^n-1}\right)$

6.34 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{5}{4}\right)^{-n}$

6.35 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n+1}+1\right)^{-2n}$

6.36 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+\ell\text{n}n}$

6.37 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ell\text{n}n}{2^n}$

6.38 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}4^{-n^3}$

6.39 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n!}{3^n}+\frac{\cos^2 n}{4^n}\right)$

6.40 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^9}{n^3(n+2)^{10}}$

6.41 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{1}{n}\right)$

6.42 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(5)(7)(9)\cdots(2n+3)}$

6.43 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2)(4)(6)\cdots(2n)}{n!}$

6.44 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(1)(3)(5)\cdots(2n-1)}{(2n-1)!}$

6.45 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}$

6.46 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$

6.47 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+\ell\text{n}n}$

6.48 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{3^n}$

6.49 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n\sin\left(\frac{1}{n^3}\right)$

6.50 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}3^{-\ell\text{n}(e^n+1)}$

6.51 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n!)}{n!}$

6.52 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n-3n^2}{\sqrt{n^6+2}}$

6.53 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ell\text{n}(n+2)}{n}$

6.54 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin^2 n}{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

6.55 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sin n}$

6.56 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\cos n\right]^n$

6.57 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(\frac{n\pi}{3})}{n!}$

6.58 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)^n$

6.59 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3-\cos n}{n^{\frac{2}{3}}-2}$

6.60 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

6.61 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+3+5+\cdots+(2n-1)}$

6.62 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}$

6.63 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+n^2+1}-n\right)$

6.64 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n!}$

7. จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์หรือลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข

7.1 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}$

7.2 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n2^n}$

7.3 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ell\text{n}(e^n+1)}$

7.4 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ell\text{n}n}{\ell\text{n}(n+2)}$

7.5 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

7.6 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{\frac{1}{n}}$

7.7 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n+\ell\text{n}n}$

7.8 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$

7.9 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{1+\sqrt{n}}$

7.10 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos n\pi}{2^n}$

8. จงหาจำนวนจริง x ที่ทำให้อนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้า

8.1 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x^n}$

8.2 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3x)^n}{2^n}$

9. จงหาเงื่อนไขของจำนวนจริง p ซึ่งทำให้อนุกรม

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^p}$$

เป็นอนุกรมลู่เข้าและเป็นอนุกรมลู่ออก

บทที่ 2

อนุกรมกำลัง

อนุกรมกำลัง (power series) รอบจุด a เมื่อ $a \in \mathbb{R}$ คืออนุกรมอนันต์ในรูป

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$$

เรียก a ว่า **จุดศูนย์กลางของอนุกรมกำลัง** (center of power series)
และเรียก $c_n \in \mathbb{R}$ ว่า **สัมประสิทธิ์ของอนุกรมกำลัง** (coefficients of power series)
หมายเหตุ อนุกรมกำลังเป็นอนุกรมลู่เข้า c_0 เมื่อ $x = a$ เสมอ

2.1 รัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้า

ตัวอย่าง 2.1.1 จงหา x ที่ทำให้ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

แนวคำตอบ สำหรับ $x \in \mathbb{R}$ พิจารณาการลู่เข้าโดยใช้การทดสอบโดยใช้อัตราส่วน จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x-3)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{(x-3)^n} \right| &= |x-3| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \\ &= |x-3| \cdot 1 < 1 \end{aligned}$$

จะได้ว่า $|x-3| < 1$ ฉะนั้น $2 < x < 4$ และตรวจสอบการลู่เข้าเมื่อ $x = 2$ และ $x = 4$
กรณี $x = 2$ จะได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า
กรณี $x = 4$ จะได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ เป็นอนุกรมลู่ออก
สรุปได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า เมื่อ $x \in [2, 4)$

ทฤษฎีบท 2.1.2 สำหรับอนุกรมกำลัง

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

จะเป็นไปตามกรณีใดกรณีหนึ่งใน 3 กรณีนี้เท่านั้น

1. อนุกรมลู่เข้าเฉพาะเพียงจุดเดียวที่จุดศูนย์กลาง a
2. มีจำนวนจริงบวก R ที่ทำให้
   อนุกรมลู่เข้าทุกค่า x ซึ่ง $|x-a| < R$ และ อนุกรมลู่ออกทุกค่า x ซึ่ง $|x-a| > R$
3. อนุกรมลู่เข้าทุกค่า $x \in \mathbb{R}$

บทพิสูจน์. สำหรับ $x \in \mathbb{R}$ พิจารณาการลู่เข้าโดยใช้การทดสอบโดยใช้อัตราส่วน จะได้ว่า

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}(x-a)^{n+1}}{c_n(x-a)^n} \right| = |x-a| \lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n}$$

กำหนดให้ $C = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n}$
กรณี $L = \infty$ จะได้ว่า $C = \infty$ ดังนั้นอนุกรมกำลังนี้ลู่เข้าเพียงจุดเดียวที่ $x = a$
กรณี $L < 1$ และ $C \neq 0$ จะได้ว่า

$$|x-a| < \tfrac{1}{C} \text{ เลือก } R = \tfrac{1}{C}$$

ดังนั้นอนุกรมกำลังนี้ลู่เข้าทุกค่า x ซึ่ง $|x-a| < R$ และลู่ออกทุกค่า x ซึ่ง $|x-a| > R$
กรณี $L = 0$ จะได้ว่า $C = 0$ ดังนั้นอนุกรมกำลังนี้ลู่เข้าทุกค่า $x \in \mathbb{R}$ □

บทนิยาม 2.1.3 จำนวน R ในทฤษฎีบท **??** ข้อ 2 เรียกว่า **รัศมีแห่งการลู่เข้า** (radius of convergence) ของอนุกรมกำลัง ในข้อ 1 ให้ $R = 0$ และในข้อ 3 ให้ $R = \infty$

บทนิยาม 2.1.4 เรียกเซต

$$\left\{ x : \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \text{ เป็นอนุกรมลู่เข้า} \right\}$$

ว่า **ช่วงแห่งการลู่เข้า** (interval of convergent) ของอนุกรม $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$

จะได้ว่าอนุกรมกำลังที่มีรัศมีแห่งการลู่เข้า R มีช่วงแห่งการลู่เข้าแบบใดแบบหนึ่งเท่านั้น

$$(a-R, a+R),\ (a-R, a+R],\ [a-R, a+R),\ [a-R, a+R] \text{ และ } (-\infty, \infty)$$

ตัวอย่าง 2.1.5 จงหารัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้าของอนุกรมกำลังต่อไปนี้

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

   แนวคำตอบ สำหรับ $x \in \mathbb{R}$ พิจารณาการลู่เข้าโดยใช้การทดสอบโดยใช้อัตราส่วน จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{x^n} \right| &= |x| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \\ &= |x| \cdot 1 < 1\end{aligned}$$

   จะได้ว่า $|x| < 1$ ฉะนั้น $-1 < x < 1$ จะได้ว่ารัศมีแห่งการลู่เข้าคือ 1
   และตรวจสอบการลู่เข้าเมื่อ $x = -1$ และ $x = 1$
   กรณี $x = -1$ จะได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า
   กรณี $x = 1$ จะได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ เป็นอนุกรมลู่ออก
   ดังนั้น $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ ลู่เข้าเมื่อ $-1 \leq x < 1$
   สรุปได้ว่ารัศมีแห่งการลู่เข้าคือ $R = 1$ และช่วงแห่งการลู่เข้าคือ $[-1, 1)$

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n!}$

   แนวคำตอบ สำหรับ $x \in \mathbb{R}$ พิจารณาการลู่เข้าโดยใช้การทดสอบโดยใช้อัตราส่วน จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(x+1)^n} \right| = |x+1| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = |x+1| \cdot 0 = 0 < 1$$

   ดังนั้น $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n!}$ ลู่เข้าทุก ๆ $x \in \mathbb{R}$
   สรุปได้ว่ารัศมีแห่งการลู่เข้าคือ $R = \infty$ และช่วงแห่งการลู่เข้าคือ $(-\infty, \infty)$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$

   แนวคำตอบ สำหรับ $x \in \mathbb{R}$ พิจารณาการลู่เข้าโดยใช้การทดสอบโดยใช้การถอดกรณฑ์ จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n^n x^n|} = |x| \lim_{n\to\infty} n = \infty \qquad \text{เมื่อ } x \neq 0$$

   ดังนั้น $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$ ลู่เข้าเพียงจุดเดียวคือ $x = 0$
   สรุปได้ว่ารัศมีแห่งการลู่เข้าคือ $R = 0$ และช่วงแห่งการลู่เข้าคือ $[0, 0] = \{0\}$

ตัวอย่าง 2.1.6 จงหารัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้าของอนุกรม $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x-1)^n}{n2^n}$

แนวคำตอบ สำหรับ $x \in \mathbb{R}$ พิจารณาการลู่เข้าโดยใช้การทดสอบโดยใช้อัตราส่วน จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2x-1)^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}\cdot\frac{n2^n}{(2x-1)^n}\right| &= \frac{1}{2}|2x-1|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\\ &= \frac{1}{2}|2x-1|\cdot 1 = \left|x-\frac{1}{2}\right| < 1\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\left|x-\frac{1}{2}\right| < 1 \qquad \longrightarrow \qquad -1 < x-\frac{1}{2} < 1$$

ฉะนั้น $-\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$ และตรวจสอบการลู่เข้าเมื่อ $x = -\frac{1}{2}$ และ $x = \frac{3}{2}$ จะได้ว่า พิจารณา

กรณี $x = -\frac{1}{2}$ จะได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x-1)^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

กรณี $x = \frac{3}{2}$ จะได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x-1)^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

สรุปได้ว่ารัศมีแห่งการลู่เข้าคือ $R = 1$ และช่วงแห่งการลู่เข้าคือ $[-\frac{1}{2},\frac{3}{2})$

ตัวอย่าง 2.1.7 จงหา x ที่ทำให้ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^{2n}}{9^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

แนวคำตอบ สำหรับ $x \in \mathbb{R}$ พิจารณาการลู่เข้าโดยใช้การทดสอบโดยใช้การถอดกรณฑ์ จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(x-2)^{2n}}{9^n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-2)^2}{9}\right| = \left(\frac{x-2}{3}\right)^2 < 1$$

จะได้ว่า

$$\left|\frac{x-2}{3}\right| < 1 \qquad \longrightarrow \qquad |x-2| < 3 \qquad \longrightarrow \qquad -3 < x-2 < 3$$

ฉะนั้น $-1 < x < 5$ และตรวจสอบการลู่เข้าเมื่อ $x = -1$ และ $x = 5$ จะได้ว่า

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^{2n}}{9^n} = \sum_{n=0}^{\infty}1 \quad \text{เป็นอนุกรมลู่ออก}$$

ดังนั้น $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^{2n}}{9^n}$ ลู่เข้าเมื่อ $-1 < x < 5$

ทฤษฎีบท 2.1.8 ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x-a)^n$ เป็นอนุกรมกำลัง สมมติว่ามี $n_0 \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $c_n \neq 0$ ทุก ๆ $n \geq n_0$ จะได้ว่ารัศมีแห่งการลู่เข้าคือ

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| \qquad \text{หรือ} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}$$

บทพิสูจน์. เห็นได้ชัดจากบทพิสูจน์ของทฤษฎีบท 2.1.2 □

ตัวอย่าง 2.1.9 จงหารัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้าของอนุกรมกำลังต่อไปนี้

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$

   แนวคำตอบ จะเห็นว่าอนุกรมกำลังนี้มีศูนย์กลางอยู่ที่ $a = 0$ และมี $c_n = \frac{1}{n^n}$ จะได้ว่า

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|\frac{1}{n^n}|}} = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

   สรุปได้ว่ารัศมีแห่งการลู่เข้าคือ $R = \infty$ และช่วงแห่งการลู่เข้าคือ $(-\infty, \infty)$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-1)^n}{n}$

   แนวคำตอบ พิจารณา $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(x-\frac{1}{3})^n}{n}$
   จะเห็นว่าอนุกรมกำลังนี้มีศูนย์กลางอยู่ที่ $a = \frac{1}{3}$ และมี $c_n = \frac{3^n}{n}$ จะได้ว่า

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{3^n}{n} \cdot \frac{n+1}{3^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3n} = \frac{1}{3}$$

   ดังนั้นรัศมีแห่งการลู่เข้าคือ $R = \frac{1}{3}$ และ $\frac{1}{3} - \frac{1}{3} < x < \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ หรือ $0 < x < \frac{2}{3}$
   และตรวจสอบการลู่เข้าเมื่อ $x = 0$ และ $x = \frac{2}{3}$ จะได้ว่า พิจารณา
   กรณี $x = 0$ จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า
   กรณี $x = \frac{2}{3}$ จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ เป็นอนุกรมลู่ออก
   สรุปได้ว่ารัศมีแห่งการลู่เข้าคือ $R = \frac{1}{3}$ และช่วงแห่งการลู่เข้าคือ $[0, \frac{2}{3})$

แบบฝึกหัด 2.1

1. จงหารัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้าของอนุกรมกำลังต่อไปนี้

1.1 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n x^n$

1.2 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{n^2 x^n}{2^n}$

1.3 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x-1)^n}{3^n}$

1.4 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n(x-3)}{\cos n}\right)^n$

1.5 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(x-2)^n}{n^4+1}$

1.6 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{n^2+1}$

1.7 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-e)^n}{ne^n}$

1.8 $\sum_{n=0}^{\infty}2^{n^2}x^n$

1.9 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x-1)^n}{5^n}$

1.10 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3x+1)^n}{n4^n}$

1.11 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n+1}}{n^2 4^n}$

1.12 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{n\cdot 27^n}$

1.13 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$

1.14 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$

1.15 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n x^n}{n\sqrt{n}}$

1.16 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(x+1)^n}{4^n \ell \ln n}$

1.17 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(5x-3)^n}{n^3}$

1.18 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n (x+1)^{2n+1}}{(2n+1)!}$

2. จงหาโดเมนของ **ฟังก์ชันเบสเซล** (Bessel function) อันดับ 0 และ 1 ที่กำหนดโดย

2.1 $J_0(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$

2.2 $J_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(n+1)!2^{2n+1}}$

2.2 ฟังก์ชันในรูปอนุกรมกำลัง

บทนิยาม 2.2.1 ให้อนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ ลู่เข้าบนช่วง I
ถ้าอนุกรมนี้มีผลบวกเป็น $f(x)$ ทุก ๆ $x \in I$ นั่นคือ

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \quad \text{ทุก ๆ } x \in I$$

เรียก f ว่า **ฟังก์ชันผลบวก** (sum function) ของอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ บน I

ต่อไปเราจะใช้อนุกรมเรขาคณิต (เป็นอนุกรมกำลังรอบจุด 0)

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad \text{เมื่อ } |x| < 1$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n \qquad \text{เมื่อ } |x| < 1$$

เป็นเครื่องมือสำคัญในการหาฟังก์ชันผลบวกดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.2.2 จงหาฟังก์ชันผลบวกของอนุกรมกำลังต่อไปนี้

1. $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$

   แนวคำตอบ โดยใช้อนุกรมเรขาคณิต

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2} \qquad \text{เมื่อ } |x^2| < 1 \text{ หรือ } |x| < 1$$

   ดังนั้นฟังก์ชันผลบวกของ $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$ คือ $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ เมื่อ $x \in (-1, 1)$

2. $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2}$

   แนวคำตอบ โดยใช้อนุกรมเรขาคณิต

$$x^2 \sum_{n=0}^{\infty} x^n = x^2 \cdot \frac{1}{1-x} \qquad \text{เมื่อ } |x| < 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2} = \frac{x^2}{1-x} \qquad \text{เมื่อ } |x| < 1$$

   ดังนั้นฟังก์ชันผลบวกของ $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2}$ คือ $f(x) = \frac{x^2}{1-x}$ เมื่อ $x \in (-1, 1)$

ตัวอย่าง 2.2.3 จงหาฟังก์ชันผลบวกของอนุกรมกำลังต่อไปนี้

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)^n$

   แนวคำตอบ โดยใช้อนุกรมเรขาคณิต

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)^n &= \frac{1}{1-(1-x)} && \text{เมื่อ } |1-x|<1\\ &= \frac{1}{x} && \text{เมื่อ } |x-1|<1\end{aligned}$$

   ดังนั้นฟังก์ชันผลบวกของ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)^n$ คือ $f(x)=\dfrac{1}{x}$ เมื่อ $x\in(0,2)$

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(2x-1)^n$

   แนวคำตอบ โดยใช้อนุกรมเรขาคณิต

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(2x-1)^n &= \frac{1}{1-(2x-1)} && \text{เมื่อ } |2x-1|<1\\ &= \frac{1}{2-2x} && \text{เมื่อ } \left|x-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}\end{aligned}$$

   ดังนั้นฟังก์ชันผลบวกของ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(2x-1)^n$ คือ $f(x)=\dfrac{1}{2-2x}$ เมื่อ $x\in(0,1)$

ตัวอย่าง 2.2.4 จงหาอนุกรมกำลังที่มีฟังก์ชันผลบวกต่อไปนี้

1. $\dfrac{1}{1-2x}$

   แนวคำตอบ โดยใช้อนุกรมเรขาคณิต

$$\frac{1}{1-2x}=\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} \qquad \text{เมื่อ } |2x|<1 \text{ หรือ } |x|<\frac{1}{2}$$

   ดังนั้นอนุกรมกำลังที่มีฟังก์ชันผลบวก $f(x)=\dfrac{1}{1-2x}$ คือ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}2^n x^n$ เมื่อ $x\in(0,\frac{1}{2})$

2. $\dfrac{1}{1+x^2}$

   แนวคำตอบ โดยใช้อนุกรมเรขาคณิต

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} \qquad \text{เมื่อ } |x^2|<1 \text{ หรือ } |x|<1$$

   ดังนั้นอนุกรมกำลังที่มีฟังก์ชันผลบวก $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ คือ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ เมื่อ $x\in(-1,1)$

ตัวอย่าง 2.2.5 จงหาอนุกรมกำลังที่มีฟังก์ชันผลบวกต่อไปนี้

1. $\dfrac{1}{x^2+4}$

   แนวคำตอบ โดยใช้อนุกรมเรขาคณิต

$$\frac{1}{x^2+4} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{x^2}{4}} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^n \qquad \text{เมื่อ } \left|\frac{x^2}{4}\right| < 1$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{4^n} \qquad \text{เมื่อ } \left|x^2\right| < 4$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{4^{n+1}} \qquad \text{เมื่อ } |x| < 2$$

   ดังนั้นอนุกรมกำลังที่มีฟังก์ชันผลบวก $f(x) = \dfrac{1}{x^2+4}$ คือ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{4^{n+1}}$ เมื่อ $x \in (-2, 2)$

2. $\dfrac{x}{x^2-1}$

   แนวคำตอบ โดยใช้อนุกรมเรขาคณิต

$$\frac{x}{x^2-1} = -x\cdot\frac{1}{1-x^2} = -x\sum_{n=0}^{\infty}(x^2)^n \qquad \text{เมื่อ } \left|x^2\right| < 1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} -x^{2n+1} \qquad \text{เมื่อ } |x| < 1$$

   ดังนั้นอนุกรมกำลังที่มีฟังก์ชันผลบวก $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$ คือ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} -x^{2n+1}$ เมื่อ $x \in (-1, 1)$

3. $\dfrac{1}{x^2+2x+2}$

   แนวคำตอบ โดยใช้อนุกรมเรขาคณิต

$$\frac{1}{x^2+2x+2} = \frac{1}{1+(x+1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}[-(x+1)]^n \qquad \text{เมื่อ } |x+1| < 1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x+1)^n \qquad \text{เมื่อ } |x+1| < 1$$

   ดังนั้นอนุกรมกำลังที่มีฟังก์ชันผลบวก $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2x+2}$
   คือ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x+1)^n$ เมื่อ $x \in (-2, 0)$

บทนิยาม 2.2.6 กำหนดให้

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \quad \text{บนช่วง } (a-R,a+R)$$

เมื่อ R เป็นรัศมีแห่งการลู่เข้าของอนุกรมนี้ จะได้ว่า f มีอนุพันธ์ทุกค่า $x\in(a-R,a+R)$ และ

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1} \quad \text{ทุกค่า } x\in(a-R,a+R)$$

เมื่อ C เป็นค่าคงตัว จะได้ว่า

$$\int f(x)\,dx = C+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

ตัวอย่าง 2.2.7 จงหาฟังก์ชันผลบวกของอนุกรมกำลังต่อไปนี้

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$

   แนวคำตอบ โดยใช้อนุกรมเรขาคณิต

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}x^n &= \frac{d}{dx}\frac{1}{1-x} && \text{เมื่อ } |x|<1\\
\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1} &= \frac{1}{(1-x)^2} && \text{เมื่อ } |x|<1\\
\sum_{n=1}^{\infty}nx^n = x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1} &= x\cdot\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{x}{(1-x)^2} && \text{เมื่อ } |x|<1
\end{aligned}$$

   ดังนั้นฟังก์ชันผลบวกของ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ คือ $f(x)=\dfrac{x}{(1-x)^2}$ เมื่อ $x\in(-1,1)$

2. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n^2x^{n+2}$

   แนวคำตอบ จากข้อ 1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty}nx^n &= \frac{d}{dx}\frac{x}{(1-x)^2} && \text{เมื่อ } |x|<1\\
\sum_{n=2}^{\infty}n^2x^{n-1} &= \frac{(1-x)^2+x\cdot 2(1-x)}{(1-x)^4} && \text{เมื่อ } |x|<1\\
\sum_{n=2}^{\infty}n^2x^{n+2} = x^3\sum_{n=2}^{\infty}n^2x^{n-1} &= x^3\cdot\frac{1+x}{(1-x)^3}=\frac{x^4+x^3}{(1-x)^3} && \text{เมื่อ } |x|<1
\end{aligned}$$

   ดังนั้นฟังก์ชันผลบวกของ $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n^2x^{n+2}$ คือ $f(x)=\dfrac{x^4+x^3}{(1-x)^3}$ เมื่อ $x\in(-1,1)$

ตัวอย่าง 2.2.8 จงหาฟังก์ชันผลบวกของอนุกรมกำลังต่อไปนี้

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n3^n(-x)^{n+1}$

   แนวคำตอบ โดยใช้อนุกรมเรขาคณิต

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}(-3x)^n &= \frac{d}{dx}\frac{1}{1+3x} && \text{เมื่อ } |3x|<1\\
\sum_{n=1}^{\infty} n(-3x)^{n-1}(-3) &= \frac{-3}{(1+3x)^2} && \text{เมื่อ } |x|<\frac{1}{3}\\
(-3)\sum_{n=1}^{\infty} n3^n(-x)^{n-1} &= \frac{-3}{(1+3x)^2} && \text{เมื่อ } |x|<\frac{1}{3}\\
(-x)^2\sum_{n=1}^{\infty} n3^n(-x)^{n-1} &= \frac{(-x)^2}{-3}\cdot\frac{-3}{(1+3x)^2} && \text{เมื่อ } |x|<\frac{1}{3}\\
\sum_{n=1}^{\infty} n3^n(-x)^{n+1} &= \frac{x^2}{(1+3x)^2} && \text{เมื่อ } |x|<\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

   ดังนั้นฟังก์ชันผลบวกของ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n3^n(-x)^{n+1}$ คือ $f(x)=\dfrac{x^2}{(1+3x)^2}$ เมื่อ $x\in(-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n+1}$

   แนวคำตอบ โดยใช้อนุกรมเรขาคณิต

$$\begin{aligned}
\int\sum_{n=0}^{\infty}(x+1)^n\,dx &= \int\frac{1}{1-(x+1)}\,dx && \text{เมื่อ } |x+1|<1\\
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+1)^{n+1}}{n+1}+C &= -\ell\text{n}|x| && \text{เมื่อ } x\in(-2,0)
\end{aligned}$$

   หา C โดยแทนค่า $x=-1$ จะได้ว่า $0+C=0$ นั่นคือ $C=0$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+1)^{n+1}}{n+1} &= -\ell\text{n}|x| && \text{เมื่อ } x\in(-2,0)\\
(x+1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+1)^{n}}{n+1} &= -\ell\text{n}|x| && \text{เมื่อ } x\in(-2,0)\\
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+1)^{n}}{n+1} &= -\frac{\ell\text{n}|x|}{x+1} && \text{เมื่อ } x\in(-2,-1)\cup(-1,0)
\end{aligned}$$

   ดังนั้นฟังก์ชันผลบวกของ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n+1}$ คือ $f(x)=-\dfrac{\ell\text{n}|x|}{x+1}$ เมื่อ $x\in(-2,-1)\cup(-1,0)$

ตัวอย่าง 2.2.9 จงหาอนุกรมกำลังซึ่งมีฟังก์ชันผลบวกเป็น $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$

แนวคำตอบ โดยใช้อนุกรมเรขาคณิต

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{1-x} = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad \text{เมื่อ } |x| < 1$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \qquad \text{เมื่อ } |x| < 1$$

ดังนั้นอนุกรมกำลังที่มีฟังก์ชันผลบวก $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ คือ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ เมื่อ $x \in (-1,1)$

ตัวอย่าง 2.2.10 จงหาอนุกรมกำลังซึ่งมีฟังก์ชันผลบวกเป็น $f(x) = \dfrac{x^2}{(1-4x^2)^2}$

แนวคำตอบ โดยใช้อนุกรมเรขาคณิต

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{1-4x^2} = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}(4x^2)^n \qquad \text{เมื่อ } |4x^2| < 1$$

$$\frac{8x}{(1-4x^2)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n(4x^2)^{n-1}(8x) \qquad \text{เมื่อ } |2x| < 1$$

$$\frac{x}{8}\cdot\frac{8x}{(1-4x^2)^2} = \frac{x}{8}\sum_{n=1}^{\infty} n4^{n-1}x^{2n-2}(8x) \qquad \text{เมื่อ } |x| < \frac{1}{2}$$

$$\frac{x^2}{(1-4x^2)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n4^{n-1}x^{2n} \qquad \text{เมื่อ } |x| < \frac{1}{2}$$

ดังนั้นอนุกรมกำลังที่มีฟังก์ชันผลบวก $f(x) = \dfrac{x^2}{(1-4x^2)^2}$ คือ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n4^{n-1}x^{2n}$ เมื่อ $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

ตัวอย่าง 2.2.11 ให้ $f(x) = \ell\text{n}(x+1)$

1. จงหาอนุกรมกำลังซึ่งมีฟังก์ชันผลบวกเป็น $f(x)$
2. จงแสดงว่า $\ell\text{n}2 = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$

แนวคำตอบ โดยใช้อนุกรมเรขาคณิต

$$\int\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n\,dx = \int\frac{1}{1+x}\,dx \qquad \text{เมื่อ } |x| < 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + C = \ell\text{n}|x+1| \qquad \text{เมื่อ } x \in (-1,1)$$

หา C โดยแทนค่า $x = 0$ จะได้ว่า $0 + C = 0$ นั่นคือ $C = 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = \ell\text{n}(x+1) \qquad \text{เมื่อ } x \in (-1,1)$$

สำหรับ $x = 1$ จะได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า (อนุกรมสลับ)
สำหรับ $x = -1$ จะได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n+1}$ เป็นอนุกรมลู่ออก ดังนั้น

$$\sum_{n=0}^{\infty} -\frac{(-x)^{n+1}}{n+1} = \ell\text{n}(x+1) \qquad \text{เมื่อ } x \in (-1, 1]$$

ทำให้ได้ว่า

$$\ell\text{n}2 = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

ตัวอย่าง 2.2.12 ให้ $f(x) = \text{arctan}x$

1. จงหาอนุกรมกำลังซึ่งมีฟังก์ชันผลบวกเป็น $f(x)$
2. จงแสดงว่า $\displaystyle\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$

แนวคำตอบ โดยใช้อนุกรมเรขาคณิต

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n \, dx = \int \frac{1}{1+x^2} \, dx \qquad \text{เมื่อ } |x^2| < 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + C = \text{arctan}x \qquad \text{เมื่อ } |x| < 1$$

หา C โดยแทนค่า $x = 0$ จะได้ว่า $0 + C = 0$ นั่นคือ $C = 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \text{arctan}x \qquad \text{เมื่อ } x \in (-1, 1)$$

สำหรับ $x = 1$ จะได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า (อนุกรมสลับ)
สำหรับ $x = -1$ จะได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{2n+1}$ เป็นอนุกรมลู่ออก ดังนั้น

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \text{arctan}x \qquad \text{เมื่อ } x \in (-1, 1]$$

ทำให้ได้ว่า

$$\frac{\pi}{4} = \text{arctan}1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

แบบฝึกหัด 2.2

1. จงหาฟังก์ชันผลบวกของอนุกรมกำลังต่อไปนี้

1.1 $\sum_{n=1}^{\infty}(-3)^{n-1}nx^n$

1.2 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(n+1)x^n}{2}$

1.3 $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{2n-1}$

1.4 $\sum_{n=0}^{\infty}n(-x)^{n-1}$

1.5 $\sum_{n=1}^{\infty}n(2x)^n$

1.6 $\sum_{n=0}^{\infty}nx^{3n}$

1.7 $\sum_{n=1}^{\infty}4^{n-1}x^{n+1}$

1.8 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^nx^n}{n+1}$

2. จงหาอนุกรมกำลังซึ่งมีฟังก์ชันผลบวกพร้อมทั้งช่วงแห่งการลู่เข้า

2.1 $f(x)=\frac{2}{3-2x}$

2.2 $f(x)=\frac{3}{1-x^4}$

2.3 $f(x)=\frac{1}{x+10}$

2.4 $f(x)=\frac{x}{9+x^2}$

2.5 $f(x)=\frac{1+x}{1+x}$

2.6 $f(x)=\frac{x}{2x^2+1}$

2.7 $f(x)=\frac{1}{x^2-x-2}$

2.8 $f(x)=\frac{1}{x^2+2x+2}$

2.9 $f(x)=-\frac{x^3}{(1+x)^2}$

2.10 $f(x)=\frac{1}{(1-x)^4}$

2.11 $f(x)=\frac{x}{(1-x^2)^2}$

2.12 $f(x)=\frac{x^2}{(1-5x)^2}$

3. จงหาอนุกรมกำลังซึ่งมีฟังก์ชันผลบวกพร้อมทั้งช่วงแห่งการลู่เข้า

3.1 $f(x)=\ell\text{n}(5-x)$

3.2 $f(x)=x\ell\text{n}(x+1)$

3.3 $f(x)=x^2\text{arctan}(x^3)$

3.4 $f(x)=\frac{x^3}{(x-2)^2}$

3.5 $f(x)=\left(\frac{x}{2-x}\right)^3$

3.6 $f(x)=\frac{x^2+x}{(1-x)^3}$

2.3 ทฤษฎีบทของเทย์เลอร์

บทนิยาม 2.3.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งมีอนุพันธ์ที่จุด a ถึงอันดับที่ n จะกล่าวว่า $T_n(x)$ เป็น **พหุนามเทย์เลอร์** (Taylor polynomial) ดีกรี n ของ f ที่จุด $x = a$ ก็ต่อเมื่อ

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

ในกรณีที่ $a = 0$ จะเรียกว่า **พหุนามแมคลอริน** (Maclaurin polynomial) นั่นคือ

$$T_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

ตัวอย่าง 2.3.2 จงหาพหุนามแมคลอรินดีกรี 5 ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x) = e^x$

   แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned} f(x) = f'(x) = f''(x) = f'''(x) = f^{(4)}(x) = f^{(5)}(x) = e^x \\ f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = f^{(4)}(0) = f^{(5)}(0) = 1 \end{aligned}$$

   จะได้ว่า

$$\begin{aligned} T_5(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 \\ T_5(x) &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 \end{aligned}$$

2. $f(x) = \text{sin}x$

   แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned} f(x) &= \text{sin}x & f'(0) &= 0 \\ f'(x) &= \text{cos}x & f''(0) &= 1 \\ f''(x) &= -\text{sin}x & f''(0) &= 0 \\ f'''(x) &= -\text{cos}x & f'''(0) &= -1 \\ f^{(4)}(x) &= \text{sin}x & f^{(4)}(0) &= 0 \\ f^{(5)}(x) &= \text{cos}x & f^{(5)}(0) &= 1 \end{aligned}$$

   จะได้ว่า

$$\begin{aligned} T_5(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 \\ T_5(x) &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2.3.3 จงหาพหุนามเทย์เลอร์ดีกรี 4 รอบจุด $x = 1$ ของ $f(x) = \ell\text{n}x$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned} f(x) &= \ell\text{n}x & f(1) &= 0 \\ f'(x) &= x^{-1} & f'(1) &= 1 \\ f''(x) &= -1x^{-2} & f''(1) &= -1 \\ f'''(x) &= 2x^{-3} & f'''(1) &= 2 \\ f^{(4)}(x) &= -6x^{-4} & f^{(4)}(1) &= -6 \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$T_5(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4$$
$$T_5(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4$$

ทฤษฎีบท 2.3.4 ทฤษฎีบทของเทย์เลอร์ (Taylor's Theorem)
ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งมีอนุพันธ์ถึงอันดับที่ $n+1$ บนช่วงเปิด I สำหรับ $x, a \in I$
จะได้ว่ามี c อยู่ระหว่าง a กับ x ที่ทำให้

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

เมื่อ $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-a)^{n+1}$ เรียกว่า **เศษเหลือ** (remainder)

หมายเหตุ ความผิดพลาด $R_n(x)$ โดยที่

$$|R_n(x)| < 0.\underbrace{000...0}_{r+1}5$$

จะบอกค่าประมาณความถูกต้องอย่างน้อยทศนิยม r ตำแหน่ง

ตัวอย่าง 2.3.5 ให้ $f(x) = \sqrt{x}$ จงหาประมาณค่าของ $\sqrt{2}$ โดยใช้พหุนามเทย์เลอร์ดีกรี 3 ของ f รอบจุด $x = 1$ พร้อมทั้งหาขอบเขตความผิดพลาด

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x} & f(1) &= 1 \\ f'(x) &= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} & f'(1) &= \frac{1}{2} \\ f''(x) &= -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} & f''(1) &= -\frac{1}{4} \\ f'''(x) &= \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}} & f'''(1) &= \frac{3}{8} \\ f^{(4)}(x) &= -\frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}} \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
f(x) &= T_3(x) + R_3(x) \\
f(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + R_3(x) \\
\sqrt{x} &= 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 + R_3(x)
\end{aligned}
$$

ประมาณค่า $\sqrt{2}$ โดยแทน $x = 2$ ใน $T_3(x)$ จะได้

$$\sqrt{2} \approx 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 1 + 0.5 - 0.125 + 0.0625 = 1.4375$$

ให้ $1 < c < 2$ และ

$$|R_5(2)| = \left|\frac{f^{(4)}(c)}{4!}(2-1)^4\right| = \left|\frac{-5c^{-\frac{7}{2}}}{128}\right| = \frac{5}{128} \cdot \frac{1}{c^{\frac{7}{2}}}$$

พิจารณา

$$1 < c < 2 \quad \longrightarrow \quad 1 < c^{\frac{7}{2}} < 2^{\frac{7}{2}} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{2^{\frac{7}{2}}} < \frac{1}{c^{\frac{7}{2}}} < 1$$

จะได้ว่า

$$|R_3(2)| = \frac{5}{128} \cdot \frac{1}{c^{\frac{7}{2}}} < \frac{5}{128} \cdot 1 = 0.0390625$$

ดังนั้น $\sqrt{2} \approx 1.4375$ โดยมีความผิดพลาดไม่เกิน 0.0390625

ตัวอย่าง 2.3.6 ให้ $f(x) = \ell\text{n}(x+1)$ จงหาประมาณค่าของ $\ell\text{n}(1.5)$ โดยใช้พหุนามแมคลอรินดีกรี 7 ของ f พร้อมทั้งบอกค่าประมาณนี้ว่าถูกต้องอย่างน้อยทศนิยมกี่ตำแหน่ง

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ell\text{n}(x+1) & f(0) &= 0 \\
f'(x) &= (x+1)^{-1} & f'(0) &= 1 \\
f''(x) &= -1(x+1)^{-2} & f''(0) &= -1 \\
f'''(x) &= 2!(x+1)^{-3} & f'''(0) &= 2! \\
f^{(4)}(x) &= -3!(x+1)^{-4} & f^{(4)}(0) &= -3! \\
f^{(5)}(x) &= 4!(x+1)^{-5} & f^{(5)}(0) &= 4! \\
f^{(6)}(x) &= -5!(x+1)^{-6} & f^{(6)}(0) &= -5! \\
f^{(7)}(x) &= 6!(x+1)^{-7} & f^{(7)}(0) &= 6! \\
f^{(8)}(x) &= -7!(x+1)^{-8} & &
\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
f(x) &= T_7(x) + R_7(x) \\
f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(7)}(0)}{7!}x^7 + R_7(x) \\
\ell\text{n}(x+1) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{7}x^7 + R_7(x)
\end{aligned}$$

ประมาณค่า $\ell\text{n}(1.5)$ โดยแทน $x = 0.5$ ใน $T_7(x)$ จะได้

$$\begin{aligned}
\ell\text{n}(1.5) &\approx 0.5 - \frac{1}{2}0.5^2 + \frac{1}{3}0.5^3 - \frac{1}{4}0.5^4 + \frac{1}{5}0.5^5 - \frac{1}{6}0.5^6 + \frac{1}{7}0.5^7 \\
&= 0.4058035714
\end{aligned}$$

ให้ $0 < c < 0.5$ และ

$$|R_7(0.5)| = \left|\frac{f^{(8)}(c)}{8!}0.5^8\right| = \left|-\frac{0.5^8}{8(c+1)^8}\right| = \frac{0.5^8}{8} \cdot \frac{1}{(c+1)^8}$$

พิจารณา

$$1 < c+1 < 1.5 \quad \longrightarrow \quad 1 < (c+1)^8 < 1.5^8 \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{1.5^8} < \frac{1}{(c+1)^8} < 1$$

จะได้ว่า

$$|R_7(0.5)| = \frac{0.5^8}{8} \cdot \frac{1}{(c+1)^8} < \frac{0.5^8}{8} \cdot 1 = 0.000488 < 0.0005$$

ดังนั้น $\ell\text{n}(1.5) \approx 0.4058035714$ โดยการประมาณค่านี้ถูกต้องอย่างน้อย 2 ตำแหน่ง

หมายเหตุ ค่าจริงของ $\ell\text{n}(1.5) = 0.4054651081$ ซึ่งค่าประมาณถูกต้อง 3 ตำแหน่ง

ตัวอย่าง 2.3.7 ให้ $f(x) = x\text{sin}x$ จงหาประมาณค่าของ $\int_0^1 f(x)\,dx$ โดยใช้พหุนามแมคลอรินดีกรี 5 ของ f พร้อมทั้งหาขอบเขตความผิดพลาด

แนวคำตอบ โดยตัวอย่าง 2.3.2 พหุนามแมคลอรินดีกรี 5 ของฟังก์ชันไซน์ จะได้ว่า

$$\text{sin}x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + R_5(x)$$
$$f(x) = x\text{sin}x = x^2 - \frac{1}{3!}x^4 + \frac{1}{5!}x^6 + xR_5(x)$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx &\approx \int_0^1 x^2 - \frac{1}{3!}x^4 + \frac{1}{5!}x^6 dx\\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3!\cdot 5}x^5 + \frac{1}{5!\cdot 7}x^7\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3!\cdot 5} + \frac{1}{5!\cdot 7} = 0.301190476\end{aligned}$$

เนื่องจาก $(\text{sin}x)^{(6)} = -\text{sin}x$ จะได้ว่า $R_5(x) = \dfrac{f^{(6)}(c)}{6!}x^6 = \dfrac{-\text{sin}c}{6!}x^6$ เมื่อ $0 < c < 1$
ดังนั้นความผิดพลาดคือ

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 xR_5(x)\,dx\right| &\le \int_0^1 |xR_5(x)|\,dx = \int_0^1 \left|x\cdot\frac{-\text{sin}c}{6!}x^6\right| dx\\ &\le \int_0^1 \left|\frac{1}{6!}x^7\right| dx \qquad\qquad (\because |\text{sin}c| \le 1)\\ &= \frac{1}{6!}\int_0^1 x^7\,dx = \frac{1}{6!}\left[\frac{1}{8}x^8\right]_0^1 = \frac{1}{6!\cdot 8} = 0.000173611\end{aligned}$$

ดังนั้น $\int_0^1 x\text{sin}x\,dx \approx 0.301190476$ โดยมีความผิดพลาดไม่เกิน 0.000173611

หมายเหตุ ค่าจริงของ $\int_0^1 x\text{sin}x\,dx = 0.3011686789$ ซึ่งค่าประมาณถูกต้อง 4 ตำแหน่ง

แบบฝึกหัด 2.3

1. จงหาพหุนามเทย์เลอร์ $T_n(x)$ ของฟังก์ชันต่อไปนี้ รอบจุด a

1.1 $f(x) = \sin x$	เมื่อ $a = 0$ และ $n = 9$
1.2 $f(x) = \cos x$	เมื่อ $a = 0$ และ $n = 8$
1.3 $f(x) = \ell\text{n}(x+1)$	เมื่อ $a = 0$ และ $n = 6$
1.4 $f(x) = \sqrt{x+1}$	เมื่อ $a = 3$ และ $n = 5$
1.5 $f(x) = e^{x^2}$	เมื่อ $a = 0$ และ $n = 6$
1.6 $f(x) = x^2\ell\text{n}x$	เมื่อ $a = 1$ และ $n = 4$
1.7 $f(x) = 4x^3 + 5x^2 - 3x + 1$	เมื่อ $a = 1$ และ $n = 3$
1.8 $f(x) = \ell\text{n}(\cos x)$	เมื่อ $a = \frac{\pi}{4}$ และ $n = 3$
1.9 $f(x) = x\cos x$	เมื่อ $a = 0$ และ $n = 7$
1.10 $f(x) = x^2\sin x$	เมื่อ $a = 0$ และ $n = 7$

2. จงหาค่าประมาณของค่าต่อไปนี้ โดยใช้พหุนามเทย์เลอร์ที่ทำให้คำตอบถูกต้องอย่างน้อยทศนิยมตำแหน่งที่ 3

2.1 $\sin 12^\circ$	2.4 $\sqrt{4.2}$
2.2 $\cos 12^\circ$	2.5 $e^{0.5}$
2.3 $\ell\text{n}(1.02)$	2.6 $\sqrt[3]{7.9}$

3. ให้ $f(x) = \sqrt{x+1}$ จงหาประมาณค่าของ $\sqrt{1.2}$ โดยใช้พหุนามแมคลอรินดีกรี 5 ของ f พร้อมทั้งหาขอบเขตความผิดพลาด

4. ให้ $f(x) = e^x$ จงหาประมาณค่าของ $\displaystyle\int_0^{0.6} e^{-x^2}\,dx$ โดยใช้พหุนามแมคลอรินดีกรี 4 ของ f พร้อมทั้งหาขอบเขตความผิดพลาด

2.4 อนุกรมเทย์เลอร์

สมมติว่า f เป็นฟังก์ชันผลบวกของอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ โดยที่ $|x-a| < R$ จะได้ว่า

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + c_4(x-a)^4 + \cdots \tag{2.1}$$

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \cdots \tag{2.2}$$

$$f''(x) = 2c_2 + 2\cdot 3c_3(x-a) + 3\cdot 4c_4(x-a)^2 + \cdots \tag{2.3}$$

$$f'''(x) = 2\cdot 3c_3 + 2\cdot 3\cdot 4c_4(x-a)^2 + \cdots \tag{2.4}$$

เมื่อแทน $x = a$ ในสมการ (2.1)-(2.4) จะได้

$$c_0 = f(a), \quad c_1 = f'(a), \quad c_2 = \frac{f''(a)}{2!} \quad \text{และ} \quad c_3 = \frac{f''(a)}{3!}$$

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ $c_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$ เมื่อ $n = 0, 1, 2, 3, ...$

บทนิยาม 2.4.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งมีอนุพันธ์ทุกอันดับ และ f มีค่าที่จุด a อนุกรมที่เขียนในรูป

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

หรือ

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

เรียกว่า **อนุกรมเทย์เลอร์** (Taylor series) ของ f รอบจุด a
ในกรณีที่ $a = 0$ จะเรียกว่า **อนุกรมแมคลอริน** (Maclaurin series) นั่นคือ

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots \quad \text{หรือ} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

ตัวอย่าง 2.4.2 จงหาอนุกรมเทย์เลอร์ของ $f(x) = \dfrac{1}{x}$ รอบจุด 1

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{-1} & \qquad f(1) &= 1 \\ f'(x) &= -1x^{-2} & f'(1) &= -1 \\ f''(x) &= 2!x^{-3} & f''(1) &= 2! \\ f'''(x) &= -3!x^{-4} & f'''(1) &= -3! \end{aligned}$$

ดังนั้นอนุกรมเทย์เลอร์ของ $f(x) = \dfrac{1}{x}$ รอบจุด 1 คือ

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \cdots \\ &= 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + (x-1)^4 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n \end{aligned}$$

หมายเหตุ เราอาจหาอนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชันนี้ โดยใช้อนุกรมเรขาคณิต

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} = \frac{1}{1-(1-x)} &= \sum_{n=0}^{\infty}(1-x)^n && \text{เมื่อ } |1-x|<1 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n && \text{เมื่อ } x \in (0,2)\end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 2.4.3 ให้ $T_n(x)$ เป็นพหุนามเทย์เลอร์ดีกรี n ของ f รอบจุด a

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

สำหรับ $|x-a| < R$ เมื่อ R คือรัศมีแห่งการลู่เข้าของอนุกรม $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ จะได้ว่า

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad \lim_{n\to\infty}|R_n(x)| = 0$$

บทพิสูจน์. ข้อละไว้ในวิชานี้ □

ตัวอย่าง 2.4.4 จงหาอนุกรมแมคลอรินของฟังก์ชัน $f(x) = e^x$

แนวคำตอบ สำหรับทุกจำนวนนับ n จะได้ว่า

$$f^{(n)}(x) = e^x \qquad\qquad f^{(n)}(0) = 1$$

ดังนั้นอนุกรมแมคลอรินของ $f(x) = e^x$ คือ

$$\begin{aligned}e^x &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\end{aligned}$$

โดยมีรัศมีแห่งการลู่เข้าคือ

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n!}\cdot(n+1)!\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty$$

ดังนั้น

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad\qquad \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R}$$

ตัวอย่าง 2.4.5 จงหาอนุกรมแมคลอรินของฟังก์ชัน

1. $f(x) = \text{sin}x$

   แนวคำตอบ จากตัวอย่าง 2.3.2 จะได้ว่า อนุกรมแมคลอรินของ $f(x) = \text{sin}x$ คือ

$$\begin{aligned} \text{sin}x &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

   พิจารณา

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+3}}{(2n+3)!}\cdot\frac{(2n+1)!}{(-1)^n x^{2n+1}}\right| = x^2 \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+3)(2n+2)} = x^2\cdot 0 = 0 < 1$$

   ดังนั้น

$$\text{sin}x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R}$$

2. $f(x) = \text{cos}x$

   แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned} f(x) &= \text{cos}x & f'(0) &= 1 \\ f'(x) &= -\text{sin}x & f''(0) &= 0 \\ f''(x) &= -\text{cos}x & f''(0) &= -1 \\ f'''(x) &= \text{sin}x & f'''(0) &= 0 \\ f^{(4)}(x) &= \text{cos}x & f^{(4)}(0) &= 1 \end{aligned}$$

   อนุกรมแมคลอรินของ $f(x) = \text{sin}x$ คือ

$$\begin{aligned} \text{cos}x &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \end{aligned}$$

   พิจารณา

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{(-1)^n x^{2n}}\right| = x^2 \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+2)(2n+1)} = x^2\cdot 0 = 0 < 1$$

   ดังนั้น

$$\text{cos}x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R}$$

ตารางอนุกรมเทย์เลอร์

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad R = 1$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad R = \infty$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \qquad R = \infty$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \cdots \qquad R = \infty$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \qquad R = 1$$

$$\ell\text{n}(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \qquad R = 1$$

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \cdots \qquad R = 1$$

ตัวอย่าง 2.4.6 จงหาอนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชัน $f(x) = x\ell\text{n}x$ รอบจุด 1

แนวคำตอบ โดยใช้ตารางอนุกรมเทย์เลอร์

$$\ell\text{n}(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \qquad \text{เมื่อ } |x| < 1$$

$$\ell\text{n}((x-1)+1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n} \qquad \text{เมื่อ } |x-1| < 1$$

$$\begin{aligned}
x\ell\text{n}x &= x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n} && \text{เมื่อ } x \in (0,2) \\
&= [(x-1)+1] \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n} && \text{เมื่อ } x \in (0,2) \\
&= (x-1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n} && \text{เมื่อ } x \in (0,2) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^{n+1}}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n} && \text{เมื่อ } x \in (0,2)
\end{aligned}$$

สำหรับ $x \in (0,2)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} x\ell\text{n}x &= \left[(x-1)^2 - \frac{(x-1)^3}{2} + \frac{(x-1)^4}{3} - \frac{(x-1)^5}{4} + \cdots\right] \\ &\quad + \left[(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \cdots\right] \\ &= (x-1) + \frac{(x-1)^2}{1\cdot 2} - \frac{(x-1)^3}{2\cdot 3} + \frac{(x-1)^4}{3\cdot 4} - \frac{(x-1)^5}{4\cdot 5} + \cdots \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2.4.7 จงหาฟังก์ชันผลบวกของอนุกรม $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}$

แนวคำตอบ โดยใช้ตารางอนุกรมเทย์เลอร์

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} &= e^x && \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} &= e^{x^2} && \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R} \\ x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} &= xe^{x^2} && \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!} &= xe^{x^2} && \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

ดังนั้นฟังก์ชันผลบวกของอนุกรม $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}$ คือ xe^{x^2}

ตัวอย่าง 2.4.8 จงใช้อนุกรมแมคลอรินของ e^x หาค่าลิมิตของ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$

แนวคำตอบ โดยใช้ตารางอนุกรมเทย์เลอร์

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) - 1 - x}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{2!} + \frac{x}{3!} + \cdots\right) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

แบบฝึกหัด 2.4

1. จงหาอนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชันต่อไปนี้ รอบจุด a

   1.1 $f(x) = \ell\text{n}(1-x)$ เมื่อ $a = 0$

   1.2 $f(x) = \cos x$ เมื่อ $a = \pi$

   1.3 $f(x) = \sqrt{x}$ เมื่อ $a = 1$

   1.4 $f(x) = \sqrt[3]{x}$ เมื่อ $a = 1$

   1.5 $f(x) = \sqrt[3]{x+2}$ เมื่อ $a = -1$

   1.6 $f(x) = \dfrac{1}{3-x}$ เมื่อ $a = 2$

   1.7 $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ เมื่อ $a = 0$

   1.8 $f(x) = \sqrt{x+1}$ เมื่อ $a = 3$

2. จงหาอนุกรมแมคลอรินของฟังก์ชันต่อไปนี้ โดยใช้ตารางอนุกรมเทย์เลอร์

   2.1 $f(x) = \sin(x^2)$

   2.2 $f(x) = x^2\cos x$

   2.3 $f(x) = x\ell\text{n}(x-1)$

   2.4 $f(x) = \sin^2 x$

   2.5 $f(x) = e^x + e^{2x}$

   2.6 $f(x) = x\cos(\frac{1}{2}x)$

   2.7 $f(x) = x^2\ell\text{n}(1+x^3)$

   2.8 $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4+x^2}}$

3. จงหาอนุกรมแมคลอรินของฟังก์ชัน $f(x) = (x+1)^k$ เมื่อ k เป็นจำนวนจริง

4. จงฟังก์ชันผลบวกของอนุกรมต่อไปนี้

   4.1 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+3}}{(2n)!}$

   4.2 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{n!}$

5. จงใช้อนุกรมแมคลอรินหาค่าลิมิตของ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \ell\text{n}(1+x)}{x^2}$

สรุป

ในบทนี้เราจะศึกษาอนุกรมกำลังซึ่งอยู่ในรูป $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ คือการหาเงื่อนไขที่ทำให้อนุกรมกำลังลู่เข้าโดยสนใจรัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้า จากนั้นกล่าวถึงฟังก์ชันที่เขียนในรูปอนุกรมกำลังเรียกฟังก์ชันผลบวก สุดท้ายกล่าวถึงอนุกรมกำลังในกรณี $c_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$ ที่เรียกว่าอนุกรมเทย์เลอร์และศึกษาการประยุกต์ใช้อนุกรมเทย์เลอร์

แบบฝึกหัดบทที่ 2

---

1. จงหารัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้าของอนุกรมกำลังต่อไปนี้

1.1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\ell\text{n}(n+1)}$

1.2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n+1)!}$

1.3 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(x+1)^n}{n!}$

1.4 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n(x+1)^n}{4^n}$

1.5 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^{2n}}{n+1}$

1.6 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{5^n \cdot n^2}$

2. จงหาฟังก์ชันผลบวกของอนุกรมกำลังต่อไปนี้

2.1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(-3x)^{n+1}$

2.2 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{2^n}$

2.3 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n x^{2n+2}}{2n+1}$

2.4 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(-3x)^{n+1}$

3. จงหาอนุกรมกำลังซึ่งมีฟังก์ชันผลบวกพร้อมทั้งช่วงแห่งการลู่เข้า

3.1 $f(x) = \dfrac{1}{1+3x}$

3.2 $f(x) = \dfrac{x}{2x-2}$

3.3 $f(x) = \dfrac{x^4}{(1-2x^2)^2}$

3.4 $f(x) = \left(\dfrac{x}{2-x}\right)^3$

3.5 $f(x) = \dfrac{x+2}{2x^2-x-1}$

3.6 $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2x+2}$

3.7 $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^4}$

3.8 $f(x) = \ell\text{n}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

4. จงหาพหุนามเทย์เลอร์ $T_5(x)$ ของฟังก์ชัน

$$f(x) = 10x^5 + 4x^3 - x^2 + 2x + 1$$

รอบจุด 1 พร้อมทั้งพิจารณาว่า $T_5(x)$ และ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันเดียวกันหรือไม่

5. ให้ $f(x) = \sqrt[3]{x}$ จงประมาณค่าของ $\sqrt{7.99}$ โดยใช้พหุนามแมคลอรินดีกรี 5 ของ f พร้อมทั้งหาขอบเขตความผิดพลาด

6. ให้ $f(x) = x\cos x$ จงประมาณค่าของ $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ โดยใช้พหุนามแมคลอรินดีกรี 5 ของ f พร้อมทั้งหาขอบเขตความผิดพลาด

7. จงหาอนุกรมเทย์เลอร์ของ

$$f(x) = \frac{1}{3-2x} \qquad \text{รอบจุด } 0$$

และหาอนุกรมกำลังของฟังก์ชัน f พร้อมทั้งตรวจสอบว่าอนุกรมที่ได้เท่ากันหรือไม่

8. จงหาอนุกรมเทย์เลอร์ $f(x) = x\ell\text{n}(2-x)$ รอบจุด 1 โดยใช้ตารางอนุกรมเทย์เลอร์

9. จงหาอนุกรมเทย์เลอร์ $f(x) = \sin^2 x$ รอบจุด 0 โดยใช้ตารางเทย์เลอร์

10. จงหาฟังก์ชันผลบวกของอนุกรม $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n x^{4n+3}}{(2n)!}$

11. จงใช้อนุกรมเทย์เลอร์หาค่าลิมิตของ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \arctan x}{x^3}$

บทที่ 3

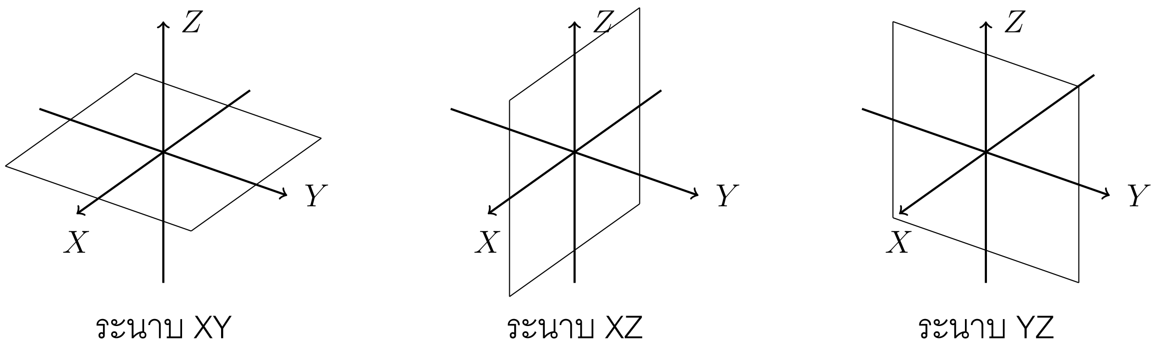
ปริภูมิสามมิติ

3.1 ระบบพิกัดฉากในปริภูมิสามมิติ

การบอกตำแหน่งของจุดใน **ปริภูมิสามมิติ** (three-dimensional space) ทำได้จากการอ้างอิงเส้นตรงสามเส้นคือ แกน X แกน Y และแกน Z ซึ่งตัดการที่จุด O เรียกว่า **จุดกำเนิด** (origin) และเรียก

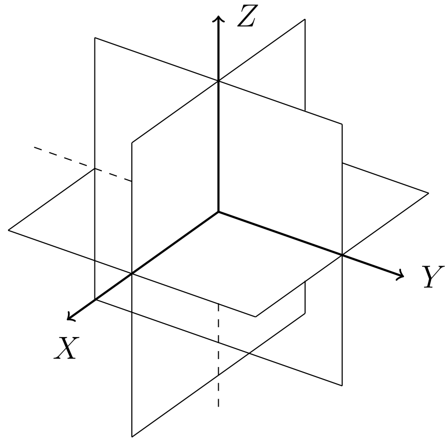
ระนาบที่ผ่าน แกน X และแกน Y ว่า ระนาบ XY (XY-plane)
ระนาบที่ผ่าน แกน X และแกน Z ว่า ระนาบ XZ (XZ-plane)
ระนาบที่ผ่าน แกน Y และแกน Z ว่า ระนาบ YZ (YZ-plane)

รูปที่ 3.1: ระนาบ XY, XZ และ YZ



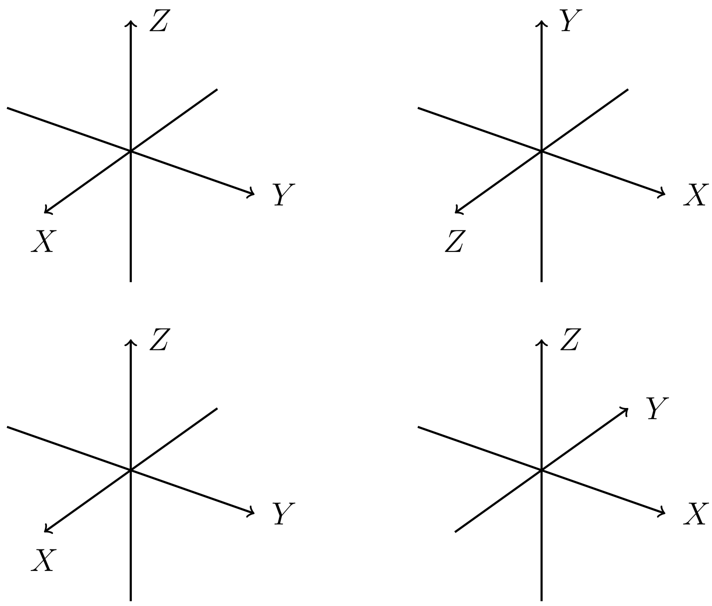
ระนาบพิกัดฉากทั้งสามจะแบ่งปริภูมิสามมิติออกเป็น 8 ส่วนเรียกว่า **อัฐภาค** (Octance)

รูปที่ 3.2: แสดงการแบ่งอัฐภาค



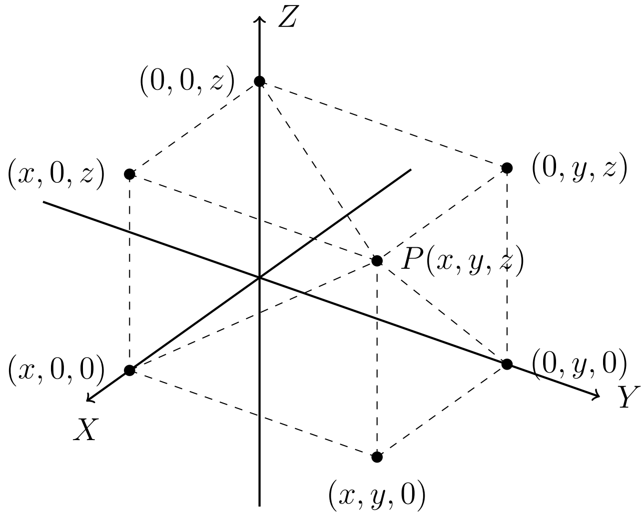
การเลือกทิศทางที่เป็นบวกของพิกัดฉาก เรานิยมใช้กฎมือขวาโดยให้นิ้วหัวแม่มือไปทางแกน Z บวก นิ้วชี้ ไปทางแกน X บวก และนิ้วกลาง ชี้ไปทางแกน Y บวก ตั้งฉากกันเสมอ ตัวอย่างดังรูปต่อไปนี้ เราจะเลือกใช้แบบใดแบบหนึ่งตามความเหมาะสม

รูปที่ 3.3: แสดงการตั้งแกนในปริภูมิสามมิติ



การบอกตำแหน่งของจุด P ในปริภูมิสามมิติ มีแกนพิกัดเป็นที่อ้างอิงบอกได้โดยใช้จำนวนจริง (x, y, z) เรียกว่าพิกัดฉากของจุด P และใช้ $\mathbb{R}^3$ แทนเซตของจุด (x, y, z) ในปริภูมิสามมิติ

รูปที่ 3.4: แสดงจุด P และภาพฉายต่าง ๆ ของ P



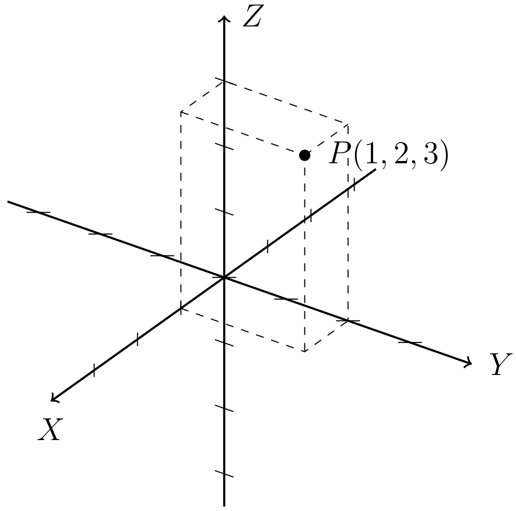
จากจุด $P(x, y, x)$ ลากขนานระนาบ XY ไปยังแกน Z จะได้จุด $(0, 0, z)$
เรียกจุดนี้ว่า **ภาพฉาย** (projection) ของ P แกน Z
จากจุด $P(x, y, x)$ ลากขนานระนาบ YZ ไปยังแกน X จะได้จุด $(x, 0, 0)$
เรียกจุดนี้ว่า ภาพฉายของ P แกน X
จากจุด $P(x, y, x)$ ลากขนานระนาบ XZ ไปยังแกน Y จะได้จุด $(0, y, 0)$
เรียกจุดนี้ว่า ภาพฉายของ P แกน Y
จากจุด $P(x, y, x)$ ลากขนานแกน Z ไปที่ระนาบ XY จะได้จุด $(x, y, 0)$
เรียกจุดนี้ว่า ภาพฉายของ P บนระนาบ XY
จากจุด $P(x, y, x)$ ลากขนานแกน X ไปที่ระนาบ YZ จะได้จุด $(0, y, z)$
เรียกจุดนี้ว่า ภาพฉายของ P บนระนาบ YZ
จากจุด $P(x, y, x)$ ลากขนานแกน Y ไปที่ระนาบ XZ จะได้จุด $(x, 0, z)$
เรียกจุดนี้ว่า ภาพฉายของ P บนระนาบ XZ

ตัวอย่าง 3.1.1 จงหาภาพฉายทั้งหมดของจุด $P(1, 2, 3)$

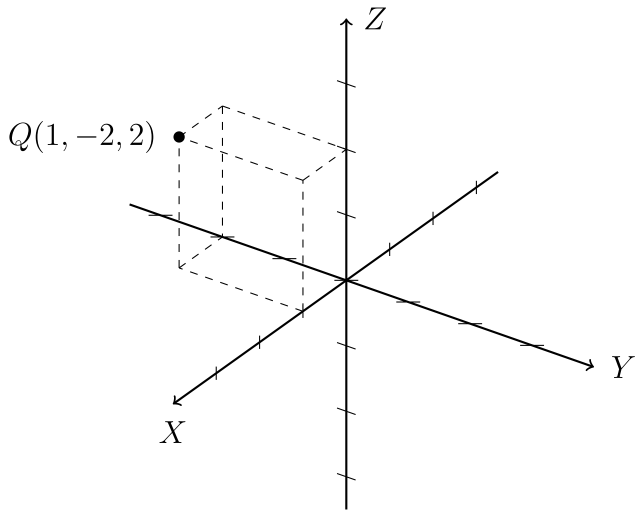
1. ภาพฉายบนระนาบ XY ของจุด P คือ (0,0,3)
2. ภาพฉายบนระนาบ XZ ของจุด P คือ (0,2,0)
3. ภาพฉายบนระนาบ YZ ของจุด P คือ (1,0,0)
4. ภาพฉายบนแกน X ของจุด P คือ (0,2,3)
5. ภาพฉายบนแกน Y ของจุด P คือ (1,0,3)
6. ภาพฉายบนแกน Z ของจุด P คือ (1,2,0)

ตัวอย่าง 3.1.2 จงเขียนจุดต่อไปนี้ในปริภูมิสามมิติ

1. $P(1,2,3)$



2. $Q(1,-2,2)$



แบบฝึกหัด 3.1

1. จงเขียนกราฟในปริภูมิสามมิติแสดงจุดดังต่อไปนี้

   1.1 $A(5,0,0)$
   1.2 $B(0,2,1)$
   1.3 $C(3,1,0)$
   1.4 $D(-3,0,2)$
   1.5 $E(1,1,3)$
   1.6 $F(-4,2,-3)$
   1.7 $G(2,1,-2)$
   1.8 $H(3,-2,6)$

2. จงหาภาพฉายของจุด P บนระนาบ XY, XZ และ YZ

   2.1 $P(3,1,2)$
   2.2 $P(1,2,-2)$
   2.3 $P(4,-1,0)$
   2.4 $P(-8,9,7)$

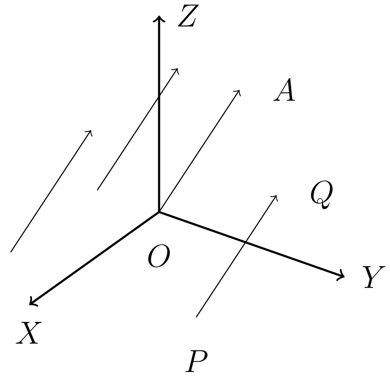
3. จงหาภาพฉายของจุด P บนแกน X, Y และ Z

   3.1 $A(5,0,0)$
   3.2 $B(0,2,1)$
   3.3 $C(3,1,0)$
   3.4 $D(-3,0,2)$

3.2 เวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ

เวกเตอร์ (vector) คือปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทาง โดยทั่วไปใช้ส่วนของเส้นตรงเชื่อมโยงกันระหว่างจุดสองจุดและมีลูกศรกำกับแทนเวกเตอร์ และความยาวของเส้นตรงแทนขนาดของเวกเตอร์ใช้สัญญาลักษณ์ $\overrightarrow{PQ}$ แทนเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุด P สิ้นสุดที่จุด Q มีทิศทางจาก P ไป Q และใช้ $\|\overrightarrow{PQ}\|$ แทนความยาวหรือขนาด (length/magnitude/norm) ของ $\overrightarrow{PQ}$ และเวกเตอร์ทั้งสองจะเท่ากันก็ต่อเมื่อทั้งสองมีขนาดเท่ากันและทิศทางเดียวกัน

รูปที่ 3.5: เวกเตอร์ที่เท่ากับ $\|\overrightarrow{PQ}\|$

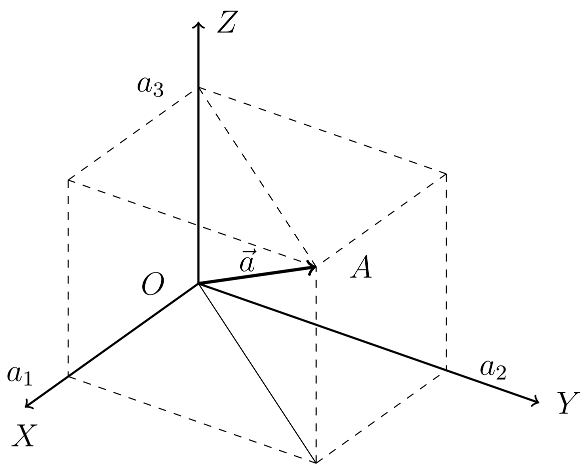


บทนิยาม 3.2.1 กำหนดให้ $P(x_1, y_1, z_1)$ และ $Q(x_2, y_2, z_2)$
แล้ว $\vec{a}$ เป็น**เวกเตอร์ตำแหน่ง** (position vector) ของ $\overrightarrow{PQ}$ คือ

$$\vec{a} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$$

ถ้า $a_1 = x_2 - x_1, a_2 = y_2 - y_1$ และ $a_3 = z_2 - z_1$ ดังนั้น $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ เรียก a_1, a_2 และ a_3 ว่า**ส่วนประกอบ** (component) ของ $\vec{a}$ ตามแกน X แกน Y และ แกน Z ตามลำดับ

รูปที่ 3.6: แสดงเวกเตอร์ $\vec{a}$ ในปริภูมิสามมิติ



จากรูปโดยใช้ความสัมพันธ์ของสามเหลี่ยมมุมฉากจะได้ว่า

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

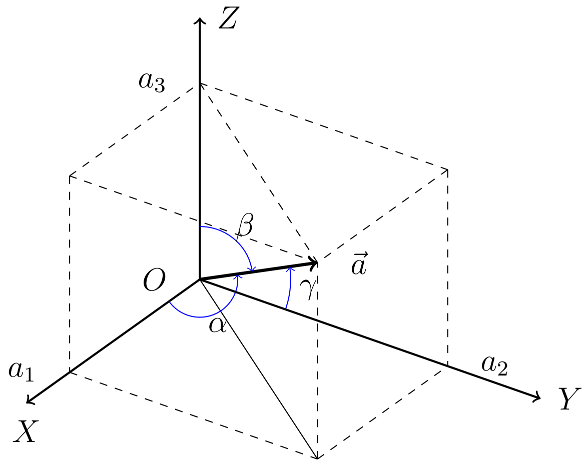
บทนิยาม 3.2.2 เวกเตอร์ที่มีตัวประกอบทุกตัวเป็นศูนย์เรียกว่า **เวกเตอร์ศูนย์** (zero vector) เขียนแทนด้วย $\vec{0} = \langle 0, 0, 0\rangle$

ข้อตกลง เมื่อ P เป็นจุดใน $\mathbb{R}^3$ และ O เป็นจุดกำเนิด เราจะเขียนเวกเตอร์ $\overrightarrow{OP}$ แทนด้วย $\vec{P}$
หมายเหตุ $\|\vec{v}\| = \|-\vec{v}\|$ และ $\|k\vec{v}\| = |k|\|\vec{v}\|$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัว

มุมแสดงทิศทาง

บทนิยาม 3.2.3 ให้ $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle \neq \vec{0}$ เป็นเวกเตอร์ที่ทำมุม $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ กับแกน X แกน Y และแกน Z ด้านบวกตามลำดับโดยที่ $\alpha, \beta, \gamma \in [0, \pi]$ เรียก $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ ว่า**มุมแสดงทิศทาง** (direction angles) ของ $\vec{a}$ และ cosα, cosβ, cosγ ว่า**โคไซน์แสดงทิศทาง** (direction cosines) ของ $\vec{a}$

รูปที่ 3.7: มุมแสดงทิศทางของเวกเตอร์ $\vec{a}$



จากรูปจะได้ว่า $\qquad \cos\alpha = \dfrac{a_1}{\|\vec{a}\|} \qquad \cos\beta = \dfrac{a_2}{\|\vec{a}\|} \qquad \cos\gamma = \dfrac{a_3}{\|\vec{a}\|}$

ตัวอย่าง 3.2.4 จงหาเวกเตอร์ตำแหน่ง ขนาด และโคไซน์แสดงทิศทางของเวกเตอร์ $\overrightarrow{PQ}$ เมื่อ $P(1, 2, -3)$ และ $Q(-1, 0-4)$

แนวคำตอบ เวกเตอร์ตำแหน่งและขนาดคือ

$$\overrightarrow{PQ} = \langle -1-1, 0-2, -4-(-3)\rangle = \langle -2, -2, -1\rangle$$
$$\|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = 3$$

และโคไซน์แสดงทิศทางของ $\overrightarrow{PQ}$ กับแกน X แกน Y และแกน Z คือ

$$\cos\alpha = -\frac{2}{3} \qquad \cos\beta = -\frac{2}{3} \qquad \cos\gamma = -\frac{1}{3}$$

ตัวอย่าง 3.2.5 จงหามุมแสดงทิศทางของเวกเตอร์ $\vec{a} = \langle -1, 1, \sqrt{2} \rangle$

แนวคำตอบ ขนาดเวกเตอร์คือ

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (\sqrt{2})^2} = 2$$

และมุมแสดงทิศทางของ $\vec{a}$ กับแกน X แกน Y และแกน Z คือ

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= -\frac{1}{2} & \therefore \alpha &= 120^\circ \\ \cos\beta &= \frac{1}{2} & \therefore \beta &= 60^\circ \\ \cos\gamma &= \frac{\sqrt{2}}{2} & \therefore \gamma &= 45^\circ \end{aligned}$$

บทนิยาม 3.2.6 ให้ $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ และ $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ และ $k \in \mathbb{R}$

1. $\vec{a} = \vec{b}$ ก็ต่อเมื่อ $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ และ $a_3 = b_3$
2. $\vec{a} + \vec{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$
3. $k\vec{a} = \langle ka_1, ka_2, ka_3 \rangle$
4. $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

ตัวอย่าง 3.2.7 ให้ $\vec{a} = \langle 1, -2, 5 \rangle$ และ $\vec{b} = \langle -1, -4, 7 \rangle$ จงหาเวกเตอร์ต่อไปนี้

1. $\vec{a} + \vec{b}$
2. $2\vec{a} + 3\vec{b}$
3. $3\vec{a} - 2\vec{b}$

แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= \langle 1, -2, 5 \rangle + \langle -1, -4, 7 \rangle = \langle 0, -6, 12 \rangle \\ 2\vec{a} + 3\vec{b} &= 2\langle 1, -2, 5 \rangle + 3\langle -1, -4, 7 \rangle \\ &= \langle 2, -4, 10 \rangle + \langle -3, -12, 21 \rangle = \langle -1, -16, 31 \rangle \\ 3\vec{a} - 2\vec{b} &= 3\langle 1, -2, 5 \rangle - 2\langle -1, -4, 7 \rangle \\ &= \langle 3, -6, 15 \rangle - \langle -2, -8, 14 \rangle = \langle 5, 2, 1 \rangle \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 3.2.8 ให้ $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ และ $c, k \in \mathbb{R}$ แล้ว

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$
2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$
3. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$
4. $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$
5. $(ck)\vec{a}=c(k\vec{a})=k(c\vec{a})$
6. $c(\vec{a}+\vec{b})=c\vec{a}+c\vec{b}$
7. $(c+k)\vec{a}=c\vec{a}+k\vec{a}$
8. $1\vec{a}=\vec{a}$
9. $0\vec{a}=\vec{0}$

บทพิสูจน์. ให้ $\vec{a}=\langle a_1,a_2,a_3\rangle$, $\vec{b}=\langle b_1,b_2,b_3\rangle$ และ $\vec{c}=\langle c_1,c_2,c_3\rangle$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\vec{a}+\vec{b} &= \langle a_1,a_2,a_3\rangle+\langle b_1,b_2,b_3\rangle=\langle a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3\rangle\\
&= \langle b_1+a_1,b_2+a_2,b_3+a_3\rangle=\langle b_1,b_2,b_3\rangle+\langle a_1,a_2,a_3\rangle=\vec{b}+\vec{a}\\
(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} &= (\langle a_1,a_2,a_3\rangle+\langle b_1,b_2,b_3\rangle)+\langle c_1,c_2,c_3\rangle\\
&= \langle a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3\rangle+\langle c_1,c_2,c_3\rangle\\
&= \langle (a_1+b_1)+c_1,(a_2+b_2)+c_2,(a_3+b_3)+c_3\rangle\\
&= \langle a_1+(b_1+c_1),a_2+(b_2+c_2),a_3+(b_3+c_3)\rangle\\
&= \langle a_1,a_2,a_3\rangle+\langle b_1+c_1,b_2+c_2,b_3+c_3\rangle\\
&= \langle a_1,a_2,a_3\rangle+(\langle b_1,b_2,b_3\rangle+\langle c_1,c_2,c_3\rangle)=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})\\
\vec{a}+\vec{0} &= \langle a_1,a_2,a_3\rangle+\langle 0,0,0\rangle=\langle a_1+0,a_2+0,a_3+0\rangle=\langle a_1,a_2,a_3\rangle=\vec{a}\\
\vec{a}+(-\vec{a}) &= \langle a_1,a_2,a_3\rangle+\langle -a_1,-a_2,-a_3\rangle\\
&= \langle a_1+(-a_1),a_2+(-a_2),a_3+(-a_3)\rangle=\langle 0,0,0\rangle=\vec{0}
\end{aligned}$$

ข้อ 5-9 เป็นแบบฝึกหัด □

เวกเตอร์หนึ่งหน่วย

บทนิยาม 3.2.9 เราเรียกเวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วยว่า **เวกเตอร์หนึ่งหน่วย** (unit vector)

ให้ $\vec{a}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ใน $\mathbb{R}^3$ และจะได้ว่า

$\dfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มี**ทิศเดีย**วกับ $\vec{a}$

$-\dfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มี**ทิศตรงข้าม**กับ $\vec{a}$

ตัวอย่าง 3.2.10 จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยของเวกเตอร์ต่อไปนี้

1. $\vec{u} = \langle 1, -2, 2\rangle$

   แนวคำตอบ ขนาดของเวกเตอร์คือ

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3$$

   ดังนั้นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยของ $\vec{u}$ คือ

$$\pm\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \pm\frac{1}{3}\langle 1, -2, 2\rangle = \pm\left\langle \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right\rangle$$

2. $\vec{v} = \langle 1, 1, \sqrt{2}\rangle$

   แนวคำตอบ ขนาดของเวกเตอร์คือ

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (\sqrt{2})^2} = 2$$

   ดังนั้นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยของ $\vec{v}$ คือ

$$\pm\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \pm\frac{1}{2}\langle 1, 1, \sqrt{2}\rangle = \pm\left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\rangle$$

3. $\vec{w} = \langle 3\text{sin}\theta, 4\text{sin}\theta, 5\text{cos}\theta\rangle$

   แนวคำตอบ ขนาดของเวกเตอร์คือ

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{9\text{sin}^2\theta + 16\text{sin}^2\theta + 25\text{cos}^2\theta} = \sqrt{25\text{sin}^2\theta + 25\text{cos}^2\theta} = 5$$

   ดังนั้นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยของ $\vec{w}$ คือ

$$\pm\frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|} = \pm\frac{1}{5}\langle 3\text{sin}\theta, 4\text{sin}\theta, 5\text{cos}\theta\rangle = \pm\left\langle \frac{3}{5}\text{sin}\theta, \frac{4}{5}\text{sin}\theta, \text{cos}\theta\right\rangle$$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยตามแนวแกน X แกน Y และ แกน Z คือ $\vec{i}, \vec{j}$ และ $\vec{k}$ ตามลำดับ

$$\vec{i} = \langle 1, 0, 0\rangle \qquad \vec{j} = \langle 0, 1, 0\rangle \qquad \vec{k} = \langle 0, 0, 1\rangle$$

ให้ $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ แล้วจะได้ว่า

$$\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle = a_1\langle 1, 0, 0\rangle + a_2\langle 0, 1, 0\rangle + a_3\langle 0, 0, 1\rangle = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

ผลคูณเชิงสเกลาร์

บทนิยาม 3.2.11 ให้ $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ และ $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$
ผลคูณเชิงสเกลาร์ (scalar product) ของ $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ เขียนแทนด้วย $\vec{a}\cdot\vec{b}$ นิยามโดย

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

ตัวอย่าง 3.2.12 จงหาผลคูณเชิงสเกลาร์ของเวกเตอร์ $\vec{a}$ และ $\vec{b}$

1. $\vec{a} = \langle 3, -1, 5\rangle$ และ $\vec{b} = \langle 1, 6, -3\rangle$

   แนวคำตอบ จะได้ว่า

   $$\vec{a}\cdot\vec{b} = 3(1) + (-1)6 + 5(-3) = -18$$

2. $\vec{a} = \langle 2, 1, -7\rangle$ และ $\vec{b} = \langle 4, 6, 2\rangle$

   แนวคำตอบ จะได้ว่า

   $$\vec{a}\cdot\vec{b} = 2(4) + 1(6) + (-7)2 = 0$$

3. $\vec{a} = \langle 2\text{sin}x, \text{cos}x, 1\rangle$ และ $\vec{b} = \langle \text{sin}x, 2\text{cos}x, 1\rangle$

   แนวคำตอบ จะได้ว่า

   $$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= 2\text{sin}x(\text{sin}x) + \text{cos}x(2\text{cos}x) + 1(1)\\ &= 2\text{sin}^2x + 2\text{cos}^2x + 1 = 2(\text{sin}^2x + \text{cos}^2x) + 1 = 2 + 1 = 3\end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 3.2.13 ให้ $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ และ $k \in \mathbb{R}$ แล้ว

1. $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$
2. $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$
3. $k(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (k\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(k\vec{b})$
4. $\vec{a}\cdot\vec{a} = \|\vec{a}\|^2$

บทพิสูจน์. ให้ $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$, $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$ และ $\vec{c} = \langle c_1, c_2, c_3\rangle$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3 = \vec{b}\cdot\vec{a}\\
\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) &= \langle a_1, a_2, a_3\rangle\cdot\langle b_1+c_1, b_2+c_2, b_3+c_3\rangle\\
&= a_1(b_1+c_1) + a_2(b_2+c_2) + a_3(b_3+c_3)\\
&= a_1b_1 + a_1c_1 + a_2b_2 + a_2c_2 + a_3b_3 + a_3c_3\\
&= (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) + (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}\\
k(\vec{a}\cdot\vec{b}) &= k(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) = (ka_1)b_1 + (ka_2)b_2 + (ka_3)b_3 = (k\vec{a})\cdot\vec{b}\\
&= a_1(kb_1) + a_2(kb_2) + a_3(kb_3) = \vec{a}\cdot(k\vec{b})\\
\vec{a}\cdot\vec{a} &= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \|\vec{a}\|^2\end{aligned}$$

$\square$

ทฤษฎีบท 3.2.14 ให้ $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ จะได้ว่า

1. $\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \|\vec{b}\|^2$
2. $\|\vec{a}-\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \|\vec{b}\|^2$
3. $\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 + \|\vec{a}-\vec{b}\|^2 = 2\|\vec{a}\|^2 + 2\|\vec{b}\|^2$
4. $\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 - \|\vec{a}-\vec{b}\|^2 = 4\vec{a}\cdot\vec{b}$

บทพิสูจน์. ให้ $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ โดยทฤษฎีบท 3.2.13 ข้อ 4 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 &= (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{a} + \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{b} \\
&= \|\vec{a}\|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \|\vec{b}\|^2 \\
\|\vec{a}-\vec{b}\|^2 &= (\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{a} - \vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{b}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{b} \\
&= \|\vec{a}\|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \|\vec{b}\|^2
\end{aligned}$$

โดยข้อ 1 และ 2 จะได้ข้อ 3 และ 4 □

ตัวอย่าง 3.2.15 ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในปริภูมิสามมิติ จงหาค่าของ

$$\|2\vec{u}+3\vec{v}\|^2 + \|3\vec{u}-2\vec{v}\|^2$$

แนวคำตอบ จาก $\|\vec{u}\| = 1$ และ $\|\vec{v}\| = 1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\|2\vec{u}+3\vec{v}\|^2 &= \|2\vec{u}\|^2 + 2(2\vec{u})\cdot(3\vec{v}) + \|3\vec{v}\|^2 \\
&= 4\|\vec{u}\|^2 + 12\vec{u}\cdot\vec{v} + 9\|\vec{v}\|^2 \\
&= 4(1)^2 + 12\vec{u}\cdot\vec{v} + 9(1)^2 \\
&= 13 + 12\vec{u}\cdot\vec{v} \\
\|3\vec{u}-2\vec{v}\|^2 &= \|3\vec{u}\|^2 - 2(3\vec{u})\cdot(2\vec{v}) + \|2\vec{v}\|^2 \\
&= 9\|\vec{u}\|^2 - 12\vec{u}\cdot\vec{v} + 4\|\vec{v}\|^2 \\
&= 9(1)^2 - 12\vec{u}\cdot\vec{v} + 4(1)^2 \\
&= 13 - 12\vec{u}\cdot\vec{v}
\end{aligned}$$

ดังนั้น

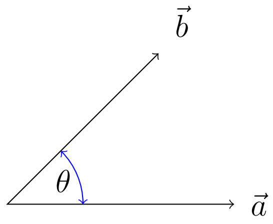
$$\begin{aligned}
\|2\vec{u}+3\vec{v}\|^2 + \|3\vec{u}-2\vec{v}\|^2 &= (13 + 12\vec{u}\cdot\vec{v}) + (13 - 12\vec{u}\cdot\vec{v}) \\
&= 26
\end{aligned}$$

มุมระหว่างเวกเตอร์

ทฤษฎีบท 3.2.16 ให้ $\vec{a} \neq \vec{0}$ และ $\vec{b} \neq \vec{0}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ แล้ว

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta$$

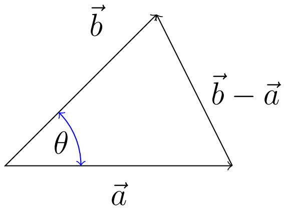
เมื่อ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ เมื่อ $0 \leq \theta \leq \pi$ ดังรูป



ข้อสังเกต $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ **ตั้งฉากกัน** (orthogonal) ก็ต่อเมื่อ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ หรือ $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

บทพิสูจน์. พิจารณาจากรูปต่อไปนี้

รูปที่ 3.8: แสดงมุมระหว่างเวกเตอร์



โดยใช้กฎโคไซน์ และทฤษฎีบท 3.2.14 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\|\vec{b} - \vec{a}\|^2 &= \|\vec{b}\|^2 + \|\vec{a}\|^2 - 2\|\vec{b}\|\|\vec{a}\|\cos\theta \\
\|\vec{b}\|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{a} + \|\vec{a}\|^2 &= \|\vec{b}\|^2 + \|\vec{a}\|^2 - 2\|\vec{b}\|\|\vec{a}\|\cos\theta \\
\vec{a} \cdot \vec{b} &= \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta
\end{aligned}$$

ถ้า $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ ตั้งฉากกัน จะได้ว่า $\theta = 90^\circ$ ทำให้ได้ว่า

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos 90^\circ = 0$$

ถ้า $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ เนื่องจาก $\vec{a} \neq \vec{0}$ และ $\vec{b} \neq \vec{0}$ จะได้ว่า

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|} = 0$$

ฉะนั้น $\theta = 90^\circ$ นั่นคือ $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ ตั้งฉากกัน □

ตัวอย่าง 3.2.17 ให้ $A(1,2,0)$, $B(0,4,2)$ และ $C(3,2,-2)$ เป็นจุดยอดของสามเหลี่ยม ABC จงหามุม $B\hat{A}C$

แนวคำตอบ ให้ $\theta = B\hat{A}C$ เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์

$$\overrightarrow{AB} = \langle -1,2,2\rangle \text{ และ } \overrightarrow{AC} = \langle 2,0,-2\rangle$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{-1(2)+2(0)+2(-2)}{\sqrt{(-1)^2+2^2+2^2}\sqrt{2^2+0^2+(-2)^2}}\\ &= \frac{-6}{3\sqrt{8}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \theta &= 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ\end{aligned}$$

ดังนั้นมุม $B\hat{A}C = 135^\circ$

ตัวอย่าง 3.2.18 ให้ $\vec{a} = \langle 3,2,-1\rangle$, $\vec{b} = \langle 1,-1,1\rangle$ และ $\vec{c} = \langle 3,4,-2\rangle$ จงตรวจสอบว่าเวกเตอร์คู่ใดตั้งฉากกัน

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= 3(1)+2(-1)+(-1)1 = 0\\ \vec{a}\cdot\vec{c} &= 3(3)+2(4)+(-1)(-2) = 19\\ \vec{b}\cdot\vec{c} &= 1(3)+(-1)4+1(-2) = -3\end{aligned}$$

ดังนั้น $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ เป็นเวกเตอร์ตั้งฉากกัน

ตัวอย่าง 3.2.19 ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกัน จงหาค่าของ

$$\frac{\|3\vec{u}+4\vec{v}\|}{\|5\vec{u}-12\vec{v}\|}$$

แนวคำตอบ จาก $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = 1$ และ $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\|3\vec{u}+4\vec{v}\|^2 &= \|3\vec{u}\|^2 + 2(3\vec{u})\cdot(4\vec{v}) + \|4\vec{v}\|^2\\ &= 9\|\vec{u}\|^2 + 24\vec{u}\cdot\vec{v} + 16\|\vec{v}\|^2\\ &= 9(1)^2 + 12\cdot 0 + 16(1)^2 = 25\\ \|3\vec{u}+4\vec{v}\| &= 5\\ \|5\vec{u}-12\vec{v}\|^2 &= \|5\vec{u}\|^2 - 2(5\vec{u})\cdot(12\vec{v}) + \|12\vec{v}\|^2\\ &= 25\|\vec{u}\|^2 - 120\vec{u}\cdot\vec{v} + 144\|\vec{v}\|^2\\ &= 25(1)^2 - 120\cdot 0 + 144(1)^2 = 169\\ \|5\vec{u}-12\vec{v}\| &= 13\end{aligned}$$

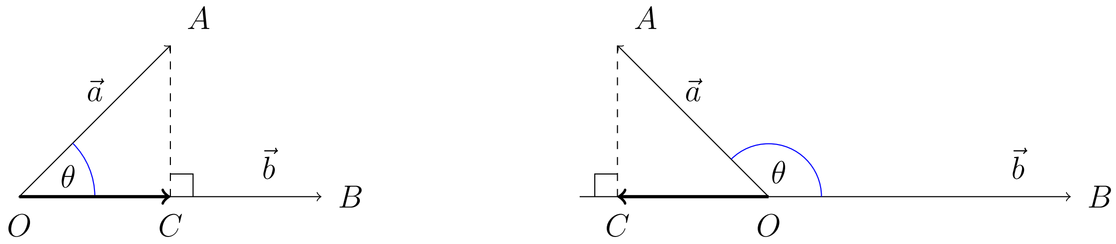
ดังนั้น

$$\frac{\|3\vec{u}+4\vec{v}\|}{\|5\vec{u}-12\vec{v}\|} = \frac{5}{13}$$

ภาพฉายเวกเตอร์

บทนิยาม 3.2.20 ให้ $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ และ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ ลากเส้นตรงจาก A ไปตั้งฉากกับ $\overrightarrow{OB}$ ที่จุด C ดังรูป

รูปที่ 3.9: แสดงตัวอย่างภาพฉายเวกเตอร์



เรียก $\overrightarrow{OC}$ ว่า **ภาพฉายเวกเตอร์** (vector projection) ของ $\vec{a}$ บน $\vec{b}$ เขียนแทนด้วย $\text{Proj}_{\vec{b}}\vec{a}$

ทฤษฎีบท 3.2.21 ให้ $\vec{a} \neq \vec{0}$ และ $\vec{b} \neq \vec{0}$ แล้วจะได้ว่า

$$\text{Proj}_{\vec{b}}\vec{a} = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}\right)\vec{b}$$

บทพิสูจน์. จากรูป 3.9 จะได้ว่า $\overrightarrow{OC}$ มีทิศเดียวกับ $\vec{b}$ และขนาดเท่ากับ $\|\vec{a}\|\cos\theta$ ดังนั้น

$$\text{Proj}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|} \cdot \|\vec{a}\|\cos\theta = \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|} \cdot \|\vec{a}\| \cdot \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|} = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}\right)\vec{b}$$

□

ตัวอย่าง 3.2.22 จงหาภาพฉายเวกเตอร์และภาพฉายสเกลาร์ของ $\vec{a}$ บน $\vec{b}$

1. $\vec{a} = \langle 1, 2, 3\rangle$ และ $\vec{b} = \langle 1, -2, -2\rangle$

   แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\text{Proj}_{\vec{b}}\vec{a} &= \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}\right)\vec{b} = \left(\frac{1(1) + 2(-2) + 3(-2)}{9}\right)\langle 1, -2, -2\rangle \\ &= -\langle 1, -2, -2\rangle = \langle -1, 2, 2\rangle\end{aligned}$$

2. $\vec{a} = \langle 3, 1, 2\rangle$ และ $\vec{b} = \langle 1, -2, 4\rangle$

   แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\text{Proj}_{\vec{b}}\vec{a} &= \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}\right)\vec{b} = \left(\frac{3(1) + 1(-2) + 2(4)}{21}\right)\langle 1, -2, 4\rangle \\ &= \frac{3}{7}\langle 1, -2, 4\rangle = \left\langle \frac{3}{7}, -\frac{6}{7}, \frac{12}{7}\right\rangle\end{aligned}$$

ผลคูณเชิงเวกเตอร์

บทนิยาม 3.2.23 ให้ $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ และ $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$
ผลคูณเชิงเวกเตอร์ (vector product/cross product) ของ $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ เขียนแทนด้วย $\vec{a}\times\vec{b}$ คือ

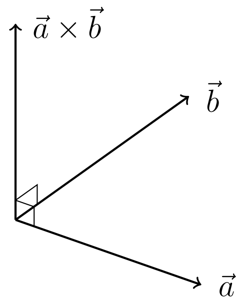
$$\vec{a}\times\vec{b} = \langle a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1\rangle$$

หรือ

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

เมื่อ $|M|$ แทนดีเทอร์มิแนนท์ของเมตริกซ์ M

รูปที่ 3.10: แสดงตัวอย่างผลคูณเชิงเวกเตอร์



ตัวอย่าง 3.2.24 กำหนดให้ $\vec{a} = \langle 1, 2, -1\rangle$, $\vec{b} = \langle 0, 2, 1\rangle$ และ $\vec{c} = \langle -3, 1, -1\rangle$ จงหา

1. $\vec{a}\times\vec{b}$
2. $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})$
3. $\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})$

แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = \langle 4, -1, 2\rangle$$

$$\begin{aligned}\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) &= \langle 1, 2, -1\rangle \times \langle -3, 3, 0\rangle \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = \langle 3, 3, 9\rangle\end{aligned}$$

$$\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = \langle 1, 2, -1\rangle$$

ทฤษฎีบท 3.2.25 ให้ $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ และ $k \in \mathbb{R}$ แล้ว

1. $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$
2. $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$
3. $k(\vec{a} \times \vec{b}) = (k\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (k\vec{b})$
4. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$

บทพิสูจน์. ให้ $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$, $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$ และ $\vec{c} = \langle c_1, c_2, c_3\rangle$
โดยใช้สมบัติของดีเทอร์มิแนนท์จะได้ว่า

$$\vec{a} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \langle 0, 0, 0\rangle$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

$$k(\vec{a} \times \vec{b}) = k\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ ka_1 & ka_2 & ka_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (k\vec{a}) \times \vec{b}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ kb_1 & kb_2 & kb_3 \end{vmatrix} = \vec{a} \times (k\vec{b})$$

ข้อ 3 เป็นแบบฝึกหัด □

บทตั้ง 3.2.26 ให้ $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ จะได้ว่า

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

บทพิสูจน์. เป็นแบบฝึกหัด □

ทฤษฎีบท 3.2.27 ให้ $\vec{a} \neq \vec{0}$ และ $\vec{b} \neq \vec{0}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ และ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ แล้ว

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\sin\theta$$

ข้อสังเกต $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ **ขนานกัน** (paralell) ก็ต่อเมื่อ $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ หรือ $\theta = 0$ หรือ π

บทพิสูจน์. โดยบทตั้ง 3.2.26 และทฤษฎีบท 3.2.16 จะได้ว่า

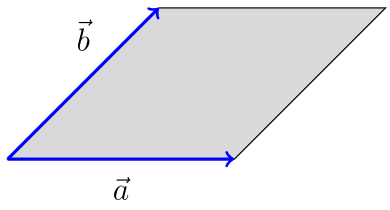
$$\begin{aligned} \|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 &= \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 - (\|\vec{a}\|\|\|\vec{b}\|\cos\theta)^2 \\ &= \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 - \|\vec{a}\|^2\|\|\vec{b}\|^2\cos^2\theta \\ &= \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2(1 - \cos^2\theta) \\ &= \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2\sin^2\theta \end{aligned}$$

ดังนั้น $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\sin\theta$ □

พื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนาน

ทฤษฎีบท 3.2.28 ให้ $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ เป็น เวก เตอร์ ใน $\mathbb{R}^3$ แล้ว พื้นที่ รูป**สี่ เหลี่ยม ด้าน ขนาน** (parallelogram) ที่มีด้านประชิดเป็น $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ มีค่าเท่ากับ $\|\vec{a}\times\vec{b}\|$

รูปที่ 3.11: พื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีด้านประชิดเป็น $\vec{a}$ และ $\vec{b}$

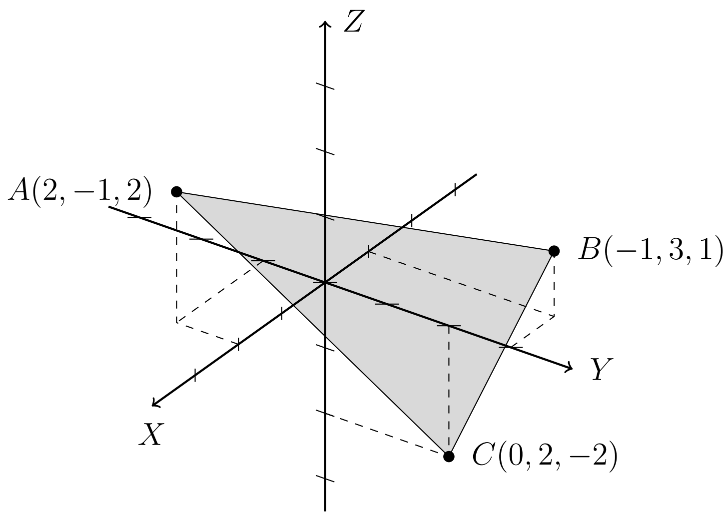


ข้อสังเกต พื้นที่รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านประชิดเป็น $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ มีค่าเท่ากับ $\frac{1}{2}\|\vec{a}\times\vec{b}\|$

บทพิสูจน์. เห็นได้ชัดโดยทฤษฎีบท 3.2.27 □

ตัวอย่าง 3.2.29 จง หา พื้นที่ ของ สามเหลี่ยม ที่ มี จุด ยอด เป็น $A(2,-1,2)$, $B(-1,3,1)$ และ $C(0,2,-3)$

แนวคำตอบ จะเห็นว่า $\overrightarrow{AB}=\langle -3,4,-1\rangle$ และ $\overrightarrow{AC}=\langle -2,3,-4\rangle$ โดยแสดงพื้นที่สามเหลี่ยม ABC ได้ดังนี้



ดังนั้นพื้นที่ของรูป ABC เท่ากับ

$$\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & 4 & -1\\ -2 & 3 & -4\end{vmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\vec{i}\begin{vmatrix}4 & -1\\ 3 & -4\end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix}-3 & -1\\ -2 & -4\end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix}-3 & 4\\ -2 & 3\end{vmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\|\langle 13,-10,-1\rangle\|$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{13^2+(-10)^2+(-1)^2} = \frac{3}{2}\sqrt{30} \quad \text{ตารางหน่วย}$$

ผลคูณเชิงสเกลาร์ของสามเวกเตอร์

บทนิยาม 3.2.30 ให้ $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ แล้ว**ผลคูณเชิงสเกลาร์ของสามเวกเตอร์** (scalar triple products) ของ $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$ คือ $\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}$ หรือ $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ นั้นคือ

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

เมื่อ $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$, $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$ และ $\vec{c} = \langle c_1, c_2, c_3\rangle$

ตัวอย่าง 3.2.31 กำหนดให้ $\vec{a} = \langle 1,2,1\rangle$, $\vec{b} = \langle 0,1,2\rangle$ และ $\vec{c} = \langle -1,0,1\rangle$ จงหา

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}$
2. $(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{c}$

แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 0 - 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1-3 = -2$$

$$\begin{aligned}(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{c} &= \vec{c}\cdot(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b}) \\ &= \langle -1,0,1\rangle\cdot\langle 1,3,3\rangle\times\langle 1,1,-1\rangle \\ &= \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 0 + 1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6-2 = 4\end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 3.2.32 ให้ $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ จะได้ว่า

1. $\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = 0 = \vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$ หรือกล่าวได้ว่า $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ ตั้งฉากกับ $\vec{a}\times\vec{b}$
2. $\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c} = \vec{b}\cdot\vec{c}\times\vec{a} = \vec{c}\cdot\vec{a}\times\vec{b}$
3. ถ้า $\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c} = 0$ แล้ว $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$ อยู่บน**ระนาบเดียวกัน** (coplanar)

บทพิสูจน์. แสดงโดยใช้สมบัติดีเทอร์มิแนนท์ (เป็นแบบฝึกหัด) □

ตัวอย่าง 3.2.33 จงหาเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับ $\vec{a} = \langle 1,-3,4\rangle$ และ $\vec{b} = \langle 2,2,1\rangle$

แนวคำตอบ เวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับ $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ คือ

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = \langle -11, 7, 8\rangle$$

ตัวอย่าง 3.2.34 จงใช้ผลคูณเชิงสเกลาร์ของสามเวกเตอร์แสดงว่า $\langle 1,4,-7\rangle$, $\langle 2,-1,4\rangle$ และ $\langle 0,-9,18\rangle$ อยู่บนระนาบเดียวกัน

แนวคำตอบ เนื่องจาก

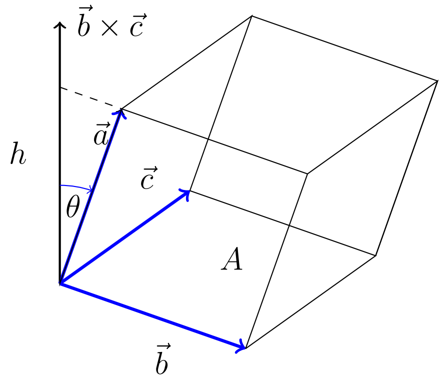
$$\begin{aligned}\langle 1,4,-7\rangle\cdot\langle 2,-1,4\rangle\times\langle 0,-9,18\rangle &= \begin{vmatrix}1 & 4 & -7\\ 2 & -1 & 4\\ 0 & -9 & 18\end{vmatrix}\\ &= 1\begin{vmatrix}-1 & 4\\ -9 & 18\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}4 & -7\\ -9 & 18\end{vmatrix} + 0 = 18-18=0\end{aligned}$$

ดังนั้น $\langle 1,4,-7\rangle$, $\langle 2,-1,4\rangle$ และ $\langle 0,-9,18\rangle$ อยู่บนระนาบเดียวกัน

ปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมหน้าขนาน

ทฤษฎีบท 3.2.35 ปริมาตรของ**รูปทรงสี่เหลี่ยมหน้าขนาน** (parallepiped) ซึ่งมีด้านประชิดเป็น $\vec{a},\vec{b}$ และ $\vec{c}$ เท่ากับ $|\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}|$

รูปที่ 3.12: ปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมหน้าขนานซึ่งมีด้านประชิดเป็น $\vec{a},\vec{b}$ และ $\vec{c}$



บทพิสูจน์. จากรูป 3.12 จะได้ว่า $V = Ah = \|\vec{b}\times\vec{c}\|\|\vec{a}\||\cos\theta| = |\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}|$ □

ตัวอย่าง 3.2.36 จงหาปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมหน้าขนานซึ่งมีด้านประชิดเป็น $\langle 1,1,-1\rangle$, $\langle 2,1,0\rangle$ และ $\langle 0,1,3\rangle$

แนวคำตอบ เนื่องจาก

$$\begin{aligned}\langle 1,1,-1\rangle\cdot\langle 2,1,0\rangle\times\langle 0,1,3\rangle &= \begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3\end{vmatrix}\\ &= 1\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 3\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 3\end{vmatrix} + 0 = 3-8=-5\end{aligned}$$

ดังนั้นปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมหน้าขนานดังกล่าวเท่ากับ $|-5|=5$ ลูกบาศก์หน่วย

แบบฝึกหัด 3.2

1. กำหนดให้ $\vec{a} = \langle 1, 2, 0\rangle$, $\vec{b} = \langle 1, -1, 2\rangle$, $\vec{c} = \langle 1, 0, 3\rangle$ และ $\vec{d} = \langle -2, 1, 5\rangle$ จงหา

    1.1 $2\vec{a} - 3\vec{b}$

    1.2 $\|\vec{c} + 2\vec{d}\| + \|2\vec{a} + \vec{b}\|$

    1.3 เวกเตอร์หนึ่งหน่วยของ $2\vec{c} - \vec{d}$

    1.4 โคไซน์แสดงทิศทางของ $\vec{b} + \vec{c}$

    1.5 มุมระหว่าง $\vec{a} + \vec{c}$ กับ $\vec{a} - \vec{c}$

    1.6 $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d})$

    1.7 ภาพฉายเวกเตอร์ของ $\vec{b}$ บน $\vec{c}$

    1.8 เวกเตอร์ 5 หน่วยที่ตั้งฉากกับ $\vec{a}$ และ $\vec{c}$

    1.9 จงหาเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับ $\vec{a}$ และ $\vec{d}$

2. ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกัน จงหาค่าของ

$$\|3\vec{u} + 2\vec{v}\| + \|3\vec{u} - 5\vec{v}\|$$

3. ให้ $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ และ $c, k \in \mathbb{R}$ จงพิสูจน์ว่า

    3.1 $(ck)\vec{a} = c(k\vec{a}) = k(c\vec{a})$

    3.2 $c(\vec{a} + \vec{b}) = c\vec{a} + c\vec{b}$

    3.3 $(c + k)\vec{a} = c\vec{a} + k\vec{a}$

    3.4 $1\vec{a} = \vec{a}$

    3.5 $0\vec{a} = \vec{0}$

4. ให้ $\vec{a}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ จงแสดงว่า

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad \vec{a} = \vec{0}$$

5. จงหาพื้นที่สามเหลี่ยมที่มีจุดยอดเป็น $(-3, 1, 2)$, $(-5, 1, 0)$ และ $(4, -2, 1)$

6. กำหนดให้ $A(1, 1, 2)$, $B(2, 0, 3)$, $C(3, 0, 0)$ และ $D(2, 1, -1)$ จงแสดงว่ารูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน และหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมนี้

7. จงหาปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมหน้าขนานซึ่งมีด้านประชิดเป็น $\vec{a} = \langle 2, 1, -3\rangle$, $\vec{b} = \langle 4, -1, 0\rangle$ และ $\vec{c} = \langle -1, 4, -1\rangle$

8. จงยกตัวอย่างเวกเตอร์ $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$ ที่ทำให้ $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$

9. จงใช้ผลคูณเชิงสเกลาร์ของสามเวกเตอร์แสดงว่า $\langle 1, 5, -2\rangle$, $\langle 3, -1, 0\rangle$ และ $\langle 5, 9, -4\rangle$ อยู่บนระนาบเดียวกัน

10. ให้ $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ จงแสดงว่า

10.1 ถ้า $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ แล้ว $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$

10.2 $(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})=2(\vec{a}\times\vec{b})$

10.3 $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$

10.4 $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{0}$

10.5 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})=\begin{vmatrix}\vec{a}\cdot\vec{c} & \vec{b}\cdot\vec{c}\\ \vec{a}\cdot\vec{d} & \vec{b}\cdot\vec{d}\end{vmatrix}$

10.6 $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})+(\vec{a}\times\vec{c})$

10.7 $\|\vec{a}\times\vec{b}\|^2=\|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2$

11. ให้ $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ จงพิสูจน์ว่า

11.1 $\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=0=\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$ หรือกล่าวได้ว่า $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ ตั้งฉากกับ $\vec{a}\times\vec{b}$

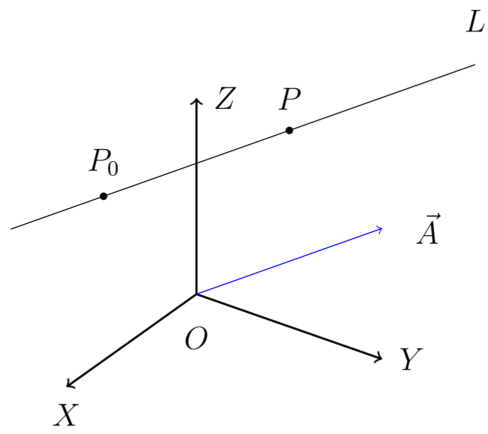
11.2 $\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}\times\vec{a}=\vec{c}\cdot\vec{a}\times\vec{b}$

11.3 ถ้า $\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}=0$ แล้ว $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$ อยู่บน**ระนาบเดียวกัน** (coplanar)

3.3 เส้นตรงในปริภูมิสามมิติ

บทนิยาม 3.3.1 ให้ P_0 เป็นจุดใน $\mathbb{R}^3$ และ $\vec{A} \neq \vec{0}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ เรียกเซตของจุด P ใด ๆ ซึ่งทำให้ $\overrightarrow{P_0P}$ ขนานกับ $\vec{A}$ ว่า **เส้นตรง** (Line) ที่ผ่านจุด P_0 และขนานกับ $\vec{A}$ และเรียก $\vec{A}$ ว่า **เวกเตอร์แสดงทิศทาง** (direction vector) ของเส้นตรง

รูปที่ 3.13: เส้นตรงในปริภูมิสามมิติ



เนื่องจาก $\overrightarrow{P_0P}$ ขนานกับ $\vec{A}$ ดังนั้นจะได้ว่ามี $t \in \mathbb{R}$ ที่ทำให้

$$\overrightarrow{P_0P} = t\vec{A} \qquad \text{หรือ} \qquad \vec{P} = \vec{P_0} + t\vec{A} \tag{3.1}$$

ถ้ากำหนดจุด $P(x, y, z)$ และ $P_0(x_0, y_0, z_0)$ และ $\vec{A} = \langle a, b, c\rangle$ ดังนั้น

$$\langle x, y, z\rangle = \langle x_0, y_0, z_0\rangle + t\langle a, b, c\rangle = \langle x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct\rangle \tag{3.2}$$

เรียกสมการ (3.1) หรือ (3.2) ว่า **สมการเวกเตอร์** (vector equation) ของเส้นตรง L
จากสมการ (3.2) เราจะแยกเขียนสมการสำหรับส่วนประกอบได้เป็น

$$\begin{cases} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \\ z &= z_0 + ct \end{cases}$$

หรือ

$$x = x_0 + at, \qquad y = y_0 + bt, \qquad z = z_0 + ct \tag{3.3}$$

เรียกสมการ (3.3) ว่า **สมการอ้างอิงตัวแปรเสริม** (parametric equation) ของเส้นตรง L
ถ้า a, b, c ไม่มีจำนวนใดเป็นศูนย์ จะได้ว่า

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \tag{3.4}$$

เรียกสมการ (3.4) ว่า **สมการสมมาตร** (symmetric equation) ของเส้นตรง L

ตัวอย่าง 3.3.2 จงหาสมการเวกเตอร์ สมการอิงตัวแปรเสริม และสมการสมมาตร ของเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_0(1,2,3)$ และขนานกับ $\vec{A} = \langle 1,2,-1\rangle$

แนวคำตอบ สมการเวกเตอร์คือ

$$\langle x,y,z\rangle = \langle 1,2,3\rangle + t\langle 1,2,-1\rangle$$

สมการอิงตัวแปรเสริมคือ

$$\begin{cases} x &= 1 + t \\ y &= 2 + 2t \\ z &= 3 - t \end{cases}$$

และสมการสมมาตรคือ

$$x - 1 = \frac{y-2}{2} = 3 - z$$

ตัวอย่าง 3.3.3 จงหาสมการเวกเตอร์ สมการอิงตัวแปรเสริม และสมการสมมาตร ของเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_1(1,3,4)$ และ $P_2(1,-2,3)$

แนวคำตอบ เลือก $P_1(1,3,4)$ เป็นจุดผ่านของเส้นตรง และเลือกเวกเตอร์ทิศทางคือ $\vec{A} = \overrightarrow{P_1P_2} = \langle 0,-5,-1\rangle$ ดังนั้นสมการเวกเตอร์คือ

$$\langle x,y,z\rangle = \langle 1,3,4\rangle + t\langle 0,-5,-1\rangle$$

สมการอิงตัวแปรเสริมคือ

$$\begin{cases} x &= 1 \\ y &= 3 - 5t \\ z &= 4 - t \end{cases}$$

และสมการสมมาตรคือ

$$x = 1,\ \frac{3-y}{5} = 4 - z$$

ตัวอย่าง 3.3.4 จงตรวจสอบว่าจุด $P(1,-2,3)$ อยู่บนเส้นตรงต่อไปนี้หรือไม่

1. $L_1 :\ \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+5}{3} = z - 2$
2. $L_2 :\ x = 3 - t,\quad y = 2 - 4t,\quad z = 3 + t$

แนวคำตอบ เนื่องจาก

$$\frac{1+1}{2} = \frac{-2+5}{3} = 3 - 2$$

ดังนั้น P อยู่บนเส้นตรง L_1 พิจารณา

$$\begin{cases} 1 = 3 - t & \longrightarrow\ t = 2 \\ -2 = 2 - 4t & \longrightarrow\ t = 1 \\ 3 = 3 + t & \longrightarrow\ t = 0 \end{cases}$$

จะเห็นว่า t ทั้ง 3 สมการไม่เท่ากัน ดังนั้น P ไม่อยู่บนเส้นตรง L_2

ตัวอย่าง 3.3.5 จุด $A(1,2,0)$, $B(-1,3,4)$ และ $C(-1,1,-4)$ อยู่บนเส้นตรงเดียวกันหรือไม่

แนวคำตอบ ให้ L เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด A และ B เลือก $A(1,2,0)$ เป็นจุดผ่านของเส้นตรง และเลือกเวกเตอร์ทิศทางคือ $\overrightarrow{AB} = \langle -2,1,4\rangle$ ดังนั้นสมการอิงสมมาตรของ L คือ

$$\frac{1-x}{2} = y-2 = \frac{z}{4}$$

เนื่องจาก

$$\frac{1-(-1)}{2} \neq 1-2 = \frac{-4}{4}$$

ดังนั้น C ไม่อยู่บนเส้นตรง L
สรุปได้ว่า $A(1,2,0)$, $B(-1,3,4)$ และ $C(-1,1,-4)$ ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

ตัวอย่าง 3.3.6 จงหาจุดที่เส้นตรงต่อไปนี้ตัดระนาบ XY ระนาบ XZ และ ระนาบ YZ

1. $x = 1+t, \quad y = 2-2t, \quad z = t-3$

   แนวคำตอบ จุดบนระนาบ XY คือ $z = 0$ นั่นคือ $t-3=0$ ทำให้ได้ว่า $t=3$ จะได้ว่า

   $$x = 1+3 = 4 \qquad \text{และ} \qquad y = 2-2(3) = -4$$

   ดังนั้น $(4,-4,0)$ เป็นจุดที่เส้นตรงตัดระนาบบน XY
   จุดบนระนาบ XZ คือ $y=0$ นั่นคือ $2-2t=0$ ทำให้ได้ว่า $t=1$ จะได้ว่า

   $$x = 1+1 = 2 \qquad \text{และ} \qquad z = 1-3 = -2$$

   ดังนั้น $(2,0,-2)$ เป็นจุดที่เส้นตรงตัดระนาบบน XZ
   จุดบนระนาบ YZ คือ $x=0$ นั่นคือ $1+t=0$ ทำให้ได้ว่า $t=-1$ จะได้ว่า

   $$y = 2-2(-1) = 4 \qquad \text{และ} \qquad z = -1-3 = -4$$

   ดังนั้น $(0,4,-4)$ เป็นจุดที่เส้นตรงตัดระนาบบน YZ

2. $\dfrac{3-x}{3} = \dfrac{y-10}{5}, z = 4$

   แนวคำตอบ เนื่องจาก $z = 4 \neq 0$ ดังนั้นไม่มีจุดที่เส้นตรงตัดระนาบบน XY
   จุดบนระนาบ XZ คือ $y=0$ นั่นคือ

   $$\frac{3-x}{3} = \frac{0-10}{5} \qquad \text{จะได้ว่า} \qquad x = 9$$

   ดังนั้น $(9,0,4)$ เป็นจุดที่เส้นตรงตัดระนาบบน XY
   จุดบนระนาบ YZ คือ $x=0$ นั่นคือ

   $$\frac{3-0}{3} = \frac{y-10}{5} \qquad \text{จะได้ว่า} \qquad y = 15$$

   ดังนั้น $(0,15,4)$ เป็นจุดที่เส้นตรงตัดระนาบบน YZ

การขนานกันของเส้นตรง

บทนิยาม 3.3.7 เส้นตรงสองเส้นขนานกัน (parallel line) ก็ต่อเมื่อเวกเตอร์แสดงทิศทางของเส้นตรงทั้งสองเส้นขนานกัน

ตัวอย่าง 3.3.8 จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(1,2,3)$ และขนานกับเส้นตรง

$$L:\ x+2=\frac{4-y}{2}=1-z$$

แนวคำตอบ เลือกจุดผ่าน $(1,2,3)$ และเวกเตอร์แสดงทิศทางของเส้นตรงนี้คือเวกเตอร์แสดงทิศทางของ L นั่นคือ $\vec{A}=\langle 1,-2,-1\rangle$ ดังนั้นสมการเส้นตรงนี้คือ

$$x-1=\frac{2-y}{2}=3-z$$

การตัดกันของเส้นตรง

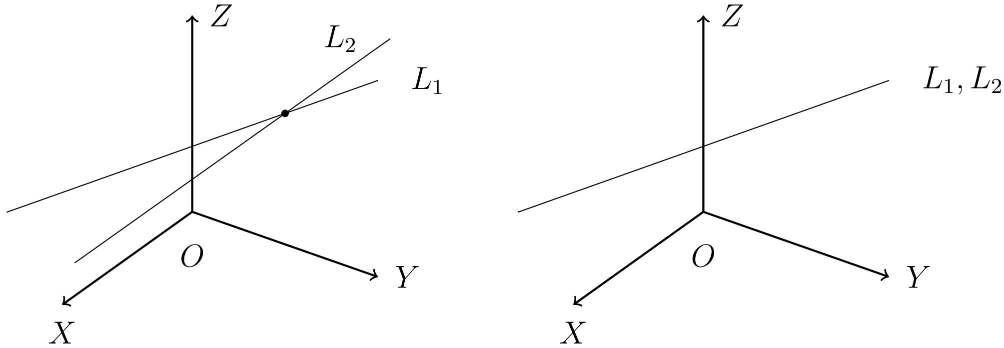
ความสัมพันธ์ของเส้นตรง L_1 และ L_2 ในปริภูมิสามมิติมีลักษณะดังนี้

1. เกิดจุดตัด

   1.1 เกิดตัดกันเพียงจุดเดียว

   1.2 เกิดตัดกันมากกว่าจุดเดียว

รูปที่ 3.14: ลักษณะของเส้นตรง L_1 และ L_2 ที่ตัดกัน

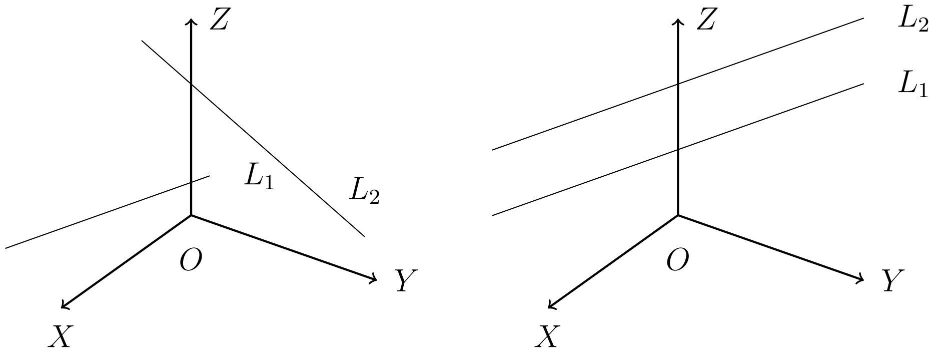


2. ไม่เกิดจุดตัด

   2.1 ไม่เกิดจุดตัดกัน และเส้นตรงไม่ขนานกัน

   2.2 ไม่เกิดจุดตัด แต่เส้นตรงขนานกัน

รูปที่ 3.15: ลักษณะของเส้นตรง L_1 และ L_2 ที่ไม่ตัดกัน



ตัวอย่าง 3.3.9 จงตรวจสอบว่า L_1 และ L_2 ตัดกันหรือไม่ ถ้าตัดกันจงหาจุดตัด

$$L_1\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 4 - 4t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \qquad L_2\begin{cases} x = 1 - s \\ y = 9 + 3s \\ z = 2 + s \end{cases}$$

แนวคำตอบ หาจุดตัดจากการพิจารณา

$$\begin{array}{rclcrcl} 1+t &=& 1-s & \longrightarrow & t &=& -s \\ 4-4t &=& 9+3s & \longrightarrow & 4-4(-s) &=& 9+3s \\ &&& \longrightarrow & s &=& 5 \\ &&& \longrightarrow & t &=& -5 \end{array}$$

สำหรับ L_1 จะได้ $z = 3 + 2(-5) = -7$ และ L_2 จะได้ $z = 2 + 5 = 7$
สรุปได้ว่า L_1 และ L_2 ไม่ตัดกัน

ตัวอย่าง 3.3.10 จงตรวจสอบว่า L_1 และ L_2 ตัดกันหรือไม่ ถ้าตัดกันจงหาจุดตัด

$$L_1 : 2 - x = 3 - y = \frac{z-1}{2} \quad \text{และ} \quad L_2 : \frac{7-x}{3} = y = z - 1$$

แนวคำตอบ หาจุดตัดจากการพิจารณา

$$\begin{array}{rclcrcl} 2-x &=& 3-y & \longrightarrow & y &=& 1+x \\ \dfrac{7-x}{3} &=& y & \longrightarrow & \dfrac{7-x}{3} &=& 1+x \\ &&& \longrightarrow & 7-x &=& 3+3x \\ &&& \longrightarrow & x &=& 1 \\ &&& \longrightarrow & y &=& 1+1=2 \end{array}$$

ตรวจสอบ z จาก L_1 จะได้ $2 = z - 1$ นั่นคือ $z = 3$ จาก L_2 จะได้ $3 - 2 = \dfrac{z-1}{2}$ นั่นคือ $z = 3$
สรุปได้ว่า L_1 และ L_2 ตัดกันที่จุด $(1, 2, 3)$

การไขว้ต่างระนาบของเส้นตรง

บทนิยาม 3.3.11 เราจะเรียกเส้นตรงสองเส้นว่า **เส้นไขว้ต่างระนาบ** (skew line) ก็ต่อเมื่อเราไม่สามารถหาระนาบที่เส้นตรงทั้งสองอยู่บนระนาบเดียวกันได้ หรือกล่าวได้อีกอย่างว่าเส้นตรงทั้งสองไม่ตัดกันไม่ไม่ขนานกัน

ตัวอย่าง 3.3.12 จงพิจารณา L_1 และ L_2 ว่าเป็นเส้นไขว้ต่างระนาบกันหรือไม่

$$L_1 \begin{cases} x &= 1 + t \\ y &= 2 - 2t \\ 3z &= 2 + t \end{cases} \qquad L_2 \begin{cases} x &= 2 - 2s \\ y &= 1 + 4s \\ z &= 1 - 2s \end{cases}$$

แนวคำตอบ จะได้ว่า $\vec{A}_1 = \langle 1, -2, 1 \rangle$ และ $\vec{A}_2 = \langle -2, 4, -2 \rangle$ แล้ว $\vec{A}_1 = -2\vec{A}_2$ แสดงว่า L_1 และ L_2 ขนานกัน สรุปได้ว่า L_1 และ L_2 ไม่เป็นเส้นไขว้ต่างระนาบ

ตัวอย่าง 3.3.13 จงพิจารณา L_1 และ L_2 ว่าเป็นเส้นไขว้ต่างระนาบกันหรือไม่

$$L_1 : x = \frac{y}{2} = z - 1 \quad \text{และ} \quad L_2 : \frac{x+1}{2} = y - 1 = \frac{z+2}{3}$$

แนวคำตอบ จะเห็นว่า $\vec{A}_1 = \langle 1, 2, 1 \rangle$ และ $\vec{A}_2 = \langle 2, 1, 3 \rangle$ จะได้ว่าเวกเตอร์ทั้งสองไม่ขนานกัน แสดงว่า L_1 และ L_2 ไม่ขนานกัน หาจุดตัดจากการพิจารณา

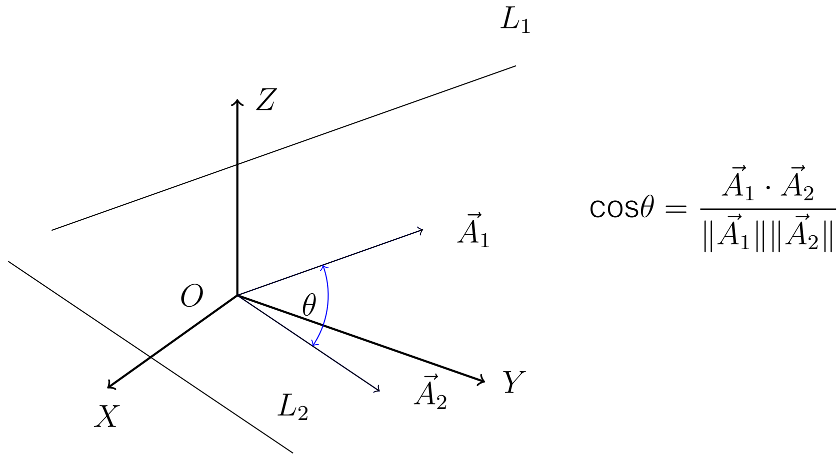
$$\begin{array}{rcl c rcl} x &=& \dfrac{y}{2} & \longrightarrow & y &=& 2x \\ \dfrac{x+1}{2} &=& y-1 & \longrightarrow & \dfrac{x+1}{2} &=& 2x-1 \\ & & & \longrightarrow & x+1 &=& 4x-2 \\ & & & \longrightarrow & x &=& 1 \\ & & & \longrightarrow & y &=& 2(1) = 2 \end{array}$$

ตรวจสอบ z จาก L_1 จะได้ $1 = z - 1$ นั่นคือ $z = 2$ จาก L_2 จะได้ $2 - 1 = \dfrac{z+2}{3}$ นั่นคือ $z = 1$ ฉะนั้น L_1 และ L_2 ไม่ตัดกัน สรุปได้ว่า L_1 และ L_2 เป็นเส้นไขว้ต่างระนาบ

มุมระหว่างเส้นตรง

บทนิยาม 3.3.14 มุมระหว่างเส้นตรงสองเส้น คือมุมระหว่างเวกเตอร์แสดงทิศทางของเส้นตรงทั้งสองเส้นนั้น

รูปที่ 3.16: มุมระหว่างเส้นตรงสองเส้น



ตัวอย่าง 3.3.15 จงหามุมระหว่างเส้นตรง L_1 และ L_2

1. $L_1 : x = 2 + t, \quad y = 1 + 2t, \quad 2z = 1 + 4t$
   $L_2 : x = -3s, \quad y = 2 + 4s, \quad z = 5s - 1$

   แนวคำตอบ จะเห็นว่า $\vec{A}_1 = \langle 1, 2, 2\rangle$ และ $\vec{A}_2 = \langle -3, 4, 5\rangle$ จะได้ว่า

   $$\cos\theta = \frac{1(-3) + 2(4) + 2(5)}{3 \cdot 5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

   ดังนั้นมุมระหว่าง L_1 และ L_2 คือ $\theta = 45°$

2. $L_1 : 2x - 1 = y = \dfrac{1-z}{3}$ และ $L_2 : \dfrac{x}{4} = y - 1 = z$

   แนวคำตอบ จะเห็นว่า $\vec{A}_1 = \left\langle \frac{1}{2}, 1, -3\right\rangle$ และ $\vec{A}_2 = \langle 4, 1, 1\rangle$ จะได้ว่า

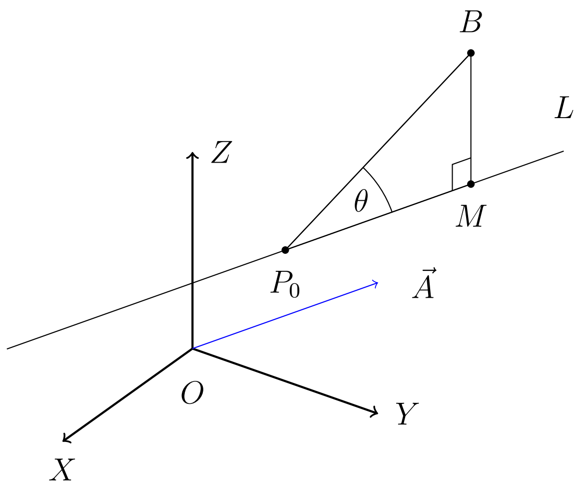
   $$\cos\theta = \frac{\frac{1}{2}(4) + 1(1) + (-3)1}{\frac{\sqrt{41}}{2} \cdot 3\sqrt{2}} = 0$$

   ดังนั้นมุมระหว่าง L_1 และ L_2 คือ $\theta = 90°$

ระยะทางระหว่างจุดกับเส้นตรง

การวัดระยะทางระหว่างจุด B กับเส้นตรง L คือความยาวที่สั้นที่สุดจากจุด B ไปยังเส้นตรง L หมายถึงความยาวของเส้นตั้งฉากที่ลากจากจุด B ไปยังเส้นตรง L ที่จุด M เรียกจุด M ว่า **จุดเชิงเส้นตั้งฉาก** (Orthogonal point)

รูปที่ 3.17: จุดเชิงเส้นตั้งฉากจาก B ไปยังเส้นตรง L



จากรูป 3.17 จะได้ว่า $\|\overrightarrow{BM}\| = \|\overrightarrow{P_0B}\|\sin\theta$ เนื่องจาก $\vec{A}$ ขนานกับ $\overrightarrow{P_0M}$ ดังนั้น θ เป็นมุมระหว่าง $\overrightarrow{PB}$ กับ $\vec{A}$ ดังนั้น

$$\|\overrightarrow{BM}\| = \frac{\|\overrightarrow{P_0B}\|\|\vec{A}\|\sin\theta}{\|\vec{A}\|} = \frac{\|\overrightarrow{P_0B} \times \vec{A}\|}{\|\vec{A}\|}$$

จากรูป 3.17 เห็นได้ชัดว่า $\overrightarrow{P_0M}$ คือภาพฉายเวกเตอร์ของ $\overrightarrow{P_0B}$ บน $\vec{A}$ ฉะนั้น

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_0M} &= \left(\frac{\overrightarrow{P_0B} \cdot \vec{A}}{\|\vec{A}\|^2}\right)\vec{A} \\ \vec{M} - \vec{P_0} &= \left(\frac{\overrightarrow{P_0B} \cdot \vec{A}}{\|\vec{A}\|^2}\right)\vec{A}\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\vec{M} = \vec{P_0} + \left(\frac{\overrightarrow{P_0B} \cdot \vec{A}}{\|\vec{A}\|^2}\right)\vec{A}$$

ตัวอย่าง 3.3.16 จงหาจุดเชิงเส้นตั้งฉากของจุด $B(2,1,-1)$ บนเส้นตรง

$$L:\ x=5+4t,\ y=2-t,\ z=4+3t$$

พร้อมทั้งหาระยะทางจากจุด B ไปยังเส้นตรงนี้

แนวคำตอบ จากสมการของเส้นตรง $P_0=(5,2,4)$ และ $\vec{A}=\langle 4,-1,3\rangle$ จะได้ว่า

$$\overrightarrow{P_0B}=\langle -3,-1,-5\rangle$$

ทำให้ได้ว่า

$$\overrightarrow{P_0B}\times\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & -1 & -5\\ 4 & -1 & 3\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-1 & -5\\ -1 & 3\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}-3 & -5\\ 4 & 3\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}-3 & -1\\ 4 & -1\end{vmatrix}=\langle -8,-11,7\rangle$$

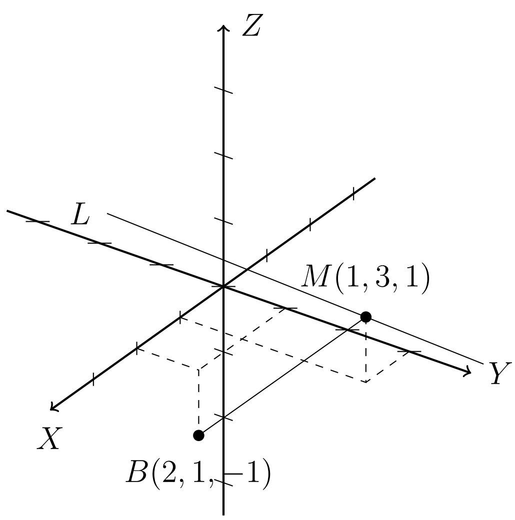
ฉะนั้น

$$\|\overrightarrow{BM}\|=\frac{\|\overrightarrow{P_0B}\times\vec{A}\|}{\|\vec{A}\|}=\frac{\sqrt{(-8)^2+(-11)^2+7^2}}{\sqrt{4^2+(-1)^2+3^2}}=\frac{3\sqrt{26}}{\sqrt{26}}=3$$

ดังนั้นระยะทางจากจุด B ไปยังเส้นตรง L เท่ากับ 3 หน่วย
พิจารณา

$$\begin{aligned}\vec{M}&=\vec{P_0}+\left(\frac{\overrightarrow{P_0B}\cdot\vec{A}}{\|\vec{A}\|^2}\right)\vec{A}\\ &=\langle 5,2,4\rangle+\frac{(-3)4+(-1)(-1)+(-5)3}{26}\langle 4,-1,3\rangle\\ &=\langle 5,2,4\rangle-1\langle 4,-1,3\rangle=\langle 1,3,1\rangle\end{aligned}$$

ดังนั้นจุดเชิงตั้งฉากจาก B ไปยังเส้นตรง L คือ $M=(1,3,1)$ แสดงดังรูป



ตัวอย่าง 3.3.17 จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $B(1,-1,2)$ ซึ่งตัดและตั้งฉากกับเส้นตรง

$$L:\ x-1=\frac{3-y}{2}=-z$$

แนวคำตอบ สมการเส้นตรงนี้จะผ่านจุด B และจุดเชิงตั้งฉาก M ที่ลากจาก ไปยังเส้นตรง L ซึ่งหาจุดเชิงตั้งฉากได้จาก จากสมการของเส้นตรง L มี $P_0=(1,3,0)$ และ $\vec{A}=\langle 1,-2,-1\rangle$ จะได้ว่า

$$\overrightarrow{P_0B}=\langle 0,-4,2\rangle$$

ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}\vec{M}&=\vec{P_0}+\left(\frac{\overrightarrow{P_0B}\cdot\vec{A}}{\|\vec{A}\|^2}\right)\vec{A}\\&=\langle 1,3,0\rangle+\frac{0(1)+(-4)(-2)+2(-1)}{6}\langle 1,-2,-1\rangle\\&=\langle 1,3,0\rangle+1\langle 1,-2,-1\rangle=\langle 2,1,-1\rangle\end{aligned}$$

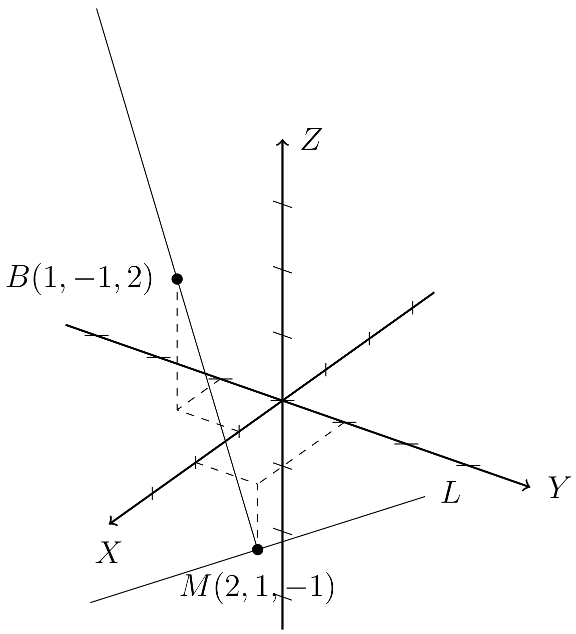
ดังนั้น $M=(2,1,-1)$ เลือกจุดผ่าน M และเวกเตอร์แสดงทิศทางของเส้นตรงนี้คือ

$$\overrightarrow{BM}=\langle 1,2,-3\rangle$$

ดังนั้นสมการเส้นตรงผ่านจุด $B(1,-1,2)$ ซึ่งตัดและตั้งฉากกับเส้นตรง L คือ

$$x-2=\frac{y-1}{2}=-\frac{z+1}{3}$$

แสดงดังรูป

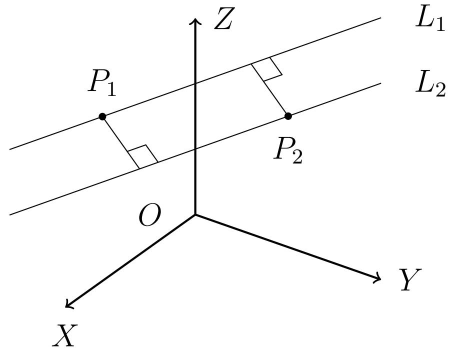


ระยะทางระหว่างเส้นตรงสองเส้น

บทนิยาม 3.3.18 ระยะทางระหว่างเส้นตรงสองเส้น คือระยะที่สั้นที่สุดระหว่างเส้นตรงทั้งสอง

1. ระยะทางระหว่างเส้นตรงสองเส้นที่ขนานกัน

รูปที่ 3.18: ระยะทางระหว่างเส้นตรงสองเส้นที่ขนานกัน



ให้ L_1 และ L_2 เป็นเส้นตรงสองเส้นที่ขนานกัน ซึ่งผ่านจุด P_1 และ P_2 ตามลำดับ ระยะทางระหว่าง L_1 และ L_2 คือ ระยะทางระหว่างจุด P_1 ไปยัง L_2 หรือ P_2 ไปยัง L_1 นั่นคือ

ระยะทางระหว่าง L_1 และ L_2 เท่ากับ $\dfrac{\|\overrightarrow{P_1P_2} \times \vec{A}_1\|}{\|\vec{A}_1\|}$ หรือ $\dfrac{\|\overrightarrow{P_2P_1} \times \vec{A}_2\|}{\|\vec{A}_2\|}$

ตัวอย่าง 3.3.19 จงหาระยะทางระหว่างเส้นตรง

$$L_1 : x = 1 + t, y = 2 - 2t, z = -1 + 2t \qquad \text{และ} \qquad L_2 : x = 2 - s, y = 1 + 2s, z = -2s$$

แนวคำตอบ จะเห็นว่า $\vec{A}_1 = \langle 1, -2, 2\rangle$ และ $\vec{A}_2 = \langle -1, 2, -2\rangle$ โดยที่ $\vec{A}_1 = -\vec{A}_2$ นั่นคือ L_1 และ L_2 เป็นเส้นตรงสองเส้นที่ขนานกัน ซึ่งมี $P_1 = (1, 2, -1)$ และ $P_2 = (2, 1, 0)$ จะได้ว่า

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \langle 1, -1, 1\rangle$$

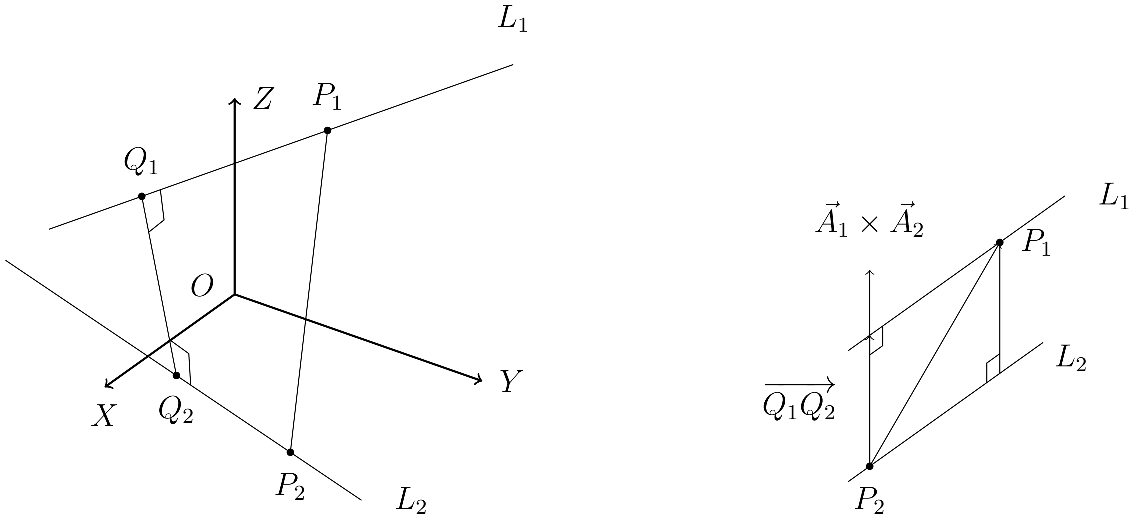
$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \vec{A}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = \langle 0, -1, -1\rangle$$

ดังนั้นระยะทางระหว่าง L_1 และ L_2 เท่ากับ

$$\frac{\|\overrightarrow{P_1P_2} \times \vec{A}_1\|}{\|\vec{A}_1\|} = \frac{\sqrt{2}}{3} \quad \text{หน่วย}$$

2. ระยะทางระหว่างเส้นตรงสองเส้นที่ไม่ขนานกัน

รูปที่ 3.19: ระยะทางระหว่างเส้นตรงสองเส้นที่ไม่ขนานกัน



จากรูป Q_1 และ Q_2 เป็นจุดปลายของส่วนเส้นตรงที่ตั้งฉากกับ L_1 และ L_2 ดังนั้น

$$\text{ระยะทางระหว่าง } L_1 \text{ และ } L_2 \quad \text{เท่ากับ} \quad \|\overrightarrow{Q_1Q_2}\|$$

เนื่องจาก $\overrightarrow{Q_1Q_2}$ ตั้งฉากกับ $\vec{A}_1$ และ $\vec{A}_2$ จะได้ว่า $\overrightarrow{Q_1Q_2}$ ขนานกับ $\vec{A}_1 \times \vec{A}_2$ จากรูปจะได้ว่า

$$\|\overrightarrow{Q_1Q_2}\| = \text{ขนาดของภาพฉายสเกลาร์ของ } \overrightarrow{P_2P_1} \text{ บน } \vec{A}_1 \times \vec{A}_2$$

ดังนั้น

$$\text{ระยะทางระหว่าง } L_1 \text{ และ } L_2 \quad \text{เท่ากับ} \qquad \frac{|\overrightarrow{P_2P_1} \cdot (\vec{A}_1 \times \vec{A}_2)|}{\|\vec{A}_1 \times \vec{A}_2\|}$$

ตัวอย่าง 3.3.20 จงหาระยะทางระหว่างเส้นตรง

$$L_1 : \frac{x-1}{2} = -y = -\frac{z}{2} \qquad \text{และ} \qquad L_2 : x = -3t, y = 1 + 2t, z = t$$

แนวคำตอบ จะเห็นว่า $\vec{A}_1 = \langle 2, -1, -2 \rangle$ และ $\vec{A}_2 = \langle -3, 2, 1 \rangle$ โดยที่ $\vec{A}_1$ ไม่ขนานกับ $\vec{A}_2$ นั่นคือ L_1 และ L_2 เป็นเส้นตรงสองเส้นที่ไม่ขนานกัน ซึ่งมี $P_1 = (1, 0, 0)$ และ $P_2 = (0, 1, 0)$ จะได้ว่า

$$\overrightarrow{P_2P_1} = \langle 1, -1, 0 \rangle$$

$$\vec{A}_1 \times \vec{A}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = \langle 3, 4, 1 \rangle$$

ดังนั้นระยะทางระหว่าง L_1 และ L_2 เท่ากับ

$$\frac{|\overrightarrow{P_2P_1} \cdot (\vec{A}_1 \times \vec{A}_2)|}{\|\vec{A}_1 \times \vec{A}_2\|} = \frac{|1(3) + (-1)4 + 0(1)|}{\sqrt{26}} = \frac{1}{\sqrt{26}} \qquad \text{หน่วย}$$

แบบฝึกหัด 3.3

1. จงหาสมการเวกเตอร์ สมการอิงตัวแปรเสริม และสมการสมมาตร ของเส้นตรงที่ผ่านจุด P_0 และขนานกับ $\vec{A}$

   1.1 $P_0(2,1,1)$ และ $\vec{A} = \langle 1,-1,3\rangle$

   1.2 $P_0(-1,3,5)$ และ $\vec{A} = \langle 0,2,-1\rangle$

2. จงหาสมการของเส้นตรงที่สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

   2.1 ผ่านจุด $(1,-1,0)$ และ $(2,-3,5)$

   2.2 ผ่านจุด $(-1,-3,-2)$ และขนานกับ $\langle -5,0,1\rangle$

   2.3 ผ่านจุด $(1,2,-2)$ และขนานกับเส้นตรง $x = y = z$

3. จงตรวจสอบว่าจุด $(1,2,-3)$ อยู่บนเส้นตรงใดต่อไปนี้หรือไม่

   3.1 $x = 3-2t, \quad y = 3+t, \quad z = 1-4t$

   3.2 $2x = 3+2t, \quad y = 1-2t, \quad 3z = 4t-7$

   3.3 $2x-1 = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z}{3}$

   3.4 $\dfrac{x+7}{4} = 4-y = \dfrac{z+9}{3}$

4. จงพิจารณาว่าจุด $A(3,3,1)$, $B(-1,5,-7)$ และ $C(5,2,5)$ อยู่บนเส้นตรงเดียวกันหรือไม่

5. จงหาระยะทางจากจุด $B(1,-2,1)$ ไปยังเส้นตรงต่อไปนี้ และจุดเชิงตั้งฉาก

   5.1 $x = 6+4t, \quad y = 3-2t, \quad z = 1+t$

   5.2 $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{1-y}{3} = \dfrac{z+1}{4}$

6. จงหาพิกัดของจุดบนเส้นตรงต่อไปนี้ ที่อยู่ใกล้จุดกำเนิดมากที่สุด

   6.1 $x = 9+4t, \quad y = t, \quad z = 3+2t$

   6.2 $\dfrac{8-x}{6} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+7}{8}$

7. จงตรวจสอบว่า L_1 และ L_2 ตัดกันหรือไม่ ถ้าตัดจงหาจุดตัด

   7.1 $L_1 \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 3t \\ 3z = 2 - 3t \end{cases} \qquad L_2 \begin{cases} x = 4 + s \\ y = 5 + 3s \\ z = 0 + s \end{cases}$

   7.2 $L_1 : \dfrac{x-1}{2} = 2-y = z$ และ $L_2 : \dfrac{2x+1}{3} = y = z-2$

8. จงหามุมระหว่างเส้นตรง L_1 และ L_2 ในแต่ละข้อต่อไปนี้

8.1 $L_1\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ 3z = 5 + t \end{cases}$ $L_2\begin{cases} x = 2 + s \\ y = 5 - 2s \\ z = 1 - s \end{cases}$

8.2 $L_1 : 1 - x = y = \dfrac{z+3}{\sqrt{2}}$ และ $L_2 : \dfrac{x}{\sqrt{2}} = \dfrac{y-3}{\sqrt{2}} = \dfrac{z+1}{2}$

9. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุดกำเนิด ซึ่งตัดและตั้งฉากกับเส้นตรง $x = \dfrac{3-y}{2} = z - 2$

10. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-1, 2, 1)$ และขนานกับเส้นตรง $\dfrac{x+3}{2} = \dfrac{1-y}{5} = 2 - z$

11. จงพิจารณา L_1 และ L_2 ว่าเป็นเส้นไขว้ต่างระนาบกันหรือไม่

11.1 $L_1\begin{cases} 2x = 1 + 4t \\ y = 2 - t \\ z = 0 + t \end{cases}$ $L_2\begin{cases} x = 0 - 4s \\ y = 1 + 2s \\ 3z = 1 - 6s \end{cases}$

11.2 $L_1 : x - 1 = \dfrac{3-y}{2} = 2z + 1$ และ $L_2 : 2 - x = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{1-4z}{2}$

12. จงระยะทางระหว่าง L_1 และ L_2 ในแต่ละข้อต่อไปนี้

12.1 $L_1\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + t \\ z = 5 - t \end{cases}$ $L_2\begin{cases} x = 4 - 3s \\ y = -3 - s \\ z = 1 + s \end{cases}$

12.2 $L_1\begin{cases} x = 0 + 7t \\ y = 2 + t \\ 3z = 4 - 3t \end{cases}$ $L_2\begin{cases} x = 3 - s \\ y = 5 \\ z = 6 + 2s \end{cases}$

12.3 $L_1 : x + 5 = \dfrac{y+3}{4} = \dfrac{6-z}{9}$ และ $L_2 : 2 - x = \dfrac{4-y}{4} = \dfrac{z+1}{-9}$

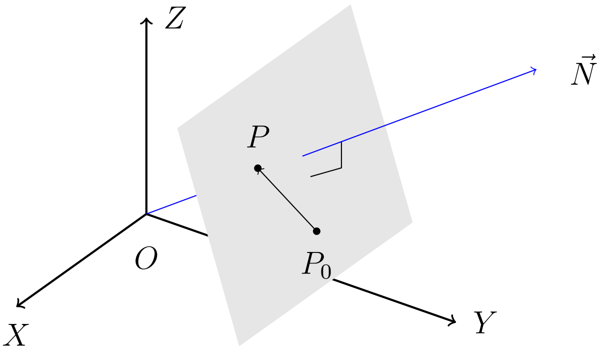
12.4 $L_1\begin{cases} x = 5 + 4t \\ y = 2 - t \\ 3z = 4 + 3t \end{cases}$ $L_2\begin{cases} x = 2 - 8s \\ y = 1 + 2s \\ z = -1 - 6s \end{cases}$

12.5 $L_1 : x + 1 = \dfrac{z+1}{2}, y = 2$ และ $L_2 : x = 2 - t,\ \ y = 3 + 4t,\ \ z = 2t$

3.4 ระนาบในปริภูมิสามมิติ

บทนิยาม 3.4.1 ให้ P_0 เป็นจุดใน $\mathbb{R}^3$ และ $\vec{N} \neq \vec{0}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ เรียกเซตของจุด P ใด ๆ ซึ่งทำให้ $\overrightarrow{P_0P}$ ตั้งฉากกับ $\vec{N}$ ว่า **ระนาบ** (plane) ที่ผ่านจุด P_0 และตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\vec{N}$ และเรียก $\vec{N}$ ว่า **เวกเตอร์แนวฉาก** (normal vector)

รูปที่ 3.20: ระนาบในปริภูมิสามมิติ



เนื่องจาก $\overrightarrow{P_0P}$ ตั้งฉากกับ $\vec{N}$ ดังนั้น $\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{N} = 0$ หรือ

$$(\vec{P} - \vec{P_0}) \cdot \vec{N} = 0 \tag{3.5}$$

เราจะเรียกสมการ (3.5) ว่า **สมการเวกเตอร์ของระนาบ** (vector equation of the plane)
ถ้ากำหนดให้ $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $P = (x, y, z)$ และ $\vec{N} = \langle a, b, c\rangle$ จะได้ว่า

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \tag{3.6}$$

เรียกสมการ (3.6) ว่า **สมการสเกลาร์** (scalar equation) ของระนาบที่ผ่านจุด (x_0, y_0, z_0) และมี $\langle a, b, c\rangle$ เป็นเวกเตอร์แนวฉาก
ถ้าเราจัดรูปสมการ (3.6) โดยกำหนดให้ $d = ax_0 + by_0 + cz_0$ จะได้ว่า

$$ax + by + cz = d \tag{3.7}$$

เรียกสมการ (3.7) ว่า **สมการคาร์ทีเซียน** (cartesian equation) ของระนาบ ที่มี $\langle a, b, c\rangle$ เป็นเวกเตอร์แนวฉาก

ตัวอย่าง 3.4.2 จงหาสมการเวกเตอร์ สมการสเกลาร์ และสมการคาร์ทีเซียนของระนาบที่ผ่านจุด $P_0(1, 2, 3)$ และตั้งฉากกับ $\vec{N} = \langle 1, -1, 4\rangle$

แนวคำตอบ จะได้ว่า

สมการเวกเตอร์	$\langle x - 1, y - 2, z - 3\rangle \cdot \langle 1, -1, 4\rangle = 0$
สมการสเกลาร์	$(x - 1) - (y - 2) + 4(z - 3) = 0$
สมการคาร์ทีเซียน	$x - y + 4z = 11$

ตัวอย่าง 3.4.3 จงหาสมการของระนาบที่ผ่านจุด $P(1,2,3)$, $Q(3,-1,6)$ และ $R(5,1,0)$

แนวคำตอบ เลือก P เป็นจุดผ่าน และเลือกเวกเตอร์แนวฉากเป็น

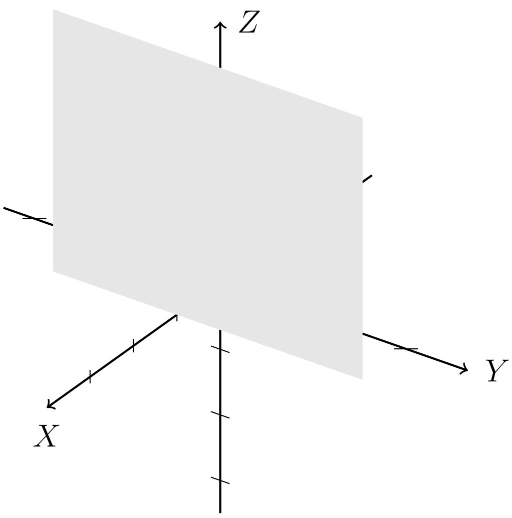
$$\begin{aligned}\vec{N} &= \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \langle 2,-3,3\rangle \times \langle 4,-1,-3\rangle \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 3 \\ 4 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = \langle 12, 18, 10\rangle\end{aligned}$$

ดังนั้นสมการระนาบคือ

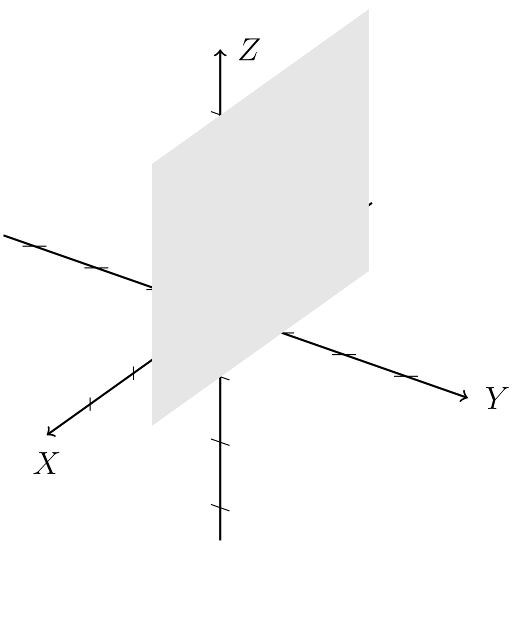
$$\begin{aligned} 12(x-1) + 18(y-2) + 10(z-3) &= 0 \\ 6x + 9y + 5z &= 39 \end{aligned}$$

ตัวอย่างกราฟของระนาบ

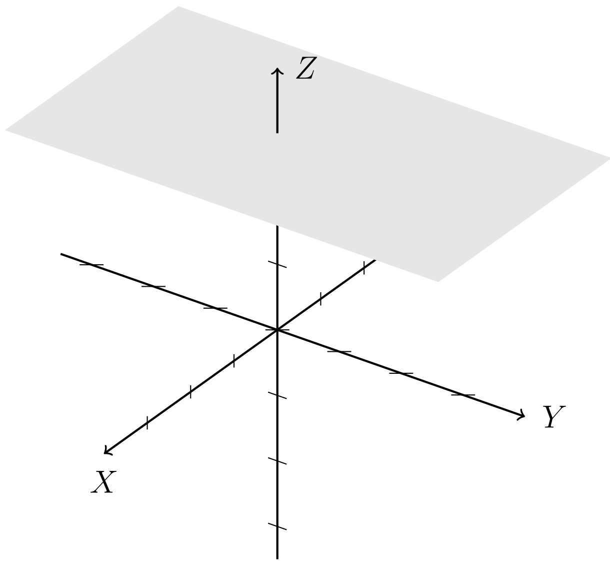
1. $x = 2$



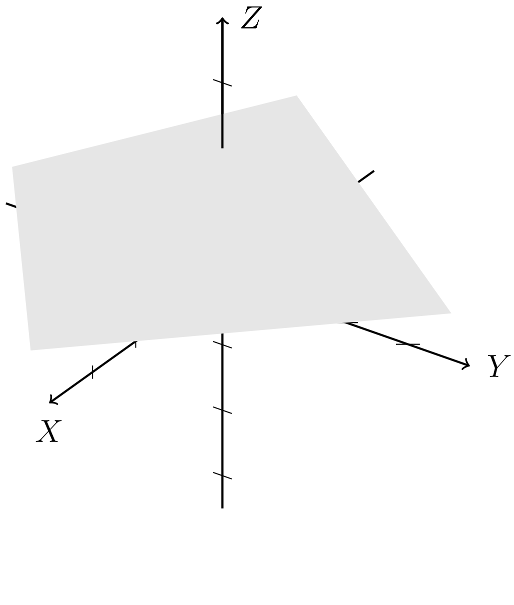
2. $y = 1$



3. $z = 3$



4. $x + y + z = 2$



ตัวอย่าง 3.4.4 จงตรวจสอบว่า $P(1,2,-1)$ และ $Q(2,3,1)$ อยู่บนระนาบ $x-2y-4z=1$ หรือไม่

แนวคำตอบ พิจารณา

$$1-2(2)-4(-1)=1$$
$$2-2(3)-4(1)\neq 1$$

สรุปได้ว่า P อยู่บนระนาบ แต่ Q ไม่อยู่บนระนาบนี้

ตัวอย่าง 3.4.5 จงตรวจสอบว่า $P(1,2,-1)$, $Q(2,0,3)$, $R(3,4,1)$ และ $S(-2,1,2)$ อยู่บนระนาบเดียวกันหรือไม่

แนวคำตอบ ให้ P, Q และ R อยู่บนระนาบเดียวกัน โดยมีเวกเตอร์แนวฉากคือ $\vec{N}=\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}$ ถ้า $S(-2,1,2)$ อยู่บนระนาบเดียวกับ P, Q และ R จริงจะได้ว่า $\overrightarrow{PS}$ ต้องตั้งฉากกับ $\vec{N}$ ตรวจสอบโดย

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PS}\cdot\vec{N} &= \overrightarrow{PS}\cdot\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR} \\
&= \langle -3,-1,3\rangle\cdot\langle 1,-2,4\rangle\times\langle 2,2,2\rangle \\
&= \begin{vmatrix} -3 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\
&= 36-6+18=48\neq 0
\end{aligned}$$

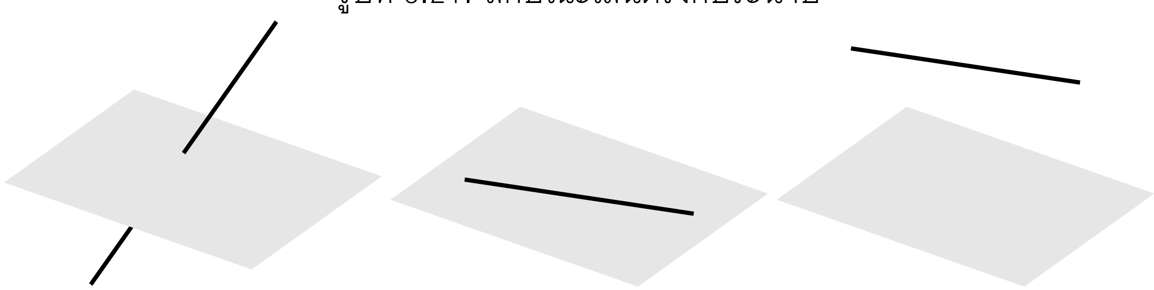
ดังนั้น P, Q, R และ S ไม่อยู่บนระนาบเดียวกัน

เส้นตรงกับระนาบ

เส้นตรงกับระนาบมีความสัมพันธ์กัน 3 ลักษณะคือ

1. เส้นตรงกับระนาบมีจุดร่วมกันจุดเดียว เรียกว่าเส้นตรงตัดกับระนาบ
2. เส้นตรงกับระนาบมีจุดร่วมกันมากกว่าหนึ่งจุด เรียกว่าเส้นตรงอยู่บนระนาบ
3. เส้นตรงกับระนาบมีไม่มีจุดร่วม เรียกว่าเส้นตรงขนานกับระนาบ

รูปที่ 3.21: ลักษณะเส้นตรงกับระนาบ



ข้อสังเกต ถ้า $\vec{A}\cdot\vec{N}=0$ แล้วจะได้ว่า เส้นตรงขนานกับระนาบ หรือ เส้นตรงอยู่บนระนาบ
ถ้า $\vec{A}\cdot\vec{N}\neq 0$ แล้วจะได้ว่า เส้นตรงตัดกับระนาบ

ตัวอย่าง 3.4.6 จงพิจารณาว่าเส้นตรงกับระนาบต่อไปนี้ตัดกันหรือขนานกัน ถ้าตัดกันจงหาจุดตัด ถ้าขนานกันจงพิจารณาว่าเส้นตรงอยู่บนระนาบหรือไม่

1. $L:\ x = 1+2t, y = 2+t, z = 3-3t$ และ $M:\ x+4y+2z = 5$

   แนวคำตอบ จะเห็นว่า $\vec{A} = \langle 2,1,-3\rangle$ และ $\vec{N} = \langle 1,4,2\rangle$ จะได้ว่า

   $$\vec{A}\cdot\vec{N} = 2(1)+1(4)+(-3)2 = 0$$

   และพิจารณา

   $$(1+2t)+4(2+t)+2(3-3t) = 15 \neq 5$$

   สรุปได้ว่า เส้นตรง L ขนานกับระนาบ M

2. $L:\ x-1 = \dfrac{y+3}{2} = z$ และ $M:\ 2x-y+z = 7$

   แนวคำตอบ จะเห็นว่า $\vec{A} = \langle 1,2,1\rangle$ และ $\vec{N} = \langle 2,-1,1\rangle$ จะได้ว่า

   $$\vec{A}\cdot\vec{N} = 1(2)+2(-1)+1(1) = 1 \neq 0$$

   ดังนั้นเส้นตรงตัดกับระนาบ
   และหาจุดตัดจากแทนสมการเส้นตรง $x = 1+t, y = -3+2t, z = t$ ในสมการระนาบ

   $$\begin{aligned} 2(1+t)-(-3+2t)+t &= 7 \\ t &= 1 \end{aligned}$$

   จะได้ว่า $x = 1+1 = 2$, $y = -3+2(1) = -1$ และ $z = 1$
   สรุปได้ว่า เส้นตรงตัดกับระนาบโดยมี $(2,-1,1)$ เป็นจุดตัด

ตัวอย่าง 3.4.7 จงหาสมการของระนาบที่ผ่านเส้นตรง $L:\ x = y-1 = \dfrac{z}{2}$ และผ่านจุด $Q(1,3,-1)$

แนวคำตอบ จะเห็นว่า $P_0 = (0,1,0)$ และ $\vec{A} = \langle 1,1,2\rangle$ จะเห็นว่าระนาบผ่านจุด Q และมีเวกเตอร์แนวฉากคือ

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_0Q}\times\vec{A} &= \langle 1,2,-1\rangle \times \langle 1,1,2\rangle \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \langle 5,-1,-3\rangle \end{aligned}$$

ดังนั้นสมการระนาบคือ

$$\begin{aligned} 5(x-1)-1(y-3)-3(z+1) &= 0 \\ 5x-y-3z &= 5 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3.4.8 จงหาสมการของระนาบที่ขนานกับเส้นตรง

$$L_1 : x - 1 = \frac{y}{2} = z \text{ และ } L_2 : \frac{x}{2} = y = \frac{z}{3}$$

และผ่านจุด $Q(2, -3, 1)$

แนวคำตอบ จะได้ว่าเวกเตอร์แนวฉากตั้งฉากกับเวกเตอร์แสดงทิศทางของเส้นตรงทั้งสอง นั้นคือ

$$\begin{aligned}
\vec{N} &= \vec{A}_1 \times \vec{A}_2 \\
&= \langle 1, 2, 1\rangle \times \langle 2, 1, 3\rangle \\
&= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \langle 5, -3, -1\rangle
\end{aligned}$$

ดังนั้นสมการระนาบที่ผ่านจุด Q คือ

$$\begin{aligned}
5(x-2) - 3(y+3) - 1(z-1) &= 0 \\
5x - 3y - z &= 18
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3.4.9 จงหาสมการของระนาบที่ผ่านจุด $Q(3, -6, 3)$ และตั้งฉากกับเส้นตรง

$$\vec{P} = \langle 2, 0, 1\rangle + t\langle 3, -1, 1\rangle$$

แนวคำตอบ จะได้ $\vec{A} = \langle 3, -1, 1\rangle$ ตั้งฉากกับระนาบ เลือกเวกเตอร์แนวฉาก $\vec{N} = \vec{A}$
ดังนั้นสมการระนาบที่ผ่านจุด Q คือ

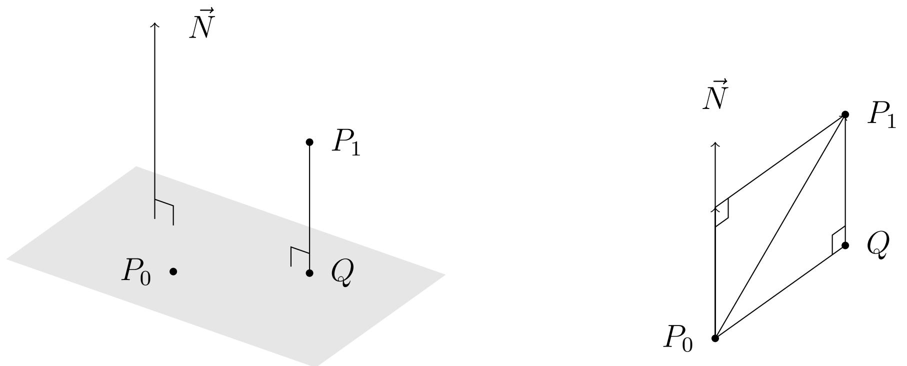
$$\begin{aligned}
3(x-3) - 1(y+6) + 1(z-3) &= 0 \\
3x - y + z &= 18
\end{aligned}$$

ระยะทางระหว่างจุดกับระนาบ

บทนิยาม 3.4.10 ระยะทางระหว่างจุดกับระนาบ คือระยะทางตั้งฉากจากจุดนั้นไปยังระนาบ

ให้ระนาบ M มีสมการเวกเตอร์เป็น $(\vec{P} - \vec{P}_0) \cdot \vec{N} = 0$ และ P_1 เป็นจุดใน $\mathbb{R}^3$ ลากไปตั้งฉากกับระนาบ M ที่จุด Q ดังรูป

รูปที่ 3.22: ระยะทางระหว่างจุดกับระนาบ



จากรูปที่ 3.22 จะได้ว่า $\|\overrightarrow{QP_1}\| =$ ขนาดของภาพฉายของ $\overrightarrow{P_0P_1}$ บน $\vec{N}$ จะได้ว่า

$$\|\overrightarrow{QP_1}\| = \frac{|\overrightarrow{P_0P_1} \cdot \vec{N}|}{\|\vec{N}\|} = \frac{|(\vec{P_1} - \vec{P_0}) \cdot \vec{N}|}{\|\vec{N}\|}$$

กำหนดให้ระนาบ M ผ่านจุด $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ และมี $\vec{N} = \langle a, b, c\rangle$ เป็นเวกเตอร์แนวฉาก M จะมีสมการคาร์ทีเซียนเป็น $ax + by + cz = d$ เมื่อ $d = ax_0 + by_0 + cz_0$ แล้ว

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{QP_1}\| &= \frac{|(\vec{P_1} - \vec{P_0}) \cdot \vec{N}|}{\|\vec{N}\|} = \frac{|\langle x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0\rangle \cdot \langle a, b, c\rangle|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ &= \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - (ax_0 + by_0 + cz_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ &= \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\end{aligned}$$

ดังนั้นระยะทางระหว่างจุด $P_1(x_1, y_1, z_1)$ กับระนาบ $ax + by + cz = d$ คือ

$$\frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

ตัวอย่าง 3.4.11 จงหาระยะทางระหว่างจุด $P_1(4, 3, -1)$ กับระนาบ $x - 2y + 2z = 5$

แนวคำตอบ ระยะทางระหว่างจุด P_1 ไปยังระนาบเท่ากับ

$$\frac{|4 - 2(3) + 2(-1) - 5|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{9}{3} = 3 \quad \text{หน่วย}$$

ตัวอย่าง 3.4.12 จงระยะทางระหว่างเส้นตรง $\frac{x-1}{2} = y = \frac{z+2}{3}$ กับระนาบ $x + y - z = 9$

แนวคำตอบ จะเห็นว่า $\vec{A} = \langle 2, 1, 3\rangle$ และ $\vec{N} = \langle 1, 1, -1\rangle$ จะได้ว่า

$$\vec{A} \cdot \vec{N} = 2(1) + 1(1) + 3(-1) = 0$$

ดังนั้นเส้นตรงขนานกับระนาบ เลือก $P_1 = (1, 0, -2)$ เป็นจุดบนเส้นตรง ซึ่งมีระยะทางห่างจากระนาบ $x + y - z = 9$ เท่ากับ ระยะทางระหว่างเส้นตรงนี้กับระนาบ $x + y - z = 9$ ซึ่งคือ

$$\frac{|1 + 0 - (-2) - 9|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \quad \text{หน่วย}$$

ตัวอย่าง 3.4.13 จงหาจุดบนระราบ $2x + y - 3z + 10 = 0$ ซึ่งอยู่ใกล้ที่สุดกับจุด $P(4, 2, 2)$

แนวคำตอบ ให้ M เป็นจุดตัดของเส้นตรง L ที่ผ่าน M และ P กับระนาบ $2x + y - 3z + 10 = 0$ เนื่องจาก L ตั้งฉากกับระนาบนี้ เลือกเวกเตอร์แสดงทิศทางของเส้นตรง L เป็นเวกเตอร์แนวฉากนั่นคือ $\vec{A} = \langle 2, 1, -3, \rangle$ จะได้สมการเส้นตรงคือ

$$\begin{cases} x &= 4 + 2t \\ y &= 2 + t \\ z &= 2 - 3t \end{cases}$$

จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
2(4+2t)+(2+t)-3(2-3t)+10 &= 0 \\
t &= 1
\end{aligned}
$$

ฉะนั้น $x = 4+2(1) = 6$, $y = 2+1 = 3$ และ $z = 2-3(1) = -1$ ดังนั้น $M = (6, 3, -1)$

มุมระหว่างเส้นตรงกับระนาบ

บทนิยาม 3.4.14 ถ้าเวกเตอร์แสดงทิศทาง $\vec{A}$ ของ L ทำมุม θ กับเวกเตอร์แนวฉาก

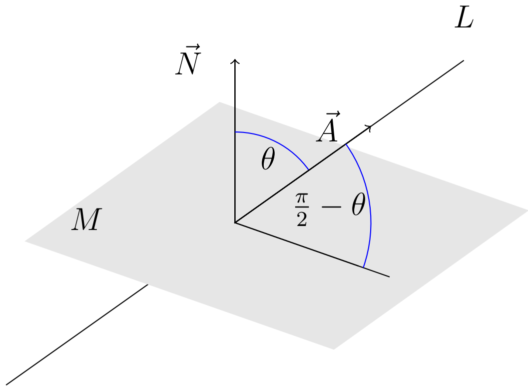
$$\left|\frac{\pi}{2}-\theta\right| \text{ เรเดียน} \quad \text{หรือ} \quad |90-\theta| \text{ องศา}$$

และจะเห็นว่า

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{N}}{\|\vec{A}\|\|\vec{N}\|}$$

แสดงดังรูปต่อไปนี้

รูปที่ 3.23: มุมระหว่างเส้นตรง L กับระนาบ M



ตัวอย่าง 3.4.15 จงหามุมระว่างเส้นตรง $L: \dfrac{x}{5} = \dfrac{1-y}{2} = \dfrac{z}{5}$ กับระนาบ $M: \ 2x+y-7z = 1$

แนวคำตอบ จะห็นว่า $\vec{A} = \langle 5, -2, 5\rangle$ และ $\vec{N} = \langle 2, 1, -7\rangle$ จะได้ว่า

$$\cos\theta = \frac{5(2)+(-2)1+5(-7)}{\sqrt{54}\sqrt{54}} = \frac{-27}{54} = -\frac{1}{2}$$

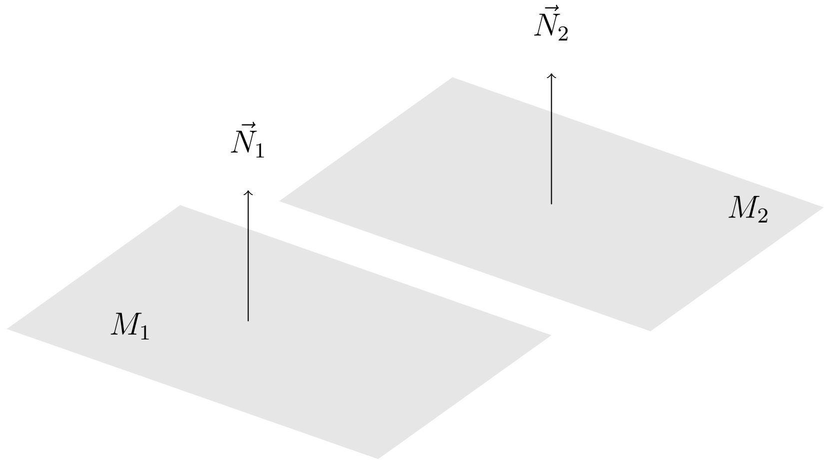
จะได้ว่า $\theta = 120^\circ$ ดังนั้นมุมระหว่างเส้นตรง L กับ M เท่ากับ

$$|90-120| = 30 \quad \text{องศา}$$

การขนานกันของระนาบและระยะทางระหว่างระนาบทั้งสอง

ระนาบขนานกัน ก็ต่อเมื่อเวกเตอร์แนวฉากของระนาบทั้งสองขนานกัน

รูปที่ 3.24: การขนานกันของระนาบ



ตัวอย่าง 3.4.16 จงหาสมการระนาบที่ผ่านจุด $(1, 2, -3)$ และขนานกับระนาบ $x + 2y - z = 5$

แนวคำตอบ เนื่องจากระนาบนี้ขนานกับ $x + 2y - z = 5$ ฉะนั้นเลือก $\vec{N} = \langle 1, 2, -1\rangle$ ดังนั้นสมการระนาบที่ผ่านจุด $(1, 2, -3)$ คือ

$$\begin{aligned} 1(x-1)+2(y-2)-1(z+3) &= 0 \\ x+2y-z &= 8 \end{aligned}$$

บทนิยาม 3.4.17 ระยะทางระหว่างระนาบทั้งสองคือระยะฉากระหว่างระนาบทั้งสอง

ให้ M_1 และ M_2 เป็นระนาบที่ขนานกันมีสมการดังนี้ $ax + by + cz = d_1$ และ $ax + by + cz = d_2$ ตามลำดับ ให้ $P_1(x_1, y_1, z_1)$ เป็นจุดบนระนาบ M_1 ดังนั้น

$$\begin{aligned} \text{ระยะทางระหว่างระนาบ } M_1 \text{ และ } M_2 &= \text{ ระยะทางระหว่างจุด } P_1 \text{ กับระนาบ } M_2 \\ &= \frac{|ax_1+by_1+cz_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ &= \frac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3.4.18 จงหาระยะทางระหว่างระนาบ $x + 2y - 2z = 10$ และ $x + 2y - 2z = 1$

แนวคำตอบ จะเห็นว่า $a = 1, b = 2, c = -2$ และ $d_1 = 10, d_2 = 1$ จะได้ว่าระยะทางระหว่างระนาบทั้งสองคือ

$$\frac{|10-1|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}} = \frac{9}{3} = 3 \qquad \text{หน่วย}$$

ตัวอย่าง 3.4.19 จงหาสมการระนาบที่ขนานกับระนาบ $x + y - \sqrt{2}z = 1$ และระยะทางระหว่างระนาบทั้งสองเท่ากับ 5 หน่วย

แนวคำตอบ ให้สมการที่ขนานกับ $x + y - \sqrt{2}z = 1$ คือ $x + y - \sqrt{2}z = d$ จะได้ว่า

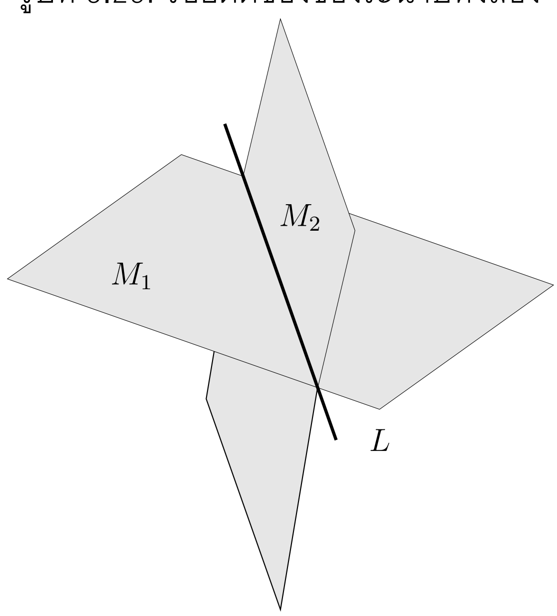
$$5 = \frac{|d-1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-\sqrt{2})^2}} = \frac{|d-1|}{2}$$

นั่นคือ $|d - 1| = 10$ ฉะนั้น $d = -9, 11$ ดังนั้นระนาบที่ขนานกับ $x + y - \sqrt{2}z = 1$ และมีระยะห่าง 5 หน่วยคือ $x + y - \sqrt{2}z = -9$ หรือ $x + y - \sqrt{2}z = 11$

การตัดกันของระนาบ

ระนาบที่ตัดกันคือระนาบที่ไม่ขนานกัน (พิจารณาจากเวกเตอร์แนวฉากของระนาบทั้งสองขนานกันหรือไม่) รอยตัดที่เกิดย่อมเป็นเส้นตรง

รูปที่ 3.25: รอยตัดของของระนาบทั้งสอง



จากรูปเนื่องจากเส้นตรง L อยู่บนระนาบ M_1 และ M_2 ดังนั้นเวกเตอร์แสดงทิศทางของเส้นตรง L ต้องตั้งฉากกับ $\vec{N}_1$ และ $\vec{N}_2$ ดังนั้น $\vec{A} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2$ และจุดผ่าน L คือจุดที่อยู่บน M_1 และ M_2

ตัวอย่าง 3.4.20 จงหาสมการเส้นตรงที่เกิดจากการตัดกันของระนาบ

$$2x - y + z = 1 \quad \text{และ} \quad x + y - 2z = 5$$

แนวคำตอบ เลือก $x = 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} -y + z &= 1 \\ y - 2z &= 5 \\ -z &= 6 \qquad \therefore z = -6,\ y = -7 \end{aligned}$$

ดังนั้น $(0,-7,-6)$ เป็นจุดบนระนาบทั้งสอง
เวกเตอร์แนวฉากของ $2x-y+z=1$ และ $x+y-2z=5$ คือ $\vec{N}_1=\langle 2,-1,1\rangle$ และ $\vec{N}_2=\langle 1,1,-2\rangle$ ตามลำดับ
ดังนั้น $\vec{N}_1\times\vec{N}_2$ เป็นเวกเตอร์แสดงทิศทางของเส้นตรงนี้ นั่นคือ

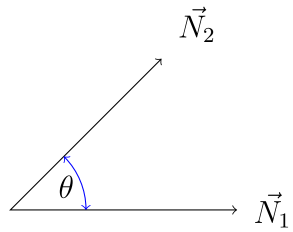
$$\begin{aligned}\vec{A}=\vec{N}_1\times\vec{N}_2&=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{i}&\vec{i}\\2&-1&1\\1&1&-2\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-1&1\\1&-2\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}2&1\\1&-2\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}2&-1\\1&1\end{vmatrix}\\&=\langle 1,5,3\rangle\end{aligned}$$

ดังนั้นสมการของเส้นตรงนี้คือ $x=\dfrac{y+7}{5}=\dfrac{z+6}{3}$

มุมระหว่างระนาบ

บทนิยาม 3.4.21 มุมระหว่างระนาบสองระนาบคือมุมระหว่างเวกเตอร์แนวฉากของระนาบทั้งสอง

รูปที่ 3.26: มุมระหว่างเวกเตอร์แนวฉาก $\vec{N}_1$ และ $\vec{N}_2$



ตัวอย่าง 3.4.22 จงหามุมระหว่างระนาบ $2x+y+2z=1$ กับ $5x-3y+4z=5$

แนวคำตอบ จะเห็นว่า $\vec{N}_1=\langle 2,1,2\rangle$ และ $\vec{N}_2=\langle 5,-3,4\rangle$ จะได้ว่า

$$\cos\theta=\frac{2(5)+1(-3)+2(4)}{3\cdot 5\sqrt{2}}=\frac{15}{15\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ดังนั้นมุมระหว่างระนาบทั้งสองคือ $\theta=45^\circ$

แบบฝึกหัด 3.4

1. จงหาสมการของระนาบที่ผ่านจุด P_0 และมี $\vec{N}$ เป็นเวกเตอร์แนวฉาก

   1.1 $P_0(2,1,1)$ และ $\vec{N} = \langle 2,-1,5\rangle$

   1.2 $P_0(-1,0,5)$ และ $\vec{N} = \langle 3,2,1\rangle$

   1.3 $P_0(1,3,-3)$ และ $\vec{N} = \langle 0,3,-2\rangle$

   1.4 $P_0(2,6,-4)$ และ $\vec{N} = \langle -1,-3,1\rangle$

2. จงหาสมการของระนาบที่ผ่านจุดทั้ง 3 จุด

   2.1 $(1,-1,0)$, $(0,-1,2)$ และ $(-1,-3,5)$

   2.2 $(-1,-3,-2)$, $(2,5,0)$ และ $(1,-2,1)$

3. จงเขียนกราฟของระนาบต่อไปนี้

   3.1 $x = z$

   3.2 $3x + y = 2$

   3.3 $x - y + z = 2$

   3.4 $2x - y + z = 5$

   3.5 $5x + 2y - 3z = 15$

   3.6 $3x + 3y + 2z = 6$

4. จงพิจารณาว่าจุดทั้ง 4 จุดอยู่บนระนาบเดียวกันหรือไม่

   4.1 $(1,1,1)$, $(-2,4,1)$, $(3,1,2)$ และ $(5,1,3)$

   4.2 $(1,2,7)$, $(-1,1,2)$, $(2,0,7)$ และ $(1,1,2)$

5. จงหาระยะทางระหว่างจุดกับระนาบที่กำหนดให้ต่อไปนี้

   5.1 $(1,-2,3)$ กับ $3x + 2y - z = 12$

   5.2 $(-1,1,-2)$ กับ $3x + 4y - 5z = 15$

6. จงหาจุดบนระราบ $x - 2y + 3z = 4$ ซึ่งอยู่ใกล้ที่สุดกับจุด $(2,3,-2)$

7. พิจารณาเส้นตรง L กับระนาบ M ที่กำหนดให้ตัดกันหรือขนานกัน ถ้าตัดกันจงหาจุดตัดและมุมระหว่างเส้นตรงกับระนาบ ถ้าขนานกันจงพิจารณาว่าเส้นตรงอยู่บนระนาบหรือไม่ และจงหาระยะทางระหว่างเส้นตรงกับระนาบ

   7.1 $L : \dfrac{x}{6} = y = \dfrac{1-z}{2}$ และ $M : x - 2y + 2z = 4$

   7.2 $L : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{2} = z$ และ $M : 5x + 4y - 3z = 15$

   7.3 $L : x = 3 + t, y = -1 + 3t, z = 1 + 2t$ และ $M : 2x - y + 3z = 5$

   7.4 $L : 1 - x = \dfrac{y}{2} = z - 2$ และ $M : 3x + y + z = 3$

8. จงหาสมการระนาบที่สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

8.1 ผ่านจุด $(1,0,2)$ และเส้นตรง $\dfrac{x}{3} = y+1 = \dfrac{2-z}{2}$

8.2 ผ่านเส้นตรง $\dfrac{x-2}{2} = y+1 = -z$ และ $\dfrac{1-x}{2} = -y = z+1$

8.3 ผ่านจุด $(2,1,-3)$ และขนานกับเส้นตรง $\dfrac{x}{2} = y = \dfrac{z}{3}$ และ $x-1 = y+1 = \dfrac{z}{2}$

8.4 ผ่านเส้นตรง $x = 3+2t, y = -t, z = 2t$ และ $x-2 = \dfrac{-1-y}{2} = -3-z$

8.5 ผ่านจุด $(2,-1,0)$ และตั้งฉากกับเส้นตรง $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = z$

8.6 ผ่านจุด $(1,2,3)$ และ $(2,0,2)$ และขนานกับเส้นตรง $x = y-1 = \dfrac{z}{2}$

9. จงหาสมการเส้นตรงที่เกิดจากการตัดกันของระนาบ M_1 และ M_2

9.1 $M_1 :\ x+y+z=2$
$M_2 :\ 2x-y+z=3$

9.2 $M_1 :\ x+y+3z=5$
$M_2 :\ x-5y+z=1$

10. จงหามุมระหว่างระนาบ M_1 และ M_2

10.1 $M_1 :\ 2x-5y+5z=2$
$M_2 :\ 1x-2y+7z=1$

10.2 $M_1 :\ x+y+z=3$
$M_2 :\ x-y-z=4$

11. จงหาสมการระนาบที่ผ่านจุด $(1,2,3)$, $(2,0,1)$ และตั้งฉากกับระนาบ $x+y-z=1$

12. จงหาสมการระนาบที่ขนานกับระนาบ $x+2y-2z=10$ และระยะทางระหว่างระนาบทั้งสอง เท่ากับ 3 หน่วย

13. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุดกำเนิดและอยู่บนระนาบ $x+y=3z$

3.5 ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

บทนิยาม 3.5.1 ให้ $n \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $n \geq 2$ และ $x_1, x_2, ..., x_n$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงบนช่วง I แล้ว

$$\vec{F}(t) = \langle x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t) \rangle$$

เรียกว่า**ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์** (vector value function) จาก I ไป $\mathbb{R}^n$

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ในกรณี $n = 2, 3$ นั่นคือ

$$\vec{F}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle \qquad \text{หรือ} \qquad \vec{F}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$$

ตัวอย่าง 3.5.2 ให้ $\vec{F}(t) = \langle t, t^2 \rangle$ เมื่อ $0 \leq t \leq 2$ จงหา

1. $\vec{F}(1) = \langle 1, 1 \rangle$
2. $\vec{F}(2) = \langle 2, 4 \rangle$

บทนิยาม 3.5.3 ให้ $\vec{F}$ และ $\vec{G}$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์จาก I ไป $\mathbb{R}^3$ และ u เป็นฟังก์ชันจาก I ไป $\mathbb{R}$ และ $t \in I$ แล้ว

1. $(\vec{F} + \vec{G})(t) = \vec{F}(t) + \vec{G}(t)$
2. $(u\vec{G})(t) = u(t)\vec{F}(t)$
3. $(\vec{F} \cdot \vec{G})(t) = \vec{F}(t) \cdot \vec{G}(t)$
4. $(\vec{F} \times \vec{G})(t) = \vec{F}(t) \times \vec{G}(t)$

ตัวอย่าง 3.5.4 ให้ $\vec{F}(t) = \langle 1, t, t^2 \rangle$ และ $\vec{G}(t) = \langle 1 + t, 2t, 1 - t \rangle$ เมื่อ $0 \leq t \leq 2$ จงหา

1. $(\vec{F} + \vec{G})(1)$
2. $(\vec{F} \cdot \vec{G})(1)$
3. $(\vec{F} \times \vec{G})(1)$

แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
(\vec{F} + \vec{G})(1) &= \vec{F}(1) + \vec{G}(1) = \langle 1, 1, 1 \rangle + \langle 2, 2, 0 \rangle = \langle 3, 3, 1 \rangle \\
(\vec{F} \cdot \vec{G})(1) &= \vec{F}(1) \cdot \vec{G}(1) = \langle 1, 1, 1 \rangle \cdot \langle 2, 2, 0 \rangle \\
&= 1(2) + 1(2) + 1(0) = 4 \\
(\vec{F} \times \vec{G})(1) &= \vec{F}(1) \times \vec{G}(1) = \langle 1, 1, 1 \rangle \times \langle 2, 2, 0 \rangle \\
&= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{i} & \vec{i} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\
&= \langle -2, 2, 0 \rangle
\end{aligned}$$

ลิมิตของฟังก์ชันเวกเตอร์

บทนิยาม 3.5.5 ให้ $\vec{F}(t) = \langle x(t), y(t), z(t)\rangle$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ ลิมิตของ $\vec{F}(t)$ เมื่อ t เข้าใกล้ t_0 เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{F}(t)$ แล้ว

$$\lim_{t\to t_0}\vec{F}(t) \text{ มีค่า} \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad \lim_{t\to t_0}x(t),\ \lim_{t\to t_0}y(t) \text{ และ } \lim_{t\to t_0}z(t) \text{ มีค่า}$$

และจะได้ว่า $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{F}(t) = \left\langle \lim\limits_{t\to t_0}x(t), \lim\limits_{t\to t_0}y(t), \lim\limits_{t\to t_0}z(t)\right\rangle$

ตัวอย่าง 3.5.6 จงหาค่าของ $\lim\limits_{t\to 1}\left\langle t^2+1, \cos\pi t, t^2-1\right\rangle$

แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 1}\left\langle t^2+1, \cos\pi t, t^2-1\right\rangle &= \left\langle \lim_{t\to 1}t^2+1, \lim_{t\to 1}\cos\pi t, \lim_{t\to 1}t^2-1\right\rangle \\ &= \langle 2, -1, 0\rangle\end{aligned}$$

บทนิยาม 3.5.7 กำหนดให้ $\vec{F}$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

$$\vec{F} \text{ มีความต่อเนื่อง } t = t_0 \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad \vec{F}(t_0) \text{ และ } \lim_{t\to t_0}\vec{F}(t) \text{ มีค่า และ } \lim_{t\to t_0}\vec{F}(t) = \vec{F}(t_0)$$

ถ้า $\vec{F}$ ต่อเนื่องทุกจุดบนช่วง I แล้วจะกล่าวว่า $\vec{F}$ มีความต่อเนื่องบนช่วง I

อนุพันธ์ของฟังก์ชันเวกเตอร์

บทนิยาม 3.5.8 กำหนดให้ $\vec{F}$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์และต่อเนื่องบนช่วง I และ $t_0 \in I$ ถ้า

$$\lim_{h\to 0}\frac{\vec{F}(t_0+h)-\vec{F}(t_0)}{h} \quad \text{มีค่า}$$

จะเขียนแทนด้วย

$$\frac{d}{dt}\vec{F}(t)|_{t=t_0} = \lim_{h\to 0}\frac{\vec{F}(t_0+h)-\vec{F}(t_0)}{h} \qquad \text{หรือ} \qquad \vec{F}'(t_0) = \lim_{h\to 0}\frac{\vec{F}(t_0+h)-\vec{F}(t_0)}{h}$$

เรียกว่า **อนุพันธ์** (derivative) ของ $\vec{F}$ ที่จุด $t_0 \in I$

ทฤษฎีบท 3.5.9 กำหนดให้ $\vec{F}(t) = \langle x(t), y(t), z(t)\rangle$ เมื่อ $t \in I$ และ x, y, z เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่มีอนุพันธ์บนช่วง I จะได้ว่า $\vec{F}$ มีอนุพันธ์ที่ t และ

$$\vec{F}'(t) = \langle x'(t), y'(t), z'(t)\rangle$$

บทพิสูจน์. เห็นได้ชัดจากการใช้บทนิยามและทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต □

ตัวอย่าง 3.5.10 กำหนดให้ $\vec{F}(t) = \left\langle t^2 + t - 3, \text{cos}2t, e^t\text{sin}t \right\rangle$ จงหา $(\vec{F} \times \vec{F}')(0)$

แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\vec{F}'(t) = \left\langle 2t + 1, -2\text{sin}2t, e^t\text{sin}t + e^t\text{cos}t \right\rangle$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
(\vec{F} \times \vec{F}')(0) &= \vec{F}(0) \times \vec{F}'(0) = \langle -3, 1, 0 \rangle \times \langle 1, 0, 1 \rangle \\
&= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{i} & \vec{i} \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \langle 1, 3, -1 \rangle
\end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 3.5.11 ให้ $\vec{F}$ และ $\vec{G}$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ และ u เป็นฟังก์ชันค่าจริง ถ้า $\vec{F}$, $\vec{G}$ และ u มีอนุพันธ์ที่ t แล้ว

1. $(\vec{F} + \vec{G})'(t) = \vec{F}'(t) + \vec{G}'(t)$
2. $(u\vec{G})'(t) = (u'\vec{F})(t) + (u\vec{F}')(t)$
3. $(\vec{F} \cdot \vec{G})'(t) = \vec{F}'(t) \cdot \vec{G}(t) + \vec{F}(t) \cdot \vec{G}'(t)$
4. $(\vec{F} \times \vec{G})'(t) = \vec{F}'(t) \times \vec{G}(t) + \vec{F}(t) \times \vec{G}'(t)$

บทพิสูจน์. เห็นได้ชัดจากการใช้บทนิยามและทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต □

ตัวอย่าง 3.5.12 กำหนดให้ $\vec{F} = \langle 1, t, \text{sin}t \rangle$ และ $\vec{G} = \langle t^2, t, 1 \rangle$ จงหา

1. $(\vec{F} \cdot \vec{G})'(t)$
2. $\vec{F}'(t) \cdot \vec{G}(t) + \vec{F}(t) \cdot \vec{G}'(t)$

แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
(\vec{F} \cdot \vec{G})'(t) &= \frac{d}{dt}(\vec{F} \cdot \vec{G}) = \frac{d}{dt}(1 \cdot t^2 + t \cdot t + \text{sin}t \cdot 1) \\
&= \frac{d}{dt}(2t^2 + \text{sin}t) = 4t + \text{cos}t \\
\vec{F}'(t) \cdot \vec{G}(t) + \vec{F}(t) \cdot \vec{G}'(t) &= \langle 0, 1, \text{cos}t \rangle \cdot \left\langle t^2, t, 1 \right\rangle + \langle 1, t, \text{sin}t \rangle \cdot \langle 2t, 1, 0 \rangle \\
&= 0 + t + \text{cos}t + 2t + t + 0 = 4t + \text{cos}t
\end{aligned}$$

ปริพันธ์ของฟังก์ชันเวกเตอร์

บทนิยาม 3.5.13 กำหนดให้ $\vec{F}(t) = \langle x(t), y(t), z(t)\rangle$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์บนโดเมน $D \subset \mathbb{R}$ ถ้า x, y, z เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่อินทิเกรตได้บนช่วง $[a, b]$ แล้ว $\vec{F}$ เป็นฟังก์ชันที่ **หาปริพันธ์ได้** (integrable) บนช่วง $[a, b] \subset D$ และ

$$\int_a^b \vec{F}(t)dt = \left\langle \int_a^b x(t)dt, \int_a^b y(t)dt, \int_a^b z(t)dt \right\rangle$$

ทฤษฎีบท 3.5.14 ให้ $\vec{F}$ และ $\vec{G}$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ และ c_1, c_2 เป็นคต่าคงตัว และ u เป็นฟังก์ชันค่าจริง และ $\vec{C}$ เป็นเวกเตอร์คงตัว แล้ว

1. $\displaystyle\int_a^b (c_1\vec{F}(t) + c_2\vec{G})dt = c_1\int_a^b \vec{F}(t)dt + c_2\int_a^b \vec{G}(t)dt$
2. $\displaystyle\int_a^b \vec{F}(t)dt = \int_a^c \vec{F}(t)dt + \int_c^b \vec{F}(t)dt$ เมื่อ $a < c < b$
3. $\displaystyle\int_a^b (u\vec{C}(t)dt = \int_a^b u(t)dt\vec{C}$
4. $\displaystyle\int_a^b (\vec{C}\cdot\vec{F})(t)dt = \vec{C}\cdot\int_a^b \vec{F}(t)dt$ เมื่อ $\vec{C}\cdot\vec{F}$ อินทิเกรตได้บนช่วง $[a, b]$

ตัวอย่าง 3.5.15 กำหนดให้ $\vec{F}(t) = \langle \cos t, \sin t, t\rangle$ และ $\vec{C} = \langle 1, 2, 1\rangle$ จงหา

1. $\displaystyle\int_0^\pi \vec{F}(t)dt$
2. $\displaystyle\int_0^\pi \vec{C}\cdot\vec{F}(t)dt$

แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \vec{F}(t)dt &= \int_0^\pi \langle \cos t, \sin t, t\rangle dt \\
&= \left\langle \int_0^\pi \cos t dt, \int_0^\pi \sin t dt, \int_0^\pi t dt \right\rangle \\
&= \left\langle [\sin t]_0^\pi, [-\cos t]_0^\pi, \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^\pi \right\rangle = \left\langle 0, 2, \frac{\pi^2}{2}\right\rangle \\
\int_0^\pi \vec{C}\cdot\vec{F}(t)dt &= \int_0^\pi \langle 1, 2, 1\rangle\cdot\langle \cos t, \sin t, t\rangle dt \\
&= \int_0^\pi \cos t + 2\sin t + t\, dt \\
&= \left[\sin t - 2\cos t + \frac{t^2}{2}\right]_0^\pi \\
&= \left[0 + 2 + \frac{\pi^2}{2}\right] - [0 - 2 + 0] = 4 + \frac{\pi^2}{2}
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3.5.16 จงหา $\int_0^{2\pi} \|\langle \text{cos}t, \text{sin}t, 1\rangle\| dt$

แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \|\langle \text{cos}t, \text{sin}t, 1\rangle\| dt &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\text{cos}^2t + \text{sin}^2t + 1}dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2}dt \\ &= [\sqrt{2}t]_0^{2\pi} \\ &= 2\pi\sqrt{2}\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3.5.17 ถ้านิยามความยาวของส่วนเส้นโค้ง $\vec{r}(t)$ บนช่วง $[a, b]$ คือ

$$L(a, b) = \int_a^b \|\vec{r}'(t)\| dt$$

จงหา $L(0, 2\pi)$ ของเส้นโค้ง $\vec{r}(t) = \langle 3\text{cos}t, 5\text{sin}t, 4\text{cos}t\rangle$

แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}L(0, 2\pi) &= \int_0^{2\pi} \|\vec{r}'(t)\| dt \\ &= \int_0^{2\pi} \| \langle -3\text{sin}t, 5\text{cos}t, -4\text{sin}t\rangle \| dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{9\text{sin}^2t + 25\text{cos}^2t + 16\text{sin}^2t}\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{25(\text{sin}^2t + \text{cos}^2t)}\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} 5\, dt \\ &= [5t]_0^{2\pi} \\ &= 10\pi\end{aligned}$$

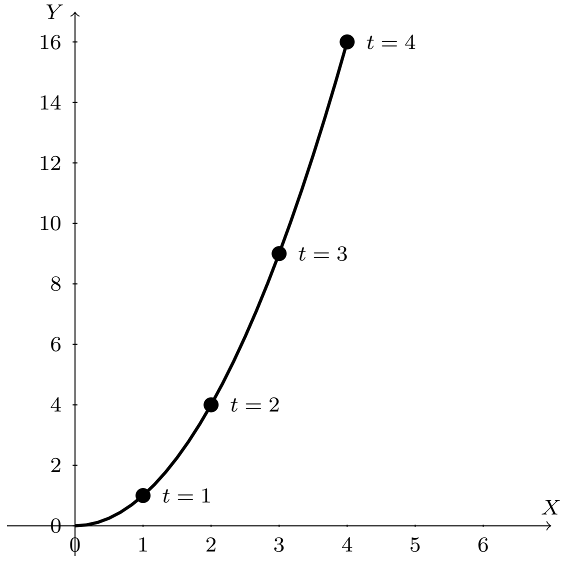
กราฟแสดงการเคลื่อนที่ของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

กราฟของการเคลื่อนที่ $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle$ เมื่อ $a \leq t \leq b$ ซึ่งเรียกว่าฟังก์ชันการเคลื่อนที่ คือ

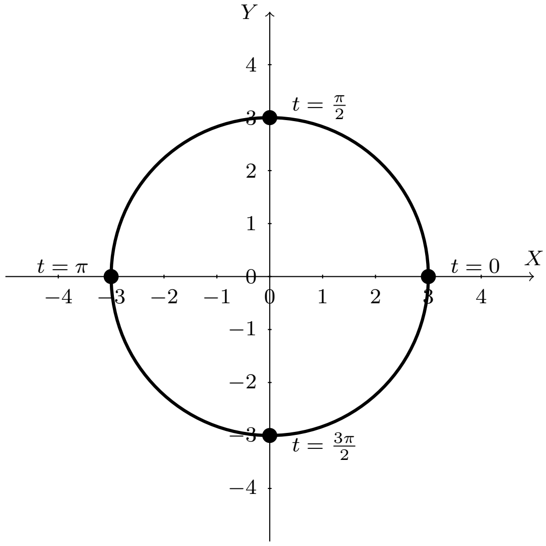
$$\text{กราฟความสัมพันธ์ } \{(x(t), y(t)) : \vec{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle \text{ เมื่อ } a \leq t \leq b\}$$

กราฟตัวอย่างของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^2$

$\vec{r}(t) = \langle t, t^2 \rangle$ เมื่อ $0 \leq t \leq 4$



$\vec{r}(t) = \langle 3\text{sin}t, 3\text{cos}t \rangle$ เมื่อ $0 \leq t \leq 2\pi$

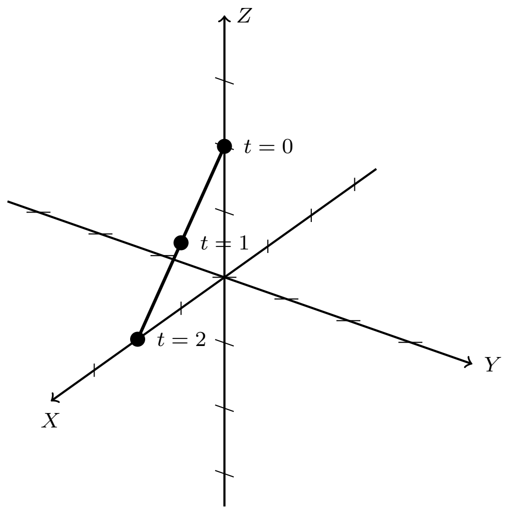


กราฟของการเคลื่อนที่ $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$ เมื่อ $a \leq t \leq b$ ซึ่งเรียกว่าฟังก์ชันการเคลื่อนที่คือ

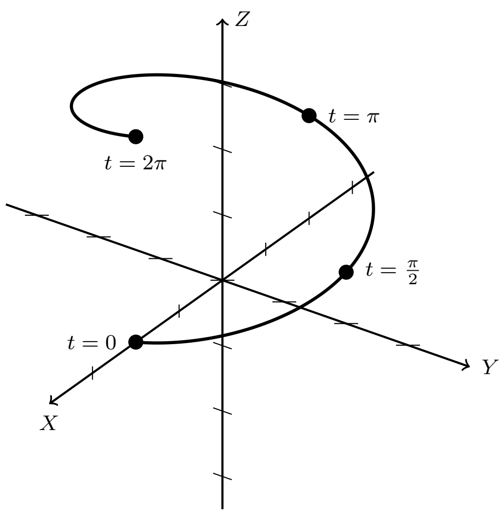
$$\text{กราฟความสัมพันธ์ } \{(x(t), y(t), z(t)) : \vec{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle \text{ เมื่อ } a \leq t \leq b\}$$

กราฟตัวอย่างของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$

$\vec{r}(t) = \langle t, 0, 2 - t \rangle$ เมื่อ $0 \leq t \leq 2$



$\vec{r}(t) = \left\langle 2\text{cos}t, 2\text{sin}t, \frac{t}{2} \right\rangle$ เมื่อ $0 \leq t \leq 2\pi$



เวกเตอร์ความเร็วและความเร่ง

ให้ $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t)\rangle$ หรือ $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t)\rangle$ เป็นฟังก์ชันการเคลื่อนที่

เวกเตอร์ความเร็ว $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t)$ **เวกเตอร์ความเร่ง** $\vec{a}(t) = \vec{r}''(t) = \vec{v}'(t)$

อัตราความเร็ว $v(t) = \|\vec{v}(t)\|$ **อัตราความเร่ง** $a(t) = \|\vec{a}(t)\|$

ตัวอย่าง 3.5.18 ให้ $\vec{r}(t) = \langle 2\text{cos}t, 2\text{sin}t, 3t\rangle$ เมื่อ $0 \le t \le 2\pi$ เป็นสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุ จงหาตำแหน่งของการเคลื่อนที่ เวกเตอร์ความเร็ว อัตราความเร็ว เวกเตอร์ความเร่ง อัตราความเร่ง เมื่อเวลา $t = \frac{\pi}{3}$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = \langle -2\text{sin}t, 2\text{cos}t, 3\rangle \qquad \text{และ} \qquad \vec{a}(t) = \vec{r}''(t) = \langle -2\text{cos}t, -2\text{sin}t, 0\rangle$$

เมื่อเวลา $t = \frac{\pi}{3}$ จะได้ว่า $\vec{r}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \langle 1, \sqrt{3}, \pi\rangle$ และ

$$\vec{v}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \langle -2\sqrt{3}, 1, 3\rangle \qquad \left\|\vec{v}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{22}$$
$$\vec{a}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \langle -1, -\sqrt{3}, 0\rangle \qquad \left\|\vec{a}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2 + 0^2} = 2$$

ดังนั้นเมื่อเวลา $t = \frac{\pi}{3}$ ตำแหน่งของการเคลื่อนที่คือ $\langle 1, \sqrt{3}, \pi\rangle$ เวกเตอร์ความเร็วคือ $\langle -2\sqrt{3}, 1, 3\rangle$ อัตราความเร็วคือ $\sqrt{22}$ เวกเตอร์ความเร่งคือ $\langle -1, -\sqrt{3}, 0\rangle$ และอัตราความเร่งคือ 2

ตัวอย่าง 3.5.19 รถคันหนึ่งเคลื่อนที่ในระนาบ XY ด้วยความเร่ง $\vec{a}(t) = 2\vec{i}\ m/s^2$ ถ้ารถคันนี้เริ่มเคลื่อนที่เมื่อเวลา 0 วินาที มีความเร็วเริ่มต้น $\vec{v}_0 = \vec{v}(0) = 10\vec{i} - 5\vec{j}\ m/s$

1. เวกเตอร์ความเร็วที่เวลาใด ๆ
2. เวกเตอร์ความเร็วและอัตราความเร็วที่เวลา 1 วินาที
3. ฟังก์ชันการเคลื่อนที่ของวัตถุที่เวลาใด ๆ

แนวคำตอบ จาก $\vec{a}(t) = \langle 2, 0\rangle$ จะได้ว่า

$$\vec{v}(t) = \int \vec{a}(t)dt = \int \langle 2, 0\rangle\, dt = \langle 2t + c_1, c_2\rangle$$

เนื่องจาก $\vec{v}(0) = \langle 10, -5\rangle$ ทำให้ได้ว่า $\langle 10, -5\rangle = \vec{v}(0) = \langle c_1, c_2\rangle$ ดังนั้นเวกเตอร์ความเร็วที่เวลาใด ๆ คือ $\vec{v}(t) = \langle 2t + 10, -5\rangle$ เมื่อเวลา 1 วินาที จะมีเวกเตอร์ความเร็วเท่ากับ $\vec{v}(1) = \langle 12, -5\rangle\ m/s$ และอัตราความเร็วเท่ากับ $\|\vec{v}(1)\| = \sqrt{(-12)^2 + 5^2} = 13\ m/s$ พิจารณา

$$\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t)dt = \int \langle 2t + 10, -5\rangle\, dt = \left\langle t^2 + 10t + c_3, -5t + c_4\right\rangle$$

จาก $\vec{r}(0) = \langle 0, 0\rangle$ ทำให้ได้ว่า $\langle 0, 0\rangle = \vec{r}(0) = \langle c_3, c_4\rangle$
ดังนั้นฟังก์ชันการเคลื่อนที่ของวัตถุที่เวลาใด ๆ คือ $\vec{r}(t) = \langle t^2 + 10t, -5t\rangle$

เวกเตอร์สัมผัสหน่วย เวกเตอร์แนวฉากหน่วย และเวกเตอร์แนวฉากคู่

ให้เส้นโค้งหนึ่งเป็นกราฟฟังก์ชันเวกเตอร์ $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t)\rangle$ เมื่อ $a \leq t \leq b$

1. จะได้ว่า $\vec{r}'(t)$ เป็นเวกเตอร์ในแนวสัมผัสของเส้นโค้ง ณ จุด $\vec{r}(t)$ เวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วยและทิศเดียวกันกับ $\vec{r}'(t)$ เรียกว่า **เวกเตอร์สัมผัสหน่วย** (unit tangent vector) ณ จุด $\vec{r}(t)$ เขียนแทนด้วย $\vec{T}(t)$ นั่นคือ

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} \qquad \text{เมื่อ} \qquad \|\vec{r}'(t)\| \neq 0$$

   เส้นตรงที่ผ่านจุด $\vec{r}(t)$ และขนานกับ $\vec{T}(t)$ เรียก **เส้นสัมผัส** (tangent) ของเส้นโค้ง ณ จุด $\vec{r}(t)$

2. เนื่องจาก $\vec{T}'(t)$ เป็นเวกเตอร์ซึ่งตั้งฉากกับ $\vec{T}(t)$ ณ จุด $\vec{r}(t)$ เวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วยและทิศเดียวกันกับ $\vec{T}'(t)$ เรียกว่า **เวกเตอร์แนวฉากหน่วย** (unit normal vector) เขียนแทนด้วย $\vec{N}(t)$ นั่นคือ

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{T}'(t)\|} \qquad \text{เมื่อ} \qquad \|\vec{T}'(t)\| \neq 0$$

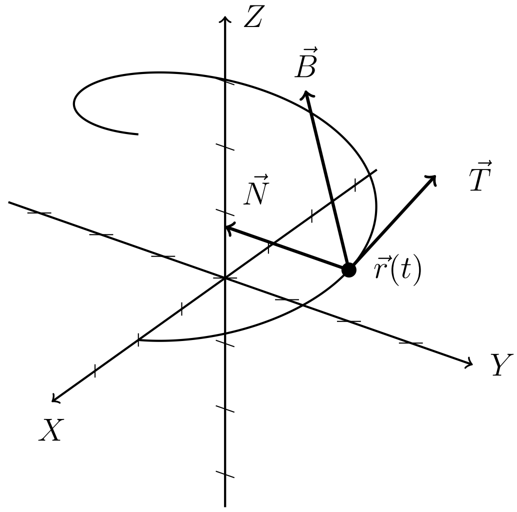
   เส้นตรงที่ผ่านจุด $\vec{r}(t)$ และขนานกับ $\vec{N}(t)$ เรียก **เส้นแนวฉาก** (normal line) ของเส้นโค้ง ณ จุด $\vec{r}(t)$

3. **เวกเตอร์แนวฉากคู่** (binormal vector) ณ จุด $\vec{r}(t)$ เขียนแทนด้วย $\vec{B}(t)$ นิยามโดย

$$\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t)$$

   เส้นตรงที่ผ่านจุด $\vec{r}(t)$ และขนานกับ $\vec{B}(t)$ เรียก **เส้นแนวฉากคู่** (binormal line) ของเส้นโค้ง ณ จุด $\vec{r}(t)$

รูปที่ 3.27: $\vec{T}(t)$, $\vec{N}(t)$ และ $\vec{B}(t)$ ในแนวสัมผัสของเส้นโค้ง ณ จุด $\vec{r}(t)$



ตัวอย่าง 3.5.20 ให้ $\vec{r}(t) = \langle \text{cos}t, \text{sin}t, t\rangle$ เมื่อ $0 \le t \le 2\pi$ เป็นฟังก์ชันการเคลื่อนที่ จงหาเวกเตอร์สัมผัสหน่วย เวกเตอร์แนวฉากหน่วย และเวกเตอร์แนวฉากคู่ เมื่อ $t = \pi$

แนวคำตอบ เวกเตอร์สัมผัสหน่วย เมื่อ $t = \pi$

$$\begin{aligned}
\vec{r}'(t) &= \langle -\text{sin}t, \text{cos}t, 1\rangle \\
\|\vec{r}'(t)\| &= \sqrt{\text{sin}^2 t + \text{cos}^2 t + 1} = \sqrt{2} \\
\vec{T}(t) &= \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle -\text{sin}t, \text{cos}t, 1\rangle \\
\vec{T}(\pi) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 0, -1, 1\rangle = \left\langle 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle
\end{aligned}$$

เวกเตอร์แนวฉากหน่วย เมื่อ $t = \pi$

$$\begin{aligned}
\vec{T}'(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\langle -\text{cos}t, -\text{sin}t, 0\rangle \\
\|\vec{T}'(t)\| &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\text{cos}^2 t + \text{sin}^2 t + 0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
\vec{N}(t) &= \frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{T}'(t)\|} = \langle -\text{cos}t, -\text{sin}t, 0\rangle \\
\vec{N}(\pi) &= \langle 1, 0, 0\rangle
\end{aligned}$$

เวกเตอร์แนวฉากคู่ เมื่อ $t = \pi$ คือ

$$\begin{aligned}
\vec{B}(\pi) &= \vec{T}(\pi) \times \vec{N}(\pi) \\
&= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \left\langle 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3.5.21 ให้ $\vec{r}(t) = \langle 1 + \text{sin}t, 1 - \text{cos}t, 2\rangle$ เมื่อ $0 \le t \le 2\pi$ เป็นสมการการเคลื่อนที่ จงหาสมการของเส้นสัมผัส เส้นแนวฉาก และเส้นแนวฉากคู่ของเส้นโค้งที่จุด $(1, 2, 2)$

แนวคำตอบ เนื่องจาก $1 + \text{sin}t = 1$ และ $1 - \text{cos}t = 2$ ฉะนั้น $t = \pi$
เวกเตอร์สัมผัสหน่วย เมื่อ $t = \pi$

$$\begin{aligned}
\vec{r}'(t) &= \langle \text{cos}t, \text{sin}t, 0\rangle \\
\|\vec{r}'(t)\| &= \sqrt{\text{cos}^2 t + \text{sin}^2 t + 0} = 1 \\
\vec{T}(t) &= \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} = \langle \text{cos}t, \text{sin}t, 0\rangle \\
\vec{T}(\pi) &= \langle -1, 0, 0\rangle
\end{aligned}$$

ดังนั้นสมการของเส้นสัมผัสคือ $x = 1 - t$, $y = 2$, $z = 2$

เวกเตอร์แนวฉากหน่วย เมื่อ $t = \pi$

$$\begin{aligned}
\vec{T}'(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\langle -\mathrm{sin}t, \mathrm{cos}t, 0\rangle \\
\|\vec{T}'(t)\| &= \sqrt{\mathrm{sin}^2 t + \mathrm{cos}^2 t + 0} = 1 \\
\vec{N}(t) &= \frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{T}'(t)\|} = \langle -\mathrm{sin}t, \mathrm{cos}t, 0\rangle \\
\vec{N}(\pi) &= \langle 0, -1, 0\rangle
\end{aligned}$$

ดังนั้นสมการของเส้นแนวฉากคือ $x = 1$, $y = 2 - t$, $z = 2$
เวกเตอร์แนวฉากคู่ เมื่อ $t = \pi$ คือ

$$\begin{aligned}
\vec{B}(\pi) &= \vec{T}(\pi) \times \vec{N}(\pi) \\
&= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \langle 0, 0, 1\rangle
\end{aligned}$$

ดังนั้นสมการของเส้นแนวฉากคู่คือ $x = 1$, $y = 2$, $z = 2 + t$

แบบฝึกหัด 3.5

1. จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้

1.1 $\lim\limits_{t\to 1}\left\langle 2t+1, \dfrac{t-1}{1-\sqrt{t}}, t\sin\pi t\right\rangle$

1.2 $\lim\limits_{t\to 0}\left\langle 2-t^2, \tan t, \dfrac{\sin t}{t}\right\rangle$

1.3 $\lim\limits_{t\to 0}\left\langle t^2+1, \dfrac{t^3-1}{t^2-1}, 1-2t\right\rangle$

1.4 $\lim\limits_{t\to 0}\left\langle t\tan t, 2t^3, \dfrac{1}{t-1}\right\rangle$

2. กำหนดให้ $\vec{F}(t) = \langle 1+t, 1+2t, 1+3t\rangle$ และ $\vec{G}(t) = \langle \cos t, \sin t, t\rangle$ จงหา

2.1 $\vec{F}'(t) + \vec{G}'(t)$

2.2 $(\vec{F}\cdot\vec{G})'(t)$

2.3 $(\vec{F}'\times\vec{G}')(t)$

2.4 $(\vec{F}\cdot\vec{G}')(t)$

3. จงหาค่าต่อไปนี้

3.1 $\displaystyle\int_1^3 \left\langle t, 2t+1, t^2\right\rangle dt$

3.2 $\displaystyle\int_0^\pi \left\langle t\sin t, \cos^2 t, t+1\right\rangle dt$

3.3 $\displaystyle\int_0^1 \left\langle 2\cos t, 3\sin t+1, \sec^2 2t\right\rangle dt$

3.4 $\displaystyle\int_0^1 \left\langle e^t, \frac{1}{1-t}, \sqrt{2-t}\right\rangle dt$

4. จงเขียนกราฟแสดงการการเคลื่อนที่ของฟังก์ชันเวกเตอร์ต่อไปนี้

4.1 $\vec{r}(t) = \langle t, 2+t\rangle$ เมื่อ $1\le t\le 3$

4.2 $\vec{r}(t) = \langle t, t^2+1\rangle$ เมื่อ $1\le t\le 4$

4.3 $\vec{r}(t) = \langle 1+t, 2+t\rangle$ เมื่อ $0\le t\le 5$

4.4 $\vec{r}(t) = \langle \sin t, \cos t, 4\rangle$ เมื่อ $0\le t\le \frac{\pi}{2}$

4.5 $\vec{r}(t) = \langle 2\sin t, 3\cos t, t\rangle$ เมื่อ $0\le t\le 2\pi$

5. จงหา ตำแหน่งของการเคลื่อนที่ เวกเตอร์ความเร็ว อัตราความเร็ว เวกเตอร์ความเร่ง อัตราความเร่ง เมื่อกำหนดสมการการเคลื่อนที่ดังนี้ ขณะเวลาที่กำหนดให้

5.1 $\vec{r}(t) = \langle t, t^2+1\rangle$ เมื่อ $t=2$

5.2 $\vec{r}(t) = \left\langle t+\dfrac{1}{t}, t-\dfrac{1}{t}\right\rangle$ เมื่อ $t=1$

5.3 $\vec{r}(t) = \langle \sin 3t, \cos 2t\rangle$ เมื่อ $t=\frac{\pi}{4}$

5.4 $\vec{r}(t) = \langle \sin^2 t, e^t\cos t, t\rangle$ เมื่อ $t=0$

5.5 $\vec{r}(t) = \langle \ell n 2t, e^{2t}, t\cos t\rangle$ เมื่อ $t=1$

5.6 $\vec{r}(t) = \langle \tan^2 t, \cos t\sin t, 2t\rangle$ เมื่อ $t=\frac{\pi}{3}$

6. เรือลำนี้เคลื่อนที่ในระนาบ XY โดยมีฟังก์ชันตำแหน่งที่เวลาใด ๆ ในระบบพิกัดฉากเป็น $x(t) = 3t^2 - 2t + 1$ และ $y(t) = -t^2 + 2t - 3$ จงหาอัตราความเร็วของเรือลำนี้ที่เวลา 3 วินาที

7. ถ้าการเดินทางของอนุภาคตัวหนึ่งเป็น $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ โดยมี $x(t) = at^2 + bt + c$ และ $y(t) = dt + e$ เมื่อ a, b, c, d, e เป็นค่าคงที่ จงหาการกระจัดของอนุภาคนี้ที่เวลา 0 วินาที

8. เรือมีฟังก์ชันความเร็วเป็น $\vec{v}(t) = at^2\vec{i} + bt\vec{j}$ โดยกำหนดให้ $a = 10\ m/s^2$ และ $b = -5\ m/s^2$ จงหา

   8.1 ความเร็วที่เวลา 1 วินาที และ 2 วินาที

   8.2 ความเร่งที่เวลา 1.5 วินาที

   8.3 ความเร่งเฉลี่ยระหว่างช่วงเวลา 1 ถึง 2 วินาที

9. จงหา เวกเตอร์สัมผัสหน่วย เวกเตอร์แนวฉากหน่วย และเวกเตอร์แนวฉากคู่ ของเส้นโค้งต่อไปนี้ที่จุดที่กำหนด

   9.1 $\vec{r}(t) = \langle \text{sin}t, \text{cos}t, 0\rangle$ เมื่อ $t = \pi$

   9.2 $\vec{r}(t) = \langle t, t, t^2\rangle$ เมื่อ $t = 1$

   9.3 $\vec{r}(t) = \langle 1 + t, 1 - t, 1 + t^2\rangle$ เมื่อ $t = 1$

   9.4 $\vec{r}(t) = \langle \text{sin}t, \text{cos}t, \text{sin}t\rangle$ เมื่อ $t = 0$

   9.5 $\vec{r}(t) = \langle \text{sin}^2 t, \text{cos}^2 t, t\rangle$ เมื่อ $t = \pi$

   9.6 $\vec{r}(t) = \langle \text{sin}t + \text{cos}t, \text{sin}t - \text{cos}t, e^t\rangle$ เมื่อ $t = 0$

10. จงหาสมการของเส้นสัมผัส เส้นแนวฉาก และเส้นแนวฉากคู่ของเส้นโค้งต่อไปนี้ที่จุดที่กำหนด

   10.1 $\vec{r}(t) = \langle \text{sin}t\text{cos}t, \text{sin}t + \text{cos}t, t\rangle$ เมื่อ $t = 0$

   10.2 $\vec{r}(t) = \langle \text{sin}^2 t, \text{cos}^2 t, t\rangle$ เมื่อ $t = \pi$

   10.3 $\vec{r}(t) = \langle t, t, t^2\rangle$ เมื่อ $t = 1$

   10.4 $\vec{r}(t) = \langle 1 + t^2, 1 - t^2, t - 2\rangle$ เมื่อ $t = 1$

   10.5 $\vec{r}(t) = \langle 3\text{sin}t, 5\text{cos}t, 4\text{sin}t\rangle$ เมื่อ $t = \frac{\pi}{2}$

11. ให้ $\vec{r}(t) = \langle 2\text{cos}t, 2\text{sin}t, t\rangle$ เมื่อ $0 \le t \le 2\pi$ เป็นสมการของเส้นโค้ง จงหาสมการของเส้นสัมผัส เส้นแนวฉาก และเส้นแนวฉากคู่ของเส้นโค้งที่จุด $(-2, 0, \pi)$

สรุป

ในบทนี้ศึกษาปริภูมิสามมิติ โดยเริ่มต้นจากเวกเตอร์และส่วนประกอบต่าง ๆ เช่น ขนาด ทิศทาง ผลคูณเชิงสเกลาร์ ผลคูณเชิงเวกเตอร์ จากนั้นกล่าวถึงเส้นตรงในปริภูมิสามมิติ ศึกษาการหาสมการเส้นตรงและสมบัติเกี่ยวกับเส้นตรง ระยะทางระหว่างจุดกับเส้นตรง และระยะทางระหว่างสองเส้นตรง ต่อไปกล่าวถึงระนาบในปริภูมิสามมิติ ศึกษาการหาสมการระนาบและสมบัติเกี่ยวกับระนาบ เช่น ระยะทางระหว่างจุดกับระนาบ และระยะทางระหว่างสองระนาบ สุดท้ายกล่าวถึงฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ซึ่งหมายถึงค่าฟังก์ชันเป็นเวกเตอร์โดยมีโดเมนเป็นสับเซตของจำนวนจริง โดยศึกษาลิมิต อนุพันธ์ และปริพันธ์ จากนั้นศึกษาการนำไปใช้คือ เวกเตอร์ความเร็วและความเร่ง

แบบฝึกหัดบทที่ 3

---

1. จงหาสมการของเส้นตรงที่สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

   1.1 ผ่านจุด $(0,1,2)$ และ $(1,3,-1)$

   1.2 ผ่านจุด $(0,-1,1)$ และขนานกับ $\langle -1,3,7\rangle$

   1.3 ผ่านจุด $(1,0,2)$ และขนานกับเส้นตรง $x-1=y+1=2z$

2. จงพิจารณาว่าจุด $A(1,2,1)$, $B(2,3,-2)$ และ $C(1,2,3)$ อยู่บนเส้นตรงเดียวกันหรือไม่

3. จงระยะทางระหว่าง $L_1 : 2x = \dfrac{z-1}{3}, y=1$ และ $L_2 : x=1+t,\ \ y=3+t,\ \ z=3-t$

4. จงหาสมการของระนาบที่สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

   4.1 ผ่านจุด $(-2,3,4)$ และเวกเตอร์แนวฉาก $\vec{N}=\langle 0,-1,1\rangle$

   4.2 ผ่านจุด $(2,1,0)$, $(1,0,3)$ และ $(2,-1,4)$

   4.3 ผ่านเส้นตรง $x=y=z$ และ $x+1=\dfrac{y+3}{2}=2z$

5. จงหาจุดบนระราบ $x+3y+z=1$ ซึ่งอยู่ใกล้ที่สุดกับจุด $(-1,0,2)$

6. ถ้า $\vec{a}=\langle x,1,2\rangle$ ตั้งฉากกับ $\vec{b}=\langle -1,1,3\rangle$ จงหาเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับทั้ง $\vec{a}$ และ $\vec{b}$

7. ให้ $A(1,2,3)$, $B(2,5,5)$ และ $C(0,1,2)$ เป็นจุดในปริภูมิสามมิติ ถ้าลากเส้นตรงจากจุด B ไปตั้งฉากกับเส้นตรง AC ที่จุด D จงหาพิกัดของจุด D

8. ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติซึ่งตั้งฉากกัน โดยที่ $\|\vec{u}-2\vec{v}\|=3$ และ $\|2\vec{u}+\vec{v}\|=4$ จงหา $\|\vec{u}+\vec{v}\|$

9. จงหาพื้นที่ของสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดเป็น $A(-1,2,3)$, $B(2,-1,3)$ และ $C(4,-1,2)$

10. จงตรวจสอบว่า $\vec{a}=\langle 1,2,3\rangle$, $\vec{b}=\langle 4,5,6\rangle$ และ $\vec{c}=\langle 7,8,9\rangle$ อยู่บนระนาบเดียวกันหรือไม่

11. จงหาปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมหน้าขนาน ซึ่งมีด้านประชิดเป็น $\vec{a} = \langle 2, 1, -3 \rangle$, $\vec{b} = \langle 4, -1, 0 \rangle$ และ $\vec{c} = \langle -1, 4, -1 \rangle$

12. จงยกตัวอย่างเวกเตอร์ $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$ ใน $\mathbb{R}^3$ ที่ทำให้ $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$

13. ให้ $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ ถ้า $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ จงแสดงว่า $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$

14. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุดกำเนิด ซึ่งตัดและตั้งฉากกับเส้นตรง $x = \dfrac{4-y}{2} = z - 2$

15. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(1, 2, -1)$ และจุดตัดของเส้นตรง

$$L_1 : x - 1 = \frac{y-1}{2} = z \qquad \text{และ} \qquad L_2 : \frac{x}{3} = \frac{y-3}{2} = z - 1$$

16. จงหาพิกัดบนเส้นตรง L ที่อยู่ใกล้จุดกำเนิดมากที่สุด เมื่อ $L : \begin{cases} x &= 3 + 2t \\ y &= 1 + t \\ z &= 1 + 2t \end{cases}$

17. ให้ $A(-2, 3, k)$ เป็นจุดบนระนาบ $M:\ 3x - 2y + 4z = 12$ จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด A และตั้งฉากกับระนาบ M

18. จงหาจุดบนระนาบ $x - 2y + 3z = 4$ ที่อยู่ใกล้ที่สุดกับจุด $(2, 3, -2)$

19. จงหาสมการเส้นตรงที่เกิดจากการตัดกันของระนาบ $x + y + z = 1$ และ $2x - y + z = 3$

20. จงหาสมการของระนาบที่ผ่านจุด $(1, 2, 3)$, $(2, 0, 1)$ และตั้งฉากกับระนาบ $x + y - z = 1$

21. จงหาสมการระนาบที่ผ่านเส้นตรง $x = y = z$ และเส้นตรง $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+1}{4}$

22. จงหามุมระหว่างเส้นตรง $\dfrac{x}{6} = y = \dfrac{1-z}{2}$ กับระนาบ $x - 2y + 2z = 4$

23. จงหามุมระหว่างระนาบ $z + 2y - z = 2$ และ $2x + y + z = 3$

24. กำหนดให้ $\vec{F} = \langle 1, 0, t \rangle$ และ $\vec{G} = \langle 0, \cos t, t \rangle$ จงหา $(\vec{F} \times \vec{G})'(0)$

25. จงหา $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \| \langle 5\tan t, 3, 4 \rangle \| dt$

26. จงหา ตำแหน่งของการเคลื่อนที่ เวกเตอร์ความเร็ว อัตราเร็ว เวกเตอร์ความเร่ง อัตราเร่ง เมื่อกำหนดสมการการเคลื่อนคือ

$$\vec{r}(t) = \langle \sin^2 t, e^t \cos t, t \rangle \quad \text{เมื่อ} \quad t = 0$$

27. จงหา เวกเตอร์สัมผัสหน่วย เวกเตอร์แนวฉากหน่วย เวกเตอร์แนวฉากคู่ ของเส้นโค้ง

$$\vec{r}(t) = \langle 3\sin t, -3\cos t, 4 \rangle \quad \text{เมื่อ} \quad t = \pi$$

28. จงหาสมการของเส้นสัมผัส เส้นแนวฉาก และเส้นแนวฉากคู่ของเส้นโค้ง

$$\vec{r}(t) = \langle 3\sin t, 5\cos t, 4\sin t \rangle \quad \text{เมื่อ} \quad t = 0$$

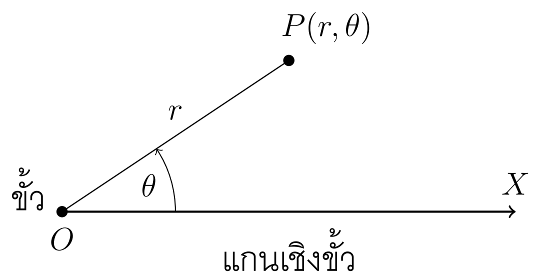
บทที่ 4

ระบบพิกัดเชิงขั้ว

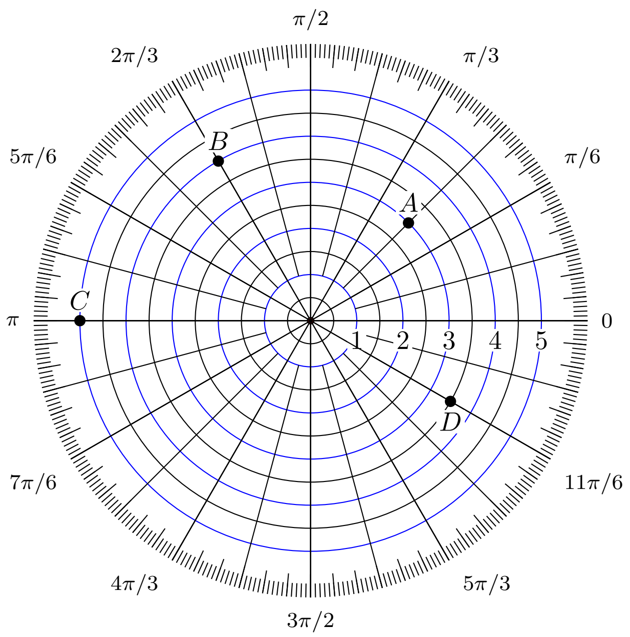
4.1 พิกัดเชิงขั้ว

บทนิยาม 4.1.1 ให้ P เป็นจุดใด ๆ ในระนาบ XY
ถ้า r เป็นระยะทางจาก O (จุดกำเนิด) ไปยังจุด P และส่วนของเส้นตรง OP ทำมุม θ กับแกน OX เรียกจุด (r, θ) ว่า**พิกัดเชิงขั้ว** (polar coordinate) ของจุด P

รูปที่ 4.1: แสดงความหมายพิกัดเชิงขั้ว (r, θ)

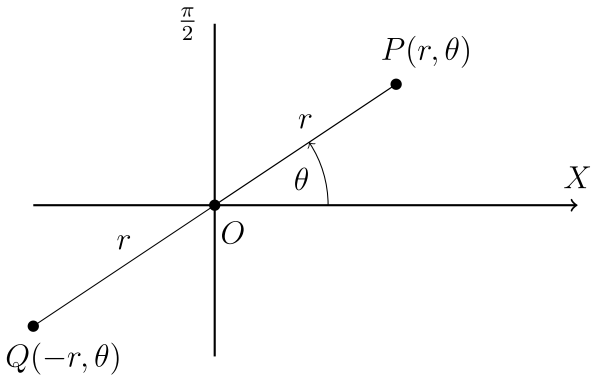


ตัวอย่าง 4.1.2 จงเขียนจุด $A(3, \frac{\pi}{4})$, $B(4, \frac{2\pi}{3})$, $C(5, -\pi)$ และ $D(3.5, -\frac{\pi}{6})$ ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

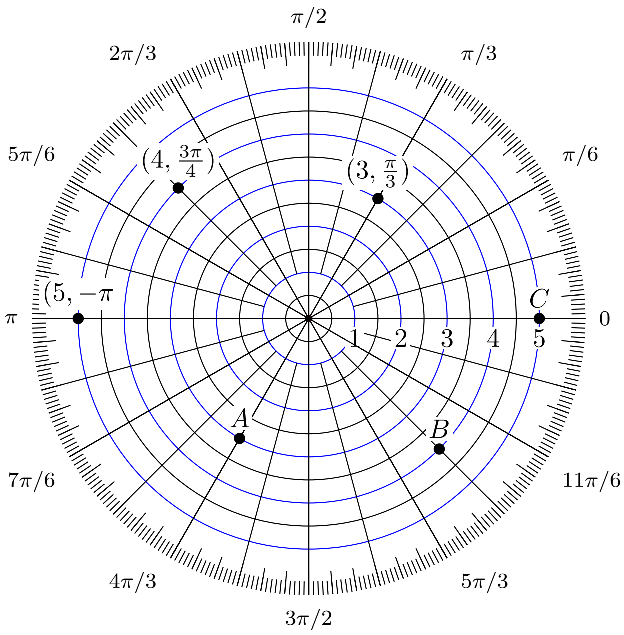


บทนิยาม 4.1.3 ถ้า P มีพิกัดเชิงขั้วเป็น (r,θ) เมื่อ $r>0$ แล้ว $(-r,\theta)$ หมายถึงพิกัดของจุดปลายที่ได้จากการลากเส้นตรงจากขั้วไปในทิศตรงกันข้ามกับ $\overrightarrow{OP}$ เป็นระยะ r

รูปที่ 4.2: แสดงพิกัดเชิงขั้ว (r,θ) และ $(-r,\theta)$



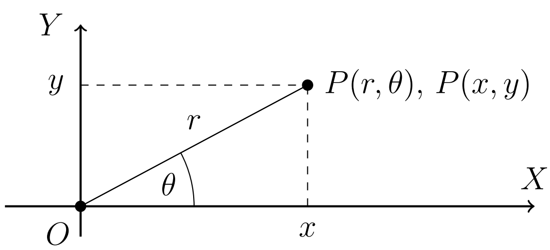
ตัวอย่าง 4.1.4 จงเขียนจุด $A(-3,\frac{\pi}{3})$, $B(-4,\frac{3\pi}{4})$ และ $C(-5,-\pi)$ ในระบบพิกัดเชิงขั้ว



ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดเชิงขั้วและพิกัดฉาก

ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดเชิงขั้ว (r,θ) และพิกัดฉาก (x,y) ของจุด P ใด ๆ ที่ไม่ใช่จุดกำเนิด

รูปที่ 4.3: ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดเชิงขั้วและพิกัดฉาก



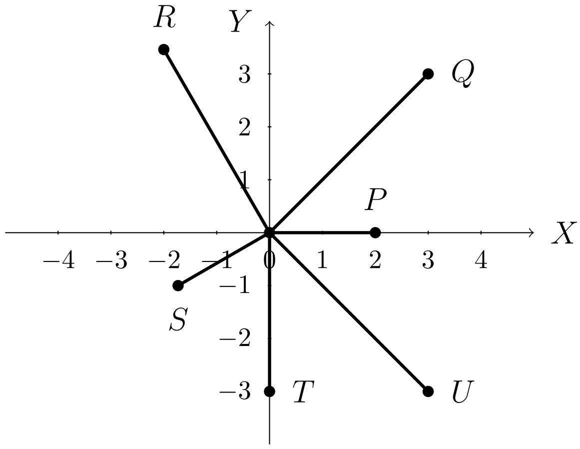
จะได้ $x^2 + y^2 = r^2$

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \quad \text{และ} \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

ตัวอย่าง 4.1.5 จงหาพิกัดเชิงขั้วของจุดพิกัดฉากต่อไปนี้ เมื่อ $r > 0$ และ $0 \le \theta < 2\pi$

1. $P(2,0)$
2. $Q(2,2)$
3. $R(-2,2\sqrt{3})$
4. $S(-\sqrt{3},-1)$
5. $T(0,-3)$
6. $U(3,-3)$

แนวคำตอบ แสดงจุดต่าง ๆ ได้ดังรูป



จากรูปแสดงความสัมพันธ์ได้ดังตาราง

พิกัดฉาก	r	θ (เรเดียน)	พิกัดเชิงขั้ว
$P(2,0)$	2	0	$(2,0)$
$Q(2,2)$	$\sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$	$\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$	$(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$
$R(-2,2\sqrt{3})$	$\sqrt{(-2)^2+(2\sqrt{3})^2} = 4$	$\arctan(-\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3}$	$(4, \frac{2\pi}{3})$
$S(-\sqrt{3},-1)$	$\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(-1)^2} = 2$	$\arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{7\pi}{6}$	$(2, \frac{7\pi}{6})$
$T(0,-3)$	3	$\frac{3\pi}{2}$	$(3, \frac{3\pi}{2})$
$U(3,-3)$	$\sqrt{3^2+(-3)^2} = 3\sqrt{2}$	$\arctan(-1) = \frac{7\pi}{4}$	$(3\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4})$

ตัวอย่าง 4.1.6 จงหาพิกัดเชิงขั้วของจุดพิกัดฉาก $(1,1)$ มาอย่างน้อย 3 จุด

แนวคำตอบ จะได้ว่า $r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ และ

$$\theta = \arctan(1) = \tfrac{\pi}{4} \pm 2n\pi \quad \text{เมื่อ} \quad n \in \mathbb{Z}$$

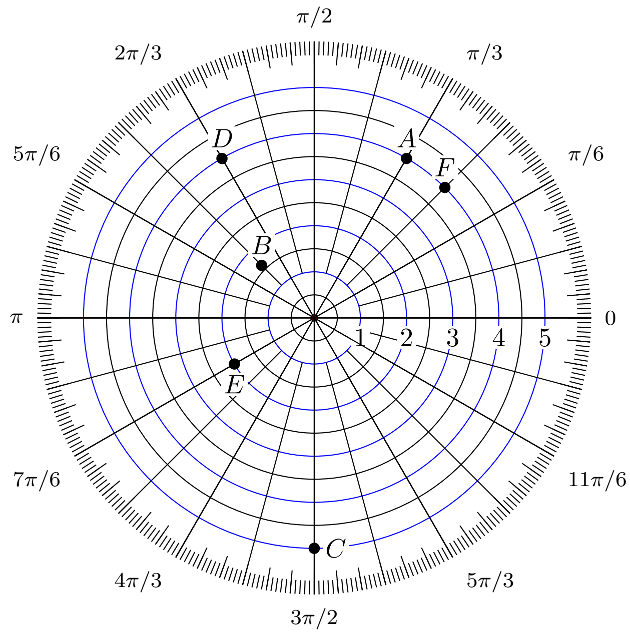
พิกัดเชิงขั้วของจุดพิกัดฉาก $(1,1)$ อาจจะเป็น

$$(\sqrt{2}, \tfrac{\pi}{4}), (\sqrt{2}, \tfrac{9\pi}{4}) \quad \text{หรือ} \quad (-\sqrt{2}, \tfrac{5\pi}{4})$$

ตัวอย่าง 4.1.7 จงหาพิกัดฉากของจุดซึ่งมีพิกัดเชิงขั้วต่อไปนี้

1. $A(4, \frac{\pi}{3})$
2. $B(2, \frac{3\pi}{4})$
3. $C(5, \frac{3\pi}{2})$
4. $D(4, -\frac{4\pi}{3})$
5. $E(-2, \frac{\pi}{6})$
6. $F(-4, -\frac{3\pi}{4})$

แนวคำตอบ แสดงจุดต่าง ๆ ได้ดังรูป



จากรูปแสดงความสัมพันธ์ได้ดังตาราง

พิกัดเชิงขั้ว	x	y	พิกัดฉาก
$A(4, \frac{\pi}{3})$	$4\cos\frac{\pi}{3} = 2$	$4\sin\frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3}$	$(2, 2\sqrt{3})$
$B(2, \frac{3\pi}{4})$	$2\cos\frac{3\pi}{4} = -\sqrt{2}$	$2\sin\frac{3\pi}{4} = \sqrt{2}$	$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$
$C(5, \frac{3\pi}{2})$	$5\cos\frac{3\pi}{2} = 0$	$5\sin\frac{3\pi}{2} = -5$	$(0, -5)$
$D(4, -\frac{4\pi}{3})$	$4\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = -2$	$4\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3}$	$(-2, 2\sqrt{3})$
$E(-2, \frac{\pi}{6})$	$-2\cos\frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}$	$-2\sin\frac{\pi}{6} = -1$	$(-\sqrt{3}, -1)$
$F(-4, -\frac{3\pi}{4})$	$-4\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}$	$-4\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}$	$(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$

สำหรับฟังก์ชันในระบบพิกัดฉาก $y = f(x)$ อาจแปลงให้อยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

$$r = g(\theta) \qquad \text{หรือ} \qquad \theta = h(r)$$

โดยที่ $x^2 + y^2 = r^2$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ และ $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

ตัวอย่าง 4.1.8 จงแปลงสมการในระบบพิกัดฉากต่อไปนี้ ให้อยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

1. $x = 3$

   แนวคำตอบ จะได้ว่า $r\cos\theta = 3$

$$r = \frac{3}{\cos\theta} = 3\sec\theta$$

   ดังนั้นสมการในระบบพิกัดเชิงขั้วคือ $r = 3\sec\theta$

2. $y = 5$

   แนวคำตอบ จะได้ว่า $r\sin\theta = 5$

$$r = \frac{5}{\sin\theta} = 5\csc\theta$$

   ดังนั้นสมการในระบบพิกัดเชิงขั้วคือ $r = 5\csc\theta$

3. $y = x$

   แนวคำตอบ จะได้ว่า $r\sin\theta = r\cos\theta$

$$\tan\theta = 1 \qquad \longrightarrow \qquad \theta = \frac{\pi}{4}$$

   ดังนั้นสมการในระบบพิกัดเชิงขั้วคือ $\theta = \frac{\pi}{4}$

4. $y = x + 1$

   แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} r\sin\theta &= r\cos\theta + 1 \\ r(\sin\theta - \cos\theta) &= 1 \\ r &= \frac{1}{\sin\theta - \cos\theta} \end{aligned}$$

   ดังนั้นสมการในระบบพิกัดเชิงขั้วคือ $r = \dfrac{1}{\sin\theta - \cos\theta}$

ตัวอย่าง 4.1.9 จงแปลงสมการในระบบพิกัดฉากต่อไปนี้ ให้อยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

1. $x^2 + y^2 = 4$

   แนวคำตอบ จะได้ว่า $r^2 = 4$ ดังนั้นสมการในระบบพิกัดเชิงขั้วคือ $r = 2$

2. $x^2 + y^2 = 2x$

   แนวคำตอบ จะได้ว่า $r^2 = 2r\text{cos}\theta$ ดังนั้นสมการในระบบพิกัดเชิงขั้วคือ $r = 2\text{cos}\theta$

3. $y = x^2$

   แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} r\text{sin}\theta &= (r\text{cos}\theta)^2 \\ r\text{sin}\theta &= r^2\text{cos}^2\theta \\ r &= \frac{\text{sin}\theta}{\text{cos}^2\theta} = \text{tan}\theta\text{sec}\theta \end{aligned}$$

   ดังนั้นสมการในระบบพิกัดเชิงขั้วคือ $r = \text{tan}\theta\text{sec}\theta$

ตัวอย่าง 4.1.10 จงแปลงสมการในระบบพิกัดเชิงขั้วต่อไปนี้ ให้อยู่ในระบบพิกัดฉาก

1. $r = 3$

   แนวคำตอบ จะได้ว่า $x^2 + y^2 = r^2 = 9$ ดังนั้นสมการในระบบพิกัดฉากคือ $x^2 + y^2 = 9$

2. $r = 4\text{sin}\theta$

   แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} r \cdot r &= r \cdot 4\text{sin}\theta \\ r^2 &= 4(r\text{sin}\theta) \\ x^2 + y^2 &= 4y \end{aligned}$$

   ดังนั้นสมการในระบบพิกัดฉากคือ $x^2 + y^2 = 4y$

ตัวอย่าง 4.1.11 จงแปลงสมการในระบบพิกัดเชิงขั้ว $r = \dfrac{6}{3\text{cos}\theta + 2\text{sin}\theta}$ ให้อยู่ในระบบพิกัดฉาก

แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} r(3\text{cos}\theta + 2\text{sin}\theta) &= 6 \\ 3(r\text{cos}\theta) + 2(r\text{sin}\theta) &= 6 \\ 3x + 2y &= 6 \end{aligned}$$

ดังนั้นสมการในระบบพิกัดฉากคือ $3x + 2y = 6$

แบบฝึกหัด 4.1

1. จงหาพิกัดเชิงขั้วของจุดในระบบพิกัดฉากต่อไปนี้ เมื่อ $r > 0$ และ $0 \leq \theta < 2\pi$

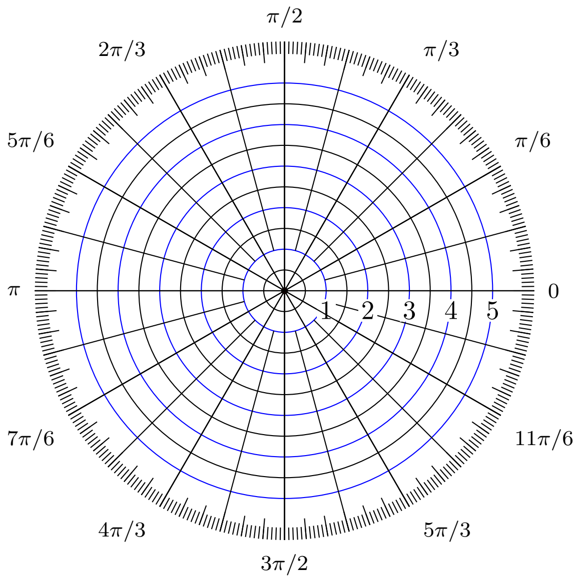
1.1 $(-1, 1)$ 1.3 $(-1, \sqrt{3})$ 1.5 $(3\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$

1.2 $(-3, -3)$ 1.4 $(4\sqrt{3}, -1)$ 1.6 $(8, 4\sqrt{3})$

2. จงเขียนจุดในระบบพิกัดฉาก และหาพิกัดฉากของจุดต่อไปนี้

2.1 $A(2, \frac{\pi}{4})$ 2.3 $C(-3, \frac{5\pi}{6})$ 2.5 $E(-5, \frac{11\pi}{6})$

2.2 $B(-1, \frac{3\pi}{3})$ 2.4 $D(4, -\frac{\pi}{4})$ 2.6 $E(2.5, \frac{4\pi}{3})$



3. จงหาพิกัดเชิงขั้วของจุดพิกัดฉากต่อไปนี้มาอย่างน้อย 3 จุด

3.1 $(-1, 1)$ 3.2 $(-3, -\sqrt{3})$ 3.3 $(\sqrt{2}, \sqrt{6})$

4. จงเขียนสมการในระบบพิกัดฉากให้อยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

4.1 $x + y = 2$ 4.4 $x^2 + y^2 = 4$ 4.7 $y^2 = 4x$

4.2 $y = x^2$ 4.5 $x^2 + y^2 = 2x$ 4.8 $4x^2 + 9y^2 = 36$

4.3 $x^2 + y^2 = 2y$ 4.6 $x^2 - y^2 = xy$ 4.9 $x^2 - y^2 = 1$

5. จงเขียนสมการในระบบเชิงขั้วให้อยู่ในระบบพิกัดฉาก

5.1 $r = 2$ 5.4 $r = 1 - \sin\theta$ 5.7 $r = \tan\theta\csc\theta$

5.2 $r = 5\sin\theta$ 5.5 $r = \dfrac{1}{1 - \sin\theta}$ 5.8 $r = \sin 2\theta$

5.3 $r = 2\cos 2\theta$ 5.6 $r = \tan\theta$ 5.9 $r = \sin\theta + \cos\theta$

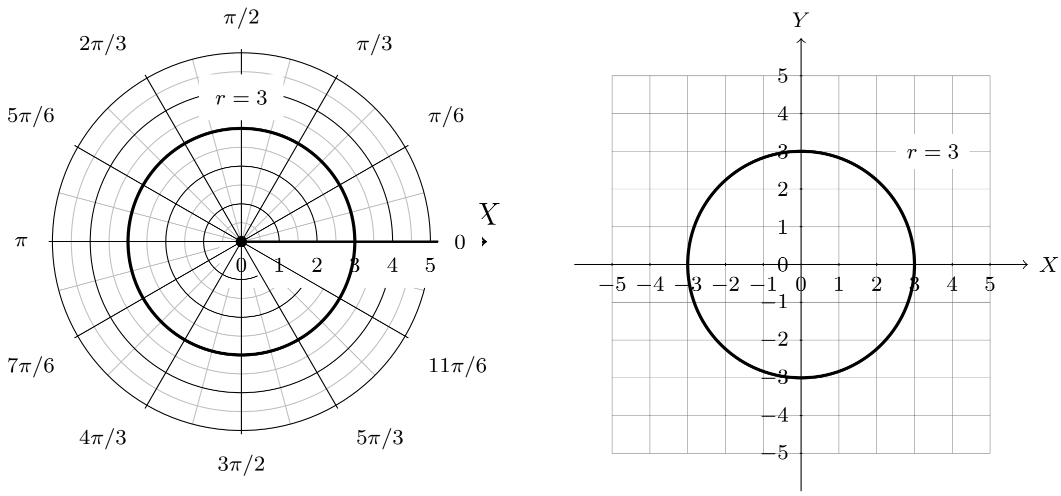
4.2 กราฟของสมการในระบบพิกัดเชิงขั้ว

การเขียนกราฟของสมการ $r = f(\theta)$ หรือ $\theta = h(r)$ ในระบบพิกัดเชิงขั้ว มีแนวคิดเหมือนกับการเขียนกราฟของสมการในระบบพิกัดฉาก โดยการนำจุด (r, θ) ที่สอดคล้องสมการไปเขียนลงบนพิกัด ต่อไปตัวอย่างกราฟของระบบพิกัดฉากที่สำคัญ

1. สมการ $f(\theta) = k$

สมการ $r = f(\theta) = k$ เมื่อ $k \neq 0$ เป็นกราฟวงกลมที่มีรัศมี $|k|$ มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0, 0)$

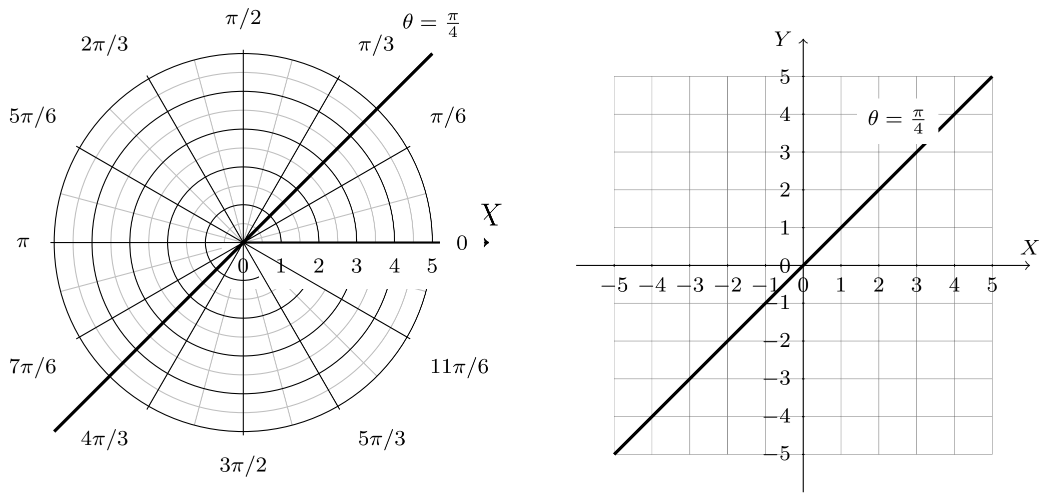
รูปที่ 4.4: ตัวอย่างกราฟของ $r = 3$ และ $r = -4$



2. สมการ $\theta = \theta_0$

สมการ $\theta = \theta_0$ เป็นกราฟเส้นตรงที่ทำมุม θ_0 กับแกนเชิงขั้ว

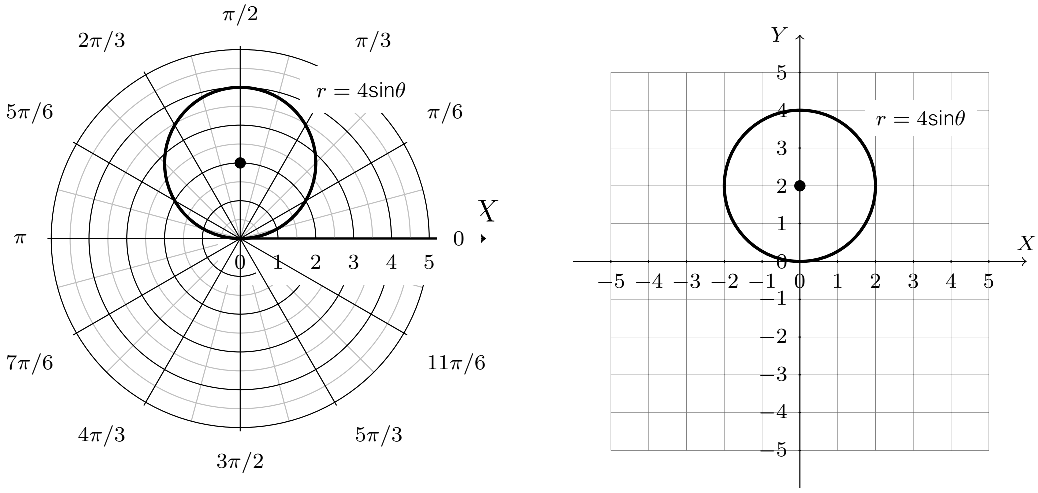
รูปที่ 4.5: ตัวอย่างกราฟของ $\theta = \frac{\pi}{4}$



3. สมการ $f(\theta) = 2k\sin\theta$ และ $f(\theta) = 2k\cos\theta$

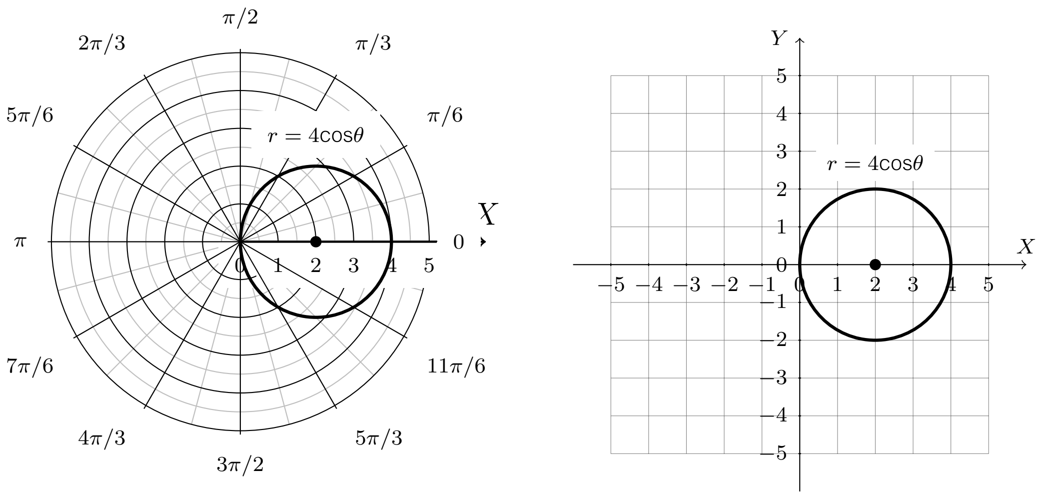
สมการ $r = f(\theta) = 2k\sin\theta$ เมื่อ $k \neq 0$ และ $0 \leq \theta \leq \pi$ เป็นกราฟวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(k, \frac{\pi}{2})$ รัศมี $|k|$

รูปที่ 4.6: ตัวอย่างกราฟของ $r = 4\sin\theta$



สมการ $r = f(\theta) = 2k\cos\theta$ เมื่อ $k \neq 0$ และ $0 \leq \theta \leq \pi$ เป็นกราฟวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(k, 0)$ รัศมี $|k|$

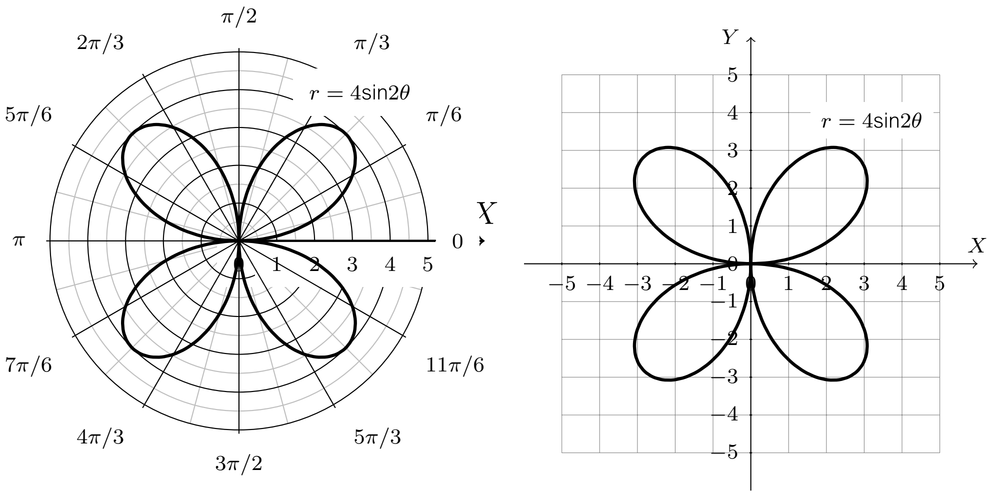
รูปที่ 4.7: ตัวอย่างกราฟของ $r = 4\cos\theta$



4. สมการ $f(\theta) = k\sin 2n\theta$ และ $f(\theta) = k\cos 2n\theta$

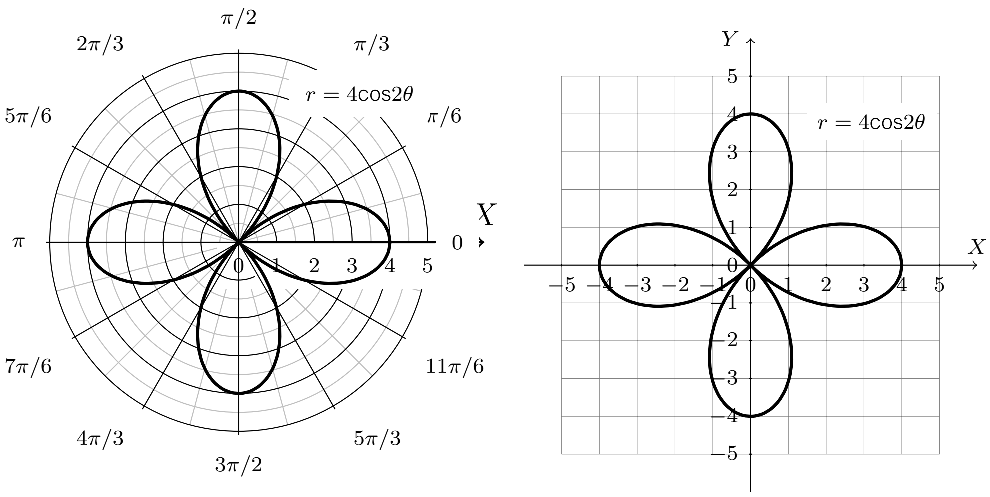
สมการ $r = f(\theta) = k\sin 2n\theta$ เมื่อ $k \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ และ $0 \leq \theta \leq 2\pi$ เป็นกราฟกลีบกุหลาบ $4n$ กลีบ โดยที่แกนสมมาตรของแต่ละกลีบไม่อยู่บนแกน X และ Y

รูปที่ 4.8: ตัวอย่างกราฟของ $r = 4\sin 2\theta$



สมการ $r = f(\theta) = k\cos 2n\theta$ เมื่อ $k \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}$ และ $0 \leq \theta \leq 2\pi$ เป็นกราฟกลีบกุหลาบ $4n$ กลีบ โดยที่มีแกนสมมาตรของบ้างกลีบอยู่บนแกน X และ Y

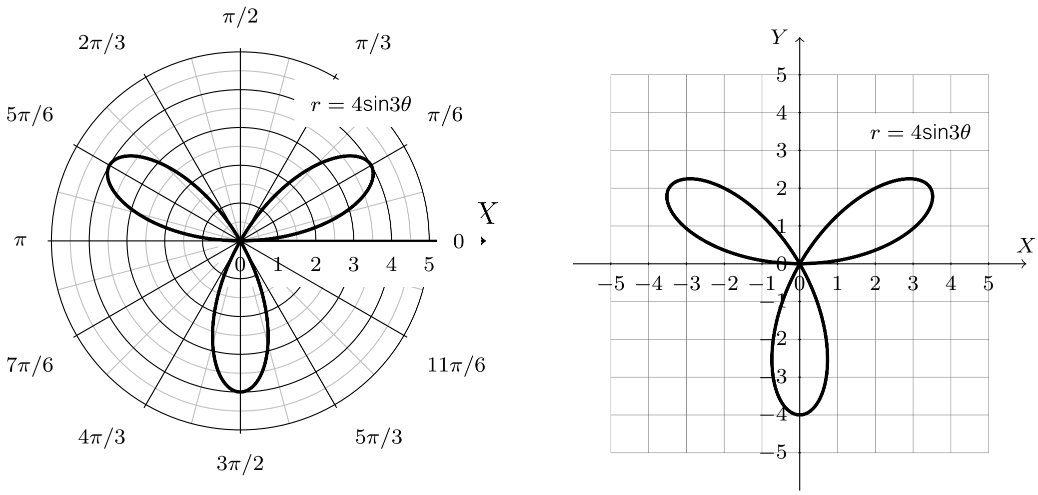
รูปที่ 4.9: ตัวอย่างกราฟของ $r = 4\cos 2\theta$



5. สมการ $f(\theta) = k\sin(2n-1)\theta$ และ $f(\theta) = k\cos(2n-1)\theta$

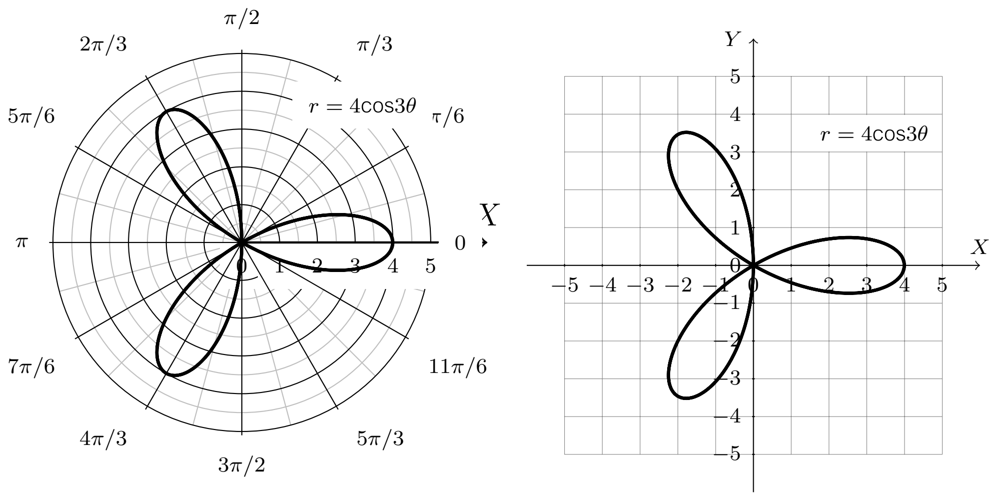
สมการ $r = f(\theta) = k\sin(2n-1)\theta$ เมื่อ $k \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ และ $0 \leq \theta \leq 2\pi$ เป็นกราฟกลีบกุหลาบ $2n-1$ กลีบ โดยที่มีแกนสมมาตรของบ้างกลีบอยู่บนแกน Y

รูปที่ 4.10: ตัวอย่างกราฟของ $r = 4\sin3\theta$



สมการ $r = f(\theta) = k\cos(2n-1)\theta$ เมื่อ $k \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ และ $0 \leq \theta \leq 2\pi$ เป็นกราฟกลีบกุหลาบ $2n-1$ กลีบ โดยที่มีแกนสมมาตรของบ้างกลีบอยู่บนแกน X

รูปที่ 4.11: ตัวอย่างกราฟของ $r = 4\cos3\theta$



6. สมการ $f(\theta) = r = a + b\sin\theta$ และ $f(\theta) = r = a + b\cos\theta$

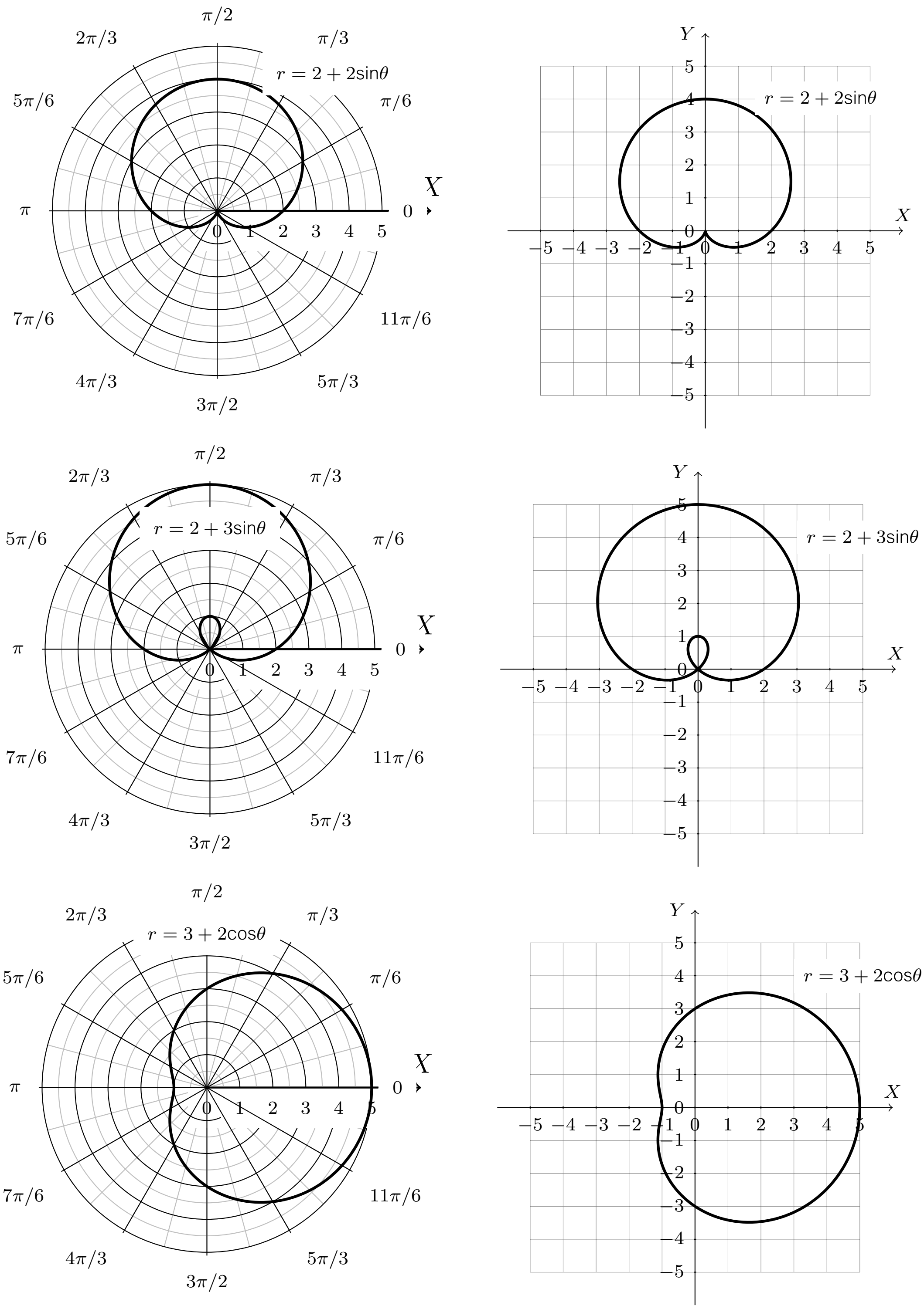
ถ้า $|a| = |b|$ แล้วกราฟนี้จะผ่านขั้ว และเรียกกราฟนี้ว่า **คาร์ดิออยด์** (cardioid)

ถ้า $|a| \neq |b|$ จะเรียกกราฟนี้ว่า **ลีมาซอง** (limacon)

ถ้า $|a| > |b|$ กราฟนี้จะไม่ผ่านขั้ว

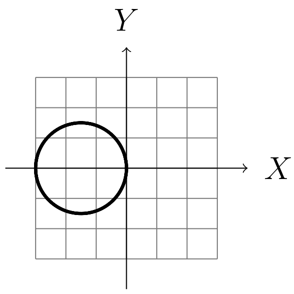
ถ้า $|a| < |b|$ กราฟนี้จะผ่านขั้ว และมีวงวน (loop) อยู่ภายใน

รูปที่ 4.12: ตัวอย่างกราฟคาร์ดิออยด์และลีมาซอง

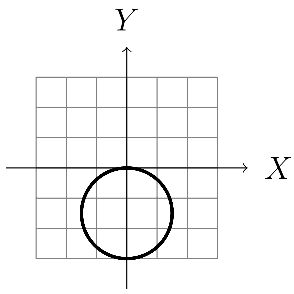


ตัวอย่าง 4.2.1 จงจับคู่ของสมการต่อไปนี้กับกราฟที่กำหนดให้

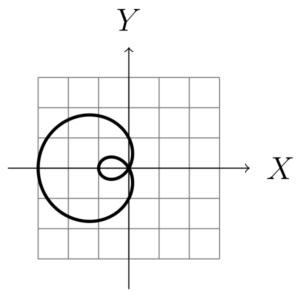
1. $r = -2$
2. $r = -3\cos\theta$
3. $r = 1 + \cos\theta$
4. $r = -3\cos 4\theta$
5. $r = 2\sin 5\theta$
6. $r = -3\sin\theta$
7. $r = 1 - 2\cos\theta$
8. $r = 3\cos 2\theta$
9. $\theta = \frac{3\pi}{4}$



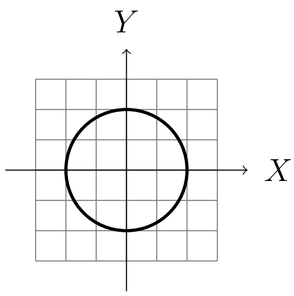
(ก)



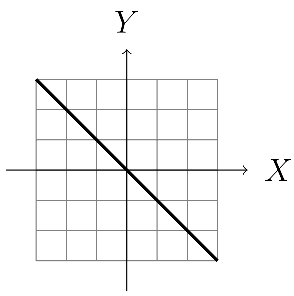
(ข)



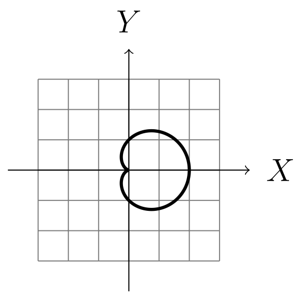
(ค)



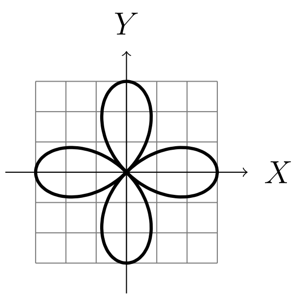
(ง)



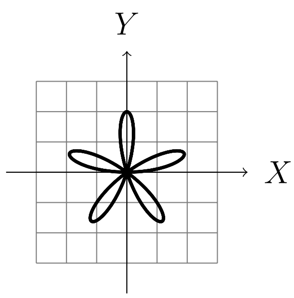
(จ)



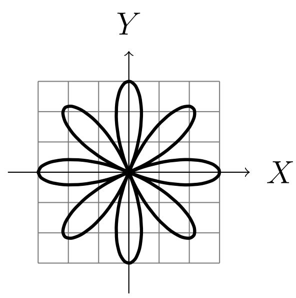
(ฉ)



(ช)



(ซ)



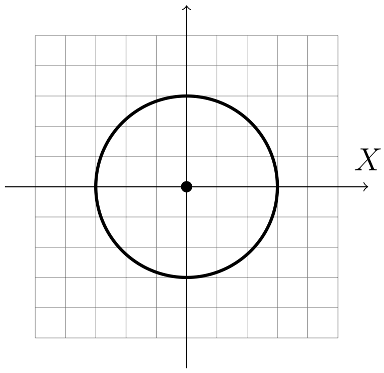
(ฌ)

แนวคำตอบ

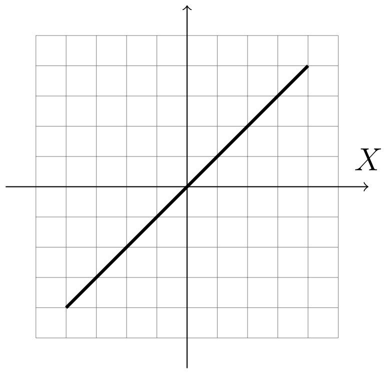
1. ง
2. ก
3. ฉ
4. ฌ
5. ซ
6. ข
7. ค
8. ช
9. จ

ตัวอย่างกราฟเชิงขั้ว

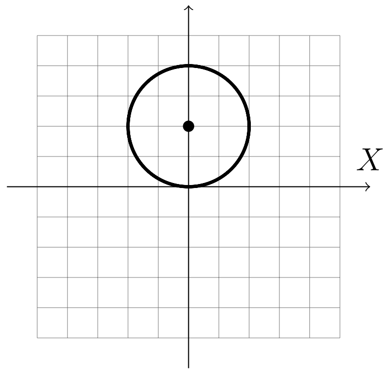
$r = 3$



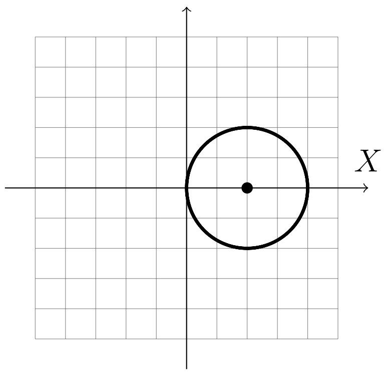
$\theta = \frac{\pi}{4}$



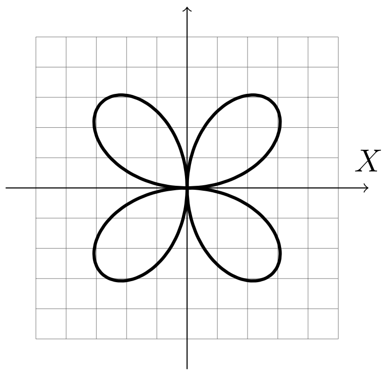
$r = 4\sin\theta$



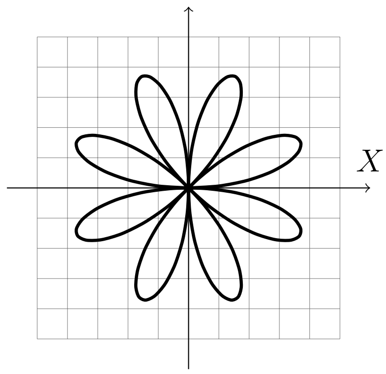
$r = 4\cos\theta$



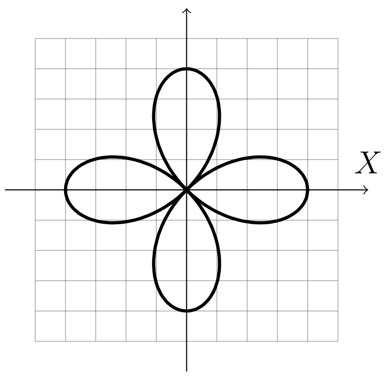
$r = 4\sin 2\theta$



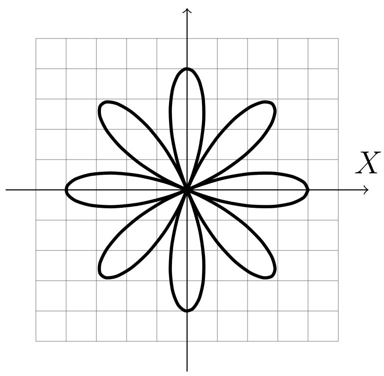
$r = 4\sin 4\theta$



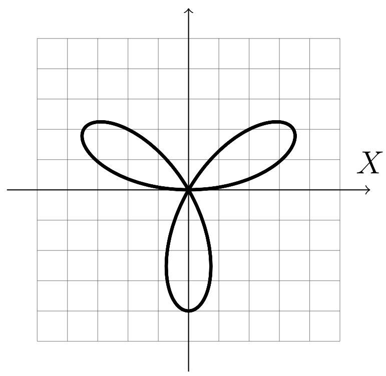
$r = 4\cos 2\theta$



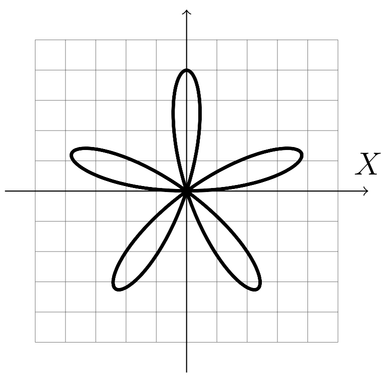
$r = 4\cos 4\theta$



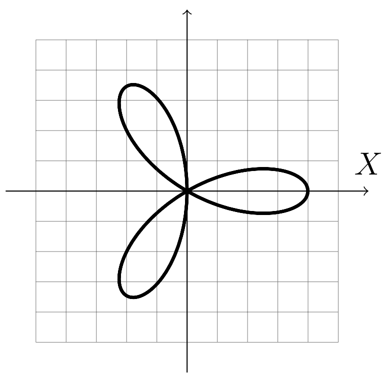
$r = 4\sin 3\theta$



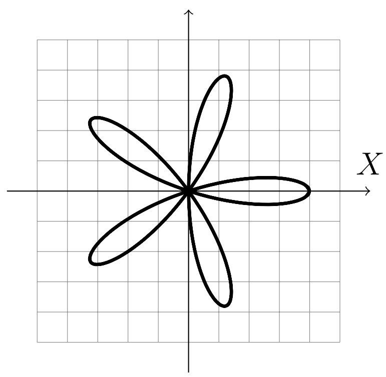
$r = 4\sin 5\theta$



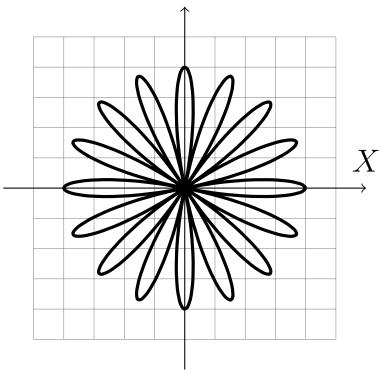
$r = 4\cos 3\theta$



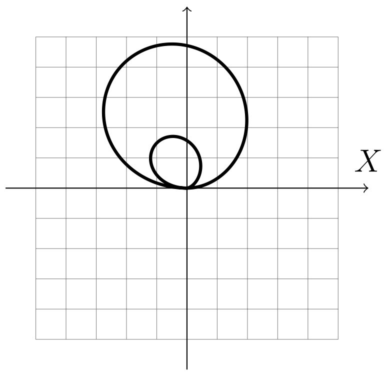
$r = 4\cos 5\theta$



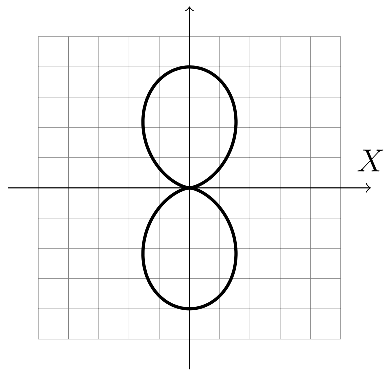
$r = 4\cos 8\theta$



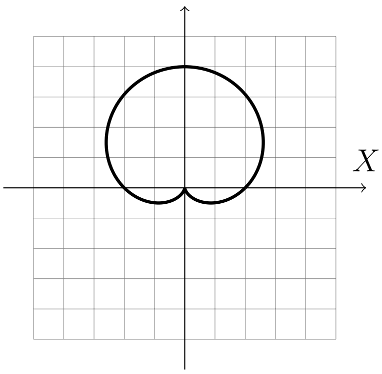
$r = \theta\sin\theta$



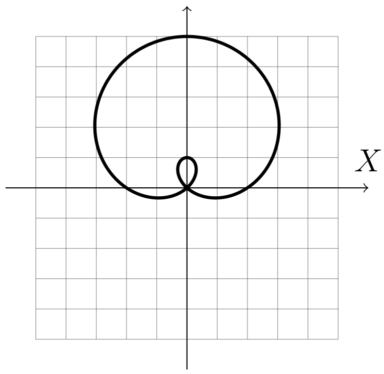
$r = 4\sin^2\theta$



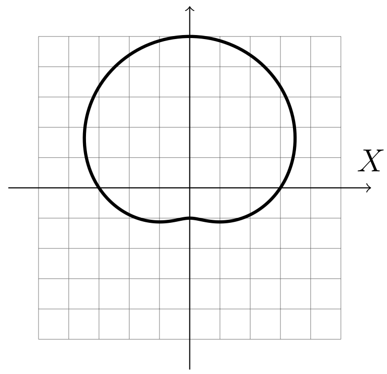
$r = 2 + 2\sin\theta$



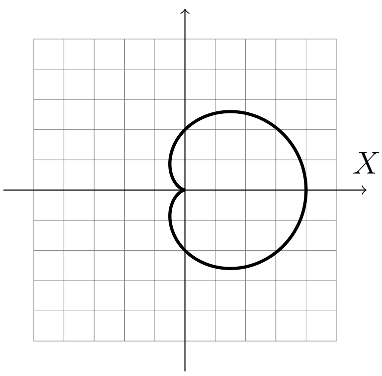
$r = 2 + 3\sin\theta$



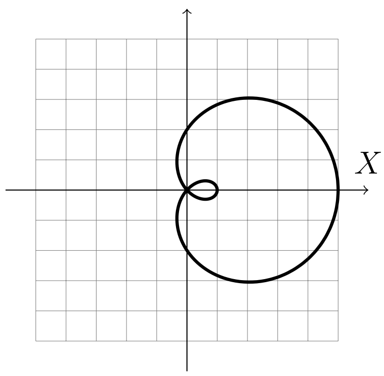
$r = 3 + 2\sin\theta$



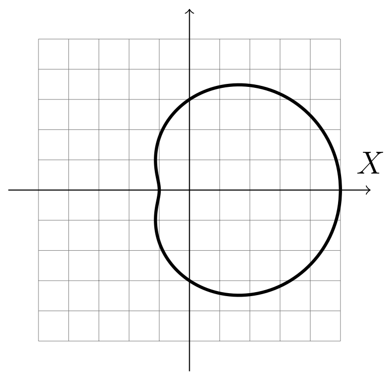
$r = 2 + 2\cos\theta$



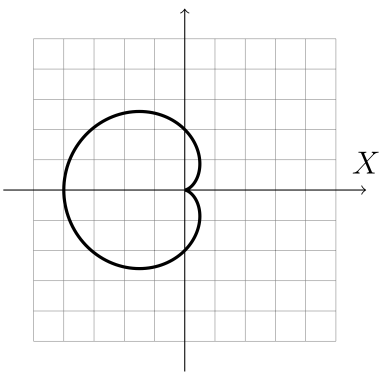
$r = 2 + 3\cos\theta$



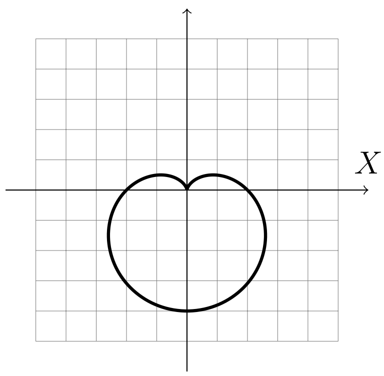
$r = 3 + 2\cos\theta$



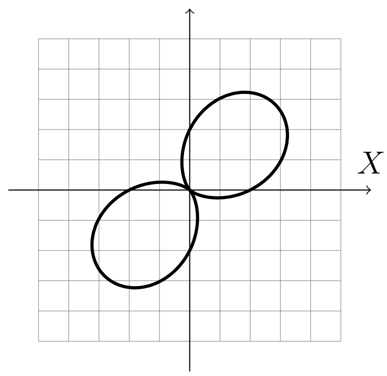
$r = 2 - 2\cos\theta$



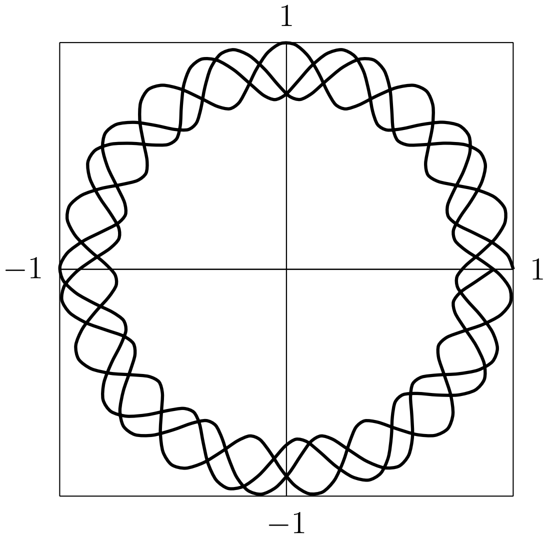
$r = 2 - 2\sin\theta$



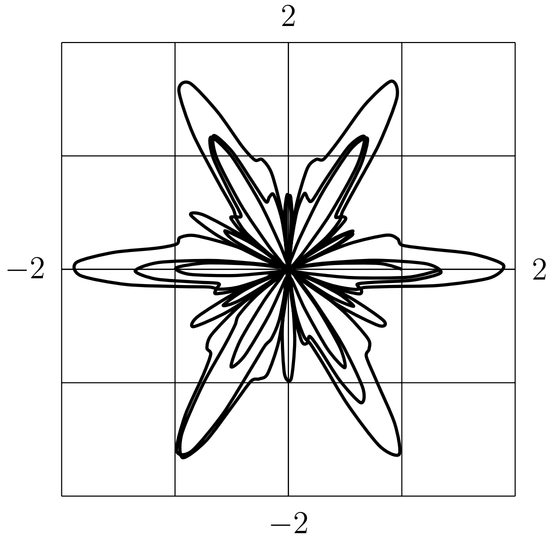
$r = 2 + 2\sin 2\theta$



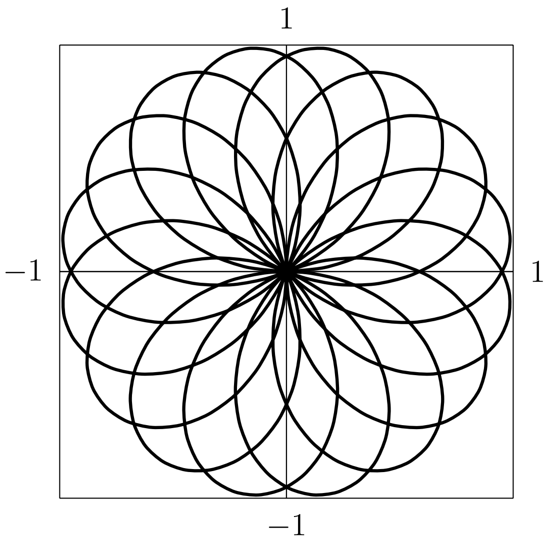
$r = \sin^2(2.4\theta) + \cos^4(2.4\theta)$



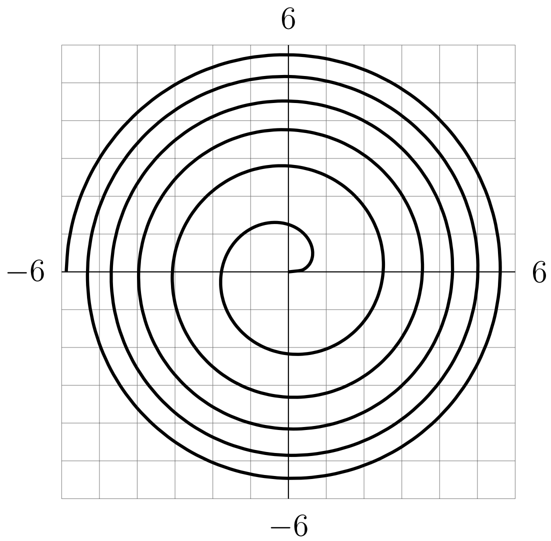
$r = \sin^2(1.2\theta) + \cos^3(6\theta)$



$r = \sin(\frac{8}{5}\theta)$



$r = \sqrt{\theta}$



แบบฝึกหัด 4.2

1. จงเขียนกราฟของสมการในระบบเชิงขั้วต่อไปนี้

1.1 $r = 2$	1.4 $r = 5\cos 2\theta$	1.7 $r = 5\sin 6\theta$
1.2 $2\theta = \pi$	1.5 $r = -3\sin 4\theta$	1.8 $r = 6\cos 7\theta$
1.3 $4\theta = 3\pi$	1.6 $r = 4\cos 3\theta$	1.9 $r = -4\cos 5\theta$

2. จงเขียนกราฟของสมการในระบบเชิงขั้วต่อไปนี้

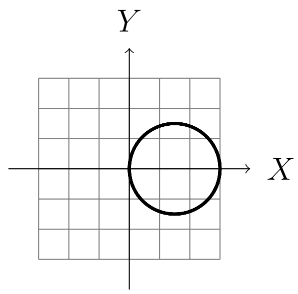
2.1 $r = 1 - 3\cos\theta$	2.3 $r = 1 + \cos\theta$	2.5 $r = 3 + 3\cos\theta$
2.2 $r = 3 + 4\cos\theta$	2.4 $r = 2 - 4\sin\theta$	2.6 $r = -4 - 4\sin\theta$

3. จงยกตัวอย่างสมการที่ให้กราฟกลีบกุหลาบ 5 กลีบ มาอย่างน้อย 3 สมการ

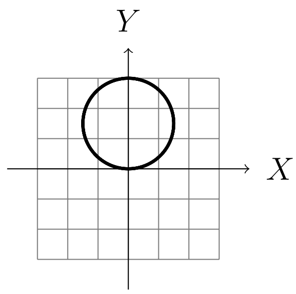
4. จงยกตัวอย่างสมการที่ให้กราฟกลีบกุหลาบ 8 กลีบ มาอย่างน้อย 3 สมการ

5. จงจับคู่สมการในระบบเชิงขั้วในแต่ละข้อต่อไปนี้กับกราฟที่กำหนดให้

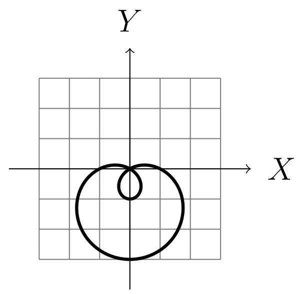
5.1 $r = 3\sin 3\theta$	5.3 $r = 2 + 2\cos\theta$	5.5 $r = 3\cos 4\theta$
5.2 $r = 3\cos\theta$	5.4 $r = 1 - 2\sin\theta$	5.6 $r = 3\sin\theta$



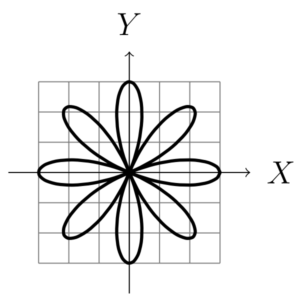
(ก)



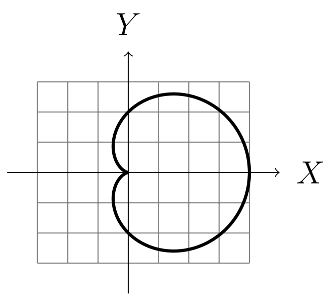
(ข)



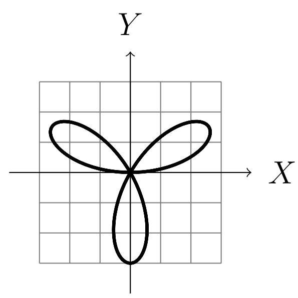
(ค)



(ง)



(จ)



(ฉ)

4.3 การหาพื้นที่ของอาณาบริเวณในระบบพิกัดเชิงขั้ว

ให้ R เป็นพื้นที่อาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยฟังก์ชัน

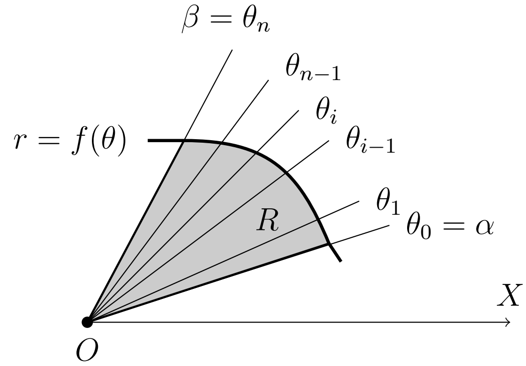
$$r = f(\theta) \text{ และเส้นตรง } \theta = \alpha \text{ และ } \theta = \beta$$

เมื่อ $r > 0$ แบ่ง $[\alpha, \beta]$ ออกเป็น n ช่วงย่อยด้วยจุด $\theta_0, \theta_1, \theta_2, ..., \theta_n$ โดยที่

$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < ... < \theta_n = \beta$$

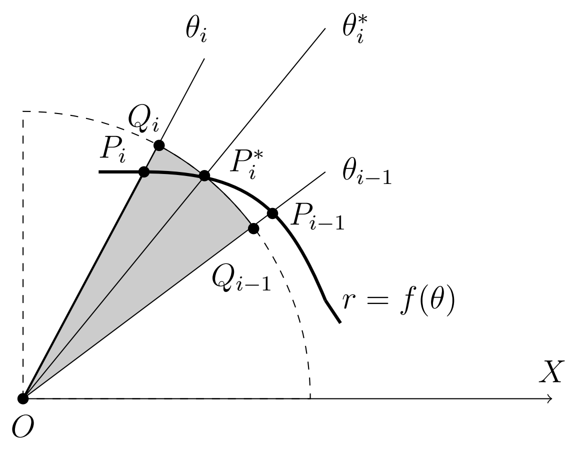
แสดงได้ดังรูปต่อไปนี้

รูปที่ 4.13: การแบ่งพื้นที่ย่อย ๆ ของ R ในระบบพิกัดเชิงขั้ว



สำหรับ $i = 1, 2, 3, ..., n$ ให้
R_i เป็นพื้นที่ของอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วย $\theta = \theta_{i-1}$ และ $\theta = \theta_i$ ด้วยเส้นโค้ง $r = f(\theta)$
P_i เป็นจุด $(f(\theta_i), \theta_i)$ และ P_{i-1} เป็นจุด $(f(\theta_{i-1}), \theta_{i-1})$
ให้ $\theta_i^* \in [\theta_{i-1}, \theta_i]$ และ P_i^* เป็นจุด $(f(\theta_i^*), \theta_i^*)$ แสดงดังรูป

รูปที่ 4.14: พื้นที่ของ R_i ที่ปิดล้อมด้วย $\theta = \theta_{i-1}$, $\theta = \theta_i$ และ $r = f(\theta)$



พิจารณาวงกลมรัศมี OP_i^* ตัดกับเส้นตรง $\theta = \theta_{i-1}$ ที่จุด Q_{i-1} และเส้นตรง $\theta = \theta_i$ ที่จุด Q_i และให้ $\Delta\theta_i = \theta_i - \theta_{i-1}$

$$R_i \approx \text{ พื้นที่เซกเตอร์ } OQ_iQ_{i-1} = \frac{1}{2}[f(\theta_i^*)]^2 \Delta\theta_i$$

ดังนั้น

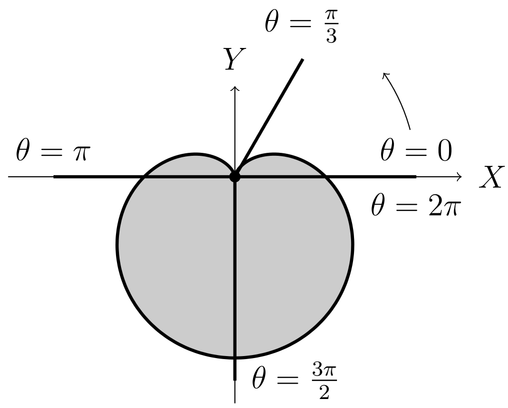
$$R = \sum_{i=1}^{n} R_i \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}[f(\theta_i^*)]^2 \Delta\theta_i$$

เมื่อแบ่ง n มาก ๆ และทำให้ $\Delta\theta_i$ มีค่าน้อย ๆ และ $r = f(\theta)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง โดยใช้ผลบวกของรีมันน์จะได้ว่า

$$\text{พื้นที่ } R = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}[f(\theta_i^*)]^2 \Delta\theta_i = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2 \, d\theta$$

ตัวอย่าง 4.3.1 จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่เปิดล้อมด้วย $r = 2 - 2\sin\theta$

แนวคำตอบ แสดงอาณาบริเวณได้ดังกราฟ

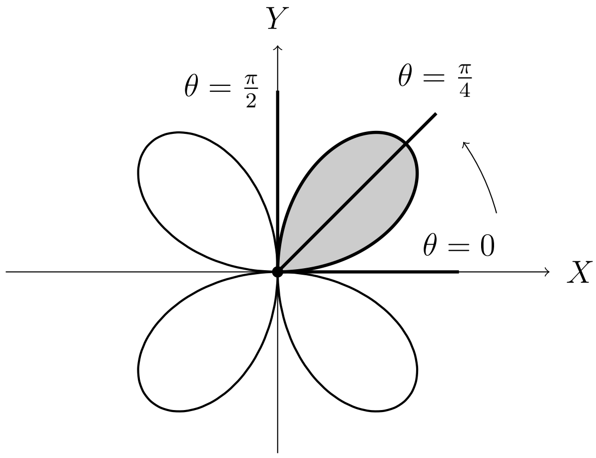


จากรูปจะได้ว่าพื้นที่ของอาณาบริเวณที่เปิดล้อมด้วย $r = 2 - 2\sin\theta$ คือ

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2 \, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (2 - 2\sin\theta)^2 \, d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 4 - 4\sin\theta + 4\sin^2\theta \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} 2 - 2\sin\theta + 2\sin^2\theta \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} 2 - 2\sin\theta + 2\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} 3 - 2\sin\theta - \cos 2\theta \, d\theta \\
&= \left[3\theta + 2\cos\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi} \\
&= [6\pi + 2 - 0] - [0 + 2 - 0] \\
&= 6\pi
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4.3.2 จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่เปิดล้อมด้วย $r = 4\sin 2\theta$ บนช่วง $[0, \frac{\pi}{2}]$

แนวคำตอบ แสดงอาณาบริเวณได้ดังกราฟ



จากรูปจะได้ว่าพื้นที่ของอาณาบริเวณที่เปิดล้อมด้วย $r = 4\sin 2\theta$ บนช่วง $[0, \frac{\pi}{2}]$ คือ

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} r^2 \, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4\sin 2\theta)^2 \, d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 16\sin^2 2\theta \, d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 8\left(\frac{1-\cos 4\theta}{2}\right) d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 - 4\cos 4\theta \, d\theta \\
&= [4\theta - \sin 4\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= [2\pi - 0] - [0 - 0] \\
&= 2\pi
\end{aligned}$$

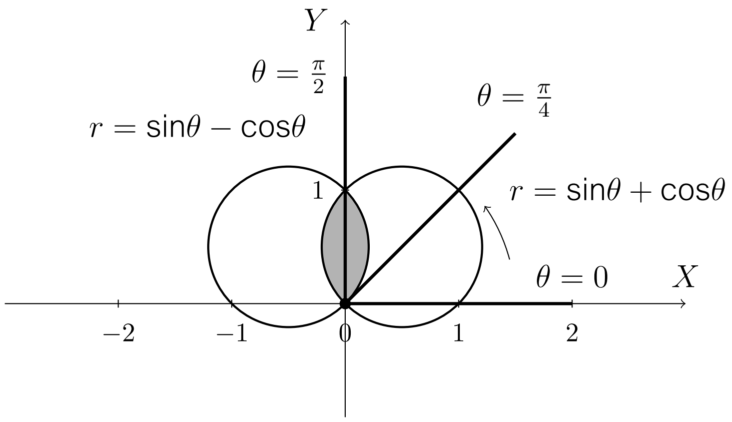
ตัวอย่าง 4.3.3 จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณภายในวงกลม

$$x^2+y^2-x-y=0 \quad \text{และ} \quad x^2+y^2+x-y=0$$

แนวคำตอบ เปลี่ยนสมการวงกลมให้อยู่ระบบพิกัดเชิงขั้ว ให้ $x = r\cos\theta$ และ $y = r\sin\theta$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} x^2+y^2-x-y&=0\\ r^2-r\cos\theta-r\sin\theta&=0\\ r&=\cos\theta+\sin\theta\\ x^2+y^2+x-y&=0\\ r^2+r\cos\theta-r\sin\theta&=0\\ r&=\sin\theta-\cos\theta \end{aligned}$$

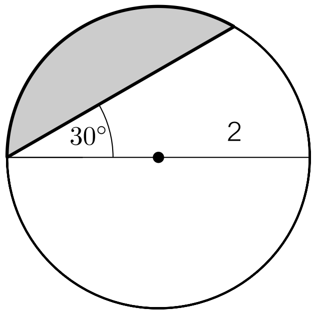
เขียนกราฟได้ดังนั้น



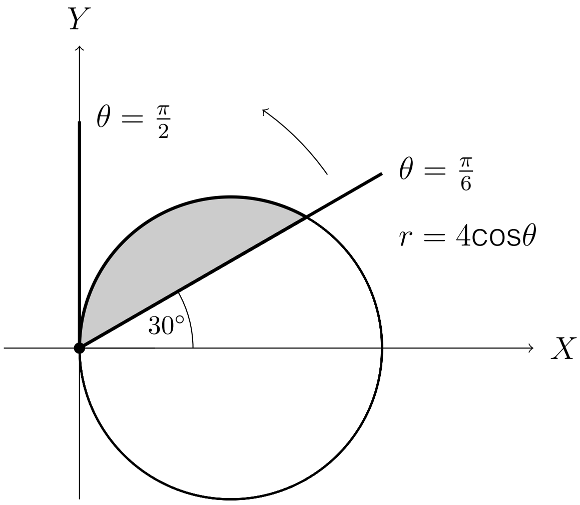
สมการวงกลม $r = \sin\theta + \cos\theta$ และ $r = \sin\theta - \cos\theta$ มีจุดตัดของกราฟคือ 0 และ $\frac{\pi}{2}$
จากกราฟพื้นที่ของอาณาบริเวณที่แรเงาคือ 2 เท่าของพื้นที่ส่วนที่ปิดล้อมเส้นโค้ง $r = \sin\theta - \cos\theta$ บนช่วง $[0, \frac{\pi}{2}]$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} A = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}r^2\,d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta-\cos\theta)^2\,d\theta\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta\,d\theta\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1-\sin 2\theta\,d\theta\\ &= \left[\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= \frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\\ &= \frac{\pi}{2}-1 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4.3.4 จงหาพื้นที่ (แรเงา) ของอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยคอร์ดและส่วนของวงกลมที่มีรัศมี 2 หน่วย ดังรูปต่อไปนี้ โดย (1) ใช้ปริพันธ์ในระบบพิกัดเชิงขั้ว (2) ใช้เรขาคณิต



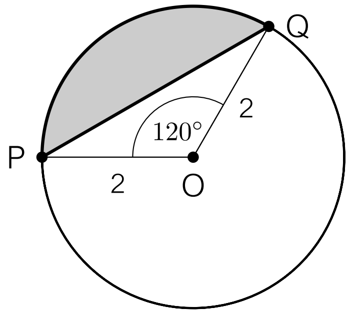
แนวคำตอบ วิธีที่ 1 ใช้ปริพันธ์ในระบบพิกัดเชิงขั้ว
กราฟรูปวงกลมรัศมี 2 หน่วย โดยใช้ฟังก์ชัน $r = 4\cos\theta$ จะได้ว่า พื้นที่ที่ต้องการจะเท่ากับพื้นที่ของอาณาบริเวณที่เปิดล้อมด้วย $r = 4\cos\theta$ บนช่วง $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$ ซึ่งแสดงได้ดังกราฟ



ดังนั้นพื้นที่แรเงาคือ

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} r^2 \, d\theta = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (4\cos\theta)^2 \, d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 16\cos^2\theta \, d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 8\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 4 + 4\cos 2\theta \, d\theta \\
&= [4\theta + 2\sin 2\theta]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= [2\pi - 0] - \left[\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}\right] \\
&= \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}
\end{aligned}
$$

<u>วิธีที่ 2 ใช้เรขาคณิต</u> พิจารณารูปต่อไปนี้



จากรูปจะได้ว่าพื้นที่แรงเงาคือ

$$\begin{aligned} A &= \text{พื้นที่ของรูปเซกเตอร์ POQ} - \text{พื้นที่สามเหลี่ยมของรูป POQ} \\ &= \frac{120^\circ}{360^\circ} \cdot \pi(2^2) - \frac{1}{2}(2)(2)\sin 120^\circ \\ &= \frac{1}{3} \cdot 4\pi - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} \end{aligned}$$

แบบฝึกหัด 4.3

1. จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง

1.1 $r = 1 + \cos\theta$

1.2 $r = 2\sin 2\theta$

1.3 $r = \sin\theta + \cos\theta$

1.4 $r = 2\cos 2\theta$

1.5 $r = 3 - 2\cos\theta$

1.6 $r = 2\sin 3\theta$

1.7 $r = 4\cos^2\theta$

1.8 $r = 4\cos 3\theta$

2. จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง

2.1 $r = 4 + 3\cos\theta$ บนช่วง $[0, \pi]$

2.2 $r = 8\cos 2\theta$ บนช่วง $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

2.3 $r = 12\sin 3\theta$ บนช่วง $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$

2.4 $r = 2 + 2\cos\theta$ บนช่วง $[0, 2\pi]$

2.5 $r = 3\sin\theta$ บนช่วง $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$

2.6 $r = 2 - 2\sin\theta$ บนช่วง $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

3. จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่เปิดล้อมด้วย $r = 6\sin\theta$ และ $r = 2 + 2\sin\theta$ บนช่วง $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$

4. จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณอยู่ภายในเส้นโค้ง $r = 4\sin\theta$ และ $r = 4\sqrt{3}\cos\theta$

5. จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณอยู่ภายในเส้นโค้ง $r = 4\sin 2\theta$ และ $r = 4\cos\theta$

6. จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่อยู่ภายในเส้นโค้ง $r = 2\sin 2\theta$ และภายนอกวงกลม $r = \sqrt{3}$

7. จงหาพื้นที่อยู่ภายในวงกลม $x^2 + y^2 = 2x$ และ $x^2 + y^2 = 2y$

8. จงหาพื้นที่อยู่ภายในวงกลม $x^2 + y^2 - 4y = 0$ เฉพาะส่วนที่ $x \geq \sqrt{3}$

9. จงหาพื้นที่อยู่ภายในวงกลม $x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0$ เฉพาะส่วนที่ $y \geq 4$

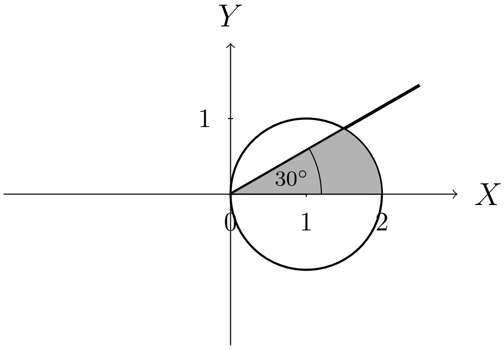
สรุป

ในบทนี้ศึกษาระบบพิกัดเชิงขั้ว และความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดฉาก (x, y) และพิกัดเชิงขั้ว (r, θ) โดยใช้ $x = r\cos\theta$ และ $y = r\sin\theta$ จากนั้นกล่าวถึงกราฟลักษณะต่าง ๆ ในระบบพิกัดเชิงขั้ว เช่น รูปวงกลม เส้นตรง กลีบกุหลาบ คาร์ดิออยด์ และลีมาซอง สุดท้ายกล่าวถึงการหาพื้นที่ของอาณาบริเวณในระบบพิกัดฉาก

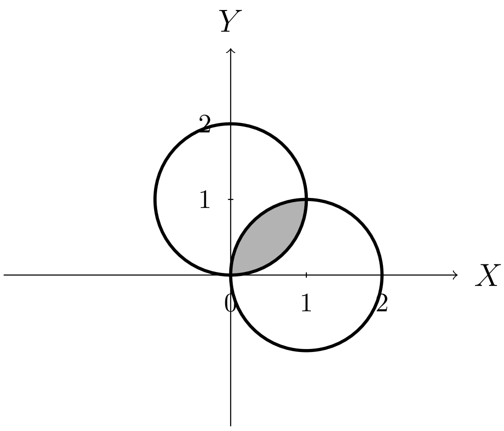
แบบฝึกหัดบทที่ 4

---

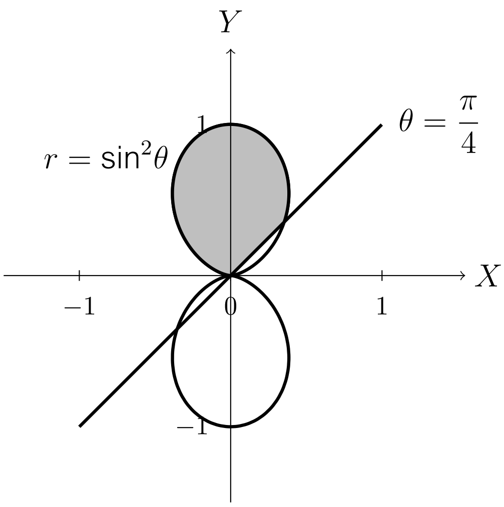
1. ให้ $a > 0$ ถ้า $(a - 1, a)$ เป็นจุดในระบบพิกัดฉาก เมื่อเปลี่ยนไปอยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้วคือจุด $(-5, \theta)$ จงหาค่าของ a
2. ให้ $a < 0$ ถ้า $(a + 1, a)$ เป็นจุดในระบบพิกัดฉาก เมื่อเปลี่ยนไปอยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้วคือจุด $(-5, \theta)$ จงหาค่าของ a
3. จงเขียนสมการ $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 1$ ให้อยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้ว
4. จงเขียนสมการ $\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta + 1} + \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta - 1} = 1$ ให้อยู่ในระบบพิกัดฉาก
5. จงเขียนสมการ $r = \sin\theta\sin 2\theta$ ให้อยู่ในระบบพิกัดฉาก
6. จงหาจุดตัดทั้งหมดของกราฟ $r = 1 + 2\cos\theta$ และ $r = 1 - 2\sin\theta$
7. จงหาจุดตัดทั้งหมดของกราฟ $r = \sin 3\theta$ และ $r = \sin 5\theta$
8. จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $r = \cos^2\theta$ บนช่วง $[0, \frac{\pi}{4}]$
9. จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $r = 2 - \sin\theta$ บนช่วง $[0, \frac{\pi}{3}]$
10. จงหาพื้นที่ที่แรเงาต่อไปนี้ โดยใช้การปริพันธ์ในรูปเชิงขั้ว



10.1



10.2



10.3

11. จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณภายในวงกลม $x^2 + y^2 - x - y = 0$ และ $x^2 + y^2 + x - y = 0$

12. จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณอยู่ภายในเส้นโค้ง $r = 2 + \sin\theta$ และ $r = 2 + \sqrt{3}\cos\theta$

13. จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณอยู่ภายในเส้นโค้ง $r = 2\sin 3\theta$ และ $r = 2\sin\theta$

บทที่ 5

ฟังก์ชันหลายตัวแปร

ปัญหาที่มักพบโดยทั่วไปมักเกี่ยวข้องกับหลายตัวแปรเช่น พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า $A = wl$ เมื่อ w คือความกว้าง และ l คือความยาว กล่าวได้ว่า A ขึ้นกับตัวแปรสองตัวคือ w และ l เขียนแทนด้วย

$$A(w, l) = wl$$

ทำนองเดียวกันปริมาตรของปริซึมฐานสี่เหลี่ยมผืนผ้า $V = wlh$ เมื่อ w คือความกว้าง l คือความยาว และ h คือความสูง นั่นคือ V ขึ้นกับตัวแปรสามตัวคือ w, l และ h เขียนแทนด้วย

$$V(w, l, h) = wlh$$

ในบทนี้เราจะกล่าวถึงฟังก์ชันลักษณะดังกล่าวและศึกษาลิมิตและอนุพันธ์ของฟังก์ชันเหล่านี้

5.1 ฟังก์ชันค่าจริงสองตัวแปร

บทนิยาม 5.1.1 ให้ $f : D \to \mathbb{R}$ เมื่อ $D \subset \mathbb{R}^n$ เมื่อ $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}$ (n พจน์)
เรียก f ว่า **ฟังก์ชันค่าจริงของ n ตัวแปร** (real value function of n variables)
โดยเรียก D ว่า **โดเมน** (domain) ของฟังก์ชัน

สำหรับฟังก์ชันที่ไม่ระบุโดเมนให้ถือว่าเป็นโดเมนใหญ่สุดที่เป็นสับเซตของ $\mathbb{R}^n$ และในหัวข้อนี้เราจะศึกษาในกรณี $n = 2$ โดยเรียกฟังก์ชัน f ว่า**ฟังก์ชันค่าจริงสองตัวแปร** (real value function of two variables) เขียนแทนด้วย $z = f(x, y)$

ตัวอย่าง 5.1.2 กำหนดให้ $f(x, y) = \ell\text{n}(1 - x^2 - y^2)$

1. จงหา k ซึ่งทำให้ $f(0, k) + f(k, 0) = f(0, 0)$

   แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \ell\text{n}(1 - k^2) + \ell\text{n}(1 - k^2) &= \ell\text{n}1 \\ 2\ell\text{n}(1 - k^2) &= 0 \\ 1 - k^2 &= 1 \end{aligned}$$

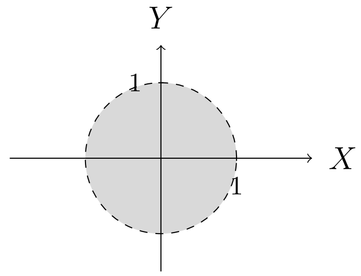
   ดังนั้น $k = 0$

2. จงหาโดเมนและเขียนกราฟแสดงโดเมน

   แนวคำตอบ จากสมบัติฟังก์ชันลอการิทึ่มจะได้ว่า $1 - x^2 - y^2 > 0$ ดังนั้นโดเมนของ f คือ

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$$

   และแสดงกราฟได้ดังรูป



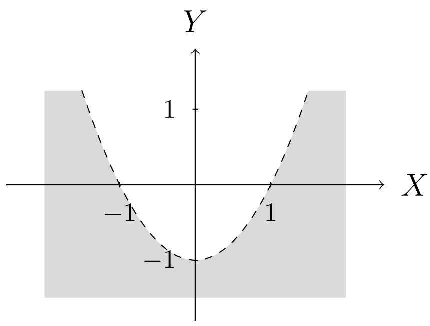
ตัวอย่าง 5.1.3 จงหาโดเมนและเขียนกราฟแสดงโดเมนของฟังก์ชัน

1. $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - y - 1}}$

   แนวคำตอบ จะได้ว่า $x^2 - y - 1 > 0$ ดังนั้นโดเมนของ f คือ

$$D = \{(x, y) : y < x^2 - 1\}$$

   และแสดงกราฟได้ดังรูป

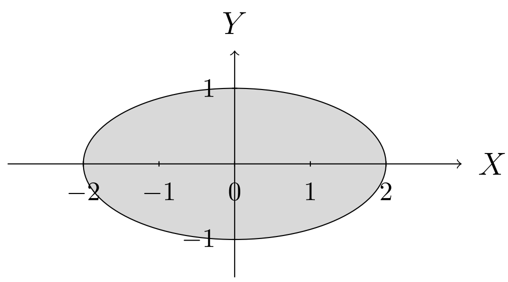


2. $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$

   แนวคำตอบ จะได้ว่า $4 - x^2 - 4y^2 \geq 0$ ดังนั้นโดเมนของ f คือ

$$D = \{(x, y) : x^2 + 4y^2 \leq 4\}$$

   และแสดงกราฟได้ดังรูป



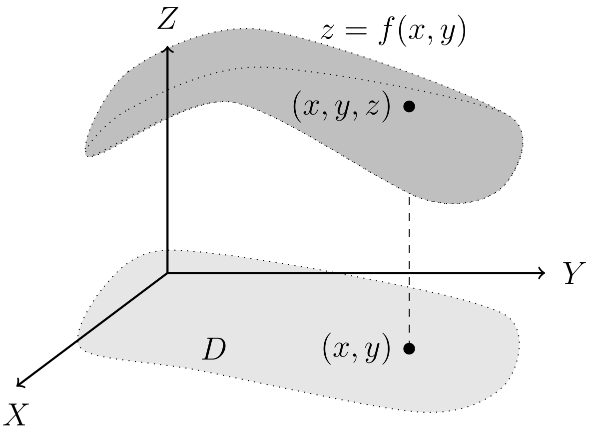
กราฟของฟังก์ชันสองตัวแปร

สำหรับ $f : D \to \mathbb{R}$ เมื่อ $D \subset \mathbb{R}^2$ กราฟของ f คือ

$$S = \{(x, y, z) : z = f(x, y) \text{ เมื่อ } (x, y) \in D\}$$

เมื่อลงจุด (x, y, z) สำหรับทุกจุด $(x, y) \in D$ จะได้กราฟของในลักษณะพื้นผิว หรืออาจเรียก S ว่า**พื้นผิว** (surface) ของ $z = f(x, y)$

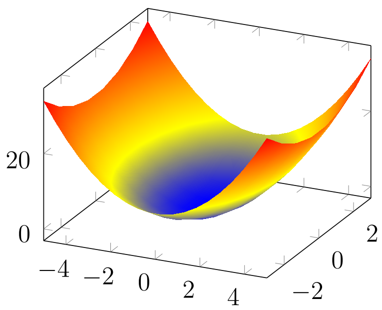
รูปที่ 5.1: แสดงความสัมพันธ์พื้นผิวกับโดเมน



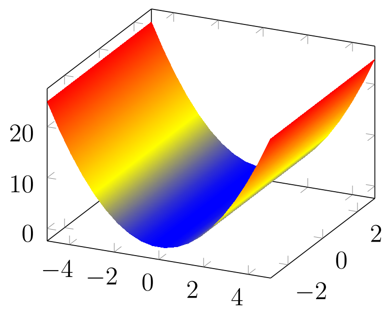
ต่อไปเป็นกราฟตัวอย่างของพื้นผิว

รูปที่ 5.2: ตัวอย่างกราฟพื้นผิว

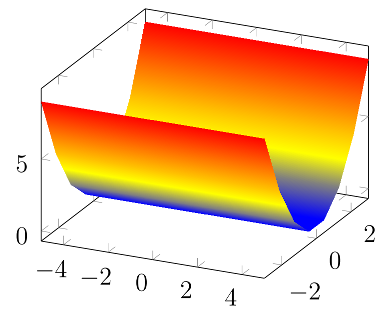
1. $z = x^2 + y^2$



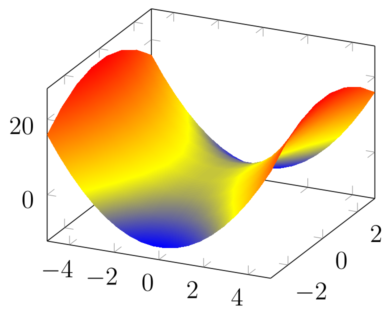
3. $z = x^2$



2. $z = y^2$



4. $z = x^2 - y^2$



แบบฝึกหัด 5.1

1. จงหาค่าของฟังก์ชันที่จุดต่อไปนี้

   1.1 $f(x,y) = x + \sqrt{y}$ ที่จุด $(0,1)$

   1.2 $f(x,y) = x + y + xy$ ที่จุด $(1,2)$

   1.3 $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ที่จุด $(1,-2,2)$

   1.4 $f(x,y,z) = x^2y^2 - x^4 + 4zx^2$ ที่จุด $(a+b, a-b, ab)$

2. กำหนดให้ $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ จงหา a ที่ทำให้ $f(0,a) + f(a,0) = f(3,4)$

3. จงหาโดเมนของ f พร้อมเขียนกราฟแสดงโดเมน

   3.1 $f(x,y) = \ell\text{n}(1 - x^2 + y^2)$

   3.2 $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}$

   3.3 $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}{y}$

   3.4 $f(x,y) = \dfrac{1}{y - x^2}$

   3.5 $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}}$

   3.6 $f(x,y) = \sqrt{1-x} + \ell\text{n}y$

4. จงหาโดเมนพร้อมร่างกราฟของฟังก์ชันต่อไปนี้

   4.1 $f(x,y) = x - 2y$

   4.2 $f(x,y) = 3 - x^2$

   4.3 $f(x,y) = 1 + y^2$

   4.4 $f(x,y) = 1 + x^2 + y^2$

   4.5 $f(x,y) = 4x^2 + 9y^2$

   4.6 $f(x,y) = 1 - x^2 - 9y^2$

   4.7 $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

   4.8 $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 + y^2}$

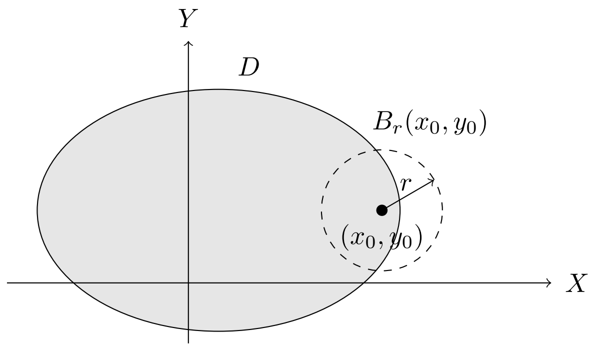
5.2 ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันสองตัวแปร

บทนิยาม 5.2.1 ให้ $D \subset \mathbb{R}^2$ เราจะกล่าวว่า $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ เป็น **จุดลิมิต** (limit point) ใน D ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ $r > 0$

$$(B_r(x_0, y_0) - \{(x_0, y_0)\}) \cap D \neq \varnothing$$

เมื่อ $B_r(x_0, y_0) = \{(x, y) \,:\, \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r\}$ เรียกว่า **แผ่นกลมเปิด** (open ball) ที่มีศูนย์กลางที่ (x_0, y_0) รัศมี r แสดงดังรูป

รูปที่ 5.3: แสดงจุดลิมิต (x_0, y_0) ของ D



บทนิยาม 5.2.2 ให้ $f : D \to \mathbb{R}$ เมื่อ $D \subset \mathbb{R}^2$ และให้ (x_0, y_0) เป็นจุดลิมิตของ D เราจะกล่าวว่า $f(x, y)$ มีลิมิตเป็น L เมื่อ (x, y) เข้าใกล้ (x_0, y_0) เขียนแทนด้วย

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$$

ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ จำนวนจริง $\varepsilon > 0$ มีจำนวนจริงบวก $\delta > 0$ ที่ทำให้

$$|f(x, y) - L| < \varepsilon \qquad \text{ทุก ๆ } (x, y) \in D \text{ ซึ่ง } 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

ตัวอย่าง 5.2.3 จงหาแสดงว่า $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$

บทพิสูจน์. ให้ $\varepsilon > 0$ เลือก $\delta = \varepsilon$ ให้ $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ซึ่ง $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} - 0 \right| &= \frac{x^2 |y|}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 \sqrt{y^2}}{x^2 + y^2} \\
&\leq \frac{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} \\
&= \sqrt{x^2 + y^2} < \delta = \varepsilon
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$ □

ทฤษฎีบท 5.2.4 ให้ (x_0, y_0) เป็นจุดลิมิตของ $\mathbb{R}^2$ และให้ c เป็นจำนวนจริง แล้ว

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} c = c$
2. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x = x_0$
3. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} y = y_0$

บทพิสูจน์. 1. ให้ $\varepsilon > 0$ ไม่ว่าจะเลือก δ เป็นจำนวนจริงบวกใดก็ตาม จะได้ว่า

$$|c - c| = 0 < \varepsilon$$

ดังนั้น $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} c = c$

2. ให้ $\varepsilon > 0$ เลือก $\delta = \varepsilon$ ให้ $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ซึ่ง $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |x - x_0| &= \sqrt{(x - x_0)^2} \\ &\leq \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta = \varepsilon \end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x = x_0$

3. ในทำนองเดียวกับข้อ 2. □

การหาลิมิตโดยใช้บทนิยามอาจทำได้โดยยาก เราจึงมักจะใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตซึ่งคล้ายคลึงกับลิมิตของฟังกชันตัวแปรเดียวดังทฤษฎีบทต่อไปนี้ แต่ข้อละการพิสูจน์ไว้หรือผู้อ่านอาจพิสูจน์ได้ด้วยตนเอง

ทฤษฎีบท 5.2.5 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันจาก D ไป $\mathbb{R}$ และ (x_0, y_0) เป็นจุดลิมิตของ D และให้ L, M เป็นจำนวนจริง ถ้า $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$ และ $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x, y) = M$ แล้ว

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x, y) + g(x, y)] = L + M$
2. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)g(x, y) = LM$
3. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{f(x, y)}{g(x, y)} = \dfrac{L}{M}$ เมื่อ $M \neq 0$
4. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} |f(x, y)| = |L|$
5. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \sqrt[n]{f(x, y)} = \sqrt[n]{L}$ เมื่อ $n \in \mathbb{N}$ และ $\sqrt[n]{L}$ เป็นจำนวนจริง

ตัวอย่าง 5.2.6 จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)}(x^2y - y - 4x + 1) = 1^2(-1) - (-1) - 4(1) + 1 = -3$

2. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-5)} x\sqrt{x^2 - y} = 2\sqrt{2^2 - (-5)} = 2(3) = 6$

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(-2,-1)} |x + y - 1| = |-2 - 1 - 1| = 4$

4. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{x + y}{x - y} = \dfrac{1 + 0}{1 - 0} = 1$

สำหรับ $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}$ อยู่ในรูป ซึ่งเรียกว่ารูปแบบไม่กำหนด $I.F.\frac{0}{0}$ เราอาจจะใช้วิธีเช่นเดียวกับลิมิตของฟังก์ชันตัวแปรเดียว

ตัวอย่าง 5.2.7 จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 - y^2}$

แนวคำตอบ จะเห็นว่าลิมิตอยู่ในรูปแบบ $I.F.\frac{0}{0}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^3 - y^3}{x^2 - y^2} &= \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x - y)(x^2 + xy + y^2)}{(x - y)(x + y)} \\ &= \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2 + xy + y^2}{x + y} = \frac{1 + 1 + 1}{1 + 1} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

2. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 + 3xy + 2y^2}$

แนวคำตอบ จะเห็นว่าลิมิตอยู่ในรูปแบบ $I.F.\frac{0}{0}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + 3xy + 2y^2} &= \lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)}{(x + y)(x + 2y)} \\ &= \lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{(x^2 + y^2)(x - y)(x + y)}{(x + y)(x + 2y)} \\ &= \lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{(x^2 + y^2)(x - y)}{x + 2y} \\ &= \frac{2(2)}{1 + 2(-1)} = -4\end{aligned}$$

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,3)} \dfrac{x^2y + y^2 - 3x^2 - 3y}{xy - 3x - y + 3}$

แนวคำตอบ จะเห็นว่าลิมิตอยู่ในรูปแบบ $I.F.\frac{0}{0}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(-1,3)} \frac{x^2y + y^2 - 3x^2 - 3y}{xy - 3x - y + 3} &= \lim_{(x,y)\to(-1,3)} \frac{y(x^2 + y) - 3(x^2 + y)}{y(x - 1) - 3(x - 1)} \\ &= \lim_{(x,y)\to(-1,3)} \frac{(x^2 + y)(y - 3)}{(x - 1)(y - 3)} \\ &= \lim_{(x,y)\to(-1,3)} \frac{x^2 + y}{x - 1} = \frac{1 + 3}{-2} = -2\end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 5.2.8 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันจาก D ไป $\mathbb{R}$ และ (x_0, y_0) เป็นจุดลิมิตของ D ถ้า

1. มีจำนวนจริงบวก M และ δ_0 ซึ่ง
$$|f(x,y)| < M \quad \text{ทุก ๆ } (x,y) \in D \text{ ซึ่ง } 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta_0$$
2. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = 0$

จะได้ว่า
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)g(x,y) = 0$$

บทพิสูจน์. สมมติข้อ 1 และ 2 เป็นจริง ให้ $\varepsilon > 0$ โดยข้อ 2 จะได้ว่ามี $\delta_1 > 0$ ที่ทำให้
$$|g(x,y)| = |g(x,y) - 0| < \frac{\varepsilon}{M+1} \qquad \text{ทุก ๆ } (x,y) \in D \text{ ซึ่ง } 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta_1$$
เลือก δ เป็นค่าต่ำสุดของ $\{\delta_0, \delta_1\}$ ให้ $(x,y) \in D$ ซึ่ง $0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$
โดยข้อ 1 และสมมติฐาน จะได้ว่า
$$\begin{aligned} |f(x,y)g(x,y) - 0| &= |f(x,y)||g(x,y)| \\ &< M \cdot \frac{\varepsilon}{M+1} = \frac{M}{M+1} \cdot \varepsilon \\ &< (1)\varepsilon = \varepsilon \end{aligned}$$
ดังนั้น $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)g(x,y) = 0$ □

ตัวอย่าง 5.2.9 จงใช้โดยทฤษฎีบท 5.2.8 แสดงว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2y^3}{x^2+y^2} = 0$

แนวคำตอบ ให้ $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ และ $g(x,y) = 2y^3$ สำหรับ $(x,y) \neq (0,0)$ ใด ๆ จะได้ว่า
$$\begin{aligned} 0 &\le y^2 \\ 0 + x^2 &\le x^2 + y^2 \\ |f(x,y)| = \frac{x^2}{x^2+y^2} &\le 1 \end{aligned}$$
และ $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} 2y^3 = 0$ โดยทฤษฎีบท 5.2.8 สรุปได้ว่า
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y^3}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)g(x,y) = 0$$

ตัวอย่าง 5.2.10 จงหาลิมิตของ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^4}{x^4+y^4}$

แนวคำตอบ ให้ $f(x,y) = \dfrac{y^4}{x^4+y^4}$ และ $g(x,y) = x^2$ สำหรับ $(x,y) \neq (0,0)$ ใด ๆ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 0 &\leq x^4 \\ 0 + y^4 &\leq x^4 + y^4 \\ |f(x,y)| = \frac{y^4}{x^4+y^4} &\leq 1 \end{aligned}$$

และ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x^2 = 0$ โดยทฤษฎีบท 5.2.8 สรุปได้ว่า

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^4}{x^4+y^4} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)g(x,y) = 0$$

ตัวอย่าง 5.2.11 จงหาลิมิตต่อไปนี้ (ถ้ามี) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

แนวคำตอบ ให้ $f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ และ $g(x,y) = x$ สำหรับ $(x,y) \neq (0,0)$ ใด ๆ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 0 &\leq y^2 \\ 0 + x^2 &\leq x^2 + y^2 \\ \frac{x^2}{x^2+y^2} &\leq 1 \\ |f(x,y)| = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2}} &\leq 1 \end{aligned}$$

และ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x = 0$ โดยทฤษฎีบท 5.2.8 สรุปได้ว่า

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)g(x,y) = 0$$

ทฤษฎีบท 5.2.12 (ทฤษฎีบทการบีบ (The Squeez Theorem))
ให้ $f, g, h : D \to \mathbb{R}^2$ และ $D \subseteq \mathbb{R}^2$ สมมติว่า (x_0, y_0) เป็นจุดลิมิตของ D และ $r > 0$ โดยที่

$$f(x,y) \le g(x,y) \le h(x,y) \quad \text{ทุก ๆ } (x,y) \in D \text{ ซึ่ง } 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < r$$

ถ้า $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y)$ จะได้ว่า

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = L$$

บทพิสูจน์. ให้ $\varepsilon > 0$ จะได้ว่ามี $\delta_1, \delta_2 > 0$ ที่ทำให้

$$\begin{aligned} |f(x,y) - L| &< \varepsilon \qquad \text{ทุก ๆ } (x,y) \in D \text{ ซึ่ง } 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta_1 \\ |h(x,y) - L| &< \varepsilon \qquad \text{ทุก ๆ } (x,y) \in D \text{ ซึ่ง } 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta_2 \end{aligned}$$

เลือก δ เป็นค่าต่ำสุดของ $\{r, \delta_1, \delta_2\}$ สำหรับ $(x,y) \in D$ ซึ่ง $0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$ จะได้ว่า

$$L - \varepsilon < f(x,y) \le g(x,y) \le h(x,y) < L + \varepsilon$$

ฉะนั้น $|g(x,y) - L| < \varepsilon$ ดังนั้น $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = L$ □

ตัวอย่าง 5.2.13 ให้ $f : D \to \mathbb{R}^2$ และ $D \subseteq \mathbb{R}^2$ สมมติว่า (x_0, y_0) เป็นจุดลิมิตของ D และ

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} |f(x,y)| = 0$$

จงพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 0$

บทพิสูจน์. สมมติว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} |f(x,y)| = 0$ ให้ $\varepsilon > 0$ จะได้ว่ามี $\delta > 0$ ที่ทำให้

$$|f(x,y) - 0| = |f(x,y)| = ||f(x,y)|| = ||f(x,y)| - 0| < \varepsilon$$

ทุก ๆ $(x,y) \in D$ ซึ่ง $0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$ ดังนั้น $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 0$ □

ตัวอย่าง 5.2.14 จงแสดงว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$

แนวคำตอบ เนื่องจาก $x^2 + y^2 \ge x^2$ จะได้ว่า

$$0 \le \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| = |y| \cdot \frac{x^2}{x^2 + y^2} \le |y| \cdot 1 = |y| \qquad \text{สำหรับ } (x,y) \ne (0,0)$$

จะเห็นว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0$ โดยทฤษฎีบทการบีบจะได้ว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left| \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| = 0$
สรุปได้ว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$

ลิมิตตามเส้นโค้ง

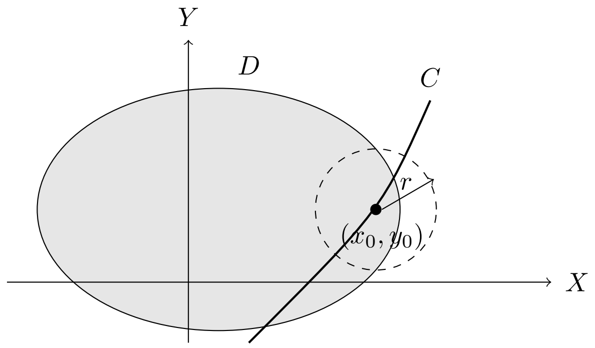
บทนิยาม 5.2.15 ให้ $f : D \to \mathbb{R}$ เมื่อ $D \subset \mathbb{R}^2$ และให้ (x_0, y_0) เป็นจุดลิมิตของ D ให้ C เป็นเส้นโค้งใน $\mathbb{R}^2$ ที่ผ่านจุด (x_0, y_0) เราจะกล่าวว่า $f(x, y)$ มีลิมิตเป็น L เมื่อ (x, y) เข้าใกล้ (x_0, y_0) ตามเส้นโค้ง C เขียนแทนด้วย

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ \text{บน } C}} f(x, y) = L$$

ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ จำนวนจริง $\varepsilon > 0$ มีจำนวนจริงบวก $\delta > 0$ ที่ทำให้

$$|f(x, y) - L| < \varepsilon \qquad \text{ทุก ๆ } (x, y) \in C \cap D \text{ ซึ่ง } 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

รูปที่ 5.4: เส้นโค้ง C ใน $\mathbb{R}^2$ ที่ผ่านจุดลิมิต (x_0, y_0) ของ D



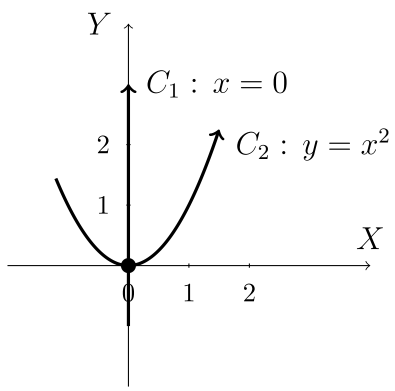
จากบทนิยามดังกล่าวทำให้ได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะใช้เพื่อแสดงว่าลิมิตไม่มีค่าโดยอาศัยการหาลิมิตตามเส้นโค้ง ซึ่งบทพิสูจน์จะขอละไว้ในวิชานี้

ทฤษฎีบท 5.2.16 ให้ $f : D \to \mathbb{R}$ และ (x_0, y_0) เป็นจุดลิมิตของ D จะได้ว่า
$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$ ก็ต่อเมื่อ

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ \text{บน } C}} f(x, y) = L \text{ ทุก ๆ เส้นโค้ง } C \text{ ใน } \mathbb{R}^2 \text{ ที่ผ่านจุด } (x_0, y_0)$$

ตัวอย่าง 5.2.17 จงแสดงว่า $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4 + y^2}$ ไม่มีค่า

แนวคำตอบ พิจารณาเส้นโค้งที่ผ่านจุด $(0, 0)$ คือ $C_1 : x = 0$ และ $C_2 : y = x^2$



บน $C_1 : x = 0$ จะได้

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{บน}C_1}} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{บน}C_1}} \frac{0y}{0+y^2} = 0$$

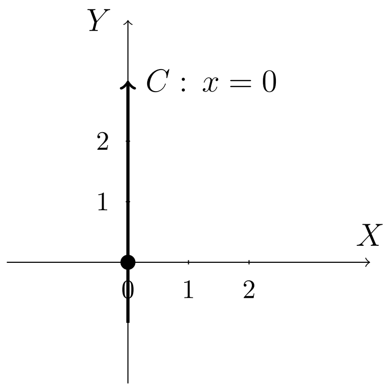
บน $C_2 : y = x^2$ จะได้

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{บน}C_2}} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2(x^2)}{x^4+(x^2)^2} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{บน}C_2}} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

เนื่องจากลิมิตบน C_1 และ C_2 มีค่าไม่เท่ากัน ดังนั้น $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ ไม่มีค่า

ตัวอย่าง 5.2.18 จงแสดงว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^3}{x^2+y^4}$ ไม่มีค่า

แนวคำตอบ พิจารณาเส้นโค้งที่ผ่านจุด $(0,0)$ คือ $C : x = 0$



จะได้ว่า

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{บน}C}} \frac{x^2+y^3}{x^2+y^4} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{บน}C}} \frac{0+y^3}{0+y^4} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{บน}C}} \frac{1}{y} = \infty \text{ หรือ } -\infty$$

ฉะนั้นลิมิตบน C หาค่าไม่ได้ สรุปได้ว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^3}{x^2+y^4}$ ไม่มีค่า

ความต่อเนื่อง

บทนิยาม 5.2.19 ให้ $f : D \to \mathbb{R}$ และ $(x_0, y_0) \in D$ จะกล่าวว่า f **ต่อเนื่อง**ที่จุด (x_0, y_0) ก็ต่อเมื่อ

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ มีค่า
2. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$

และกล่าวว่า f ต่อเนื่องบนเซต $S \subset D$ ก็ต่อเมื่อ f ต่อเนื่องทุกจุดในเซต S

ตัวอย่าง 5.2.20 กำหนดให้ $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{เมื่อ } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{เมื่อ } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
แล้ว f ต่อเนื่องที่จุด $(0,0)$ หรือไม่

แนวคำตอบ ให้ $h(x,y) = \dfrac{y^2}{x^2+y^2}$ และ $g(x,y) = x$ สำหรับ $(x,y) \neq (0,0)$ ใด ๆ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 0 &\le x^2 \\ 0 + y^2 &\le y^2 + x^2 \\ |h(x,y)| = \frac{y^2}{x^2+y^2} &\le 1 \end{aligned}$$

และ $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x = 0$ ฉะนั้น

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y)g(x,y) = 0$$

นั่นคือ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ สรุปได้ว่า f ต่อเนื่องที่จุด $(0,0)$

ตัวอย่าง 5.2.21 กำหนดให้ $f(x,y) = \dfrac{xy}{x+y}$ แล้ว f ต่อเนื่องบนโดเมน f หรือไม่

แนวคำตอบ เนื่องจาก $x + y \neq 0$ จะได้ว่าโดเมนของฟังก์ชัน f คือ

$$D = \{(x,y) : y \neq -x\}$$

สำหรับ $(x_0, y_0) \in D$ ใด ๆ จะได้ว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{xy}{x+y} = \dfrac{x_0 y_0}{x_0+y_0} = f(x_0,y_0)$
ดังนั้น f ต่อเนื่องบนโดเมน f

แบบฝึกหัด 5.2

1. จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้

1.1 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}(xy+x^2)$

1.2 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)}\dfrac{x^2-y^2}{x^4-y^4}$

1.3 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)}\dfrac{x^2-y^2}{x^2y-xy^2}$

1.4 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+y}{x^2+y^2}$

1.5 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^3}{x^4+y^4}$

1.6 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^3}{x^4+y^6}$

1.7 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3y^4}{x^6+y^6}$

1.8 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3+y^4}{x^2+y^2}$

1.9 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$

1.10 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{y^2x-y^2}{xy-y}$

1.11 $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,2)}\dfrac{xy-2x}{xy-6-2x+3y}$

1.12 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^4}{x^4+x^2y^2+y^4}$

1.13 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}{y}$

1.14 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{y^2x}{x^2+|xy|+y^2}$

1.15 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)}\dfrac{x^3+3xy-x^2y-3y^2}{x^4+xy^2-x^3y-y^3}$

1.16 $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)}\dfrac{x^3-8y^3}{x^2-xy-2y^2}$

2. จงพิจารณาว่า f ต่อเนื่องบนจุดที่กำหนดให้หรือไม่

2.1 $f(x,y)=\dfrac{x^3y^2}{1-xy}$ ที่จุด $(1,1)$

2.2 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x-y} & \text{เมื่อ } (x,y)\neq(1,1)\\ 1 & \text{เมื่อ } (x,y)=(1,1)\end{cases}$ ที่จุด $(1,1)$

2.3 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{เมื่อ } (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & \text{เมื่อ } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ ที่จุด $(0,0)$

3. กำหนดให้ $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4-y^4}{x^2+y^2} & \text{เมื่อ } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{เมื่อ } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

แล้ว f ต่อเนื่องบนโดเมน f หรือไม่

4. จงพิจารณาว่า f มีความต่อเนื่องที่จุดใดบ้าง

4.1 $f(x,y)=\sqrt{y-x}$

4.2 $f(x,y)=\dfrac{x^2+4y^2}{x^2-4y^2}$

4.3 $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2+y^2-4}}$

4.4 $f(x,y)=e^{xy}\cos(xy^2+1)$

4.5 $f(x,y)=5x^2y\,\ell\text{n}|1-x^2-y^2|$

4.6 $f(x,y)=\arcsin(xy)$

5.3 อนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันสองตัวแปร

บทนิยาม 5.3.1 ให้ $f : D \to \mathbb{R}$ เมื่อ $D \subseteq \mathbb{R}^2$ โดยที่ $z = f(x,y)$ และ $(x_0, y_0) \in D$
อนุพันธ์ย่อย (partial deivatives) **ของ** f **เทียบกับ** x ที่จุด (x_0, y_0) คือ

$$f_x(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0,y_0)}{h} \qquad \text{ถ้าลิมิตมีค่า}$$

อนุพันธ์ย่อยของ f **เทียบกับ** y ที่จุด (a,b) คือ

$$f_y(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0,y_0)}{h} \qquad \text{ถ้าลิมิตมีค่า}$$

ดังนั้นอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชัน f คือ f_x และ f_y

$$f_x(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} \qquad \text{และ} \qquad f_y(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$$

สัญลักษณ์ที่นิยมใช้แทนอนุพันธ์ย่อย

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= f_x = f_1 = D_1 f = D_x f = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x} \\ f_y(x,y) &= f_y = f_2 = D_2 f = D_y f = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.3.2 กำหนดให้ $f(x,y) = x^2 y$ จงหาค่าของ $f_x(1,0)$ และ $f_y(1,0)$ โดยใช้บทนิยาม

แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f_x(1,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h,0) - f(1,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2(0) - 1^2(0)}{h} = 0 \\ f_y(1,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(1,0+h) - f(1,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1)^2(h) - 1^2(0)}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.3.3 ให้ $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & \text{เมื่อ } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{เมื่อ } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
จงหาค่าของ $f_x(0,0)$ และ $f_y(0,0)$

แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f_x(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0 \\ f_y(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.3.4 กำหนดให้ $f(x,y) = xy+x^2$ จงหาค่าของ $f_x(x,y)$ และ $f_y(x,y)$ โดยใช้บทนิยาม

แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)y+(x+h)^2-(xy+x^2)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{xy+hy+x^2+2xh+h^2-xy-x^2}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{hy+2xh+h^2}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h(y+2x+h)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}(y+2x+h) = y+2x
\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}
f_y(x,y) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x(y+h)+x^2-(xy+x^2)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{xy+xh+x^2-xy-x^2}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{xh}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} x = x
\end{aligned}$$

จากบทนิยามและตัวอย่างข้างต้น จะเห็นว่าการหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันสองตัวแปรเมื่อเทียบตัวแปร x จะเป็นมีเปลี่ยนแปลงเพียงตัวแปรเดียวนั่นคือไม่ขึ้นกับ y ถ้าอนุพันธ์ย่อยเมื่อเทียบตัวแปร y จะเป็นมีเปลี่ยนแปลงเพียงตัวแปรเดียวนั่นคือไม่ขึ้นกับ x ดังนั้นเราสามารถนำสูตรต่าง ๆ ในฟังก์ชันหนึ่งตัวแปรมาใช้ได้ หรือใช้กับตัวอย่าง 5.3.4

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x}(xy+x^2) = y\frac{\partial f}{\partial x}(x)+\frac{\partial f}{\partial x}(x^2) = y(1)+2x = y+2x\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial y}(xy+x^2) = x\frac{\partial f}{\partial y}(y)+x^2\frac{\partial f}{\partial y}(1) = x(1)+0 = x
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.3.5 จงหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชัน $f(x,y) = \dfrac{2x+y^2}{x+y}$

แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{(x+y)\frac{\partial}{\partial x}(2x+y^2)-(2x+y^2)\frac{\partial}{\partial x}(x+y)}{(x+y)^2}\\
&= \frac{(x+y)(2)-(2x+y^2)(1)}{(x+y)^2} = \frac{2y-y^2}{(x+y)^2}\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{(x+y)\frac{\partial}{\partial y}(2x+y^2)-(2x+y^2)\frac{\partial}{\partial y}(x+y)}{(x+y)^2}\\
&= \frac{(x+y)(2y)-(2x+y^2)(1)}{(x+y)^2} = \frac{2xy-2x+y^2}{(x+y)^2}
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.3.6 จงหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชัน $f(x,y) = e^{x^2y}\text{sin}^2(5y)$

แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \text{sin}^2(5y)\frac{\partial}{\partial x}e^{x^2y} = \text{sin}^2(5y)e^{x^2y}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(x^2y)\\ &= 2xye^{x^2y}\text{sin}^2(5y)\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \text{sin}^2(5y)\cdot\frac{\partial}{\partial y}e^{x^2y} + e^{x^2y}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\text{sin}^2(5y)\\ &= \text{sin}^2(5y)e^{x^2y}\frac{\partial}{\partial y}(x^2y) + e^{x^2y}\cdot 2\text{sin}(5y)\frac{\partial}{\partial y}\text{sin}(5y)\\ &= \text{sin}^2(5y)e^{x^2y}(x^2) + e^{x^2y}\cdot 2\text{sin}(5y)\cdot\text{cos}(5y)\cdot 5\\ &= x^2\text{sin}^2(5y)e^{x^2y} + 10e^{x^2y}\text{sin}(5y)\text{cos}(5y)\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.3.7 กำหนดให้ $f(x,y) = yx + x^2 + y^2 + 2x + 7y$ จงหา (x,y) ที่สอดคล้องเงื่อนไข

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \text{และ} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

แนวคำตอบ จะเห็นว่า

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= y + 2x + 2 = 0 \qquad \longrightarrow \qquad y = -2 - 2x\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= x + 2y + 7 = 0 \qquad \longrightarrow \qquad x + 2(-2-2x) + 7 = 0\end{aligned}$$

จะได้ว่า $x = 1$ และ $y = -2 - 2(1) = -4$ ดังนั้น $(1,-4)$ สอดคล้องเงื่อนไข $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ และ $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$

ตัวอย่าง 5.3.8 กำหนดให้ $u(x,t) = \text{cos}x\text{sin}t$ จงหา (x,t) ที่ทำให้ $u_x + u_t = 0$

แนวคำตอบ จะเห็นว่า

$$0 = u_x(x,t) + u_t(x,t) = -\text{sin}x\text{sin}t + \text{cos}x\text{cos}t = \text{cos}(x+t)$$

จะได้ว่า $x + t = \dfrac{(2n-1)\pi}{2}$ เมื่อ $n \in \mathbb{Z}$ ดังนั้นเซตคำตอบคือ

$$\left\{(x,t) : x = \frac{(2n-1)\pi}{2} - t \text{ เมื่อ } n \in \mathbb{Z}\right\}$$

การหาอนุพันธ์ได้

บทนิยาม 5.3.9 ให้ $f : D \to \mathbb{R}^2$ และ $D \subseteq \mathbb{R}^2$ เรากล่าวว่า f **หาอนุพันธ์ได้** (differentiable) ที่จุด (x_0, y_0) ถ้าทุก ๆ $(x, y) \in B_\delta(x_0, y_0) - \{(x_0, y_0)\}$ สำหรับบาง $\delta > 0$ ซึ่ง

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0) + E(x,y)$$

โดยที่

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{E(x,y)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0$$

และ f หาอนุพันธ์ได้บน $S \subseteq D$ ก็ต่อเมื่อ f หาอนุพันธ์ได้ทุกจุดใน S

ตัวอย่าง 5.3.10 ให้ $f(x, y) = x^2y$ จงแสดงว่า f หาได้อนุพันธ์ได้ที่จุด $(1, 0)$

แนวคำตอบ จะเห็นว่า $f(1, 0) = 0$ และ

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2xy \qquad \longrightarrow \qquad f_x(1,0) = 0 \\ f_y(x,y) &= x^2 \qquad \longrightarrow \qquad f_y(1,0) = 1 \end{aligned}$$

ให้ $(x, y) \in B_\delta(1, 0) - \{(1, 0)\}$ สำหรับบาง $\delta > 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(1,0) + f_x(1,0)(x-1) + f_y(1,0)(y-0) + E(x,y) \\ x^2y &= 0 + 0(x-1) + 1(y) + E(x,y) \\ E(x,y) &= x^2y - y \end{aligned}$$

เนื่องจาก $(x-1)^2 + y^2 \geq y^2$ จะได้ว่า พิจารณา

$$\begin{aligned} \left| \frac{E(x,y)}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} \right| &= \frac{|x^2y - y|}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} = \frac{|y||x^2-1|}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} \\ &= \frac{|y|}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} \cdot |x^2-1| \\ &= \frac{\sqrt{y^2}}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} \cdot |x^2-1| \\ &= \sqrt{\frac{y^2}{(x-1)^2+y^2}} \cdot |x^2-1| \\ &\leq \sqrt{1} \cdot |x^2-1| = |x^2-1| \end{aligned}$$

จะเห็นว่า $\lim_{(x,y)\to(1,0)} |x^2 - 1| = 0$ โดยทฤษฎีบทการบีบ จะได้ว่า $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{E(x,y)}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} = 0$ สรุปได้ว่า f หาได้อนุพันธ์ได้ที่จุด $(1, 0)$

ทฤษฎีบท 5.3.11 ให้ $f : D \to \mathbb{R}$ เมื่อ $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ถ้า f หาอนุพันธ์ได้ที่จุด (x_0, y_0) แล้ว

f ต่อเนื่องที่จุด (x_0, y_0)

บทพิสูจน์. สมมติว่า f หาอนุพันธ์ได้ที่จุด (x_0, y_0) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) + E(x,y)] \\ &= f(x_0,y_0) + \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} E(x,y)\end{aligned}$$

พิจารณา

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} E(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{E(x,y)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} \cdot \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \\ &= \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{E(x,y)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} \cdot \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \\ &= 0 \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

ฉะนั้น $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$ ดังนั้น f ต่อเนื่องที่จุด (x_0, y_0) □

ทฤษฎีบท 5.3.12 ให้ $f : D \to \mathbb{R}$ เมื่อ $D \subseteq \mathbb{R}^2$ และ $(x_0, y_0) \in D$ ถ้า f มีอนุพันธ์ย่อยบน $B_r(x_0, y_0) \subseteq D$ สำหรับบาง $r > 0$ แล้ว f หาอนุพันธ์ได้ที่จุด (x_0, y_0)

บทพิสูจน์. ขอละไว้ในวิชานี้ □

ตัวอย่าง 5.3.13 จงแสดงว่า $f(x,y) = xy^2 + x^2y + x + y$ มีความต่อเนื่องบน $\mathbb{R}^2$

แนวคำตอบ สำหรับ $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ใด ๆ และ

$$\begin{aligned}f_x(x,y) &= y^2 + 2xy + 1 \\ f_y(x,y) &= 2xy + x^2 + 1\end{aligned}$$

ฉะนั้น f หาอนุพันธ์ได้บน $\mathbb{R}^2$ สรุปได้ว่า f มีความต่อเนื่องบน $\mathbb{R}^2$

แบบฝึกหัด 5.3

1. จงหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันต่อไปนี้

   1.1 $f(x,y) = 3xy - 5x^4y^4$

   1.2 $f(x,y) = \sqrt[3]{1-\sin^2(xy)}$

   1.3 $f(x,y) = \ell\text{n}(\cos\sqrt{x+y})$

   1.4 $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$

   1.5 $f(x,y) = y^2 + x^2\tan(xy)$

   1.6 $f(x,y) = 5e^{x^2y^2} + e^x\sin(x+y^2)$

   1.7 $f(x,y) = e^x(\cos xy + \sin xy)$

   1.8 $f(x,y) = \arctan\left(\dfrac{x}{y}\right)$

2. กำหนดให้ $f(x,y) = x^2ye^{xy}$ จงหาค่าของ $D_1f(1,1)$ และ $D_2f(1,1)$

3. กำหนดให้ $f(x,y) = (x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}$ จงหาค่าของ $f_1(2,1)$ และ $f_2(2,1)$

4. กำหนดให้ $f(x,y) = (x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}e^{\sin(x^2y)}$ จงหาค่าของ $f_x(1,0)$

5. กำหนดให้ $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$ จงหาค่าของ $f_x(0,0)$

6. กำหนดให้ $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{เมื่อ } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{เมื่อ } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
   จงหาค่าของ $f_x(0,0)$ และ $f_y(0,0)$

7. กำหนดให้ $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{x^2+4y^2} & \text{เมื่อ } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{เมื่อ } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
   จงหาค่าของ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ และ $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

8. กำหนดให้ $f(x,y) = 2yx + x^2 + y^2 + 2x + 10y$ จงหา (x,y) ที่สอดคล้องเงื่อนไข $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ และ $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$

9. จงแสดงว่า f หาอนุพันธ์ได้ที่จุดที่กำหนด

   9.1 $f(x,y) = x^2 + y$ ที่จุด $(0,1)$

   9.2 $f(x,y) = xy^2$ ที่จุด $(1,0)$

   9.3 $f(x,y) = x^2 + y^2$ ที่จุด $(1,1)$

   9.4 $f(x,y) = 2x^2 - 4y$ ที่จุด $(2,-3)$

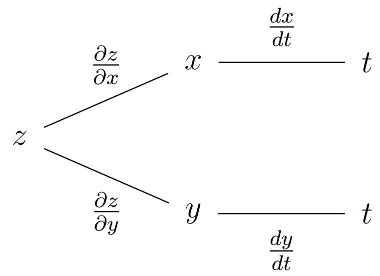
5.4 กฎลูกโซ่สำหรับฟังก์ชันหลายตัวแปร

ทฤษฎีบท 5.4.1 (**กฎลูกโซ่สำหรับหนึ่งตัวแปร** (Chain rule for one independent variable)) ถ้า $z = f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรที่หาอนุพันธ์ได้ และ $x = x(t), y = y(t)$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งตัวแปรหาอนุพันธ์ได้ จะได้ว่า $z = f(x(t), y(t))$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งตัวแปรหาอนุพันธ์ได้ และ

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

อาจแสดงกฎลูกโซ่ด้วยแผนภาพต้นไม้ดังรูปต่อไปนี้

รูปที่ 5.5: แผนภาพต้นไม้ของกฎลูกโซ่สำหรับหนึ่งตัวแปร



บทพิสูจน์. สมมติว่า $z = f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรที่หาอนุพันธ์ได้ และ $x = x(t), y = y(t)$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งตัวแปรหาอนุพันธ์ได้ที่จุด $t_0 \in \mathbb{R}$ กำหนดให้ $x(t_0) = x_0$ และ $y(t_0) = y_0$ จะได้ว่า

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0) + E(x,y)$$

และ $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{E(x,y)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0$

พิจารณา t ใกล้ ๆ t_0

$$\begin{aligned}
\frac{z(t) - z(t_0)}{t - t_0} &= \frac{f(x(t), y(t)) - f(x(t_0), y(t_0))}{t - t_0} \\
&= f_x(x_0,y_0) \cdot \frac{x(t) - x_0(t)}{t - t_0} + f_y(x_0,y_0) \cdot \frac{x(t) - x_0(t)}{t - t_0} + \frac{E(x,y)}{t - t_0} \\
&= f_x(x_0,y_0) \cdot \frac{x(t) - x_0(t)}{t - t_0} + f_y(x_0,y_0) \cdot \frac{x(t) - x_0(t)}{t - t_0} + \frac{E(x(t),y(t))}{t - t_0}
\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=t_0} = f_x(x_0,y_0) \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0} + f_y(x_0,y_0) \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=t_0} + \lim_{t\to t_0} \frac{E(x(t),y(t))}{t - t_0}$$

สุดท้ายแสดงได้ว่า (ทำเป็นแบบฝึกหัด)

$$\lim_{t\to t_0} \frac{E(x(t),y(t))}{t - t_0} = 0$$

ดังนั้น $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \dfrac{dy}{dt}$ $\square$

ตัวอย่าง 5.4.2 กำหนดให้

$$z = f(x,y) = 2x^2 + 3y^2, \quad x = x(t) = \cos t \quad \text{และ} \quad y = y(t) = \sin t$$

จงหา $\dfrac{dz}{dt}$

แนวคำตอบ วิธีที่ 1 โดยวิธีแทนค่า

$$\begin{aligned} z(t) &= 2\cos^2 t + 3\sin^2 t \\ \frac{dz}{dt} &= 4\cos t(-\sin t) + 6\sin t(\cos t) = 2\sin t\cos t = \sin 2t \end{aligned}$$

วิธีที่ 2 โดยใช้กฎลูกโซ่สำหรับหนึ่งตัวแปร
เนื่องจาก $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 4x$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 6y$, $\dfrac{dx}{dt} = -\sin t$ และ $\dfrac{dy}{dt} = \cos t$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= 4x(-\sin t) + 6y(\cos t) \\ &= 4\cos t(-\sin t) + 6\sin t(\cos t) = 2\sin t\cos t = \sin 2t \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.4.3 กำหนดให้

$$z = f(x,y) = \ell\text{n}(2x^2 + xy), \quad x = x(t) = \sqrt{t} \quad \text{และ} \quad y = y(t) = 3t - 1$$

จงหา $\dfrac{dz}{dt}$ เมื่อ $t = 1$

แนวคำตอบ โดยใช้กฎลูกโซ่สำหรับหนึ่งตัวแปรจะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \\ &= \left[\frac{1}{2x^2 + xy} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}(2x^2 + xy)\right] \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} + \left[\frac{1}{2x^2 + xy} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}(2x^2 + xy)\right] \cdot 3 \\ &= \left[\frac{1}{2x^2 + xy}(4x + y)\right] \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} + \left[\frac{1}{2x^2 + xy}(y)\right] \cdot 3 \\ &= \frac{4x + y}{2x^2 + xy} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} + \frac{3y}{2x^2 + xy} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $x(1) = 1$ และ $y(1) = 2$ ดังนั้น

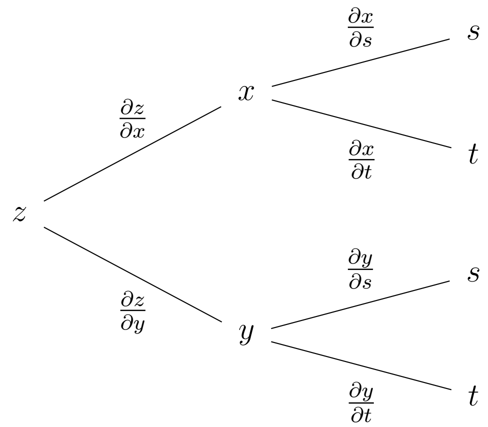
$$\begin{aligned} \left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=1} &= \frac{4(1) + 2}{2(1)^2 + 1(2)} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3(2)}{2(1)^2 + 1(2)} \\ &= \frac{3}{4} + \frac{3}{2} = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 5.4.4 (กฎลูกโซ่สำหรับสองตัวแปร (Chain rule for two independent variables)) ถ้า $z = f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรที่หาอนุพันธ์ได้ และ $x = x(s, t), y = y(s, t)$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรหาอนุพันธ์ได้ จะได้ว่า $z = f(x(s, t), y(s, t))$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรหาอนุพันธ์ได้ และ

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} \qquad \text{และ} \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

อาจแสดงกฎลูกโซ่ด้วยแผนภาพต้นไม้ดังรูปต่อไปนี้

รูปที่ 5.6: แผนภาพต้นไม้ของกฎลูกโซ่สำหรับสองตัวแปร



บทพิสูจน์. ทำนองเดียวกับการพิสูจน์กฎลูกโซ่สำหรับหนึ่งตัวแปร □

ตัวอย่าง 5.4.5 กำหนดให้

$$z = f(x, y) = 3x^2 - 2xy + y^2, \quad x = x(s, t) = 3s + 2t \quad \text{และ} \quad y = y(s, t) = 4s - t$$

จงหา $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ และ $\dfrac{\partial z}{\partial t}$

แนวคำตอบ โดยใช้กฎลูกโซ่สำหรับสองตัวแปรจะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} \\ &= (6x - 2y)(3) + (-2x + 2y)(4) \\ &= 10x + 2y \\ &= 10(3s + 2t) + 2(4s - t) \\ &= 38s + 18t \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \\ &= (6x - 2y)(2) + (-2x + 2y)(-1) \\ &= 14x - 6y \\ &= 14(3s + 2t) - 6(4s - t) \\ &= 18s + 34t \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.4.6 กำหนดให้

$$u = f(x,y) = s^2 - t^2, \quad s = s(x,y) = x + y\ell\text{n}x \quad \text{และ} \quad t = t(x,y) = y + x\ell\text{n}y$$

จงหา $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ และ $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ เมื่อ $(x,y) = (1,1)$

แนวคำตอบ โดยใช้กฎลูกโซ่สำหรับสองตัวแปรจะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}\\ &= 2s\left(1 + y\cdot\frac{1}{x}\right) + (-2t)(\ell\text{n}y)\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial y}\\ &= 2s(\ell\text{n}x) + (-2t)\left(1 + x\cdot\frac{1}{y}\right)\end{aligned}$$

สำหรับ $(x,y) = (1,1)$ ซึ่งมี $s(1,1) = 1$ และ $t(1,1) = 1$ จะได้ว่า

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,1) = 2(1+1) + (-2)(0) = 4 \quad \text{และ} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(1,1) = 2(0) + (-2)(2) = -4$$

ตัวอย่าง 5.4.7 กำหนดให้ $z = f(u-v, v-u)$ จงแสดงว่า $\dfrac{\partial z}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial v} = 0$

แนวคำตอบ ให้ $x = x(u,v) = u - v$ และ $y = y(u,v) = v - u$ จะได้ว่า $z = f(x,y)$
โดยใช้กฎลูกโซ่สำหรับสองตัวแปรจะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\\ &= \frac{\partial z}{\partial x}\cdot(1) + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot(-1) = \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\\ &= \frac{\partial z}{\partial x}\cdot(-1) + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot(1) = -\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = \left[\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}\right] + \left[-\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\right] = 0$$

แบบฝึกหัด 5.4

1. จงหาอนุพันธ์ต่อไปนี้

   1.1 $\dfrac{dz}{dt}$ เมื่อ $z = x^2e^y$, $x = 2\sin t$ และ $y = t^4$

   1.2 $\dfrac{dz}{dt}$ เมื่อ $z = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$, $x = \ell n t$ และ $y = \cos t^2$

   1.3 $\dfrac{dz}{dt}$ เมื่อ $z = x^2y^3 + x\sin y + tx$, $x = t + \dfrac{1}{t}$ และ $y = \sqrt{t}$

   1.4 $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ และ $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ เมื่อ $z = 3x^2 + xy + 2y^2 + 3x - y$, $x = 2s - 3t$ และ $y = st + s^2$

   1.5 $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ และ $\dfrac{\partial z}{\partial r}$ เมื่อ $z = e^{\frac{y}{x}}$, $x = r\cos^2 t$ และ $y = r^2\sin t$

   1.6 $\dfrac{\partial z}{\partial r}$ และ $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ เมื่อ $z = xye^{xy}$, $x = r\cos\theta$ และ $y = r\sin\theta$

2. กำหนดให้ $z = f(x,y) = 3x^4 - 2x^2y + y$, $x = x(s,t) = s^2 + t^2$ และ $y = y(s,t) = st$
   จงหา $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ และ $\dfrac{\partial z}{\partial t}$

3. กำหนดให้ $z = \sqrt{5 + x - 2xy^4}$ เมื่อ $x = t^2$ และ $y = t - 1$
   จงหา $\dfrac{dz}{dt}$ เมื่อ $t = 1$

4. กำหนดให้ $z = xye^{xy}$ เมื่อ $x = r\cos\theta$ และ $y = r\sin\theta$
   จงหา $\dfrac{\partial z}{\partial r}$ และ $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ เมื่อ $(x,y) = (1, \frac{\pi}{2})$

5. กำหนดให้ $z = f(x^2 - y^2)$ จงแสดงว่า $x\dfrac{\partial z}{\partial y} + y\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$

6. ให้ $u = f(x,y)$ เมื่อ $x = r\cos\theta$ และ $y = r\sin\theta$ จงแสดงว่า

   6.1 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial r} \cdot \cos\theta - \dfrac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \dfrac{\sin\theta}{r}$

   6.2 $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial r} \cdot \sin\theta + \dfrac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \dfrac{\cos\theta}{r}$

7. จากบทพิสูจน์ของกฎลูกโซ่สำหรับหนึ่งตัวแปร จงพิสูจน์ว่า

$$\lim_{t \to t_0} \frac{E(x(t), y(t))}{t - t_0} = 0$$

5.5 อนุพันธ์อันดับสูง

บทนิยาม 5.5.1 ให้ $z = f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร จะเรียก $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ และ $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ ว่า**อนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่ง** (fisrt-order partial derivative) และนิยาม**อนุพันธ์ย่อยอันดับสอง** (second-order partial derivative) ดังนี้

1. $\dfrac{\partial}{\partial x}(\dfrac{\partial f}{\partial x})$ เขียนแทนด้วย $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, f_{xx}, f_{11} หรือ $D_{11}f$
2. $\dfrac{\partial}{\partial y}(\dfrac{\partial f}{\partial x})$ เขียนแทนด้วย $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, f_{xy}, f_{12} หรือ $D_{12}f$
3. $\dfrac{\partial}{\partial x}(\dfrac{\partial f}{\partial y})$ เขียนแทนด้วย $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, f_{yx}, f_{21} หรือ $D_{21}f$
4. $\dfrac{\partial}{\partial y}(\dfrac{\partial f}{\partial y})$ เขียนแทนด้วย $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, f_{yy}, f_{22} หรือ $D_{22}f$

อนุพันธ์ย่อยอันดับอื่น ๆ นิยามทำนองเดียวกัน

ตัวอย่าง 5.5.2 จงหาอนุพันธ์อันดับสองของ $f(x, y) = ye^{xy} + xy^2$

แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= ye^{xy} \cdot y + y^2 = y^2e^{xy} + y^2 \\
f_{xx}(x,y) &= y^2e^{xy} \cdot y + 0 = y^3e^{xy} \\
f_{xy}(x,y) &= [2ye^{xy} + y^2e^{xy} \cdot x] + 2y = 2ye^{xy} + xy^2e^{xy} + 2y
\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}
f_y(x,y) &= [1e^{xy} + ye^{xy} \cdot x] + 2xy = e^{xy} + xye^{xy} + 2xy \\
f_{yy}(x,y) &= e^{xy} \cdot x + [xe^{xy} + xye^{xy} \cdot x] + 2x = 2xe^{xy} + x^2ye^{xy} + 2x \\
f_{yx}(x,y) &= e^{xy} \cdot y + [ye^{xy} + xye^{xy} \cdot y] + 2y = 2ye^{xy} + xy^2e^{xy} + 2y
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.5.3 กำหนดให้ $f(x, y) = x\sin(xy)$ จงหา f_{yxx}

แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
f_y(x,y) &= x\cos(xy) \cdot x = x^2\cos(xy) \\
f_{yx}(x,y) &= 2x\cos(xy) + x^2[-\sin(xy) \cdot y] = 2x\cos(xy) - yx^2\sin(xy) \\
f_{yxx}(x,y) &= [2\cos(xy) + 2x(-\sin(xy) \cdot y)] - [2yx\sin(xy) + yx^2\cos(xy) \cdot y] \\
&= 2\cos(xy) - 4xy\sin(xy) - y^2x^2\cos(xy) \\
&= (2 - y^2x^2)\cos(xy) - 4xy\sin(xy)
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.5.4 กำหนดให้ $u = ye^{-x} + \sin(2x+3y)$ จงหา $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}(0,0)$

แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= e^{-x} + 3\cos(2x+3y)\\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) &= -e^{-x} - 6\sin(2x+3y)\\ \frac{\partial^3 z}{\partial^2 x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x \partial y}\right) &= e^{-x} - 12\cos(2x+3y)\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}(0,0) = 1 - 12 = -11$$

ตัวอย่าง 5.5.5 จงแสดงว่า $u(x,t) = e^{-k\omega^2 t}\cos(\omega x)$ เป็นผลเฉลยของสมการความร้อน

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}$$

เมื่อ k, ω เป็นค่าคงตัว

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= -k\omega^2 e^{-k\omega^2 t}\cos(\omega x)\\ \frac{\partial u}{\partial x} &= e^{-k\omega^2 t}[-\sin(\omega x)\cdot\omega] = -\omega e^{-k\omega^2 t}\sin(\omega x)\\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} &= -\omega e^{-k\omega^2 t}\cos(\omega x)\cdot\omega = -\omega^2 e^{-k\omega^2 t}\cos(\omega x)\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\left(-\omega^2 e^{-k\omega^2 t}\cos(\omega x)\right) = k\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}$$

ดังนั้น u เป็นผลเฉลยของสมการความร้อน

ตัวอย่าง 5.5.6 กำหนดให้

$$z = f(x,y), \quad x = x(r,\theta) = r\cos\theta \quad \text{และ} \quad y = y(r,\theta) = r\sin\theta$$

จงหา $\dfrac{\partial^2 z}{\partial r^2}$ และ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial\theta\partial r}$

แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial r} &= \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r} \\
&= \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\sin\theta \\
\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right) &= \cos\theta\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\right) + \sin\theta\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\right) \\
\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} &= \cos\theta\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}\right] + \sin\theta\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}\right] \\
&= \cos\theta\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\cos\theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\cdot\sin\theta\right] + \sin\theta\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\cdot\cos\theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cdot\sin\theta\right] \\
&= \cos^2\theta\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} + \cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + \sin^2\theta\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}
\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right) &= \left[\frac{\partial z}{\partial x}\cdot(-\sin\theta) + \cos\theta\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right] + \left[\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\cos\theta + \sin\theta\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right] \\
\frac{\partial^2 z}{\partial\theta\partial r} &= -\sin\theta\frac{\partial z}{\partial x} + \cos\theta\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot(-r\sin\theta) + \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\cdot(r\cos\theta)\right] + \cos\theta\frac{\partial z}{\partial y} \\
&\quad + \sin\theta\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\cdot(-r\sin\theta) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cdot(r\cos\theta)\right] \\
&= -\sin\theta\frac{\partial z}{\partial x} - r\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + r\cos^2\theta\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} + \cos\theta\frac{\partial z}{\partial y} \\
&\quad - r\sin^2\theta\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + r\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}
\end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 5.5.7 (ทฤษฎีบทไคล์รอท (Clairaut's Theorem))
ให้ $f : D \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร และ $(x_0, y_0) \in D$ ถ้า f มีอนุพันธ์ย่อยอันดับสอง โดยที่ f_{xy} และ f_{yx} ต่อเนื่องที่จุด (x_0, y_0) แล้ว

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

บทพิสูจน์. ขอละไว้ในวิชานี้ □

ตัวอย่าง 5.5.8 ให้ $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & \text{เมื่อ } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{เมื่อ } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
จงหาค่าของ $f_{xy}(0,0)$ และ $f_{yx}(0,0)$

แนวคำตอบ จากตัวอย่าง 5.3.3 จะได้ว่า $f_x(0,0) = 0$ และ $f_y(0,0) = 0$ พิจารณา

$$f_{xy}(0,0) = (f_x)_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_x(0,0+h) - f_x(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f_x(0,h) - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f_x(0,h)}{h}$$

จะเห็นว่า

$$\begin{aligned} f_x(0,h) &= \lim_{s\to 0} \frac{f(0+s,h) - f(0,h)}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{f(s,h) - f(0,h)}{s} \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{\frac{s^3h - sh^3}{s^2+h^2} - 0}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{s(s^2h - h^3)}{s(s^2+h^2)} = \lim_{s\to 0} \frac{s^2h - h^3}{s^2+h^2} = -h \end{aligned}$$

ดังนั้น $f_{xy}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-h}{h} = -1$
ในทำนองเดียวกัน พิจารณา

$$f_{yx}(0,0) = (f_y)_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(0+h,0) - f_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(h,0) - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(h,0)}{h}$$

จะเห็นว่า

$$\begin{aligned} f_y(h,0) &= \lim_{s\to 0} \frac{f(h,0+s) - f(h,0)}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{f(h,s) - f(h,0)}{s} \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{\frac{h^3s - hs^3}{h^2+s^2} - 0}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{s(h^3 - hs^2)}{s(h^2+s^2)} = \lim_{s\to 0} \frac{h^3 - hs^2}{h^2+s^2} = h \end{aligned}$$

ดังนั้น $f_{yx}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h}{h} = 1$

ข้อสังเกต $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$ เนื่องจาก f_{xy} และ f_{yx} ไม่ต่อเนื่องที่จุด $(0,0)$

แบบฝึกหัด 5.5

1. จงหาอนุพันธ์ย่อยอันดับสองของแต่ละข้อต่อไปนี้

   1.1 $f(x,y) = x^2 - 2xy^3 + 5y^6 + 3$

   1.2 $f(x,y) = \ell\text{n}(x^2 - 5y)$

   1.3 $f(x,y) = xe^y + ye^x$

   1.4 $f(x,y) = \sin(\cos(2x+3y))$

   1.5 $f(x,y) = e^{xy} + y\sqrt{x}$

   1.6 $f(x,y) = \sin(3x-2y) + \cos(2x-3y)$

2. กำหนดให้ $f(x,y) = x^3y^5 - 2x^2y + x$ จงหา $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}$, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}$ และ $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y^3}$

3. กำหนดให้ $f(x,y) = (2x+y)^5$ จงหา $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$ และ $\dfrac{\partial^4 f}{\partial y^2 \partial x^2}$

4. กำหนดให้ $f(x,y) = x^3e^{-5y}$ จงหา $f_{xyy}(0,1)$, $f_{xxx}(0,1)$ และ $f_{yyxx}(0,1)$

5. ให้ $u = 3xy - 4y^2$, $x = 2se^r$ และ $y = re^{-s}$ จงหา $\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}$

6. ให้ $f(x,y,z) = 2z^3 - 3(x^2+y^2)z$ จงแสดงว่า $f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0$

7. ให้ $z = \ell\text{n}(a^2x^2 + b^2y^2)$ จงแสดงว่า $b^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

8. ให้ $u = xe^y + ye^x$ จงแสดงว่า $u_{yx} = u_{yxx} + u_{xyy}$

9. จงตรวจสอบว่าฟังก์ชันข้อใดต่อไปนี้สอดคล้องเงื่อนไข $u_{xx} + u_{yy} = 0$

   9.1 $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$

   9.2 $u(x,y) = ye^{-xy} + e^y$

   9.3 $u(x,y) = \ell\text{n}(x^2+y^2) + e^x\sin y$

   9.4 $u(x,y) = x^2 + y^2 + 3xy$

   9.5 $u(x,y) = \arctan\left(\dfrac{2xy}{x^2-y^2}\right)$

5.6 การประมาณค่าเชิงเส้น

สำหรับฟังก์ชัน $z = f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรที่หาอนุพันธ์ได้ จะได้ว่า

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + E(x, y)$$

เมื่อค่าผิดพลาด $E(x, y)$ มีค่าเข้าใกล้ 0 เราจะประมาณค่าของฟังก์ชันสองตัวแปรในลักษณะเดียวกับหนึ่งตัวแปร

บทนิยาม 5.6.1 ค่าเชิงอนุพันธ์รวม (total differential) ของ f ที่จุด (x, y) เขียนแทนด้วย $df(x, y)$ และกำหนดโดย

$$df(x, y) = f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y$$

หรืออาจจะเขียน $\Delta x = dx$ และ $\Delta y = dy$

$$df(x, y) = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy$$

ตัวอย่าง 5.6.2 กำหนดให้ $f(x, y) = x^2 \text{sin} xy$ จงหา $df(x, y)$

แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$df(x, y) = (2x\text{sin}xy + x^2y\text{cos}xy)dx + (x^3\text{cos}xy)dy$$

เราจะประมาณค่า $f(x + dx, y + dy) - f(x, y) \approx df(x, y)$ เมื่อ dx, dy มีค่าน้อย ๆ เราจะได้สูตร **การประมาณค่าเชิงเส้น** (Linear approximation) ดังนี้

$$f(x + dx, y + dy) \approx f(x, y) + f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy$$

ตัวอย่าง 5.6.3 จงใช้ค่าอนุพันธ์ประมาณค่าของ $\sqrt[3]{(2.01)^2 + (1.98)^2}$

แนวคำตอบ ให้ $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 + y^2}$ จะได้ว่า

$$f_x(x, y) = \tfrac{1}{3}(x^2 + y^2)^{-\frac{2}{3}}(2x) \quad \text{และ} \quad f_y(x, y) = \tfrac{1}{3}(x^2 + y^2)^{-\frac{2}{3}}(2y)$$

กำหนดให้ $x = 2$, $y = 2$ $dx = 0.01$ และ $dy = -0.02$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{(2.01)^2 + (1.98)^2} &= f(2.01, 1.98) \\
&= f(2 + 0.01, 2 - 0.02) \\
&\approx f(2, 2) + f_x(2, 2) \cdot 0.01 + f_y(2, 2) \cdot (-0.02) \\
&= 2 + \frac{1}{3}(8)^{-\frac{2}{3}}(4) \cdot 0.01 + \frac{1}{3}(8)^{-\frac{2}{3}}(4) \cdot (-0.02) \\
&= 2 + \frac{0.01}{3} - \frac{0.02}{3} \\
&= 2 - \frac{0.01}{3} = \frac{5.99}{3} = 1.996666667
\end{aligned}$$

หมายเหตุ ค่าจริงของ $\sqrt[3]{(2.01)^2 + (1.98)^2} = 1.996702901$

แบบฝึกหัด 5.6

1. จงหาค่าเชิงอนุพันธ์รวม $df(x,y)$ ของฟังก์ชันต่อไปนี้

   1.1 $f(x,y) = \sqrt{x^2+xy}$

   1.2 $f(x,y) = e^x \cos xy$

   1.3 $f(x,y) = \dfrac{xy}{x+y}$

   1.4 $f(x,y) = x^3 \sin x \ell n y$

2. จงประมาณค่าต่อไปนี้

   2.1 $\sqrt{(3.01)^2+(3.97)^2}$

   2.2 $(1.002)e^{0.001}$

   2.3 $\frac{1}{\sqrt[3]{(0.003)^3+(7.979)^3}}$

   2.4 $(0.99)^{3.001}$

   2.5 $2.01\sin 32^\circ$

   2.6 $0.88\sqrt{1.11}$

3. จงหาปริมาตรโดยประมาณของกล่องรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมจตุรัสซึ่งมีความยาวด้านละ 5.003 เซนติเมตร และสูง 9.997 เซนติเมตร

4. ทรงกระบอกใบหนึ่งรัศมีฐานเป็น 5.026 เซนติเมตร และวัดส่วนสูงได้ 24.003 เซนติเมตร จงคำนวณปริมาตรโดยประมาณของทรงกระบอกนี้

5. กรวยกลมใบหนึ่งมีการเปลี่ยนแปลงรัศมีจาก 3 ฟุต และสูง 4 ฟุต ไปเป็นรัศมี 2.9 ฟุต และสูง 4.3 ฟุต จงหาค่าส่วนการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรของกรวยใบนี้โดยใช้ค่าอนุพันธ์รวม

6. ในการคำนวณปริมาตรของกล่องรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากซึ่งวัดความกว้าง ความยาว และความสูงได้ 10 13 และ 16 นิ้วตามลำดับ ถ้าวัดความผิดพลาดไม่เกิน 0.03 นิ้ว จงหาขอบเขตของความผิดพลาดสัมพัทธ์

สรุป

ในบทนี้ศึกษาฟังก์ชันค่าจริงที่มีโดเมนเป็นสับเซตของ $\mathbb{R}^n$ เรียกว่าฟังก์ชันหลายตัวแปร โดยเน้นกรณีสองตัวแปรซึ่งให้กราฟเป็นพื้นผิวและมีโดเมนเป็นพื้นที่บนระนาบ XY จากนั้นศึกษาลิมิตของฟังก์ชันสองตัวแปร ต่อมาเรานิยามลิมิตตามเส้นโค้งโดยที่ลิมิตมีค่าที่จุดใดลิมิตบนเส้นโค้งที่ผ่านจุดลิมิตนั้นย่อมมีค่าเท่ากันทุกเส้นโค้ง และศึกษาความต่อเนื่องของฟังก์ชันสองตัวแปรซึ่งหมายถึงค่าฟังก์ชันต้องเท่ากับลิมิตที่จุดนั้น ต่อมากล่าวถึงอนุพันธ์ของฟังก์ชันสองตัวแปรที่เรียกว่าอนุพันธ์ย่อยคืออัตราการเปลี่ยนตามแกน X และ Y ต่อมาศึกษากฎลูกโซ่ อนุพันธ์อันดับสูง และการประมาณค่าเชิงเส้นโดยใช้ฟังก์ชันสองตัวแปร

แบบฝึกหัดบทที่ 5

---

1. จงหาโดเมนของฟังก์ชันต่อไปนี้ พร้อมวาดกราฟประกอบ

   1.1 $f(x,y) = \dfrac{\ell\text{n}(x^2-y^2+1)}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$

   1.2 $f(x,y) = \arcsin(x+y) + \sqrt{x^2-y^2}$

   1.3 $f(x,y) = \dfrac{1}{xy} + \sqrt{1-x^2-y^2}$

   1.4 $f(x,y) = \ell\text{n}(2+x^2+y^2) + \dfrac{1}{x}\sqrt{4-x^2-y^2}$

2. จงหาลิมิตต่อไปนี้ (ถ้ามี) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^3+y^2}$

3. จงหาลิมิตต่อไปนี้ (ถ้ามี) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

4. จงตรวจสอบว่าฟังก์ชันต่อไปนี้ต่อเนื่องที่จุด $(0,0)$ หรือไม่

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & : (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

5. จงตรวจสอบว่าฟังก์ชันต่อไปนี้ต่อเนื่องที่จุด $(0,0)$ หรือไม่

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^3}{x^2+y^4} & : (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

6. ให้ $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-xy}{x+y} & \text{เมื่อ } x+y \neq 0 \\ 0 & \text{เมื่อ } x+y = 0 \end{cases}$

   จงหาค่าของ $D_1f(0,y)$ เมื่อ $y \neq 0$ และ $D_2f(x,0)$ เมื่อ $x \neq 0$

7. จงใช้นิยามหาอนุพันธ์ย่อยของ $f_x(1,1)$ และ $f_y(1,1)$ เมื่อ $f(x,y) = \dfrac{x}{x+y}$

8. จงหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชัน $f(x,y) = xe^{-\sin(xy)}$

9. จงหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชัน $f(x,y) = \dfrac{e^{x^2+y^2}}{\ell\text{n}x}$

10. ให้ $z = e^{xy}$, $x = r\cos\theta$ และ $y = r\sin\theta$ จงหา $\dfrac{\partial z}{\partial r}$ และ $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$

11. ให้ $z = f(x^2 - y^2)$ จงแสดงว่า $x\dfrac{\partial z}{\partial y} + y\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$

12. ให้ $z = f(x,y)$ และ $x = s\sqrt{t}$ และ $y = s^2 + t^2$

$$\text{จงหา} \quad \frac{\partial z}{\partial t} \quad \text{เมื่อ} \quad (s,t) = (1,1)$$

    โดยที่ $f_x(1,2) = 2$ และ $f_y(1,2) = 1$

13. จงหาอนุพันธ์ย่อยอันดับสองของฟังก์ชัน $f(x,y) = xe^{y^2} + ye^{x^2}$

14. จงหาอนุพันธ์ย่อยอันดับสองของฟังก์ชัน $f(x,y) = y\sin\left(\dfrac{x}{y}\right)$

15. ให้ $u = \sin(xy)$ จงแสดงว่า

$$xu_{xx} + yu_{yx} - u_x + 2xy^2u = 0$$

16. จงแสดงว่า $u(x,y,t) = 5\sin(3\pi x)\sin(4\pi y)\cos(10\pi t)$ เป็นผลเฉลยของสมการ

$$4u_{tt} = 4(u_{xx} + u_{yy})$$

17. จงแสดงว่า $u(x,y,t) = 2\sin(\frac{x}{3})\sin(\frac{y}{4})e^{\frac{-25t}{16}}$ เป็นผลเฉลยของสมการ

$$u_t = 9(u_{xx} + u_{yy})$$

18. จงประมาณค่าต่อไปนี้โดยใช้ค่าเชิงอนุพันธ์ $1.001e^{0.009}$

19. จงประมาณค่าต่อไปนี้โดยใช้ค่าเชิงอนุพันธ์ $(0.98)^{1.005}$

บทที่ 6

ปริพันธ์ของฟังก์ชันสองตัวแปร

เราอาจเคยศึกษาปริพันธ์ของฟังก์ชันหนึ่งตัวแปรซึ่งมีโดเมนเป็นสับเซตของ $\mathbb{R}$ ในบทนี้เราจะศึกษาการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันหนึ่งตัวแปรซึ่งมีโดเมนเป็นสับเซตของ $\mathbb{R}^2$ โดยเริ่มต้นจากโดเมนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า และขยายแนวคิดไปยังโดเมนทั่วไป โดยบางปัญหาอาจเปลี่ยนไปอยู่ในรูปพิกัดเชิงขั้วดังจะกล่าวต่อไปนี้

6.1 ปริพันธ์สองชั้นบนโดเมนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ให้ $f : D \to \mathbb{R}$ เมื่อ

$$D = [a,b] \times [c,d] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \text{ และ } c \leq y \leq d\}$$

พิจารณาการแบ่งช่วง $[a,b]$ ออกเป็น m ช่วง ด้วยจุด $x_0, x_1, x_2, ..., x_m$ โดยที่

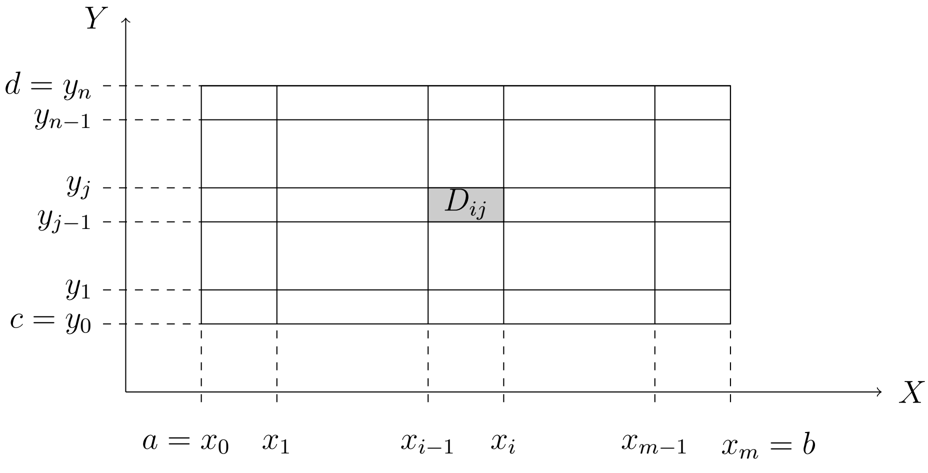
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_m = b$$

แบ่ง $[c,d]$ ออกเป็น n ช่วง ด้วยจุด $y_0, y_1, y_2, ..., y_n$ โดยที่

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < ... < y_n = d$$

ให้ $D_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าย่อยของรูป ij เมื่อ $i = 1, 2, ..., m$ และ $j = 1, 2, ..., n$

รูปที่ 6.1: การแบ่งพื้นที่ย่อยของโดเมนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า



ให้ $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ และ $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$ และ $D_{ij} = \Delta A_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j$ ให้ $(x_{ij}, y_{ij}) \in D_{ij}$ แล้ว

$$S_{mn} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}, y_{ij})\Delta A_{ij}$$

เรียก S_{mn} ว่า **ผลบวกรีมันน์** (Reimann sum) ของ f บน D
ถ้าเราแบ่ง Δx_i และ Δy_i มีค่าเข้าใกล้ศูนย์เมื่อ m และ n มีค่ามาก ๆ และ

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} S_{mn} = L$$

แล้วจะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันที่ **หาปริพันธ์ได้** (integrable) บน D
และเรียกค่าลิมิต L ว่า**ปริพันธ์สองชั้น** (double integral) ของ f บน D ซึ่งเขียนแทนด้วย

$$\iint\limits_D f \qquad \text{หรือ} \qquad \iint\limits_D f\, dA \qquad \text{หรือ} \qquad \iint\limits_D f\, dxdy$$

เราสรุปได้ว่า

$$\iint\limits_D f(x,y)\, dxdy = \lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}, y_{ij})\Delta A_{ij}$$

ตัวอย่าง 6.1.1 กำหนดให้ $f(x,y) = xy$ และ $D = [0,1]\times[0,2]$ จงหา $\iint\limits_D f\, dA$

แนวคำตอบ แบ่ง $[0,1]$ ออกเป็น m ช่องด้วยจุด $x_i = \frac{i}{m}$ เมื่อ $i = 1, 2, ..., m$
แบ่ง $[0,2]$ ออกเป็น n ช่องด้วยจุด $y_j = \frac{2j}{n}$ เมื่อ $j = 1, 2, ..., n$ จะได้ว่า $\Delta x_i = \frac{1}{m}$ และ $\Delta y_j = \frac{2}{n}$
เลือก $(x_{ij}, y_{ij}) = (x_i, y_j)$ จะได้ผลบวกรีมันน์ของ f บน D คือ

$$\begin{aligned}
S_{mn} &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}, y_{ij})\Delta A_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j)\Delta x_i \Delta y_j \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{i}{m}, \frac{2j}{n}\right)\cdot\frac{1}{m}\cdot\frac{2}{n} \\
&= \frac{2}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \frac{i}{m}\cdot\frac{2j}{n} \\
&= \frac{4}{m^2n^2}\sum_{i=1}^{m}\left(i\sum_{j=1}^{n} j\right) \\
&= \frac{4}{m^2n^2}\sum_{i=1}^{m}\left(i\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right) \\
&= \frac{4}{m^2n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\sum_{i=1}^{m} i \\
&= \frac{4}{m^2n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{m(m+1)}{2} \\
&= \left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{1}{m^2}\right)
\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} S_{mn} = \lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} \left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{1}{m^2}\right) = 1\cdot 1 = 1$$

ดังนั้น $\displaystyle\iint_D f\,dA = 1$

จากตัวอย่างข้างต้นจะเห็นว่าการคำนวนค่าปริพันธ์สองชั้นผ่านลิมิตของผลบวกรีมันน์ค่อนข้างยุ่งยาก เราจึงพิจารณา เหมือนกับการอินทิเกรตในหนึ่งตัวแปรดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 6.1.2 (การหาปริพันธ์สองชั้น (Iterated integration))
การหาปริพันธ์สองชั้น $f(x,y)$ บนโดเมนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า $D=[a,b]\times[c,d]$ คือ

$$\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dydx = \int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right]dx$$

หรือ

$$\int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dxdy = \int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right]dy$$

ตัวอย่าง 6.1.3 ให้ $f(x,y)=xy$ จงหา $\displaystyle\int_0^1\int_0^2 f(x,y)\,dydx$ และ $\displaystyle\int_0^2\int_0^1 f(x,y)\,dxdy$

แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int_0^1\int_0^2 f(x,y)\,dydx &= \int_0^1\left[\int_0^2 xy\,dy\right]dx = \int_0^1\left[\frac{1}{2}xy^2\right]_{y=0}^{y=2}dx\\
&= \int_0^1 2x\,dx = \left[x^2\right]_{x=0}^{x=1} = 1\\
\int_0^2\int_0^1 f(x,y)\,dxdy &= \int_0^2\left[\int_0^1 xy\,dx\right]dy = \int_0^2\left[\frac{1}{2}x^2y\right]_{x=0}^{x=1}dx\\
&= \int_0^1 \frac{1}{2}y\,dx = \left[\frac{y^2}{4}\right]_{y=0}^{y=2} = 1
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.1.4 จงหาค่าปริพันธ์สองชั้น $\displaystyle\int_2^4\int_0^3(3x^2-2xy+3y^2+2)\,dydx$

แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int_2^4\int_0^3(3x^2-2xy+3y^2+2)\,dydx &= \int_2^4\left[\int_0^3(3x^2-2xy+3y^2+2)\,dy\right]dx\\
&= \int_2^4\left[3x^2y-xy^2+y^3+2y\right]_{y=0}^{y=3}dx\\
&= \int_2^4\left[9x^2-9x+33\right]dx\\
&= \left[3x^3-\frac{9x^2}{2}+33x\right]_{x=2}^{x=4}\\
&= [192-72+132]-[24-18+66]\\
&= 180
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.1.5 จงหาค่าปริพันธ์สองชั้น $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{1}^{2} \frac{x+y}{y}\; dxdy$

แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\int_{1}^{2} \frac{x+y}{y}\; dxdy &= \int_{-1}^{1}\left[\int_{1}^{2} \frac{1}{y}\cdot x+1\; dx\right] dy \\
&= \int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{y}\cdot\frac{x^2}{2}+x\right]_{x=1}^{x=2} dy \\
&= \int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{y}\cdot 2+2\right]-\left[\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{2}+1\right] dy \\
&= \int_{-1}^{1}\left[\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{y}+1\right] dy \\
&= \left[\frac{3}{2}\ell\text{n}|y|+y\right]_{y=-1}^{y=1} \\
&= [0+1]-[0-1]=2
\end{aligned}$$

จากบทนิยามของการหาปริพันธ์สองชั้นถ้า $f(x,y)=g(x)h(y)$ เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int_{a}^{b}\int_{c}^{d} f(x,y)\,dydx = \int_{a}^{b}\left[\int_{c}^{d} g(x)h(y)\,dy\right]dx &= \int_{a}^{b} g(x)\left[\int_{c}^{d} h(y)\,dy\right]dx \\
&= \left[\int_{a}^{b} g(x)dx\right]\left[\int_{c}^{d} h(y)\,dy\right]
\end{aligned}$$

ทำนองเดียวกัน

$$\int_{c}^{d}\int_{a}^{b} f(x,y)\,dxdy = \left[\int_{c}^{d} h(y)dy\right]\left[\int_{a}^{b} g(x)\,dx\right]$$

ตัวอย่าง 6.1.6 จงหาค่าปริพันธ์สองชั้น $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{1}^{3} x(yx^2+y)\,dxdy$

แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{2}\int_{1}^{3} x(yx^2+y)\,dxdy &= \int_{-1}^{2}\int_{1}^{3} y\cdot(x^3+x)\,dxdy \\
&= \left[\int_{-1}^{2} y\,dy\right]\left[\int_{1}^{3} x^3+x\,dx\right] \\
&= \left[\frac{y^2}{2}\right]_{-1}^{2}\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}\right]_{1}^{3} \\
&= \left(2-\frac{1}{2}\right)\left(\left[\frac{81}{4}+\frac{9}{2}\right]-\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right]\right) \\
&= \frac{3}{2}\cdot 24 = 36
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.1.7 จงหาค่าปริพันธ์สองชั้น $\displaystyle\int_0^3\int_0^1 2x\sqrt{x^2+y}\;dxdy$

แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int_0^3\int_0^1 2x\sqrt{x^2+y}\;dxdy &= \int_0^3\left[\int_0^1 (x^2+y)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x\,dx\right]dy\\ &= \int_0^3\left[\frac{2}{3}(x^2+y)^{\frac{3}{2}}\right]_{x=0}^{x=1}dy\\ &= \int_0^3\left[\frac{2}{3}(1+y)^{\frac{3}{2}}\right]-\left[\frac{2}{3}\right]dy\\ &= \left[\frac{4}{15}(1+y)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}y\right]_{y=0}^{y=3}\\ &= \left[\frac{128}{15}-2\right]-\left[\frac{4}{15}-0\right]=\frac{94}{15}\end{aligned}$$

ฟังก์ชันสองตัวแปร $f(x,y)$ ที่หาปริพันธ์ได้โดยใช้ผลบวกรีมันน์ $\iint\limits_D f(x,y)\,dA$ มีความสัมพันธ์กับบทนิยาม 6.1.2 โดยใช้ทฤษฎีบทฟูบินีซึ่งจะละการพิสูจน์ในวิชานี้

ทฤษฎีบท 6.1.8 (ทฤษฎีบทฟูบินี (Fubini's Theorem))
ให้ $f: D\to\mathbb{R}$ เมื่อ $D=[a,b]\times[c,d]$ ถ้า f ต่อเนื่องบน D แล้ว f เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บน D และ

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dA=\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dydx=\int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dxdy$$

ตัวอย่าง 6.1.9 จงหาค่าปริพันธ์สองชั้น $\displaystyle\iint\limits_D x\sin(xy)\,dA$ เมื่อ $D=[0,1]\times[0,\frac{\pi}{2}]$

แนวคำตอบ เนื่องจาก $f(x,y)=x\sin(xy)$ ต่อเนื่องบนโดเมน $D=[0,1]\times[0,\frac{\pi}{2}]$
โดยทฤษฎีบทฟูบินี จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\iint\limits_D x\sin(xy)\,dA &= \int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(xy)\;dydx\\ &= \int_0^1\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(xy)\;dy\right]dx\\ &= \int_0^1 [-\cos(xy)]_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}}\,dx\\ &= \int_0^1\left[-\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)+1\right]dx\\ &= \left[-\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)+x\right]_{x=0}^{x=1}\\ &= \left[-\frac{2}{\pi}+1\right]-[0+0]=1-\frac{2}{\pi}\end{aligned}$$

แบบฝึกหัด 6.1

1. กำหนดให้ $f(x,y)=x^2y$ และ $D=[0,1]\times[0,1]$ จงหา $\iint\limits_D f\,dA$ โดยใช้ผลบวกรีมันน์

2. จงหาค่าปริพันธ์สองชั้นต่อไปนี้

2.1 $\displaystyle\int_0^1\int_{-1}^3(3-x+4y)\,dydx$

2.2 $\displaystyle\int_1^2\int_2^3(x^2y+xy^2)\,dxdy$

2.3 $\displaystyle\int_0^1\int_1^6\frac{1}{x+y}\,dxdy$

2.4 $\displaystyle\int_{-2}^2\int_3^8\,dxdy$

2.5 $\displaystyle\int_0^2\int_0^1 y\sin x\,dydx$

2.6 $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^y\cos x\,dxdy$

2.7 $\displaystyle\int_0^3\int_1^2\frac{1}{x(y+1)}\,dxdy$

2.8 $\displaystyle\int_0^1\int_1^3\frac{x-y}{x+y}\,dxdy$

2.9 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_1^2 y\cos(xy)\,dxdy$

2.10 $\displaystyle\int_0^{\ell\text{n}2}\int_0^{\ell\text{n}3}e^{x+y}\sin x\,dxdy$

3. จงหาค่าปริพันธ์สองชั้นต่อไปนี้บนอาณาบริเวณที่กำหนดให้

3.1 $\displaystyle\iint\limits_D(3x^2-y)dA$ $\quad D=[0,2]\times[0,3]$

3.2 $\displaystyle\iint\limits_D y\,dA$ $\quad D=\{(x,y)\,:\,-3\le x\le 3,\,-2\le y\le 5\}$

3.3 $\displaystyle\iint\limits_D\frac{y}{(xy+1)^2}dA$ $\quad D=[0,1]\times[0,1]$

3.4 $\displaystyle\iint\limits_D x\sqrt{1-x^2}\,dA$ $\quad D=$ อาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วย $x=0,x=1,y=2$ และ $y=3$

3.5 $\displaystyle\iint\limits_D x\cos(xy)\cos^2(\pi x)dA$ $\quad D=[0,\frac{1}{2}]\times[0,\pi]$

3.6 $\displaystyle\iint\limits_D xe^{xy}dA$ $\quad D=[0,1]\times[0,\ell\text{n}5]$

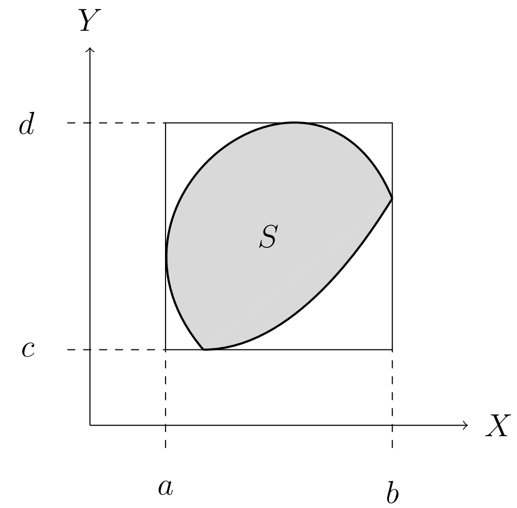
4. จงหาปริพันธ์สองชั้น $\displaystyle\int_{-1}^1\int_0^1(x+1)^{2565}(xy+y)^{100}\,dydx$

5. จงหาปริพันธ์สองชั้น $\displaystyle\int_1^2\int_0^1\frac{1}{y^2+x^2}\,dxdy$

6.2 ปริพันธ์สองชั้นบนโดเมนทั่วไป

ให้ $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ เมื่อ $S \subset D = [a, b] \times [c, d]$

รูปที่ 6.2: โดเมนทั่วไปของฟังก์ชันสองตัวแปร



ให้ $\tilde{f} : D \to \mathbb{R}$ นิยามโดย

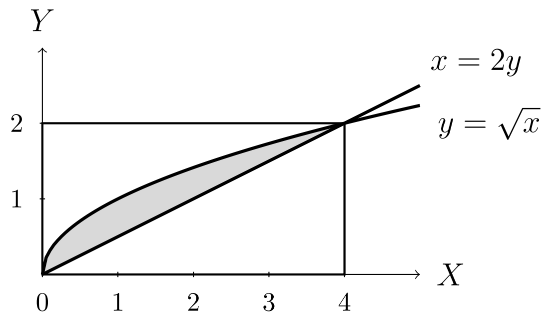
$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{เมื่อ } x \in S \\ 0 & \text{เมื่อ } x \notin S \end{cases}$$

ถ้า $\tilde{f}$ เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บน D เราจะกล่าวได้ว่า f เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บน S โดยนิยามค่าของปริพันธ์เป็น

$$\iint_S f = \iint_D \tilde{f}$$

ตัวอย่าง 6.2.1 กำหนดให้ $f(x, y) = 4xy$ และ S เป็นอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = \sqrt{x}$ และเส้นตรง $x = 2y$ จงหาค่าของ $\iint_S f$

แนวคำตอบ จะได้กราฟแสดงอาณาบริเวณ S ดังรูป



จะได้ว่า $S \subseteq [0, 4] \times [0, 2]$

แบบที่ 1 $S = \{(x, y) : 0 \le x \le 4$ และ $\frac{x}{2} \le y \le \sqrt{x}\}$

$$\begin{aligned}
\iint\limits_S f &= \int_0^4 \int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} 4xy\,dydx \\
&= \int_0^4 \left[\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} 4xy\,dy\right] dx \\
&= \int_0^4 \left[2xy^2\right]_{y=\frac{x}{2}}^{y=\sqrt{x}} dx \\
&= \int_0^4 \left[2x\left(x - \frac{x^2}{4}\right)\right] dx \\
&= \int_0^4 \left(2x^2 - \frac{x^3}{2}\right) dx \\
&= \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{8}\right]_{x=0}^{x=4} \\
&= \left[\frac{128}{3} - \frac{256}{8}\right] - 0 = \frac{32}{3}
\end{aligned}$$

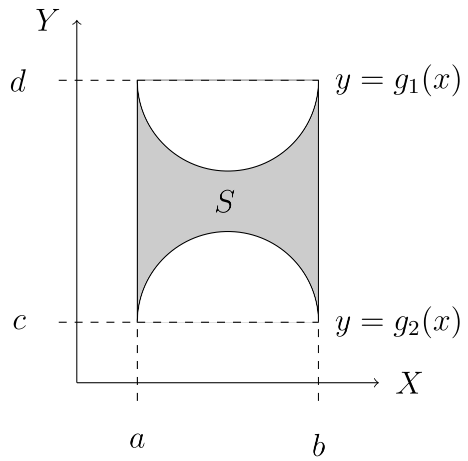
แบบที่ 2 $S = \{(x, y) : 0 \le y \le 2$ และ $y^2 \le x \le 2y\}$

$$\begin{aligned}
\iint\limits_S f &= \int_0^2 \int_{y^2}^{2y} 4xy\,dxdy \\
&= \int_0^2 \left[\int_{y^2}^{2y} 4xy\,dx\right] dy \\
&= \int_0^2 \left[2x^2y\right]_{x=y^2}^{x=2y} dy \\
&= \int_0^2 \left[2y(4y^2 - y^4)\right] dy \\
&= \int_0^2 \left[8y^3 - 2y^5\right] dy \\
&= \left[2y^4 - \frac{y^6}{3}\right]_{y=0}^{y=2} \\
&= \left[2(16) - \frac{64}{3}\right] - 0 = \frac{32}{3}
\end{aligned}$$

จากตัวอย่างข้างต้นเราสามารถหาปริพันธ์สองชั้นโดยการพิจารณาตามลำดับการหาปริพันธ์คือ

ชนิดที่ 1 $\boldsymbol{dydx}$ (Type I) กำหนดโดย $S = \{(x, y) \,:\, a \le x \le b$ และ $g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$

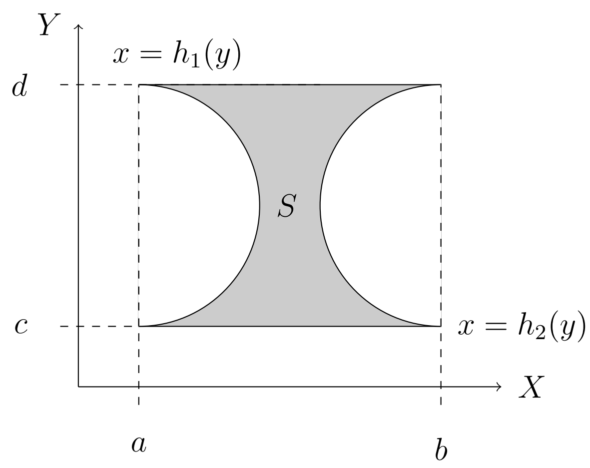
รูปที่ 6.3: โดเมนทั่วไปของฟังก์ชันสองตัวแปรชนิดที่ 1 $dydx$



$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } c \le y < g_1(x) \\ f(x,y) & \text{เมื่อ } g_1(x) \le y \le g_2(x) \\ 0 & \text{เมื่อ } g_2(x) < y \le d \end{cases} \text{ และ } \iint\limits_S f = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dydx$$

ชนิดที่ 2 $\boldsymbol{dxdy}$ (Type II) กำหนดโดย $S = \{(x, y) \,:\, c \le y \le d$ และ $h_1(y) \le x \le h_2(y)\}$

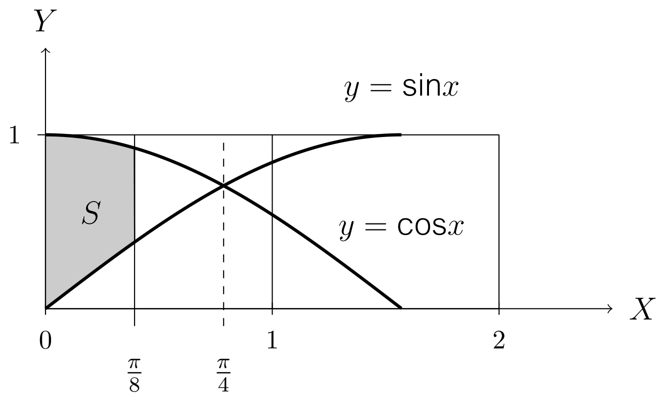
รูปที่ 6.4: โดเมนทั่วไปของฟังก์ชันสองตัวแปรชนิดที่ 2 $dxdy$



$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } a \le x < h_1(y) \\ f(x,y) & \text{เมื่อ } h_1(y) \le x \le h_2(y) \\ 0 & \text{เมื่อ } h_2(y) < x \le b \end{cases} \text{ และ } \iint\limits_S f = \int_a^b \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dxdy$$

ตัวอย่าง 6.2.2 จงหาค่าของ $\displaystyle\iint_S y$ เมื่อ $S = \{(x,y) \,:\, 0 \le x \le \frac{\pi}{8}$ และ $\sin x \le y \le \cos x\}$

แนวคำตอบ เขียนกราฟแสดงอาณาบริเวณของ S ได้ดังนี้

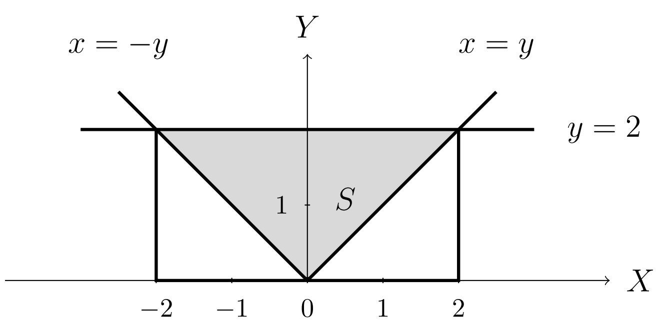


จะได้ว่า $S \subseteq [0, \frac{\pi}{8}] \times [0,1]$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\iint_S f = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \int_{\sin x}^{\cos x} y\, dydx &= \int_0^{\frac{\pi}{8}} \left[\int_{\sin x}^{\cos x} y\, dy\right] dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{8}} \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=\sin x}^{y=\cos x} dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{8}} \left[\frac{1}{2}(\cos^2 x - \sin^2 x)\right] dy \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{8}} \left[\frac{1}{2}\cos 2x\right] dy \\
&= \left[\frac{1}{4}\sin 2x\right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{8}} = \frac{\sqrt{2}}{8} - 0 = \frac{\sqrt{2}}{8}
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.2.3 จงหาค่าปริพันธ์สองชั้นของ $f(x,y) = x^2 + y^2$ บนอาณาบริเวณที่ล้อมรอบด้วย $y = |x|$ และ $y = 2$

แนวคำตอบ ให้ S เป็นอาณาบริเวณที่ล้อมรอบด้วย $y = |x|$ และ $y = 2$ แสดงได้ดังนี้



จะได้ว่า $S \subseteq [-2,2] \times [0,2]$ และ

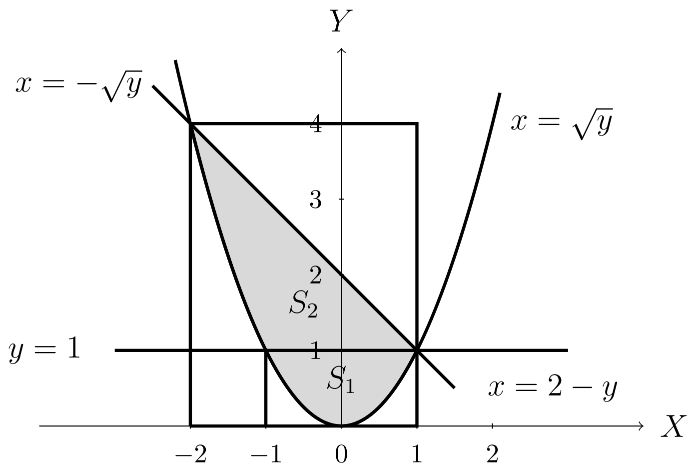
$$S = \{(x,y) : 0 \le y \le 2 \text{ และ } -y \le x \le y\}$$

ดังนั้น

$$\iint_S f = \int_0^2 \int_{-y}^{y} x^2 + y^2\, dxdy = \int_0^2 \left[\int_{-y}^{y} x^2 + y^2\, dx\right] dy$$
$$= \int_0^2 \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x\right]_{x=-y}^{x=y} dy$$
$$= \int_0^2 \left[\frac{y^3}{3} + y^3\right] - \left[-\frac{y^3}{3} - y^3\right] dy$$
$$= \int_0^2 \frac{8y^3}{3} dy$$
$$= \left[\frac{2y^4}{3}\right]_{y=0}^{y=2} = \frac{32}{3} - 0 = \frac{32}{3}$$

ตัวอย่าง 6.2.4 จงหาค่าของ $\iint_S xy^2\, dA$
เมื่อ S เป็นอาณาบริเวณที่ล้อมรอบด้วย $y = x^2$ และ $x + y = 2$

แนวคำตอบ เขียนกราฟแสดงอาณาบริเวณของ S ได้ดังนี้



เราจะแบ่งอาณาบริเวณของ S ออกเป็น 2 ส่วน นั่นคือ $S = S_1 \cup S_2$ โดยที่
$S_1 \subseteq [-1, 1] \times [0, 1]$ และ

$$S_1 = \{(x, y) : 0 \le y \le 1 \text{ และ } -\sqrt{y} \le x \le \sqrt{y}\}$$

$S_2 \subseteq [-2, 1] \times [1, 4]$ และ

$$S_2 = \{(x, y) : 1 \le y \le 4 \text{ และ } -\sqrt{y} \le x \le 2 - y\}$$

ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_S f &= \iint\limits_{S_1} f + \iint\limits_{S_2} f \\
&= \int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} xy^2 \, dxdy + \int_1^4 \int_{-\sqrt{y}}^{2-y} xy^2 \, dxdy \\
&= \int_0^1 \left[\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} xy^2 \, dx \right] dy + \int_1^4 \left[\int_{-\sqrt{y}}^{2-y} xy^2 \, dx \right] dy \\
&= \int_0^1 \left[\frac{1}{2} x^2 y^2 \right]_{x=-\sqrt{y}}^{x=\sqrt{y}} dy + \int_1^4 \left[\frac{1}{2} x^2 y^2 \right]_{x=-\sqrt{y}}^{x=2-y} dy \\
&= \int_0^1 \left[\frac{1}{2} y^2 (y - y) \right] dy + \int_1^4 \left[\frac{1}{2} y^2 ((2-y)^2 - y) \right] dy \\
&= \int_0^1 0dy + \int_1^4 \left[\frac{1}{2} (4y^2 - 5y^3 + y^4) \right] dy \\
&= 0 + \frac{1}{2} \left[\frac{4}{3} y^3 - \frac{5}{4} y^3 + \frac{1}{5} y^4 \right]_{y=1}^{y=4} \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{256}{3} - 80 + \frac{256}{5} \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{4}{3} - \frac{5}{4} + \frac{1}{5} \right] \\
&= \frac{424}{15} - \frac{17}{120} = \frac{225}{8}
\end{aligned}
$$

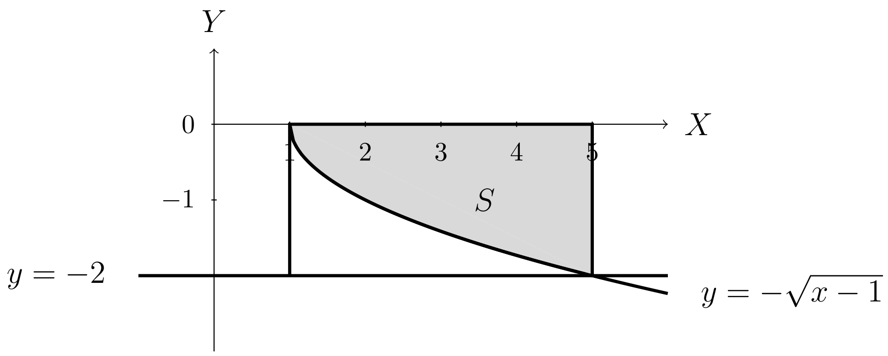
เนื่องจากค่าปริพันธ์สองชั้นบนโดเมน S มีเพียงค่าเดียว ดังนั้นไม่ว่าจะหาปริพันธ์สองชั้นจาก ชนิดที่ 1 $dydx$ หรือชนิดที่ 2 $dxdy$ ที่เรียกตามลำดับการหาปริพันธ์ เราอาจต้องการเปลี่ยนลำดับการหาปริพันธ์ในกรณีที่ลำดับเดิมอาจหาปริพันธ์ได้โดยยาก

ตัวอย่าง 6.2.5 จงเปลี่ยนลำดับการปริพันธ์ของ $\displaystyle\int_{-2}^{0} \int_{1+y^2}^{5} f(x,y) \, dxdy$

แนวคำตอบ ปริพันธ์สองชั้นเป็นชนิดที่ 2 $dxdy$ โดยที่

$$S = \{(x,y) : -2 \leq y \leq 0 \text{ และ } 1 + y^2 \leq x \leq 5\}$$

พิจารณากราฟ $x = 1 + y^2$ หรือ $y = -\sqrt{x-1}$ เมื่อ $y \leq 0$ แสดงได้ดังรูป



จะได้ว่า $S \subseteq [0,5] \times [-2,0]$ ในชนิดที่ 1 $dydx$

$$S = \{(x,y) : 1 \leq x \leq 5 \text{ และ } -\sqrt{x-1} \leq y \leq 0\}$$

ดังนั้นปริพันธ์สองชั้นที่เปลี่ยนลำดับคือ $\displaystyle\int_1^5 \int_{-\sqrt{x-1}}^{0} f(x,y) \, dydx$

ตัวอย่าง 6.2.6 จงเปลี่ยนลำดับการปริพันธ์ของ $\displaystyle\int_2^6 \int_{|x-3|}^{\frac{x}{2}} f(x,y)\,dydx$

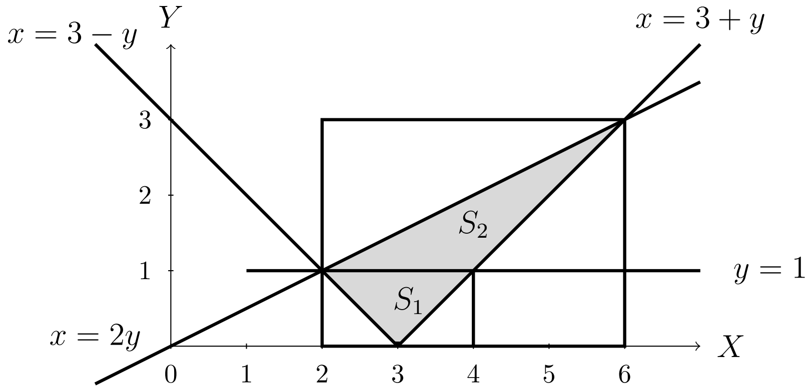
แนวคำตอบ ปริพันธ์สองชั้นเป็นชนิดที่ 1 $dydx$ โดยที่

$$S = \left\{(x,y) : 2 \le x \le 6 \text{ และ } |x-3| \le y \le \frac{x}{2}\right\}$$

พิจารณากราฟ $y = |x-3|$ หรือ $y = \pm(x-3)$ นั่นคือ

$$x = 3+y \text{ เมื่อ } x \ge 3 \text{ และ } x = 3-y \text{ เมื่อ } x \le 3$$

และ $y = \frac{x}{2}$ หรือ $x = 2y$ แสดงได้ดังรูป



จะได้ว่า $S \subseteq [2,6] \times [0,3]$ ในชนิดที่ 2 $dxdy$ เราจะแบ่งออก 2 ส่วน $S = S_1 \cup S_2$ โดยที่ $S_1 \subseteq [2,4] \times [0,1]$ และ

$$S_1 = \{(x,y) : 0 \le y \le 1 \text{ และ } 3-y \le x \le 3+y\}$$

$S_2 \subseteq [2,6] \times [1,3]$ และ

$$S_2 = \{(x,y) : 1 \le y \le 3 \text{ และ } 2y \le x \le 3+y\}$$

ดังนั้นปริพันธ์สองชั้นที่เปลี่ยนลำดับคือ

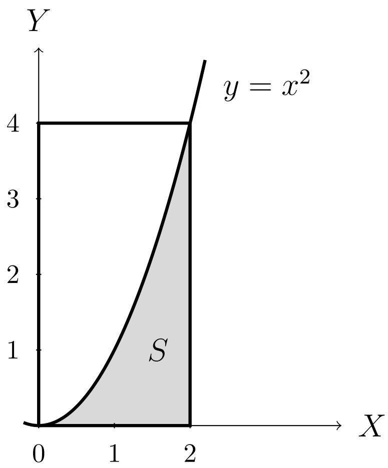
$$\int_2^6 \int_{|x-3|}^{\frac{x}{2}} f(x,y)\,dydx = \int_0^1 \int_{3-y}^{3+y} f(x,y)\,dxdy + \int_1^3 \int_{2y}^{3+y} f(x,y)\,dxdy$$

ตัวอย่าง 6.2.7 จงหาค่าของ $\displaystyle\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 e^{x^3}\, dxdy$

แนวคำตอบ จะเห็นว่าการหาปริพันธ์เทียบตัวแปร x ทำได้โดยยากหรืออาจหาไม่ได้ และปริพันธ์สองชั้นเป็นชนิดที่ 2 $dxdy$ โดยที่

$$S = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 4 \text{ และ } \sqrt{y} \leq x \leq 2\}$$

พิจารณากราฟ $x = \sqrt{y}$ หรือ $y = x^2$ เมื่อ $x \geq 0$ แสดงได้ดังรูป



จะได้ว่า $S \subseteq [0, 2] \times [0, 4]$ ในชนิดที่ 1 $dydx$

$$S = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2 \text{ และ } 0 \leq y \leq x^2\}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 e^{x^3}\, dxdy &= \int_0^2 \int_0^{x^2} e^{x^3}\, dydx \\
&= \int_0^2 \left[\int_0^{x^2} e^{x^3}\, dy\right] dx \\
&= \int_0^2 \left[ye^{x^3}\right]_{y=0}^{y=x^2} dx \\
&= \int_0^2 \left[x^2 e^{x^3}\right] dx \\
&= \left[\frac{1}{3}e^{x^3}\right]_{x=0}^{x=2} \\
&= \frac{1}{3}e^8 - \frac{1}{3} = \frac{e^8 - 1}{3} \approx 993.32
\end{aligned}$$

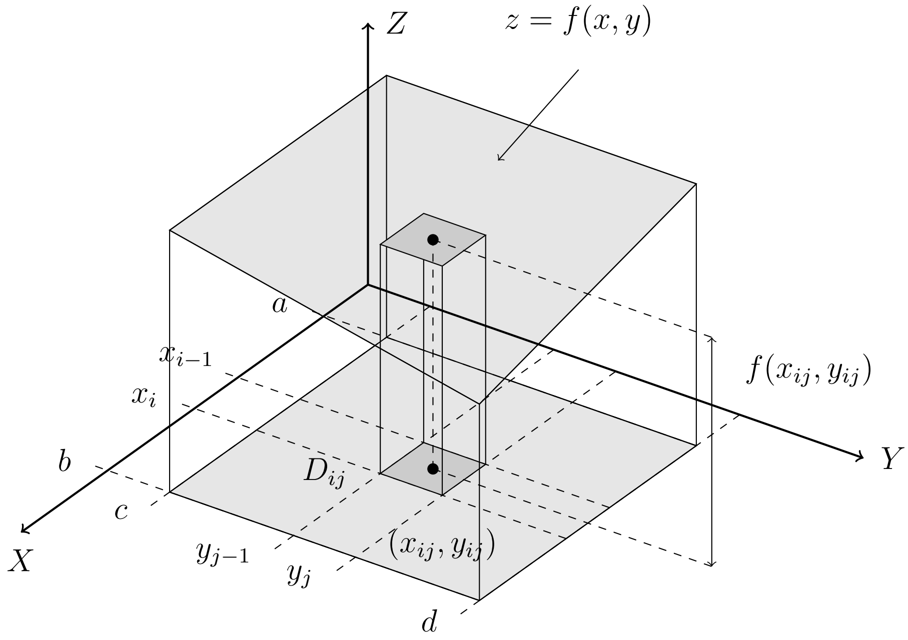
บทประยุกต์ของปริพันธ์สองชั้น

พิจารณาฟังก์ชัน $f(x,y) \geq 0$ ทุก $(x,y) \in S$ ซึ่งอินทิเกรตได้บน S จากนิยามของการหาปริพันธ์ได้โดยใช้ผลบวกรีมันน์ จะมีความหมายคล้ายคลึงกับปริพันธ์ในฟังก์ชันตัวแปรเดียวนั่นคือ

$$\iint_S f\,dA = \text{ปริมาตรของรูปทรงตันซึ่งอยู่ภายใต้พื้นผิว } z = f(x,y) \text{ บน } S$$

จากรูป 6.1 เราจะแสดงตัวอย่างของปริมาตรของรูปทรงตันซึ่งอยู่ภายใต้พื้นผิว $z = f(x,y)$ บน $D = [a,b] \times [c,d]$ ซึ่งเป็นโดเมนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ดังรูปต่อไปนี้

รูปที่ 6.5: ปริมาตรของรูปทรงตันซึ่งอยู่ภายใต้พื้นผิว $z = f(x,y)$ บน $D = [a,b] \times [c,d]$

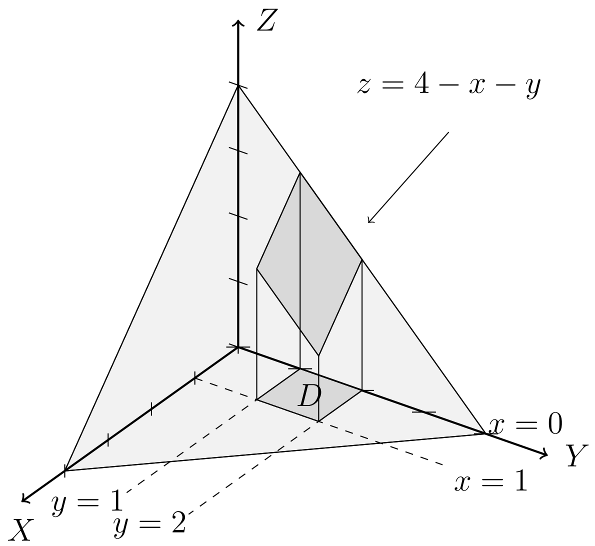


สำหรับกรณี $f(x,y) = 1$ จะได้ว่า

$$\iint_S dA = \text{พื้นที่อาณาบริเวณของ } S$$

ตัวอย่าง 6.2.8 จงหาปริมาตรรูปทรงตันที่อยู่เหนือระนาบ XY ซึ่งปิดล้อมด้วย ระนาบ $x+y+z=4$ และปิดล้อมด้วยระนาบ $x=0$, $x=1$, $y=1$ และ $y=2$

แนวคำตอบ เขียนกราฟแสดงพื้นผิวและรูปทรงตันได้ดังนี้



จากรูปจะเห็นได้ว่าพื้นผิวคือ $f(x,y)=z=4-x-y$ โดยมีโดเมน

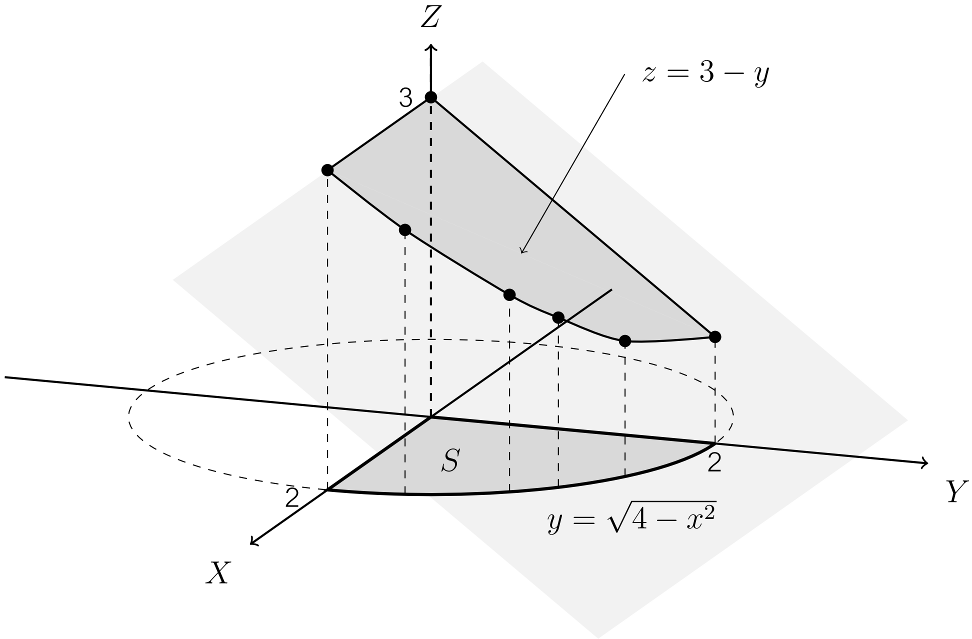
$$D=[0,1]\times[1,2]=\{(x,y):0\leq x\leq 1 \text{ และ } 1\leq y\leq 2\}$$

ดังนั้นปริมาตรของรูปทรงตันซึ่งอยู่ภายใต้พื้นผิว $z=f(x,y)$ บน D เท่ากับ

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D f\,dA &= \int_1^2\int_0^1 f(x,y)\,dxdy \\
&= \int_1^2\left[\int_0^1 (4-x-y)\,dx\right]dy \\
&= \int_1^2\left[4x-\frac{1}{2}x^2-yx\right]_{x=0}^{x=1}dy \\
&= \int_1^2\left[\left(4-\frac{1}{2}-y\right)-0\right]dy \\
&= \int_1^2\left[\frac{7}{2}-y\right]dy \\
&= \left[\frac{7}{2}y-\frac{1}{2}y^2\right]_{y=1}^{y=2} \\
&= [7-2]-\left[\frac{7}{2}-\frac{1}{2}\right] \\
&= 5-3=2
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.2.9 จงหาปริมาตรของรูปทรงตันในอัฐภาคที่หนึ่งซึ่งอยู่เหนือระนาบ XY และปิดล้อมด้วยพื้นผิว $x^2 + y^2 = 4$ และระนาบ $y + z = 3$

แนวคำตอบ เขียนกราฟแสดงพื้นผิวและรูปทรงตันได้ดังนี้



จากรูปจะเห็นได้ว่าพื้นผิวคือ $f(x, y) = z = 3 - y$ โดยมีโดเมน

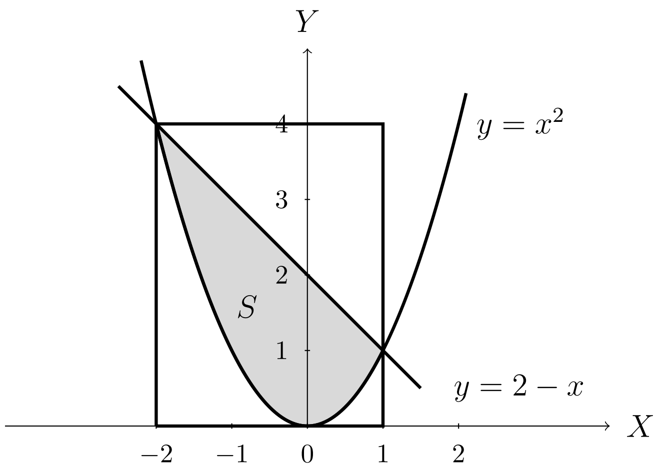
$$S = \{(x, y) : 0 \le x \le 2 \text{ และ } 0 \le y \le \sqrt{4 - x^2}\}$$

ดังนั้นปริมาตรของรูปทรงตันซึ่งอยู่ภายใต้พื้นผิว $z = f(x, y)$ บน S เท่ากับ

$$\begin{aligned}
\iint_S f\,dA &= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y)\,dydx \\
&= \int_0^2 \left[\int_0^{\sqrt{4-x^2}} (3 - y)\,dy\right] dx \\
&= \int_0^2 \left[3y - \frac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=\sqrt{4-x^2}} dx \\
&= \int_0^2 \left[\left(3\sqrt{4 - x^2} - \frac{1}{2}(4 - x^2)\right) - 0\right] dx \\
&= 3\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}dx - \frac{1}{2}\int_0^2 (4 - x^2)dx \\
&= 3 \cdot \frac{1}{4}(\text{พื้นที่รูปวงกลมรัศมี 2 หน่วย}) - \frac{1}{2}\left[4x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^2 \\
&= 3 \cdot \frac{1}{4}(4\pi) - \frac{1}{2}\left[\left(8 - \frac{8}{3}\right) - 0\right] \\
&= 3\pi - \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.2.10 จงใช้ปริพันธ์สองชั้นหาพื้นที่ของอาณาบริเวณ R ที่ปิดล้อมด้วย $y = x^2$ และ $x + y = 2$

แนวคำตอบ เขียนกราฟแสดงอาณาบริเวณของ S ได้ดังนี้



จะได้ว่า

$$S = \{(x, y) : -2 \leq x \leq 1 \text{ และ } 2 - x \leq y \leq x^2\}$$

ดังนั้นพื้นที่ของอาณาบริเวณ S เท่ากับ

$$\begin{aligned}
\iint\limits_S dA &= \int_{-2}^{1} \int_{2-x}^{x^2} 1\, dy dx \\
&= \int_{-2}^{1} [y]_{y=2-x}^{y=x^2} dx \\
&= \int_{-2}^{1} \left[(2-x) - x^2\right] dx \\
&= \left[2x - \frac{x}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{1} \\
&= \left[2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right] - \left[-4 + 1 + \frac{8}{3}\right] \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

แบบฝึกหัด 6.2

1. จงเปลี่ยนลำดับการหาปริพันธ์ และเขียนรูปแสดงอาณาบริเวณของการห่ปริพันธ์

1.1 $\displaystyle\int_{-2}^{0}\int_{2-\sqrt{4-x^2}}^{2+\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dydx$

1.2 $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{1}^{e^y} f(x,y)\,dxdy$

1.3 $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{x^2-4}^{0} f(x,y)\,dxdy$

1.4 $\displaystyle\int_{0}^{3}\int_{(y-1)^2}^{y+1} f(x,y)\,dxdy$

2. จงหาค่าของ

2.1 $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-y^2}} x\,dxdy$

2.2 $\displaystyle\int_{1}^{2}\int_{x}^{2x} \frac{1}{(x+y)^3}\,dydx$

2.3 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{y} xye^{x^2}\,dxdy$

2.4 $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{1} |x-y|\,dydx$

2.5 $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{y} x\sqrt{y^2-x^2}\,dxdy$

2.6 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_{0}^{x^2} \frac{1}{x}\cos\left(\frac{y}{x}\right)\,dydx$

2.7 $\displaystyle\int_{1}^{3}\int_{0}^{x} \frac{2}{x^2+y^2}\,dydx$

2.8 $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{\sqrt{x}}^{\sqrt[3]{x}} (1+y^6)\,dydx$

2.9 $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{4x}^{x} e^{-y^2}\,dydx$

2.10 $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}} \sec^2(\cos x)\,dxdy$

3. จงหาค่าปริพันธ์สองชั้น $\displaystyle\iint_S f(x,y)\,dA$ ต่อไปนี้บนอาณาบริเวณที่กำหนดให้

3.1 $f(x,y)=\cos(x+y)$ S คืออาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วย $y=x$, $x=\pi$ และแกน X

3.2 $f(x,y)=xy^2$ S คืออาณาบริเวณเหนือเส้นตรง $y=1-x$ และอยู่ภายในวงกลม $x^2+y^2=1$

3.3 $f(x,y)=\dfrac{2y-1}{x+1}$ S คืออาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วย $y=2x-4$, $y=0$ และ $x=1$

4. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่ปิดล้อมด้วย

4.1 ระนาบ $x+2y+3z=6$ ในอัฐภาคที่หนึ่ง

4.2 พื้นผิว $z=1-x^2-y^2$ เหนือระนาบ XY

5. จงใช้ปริพันธ์สองชั้นหาพื้นที่ของอาณาบริเวณ R ที่ปิดล้อมด้วย

5.1 $y^2+x=0$ และ $y=x+2$

5.2 $y=x^2$ และ $y=\sqrt{x}$

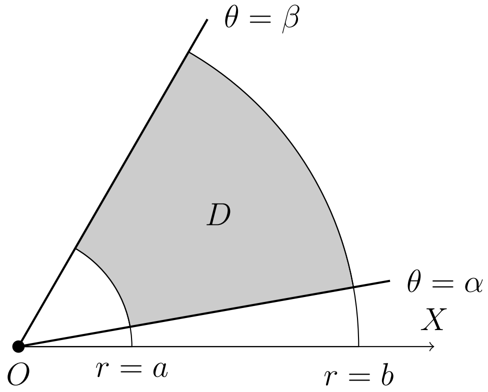
5.3 $xy=16$, $y=x$, $y=0$ และ $x=8$

6.3 ปริพันธ์สองชั้นบนระบบพิกัดเชิงขั้ว

พิจารณาโดเมนในระบบพิกัดเชิงขั้ว

$$D = \{(r,\theta) \,:\, a \le r \le b \text{ และ } \alpha \le \theta \le \beta\}$$

รูปที่ 6.6: โดเมนในระบบพิกัดเชิงขั้ว



ให้ $f : D \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บน D จะแบ่งอาณาบริเวณ D ออกเป็นส่วนย่อย ๆ คือ แบ่ง $[a,b]$ ออกเป็น m ช่วงย่อยด้วยจุด $r_0, r_1, r_2, ..., r_m$ โดยที่

$$a = r_0 < r_1 < r_2 < ... < r_m = b$$

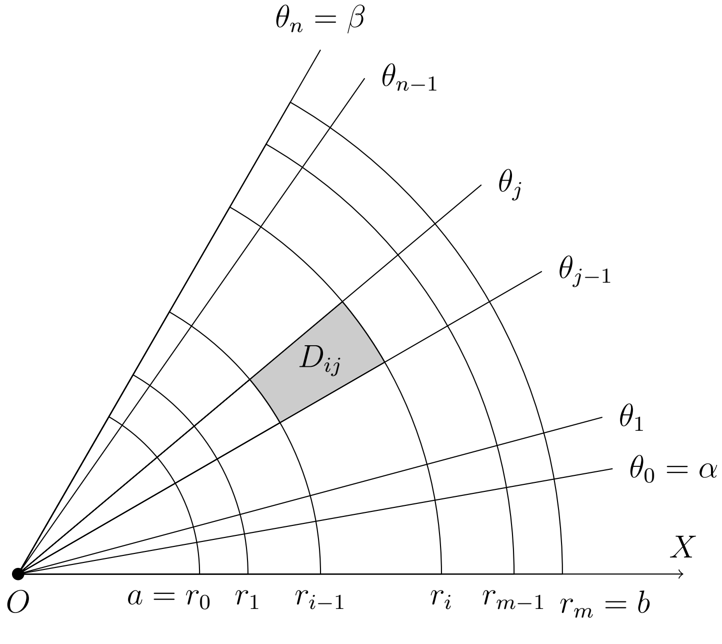
แบ่ง $[\alpha,\beta]$ ออกเป็น n ช่วงย่อยด้วยจุด $\theta_0, \theta_1, \theta_2, ..., \theta_n$ โดยที่

$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < ... < \theta_n = \beta$$

สำหรับ $i = 1,2,3,...,m$ และ $j = 1,2,3,...,n$ ให้

$$D_{ij} = \{(r,\theta) \,:\, r_{i-1} \le r \le r_i \text{ และ } \theta_{j-1} \le \theta \le \theta_j\}$$

รูปที่ 6.7: การแบ่งพื้นที่ย่อยของโดเมนในระบบพิกัดเชิงขั้ว



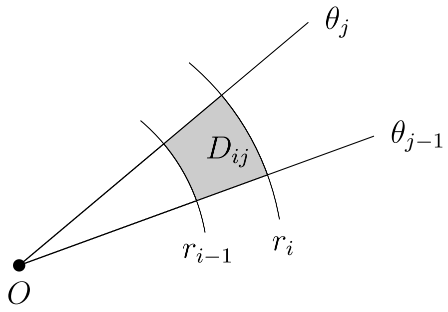
ให้ (x_{ij}, y_{ij}) เป็นจุดใน D_{ij} ดังนั้น

$x_{ij} = r_{ij}\cos\theta_{ij}$ และ $y_{ij} = r_{ij}\sin\theta_{ij}$ เมื่อ $r_{i-1} \leq r_{ij} \leq r_i$ และ $\theta_{j-1} \leq \theta_{ij} \leq \theta_j$

และ ΔA_{ij} เป็นพื้นที่ของอาณาบริเวณ D_{ij} ดังนั้นผลบวกรีมันน์คือ

$$S_{mn} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}, y_{ij})\Delta A_{ij}$$

รูปที่ 6.8: พื้นที่ย่อยที่เกิดจากการแบ่งโดเมนในระบบพิกัดเชิงขั้ว



$$\begin{aligned}\Delta A_{ij} &= \frac{1}{2}r_i^2(\theta_j - \theta_{j-1}) - \frac{1}{2}r_{i-1}^2(\theta_j - \theta_{j-1}) = \frac{1}{2}(r_i^2 - r_{i-1}^2)(\theta_j - \theta_{j-1}) \\ &= \frac{1}{2}(r_i + r_{i-1})(r_i - r_{i-1})(\theta_j - \theta_{j-1}) \\ &= r_{ij}(r_i - r_{i-1})(\theta_j - \theta_{j-1}) \quad \text{(เลือก } r_{ij} = \frac{1}{2}(r_i + r_{i-1}) \text{ เป็นจุดกึ่งกลาง)}\end{aligned}$$

ดั้นนั้น

$$S_{mn} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(r_{ij}\cos\theta_{ij}, r_{ij}\sin\theta_{ij})r_{ij}(r_i - r_{i-1})(\theta_j - \theta_{j-1})$$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บน D ดังนั้น

$$\iint\limits_D f = \lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} S_{mn} = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,drd\theta$$

สรุปได้ว่า

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,drd\theta$$

หรือ

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_\alpha^\beta f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,d\theta dr$$

ตัวอย่าง 6.3.1 กำหนดให้ $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ จงหาค่าของ $\int_0^{\pi}\int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,drd\theta$

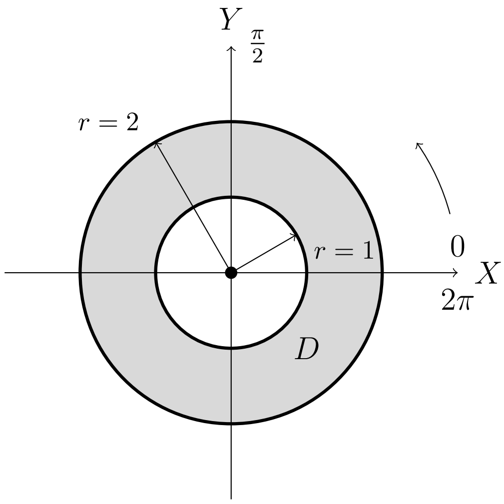
แนวคำตอบ ให้ $x=r\cos\theta$ และ $y=r\sin\theta$ จะได้ว่า $x^2+y^2=r^2$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,drd\theta &= \int_0^{\pi}\int_0^1 \sqrt{r^2}\cdot r\,drd\theta\\ &= \int_0^{\pi}\int_0^1 r^2\,drd\theta\\ &= \int_0^{\pi}\left[\frac{1}{3}r^3\right]_{r=0}^{r=1}d\theta\\ &= \int_0^{\pi}\frac{1}{3}d\theta = \left[\frac{1}{3}\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi} = \frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.3.2 ให้ D เป็นอาณาบริเวณในจตุภาคที่หนึ่ง ซึ่งอยู่ระหว่างวงกลม $x^2+y^2=1$ และ $x^2+y^2=4$ จงหา

$$\iint_D \frac{1}{x^2+y^2+1}\,dA$$

แนวคำตอบ เขียนกราฟแสดงอาณาบริเวณของ D ได้ดังนี้



จะได้ว่าโดเมนในระบบพิกัดเชิงขั้ว

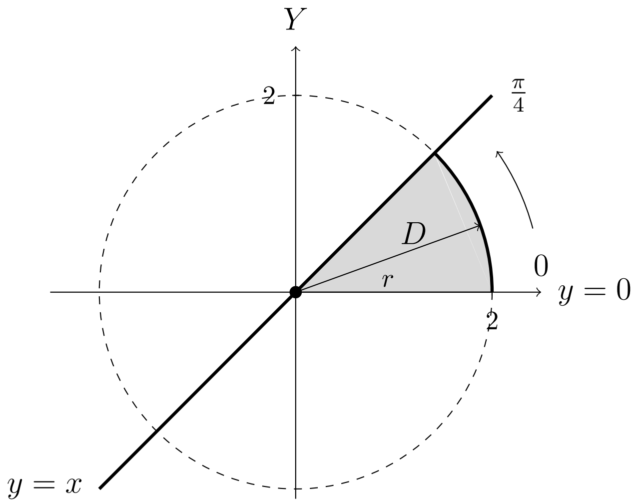
$$D=\{(r,\theta): 1\le r\le 2 \text{ และ } 0\le\theta\le 2\pi\}$$

ให้ $x=r\cos\theta$ และ $y=r\sin\theta$ จะได้ว่า $x^2+y^2=r^2$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{1}{x^2+y^2+1}\,dA &= \int_0^{2\pi}\int_1^2 \frac{1}{r^2+1}\cdot r\,drd\theta\\ &= \int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}\ln(r^2+1)\right]_{r=1}^{r=2}d\theta\\ &= \int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}\ln 5-\frac{1}{2}\ln 2\right]d\theta\\ &= \frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}\cdot[\theta]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \pi\ln\frac{5}{2}\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.3.3 จงหาค่าของ $\displaystyle\iint\limits_D \cos(x^2+y^2)\,dA$ เมื่อ D เป็นอาณาบริเวณในจตุภาคที่หนึ่งที่ปิดล้อมด้วยวงกลม $x^2+y^2=4$ และ เส้นตรง $y=0$ และ $y=x$

แนวคำตอบ จะเห็นว่าการหาปริพันธ์สองชั้นดังกล่าวทำได้ยากในระบบพิกัดฉาก ดังนั้นเราจะเปลี่ยนให้เป็นปริพันธ์สองชั้นในระบบพิกัดเชิงขั้ว โดยพิจารณาจากอาณาบริเวณ D แสดงได้ดังรูป



จากรูปโดเมน D ในระบบพิกัดเชิงขั้วคือ

$$D=\left\{(r,\theta):0\le r\le 2 \text{ และ } 0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\right\}$$

ให้ $x=r\text{cos}\theta$ และ $y=r\text{sin}\theta$ จะได้ว่า $x^2+y^2=r^2$ ดังนั้น

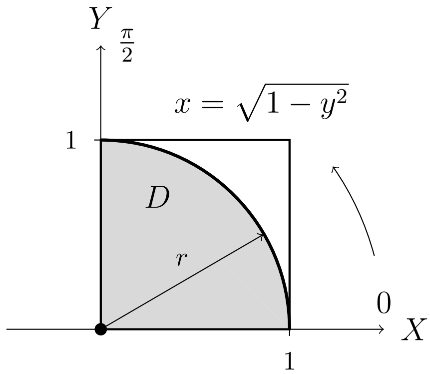
$$\begin{aligned}\iint\limits_D \cos(x^2+y^2)\,dA &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^2 \cos(r^2)\cdot r\,drd\theta\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{1}{2}\text{sin}(r^2)\right]_{r=0}^{r=2}d\theta\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{1}{2}\text{sin}4-0\right]d\theta\\ &= \frac{1}{2}\text{sin}4\cdot[\theta]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}}\\ &= \frac{\pi\text{sin}4}{8}\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.3.4 จงหาค่าของ $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} e^{x^2+y^2}\,dxdy$

แนวคำตอบ จะเห็นว่าการหาปริพันธ์สองชั้นดังกล่าวทำได้ยากในระบบพิกัดฉาก ดังนั้นเราจะเปลี่ยนให้เป็นปริพันธ์สองชั้นในระบบพิกัดเชิงขั้ว โดยพิจารณาจากอาณาบริเวณ D ซึ่ง

$$D = \{(x,y) : 0 \leq y \leq 1 \text{ และ } 0 \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\}$$

พิจารณากราฟ $x = \sqrt{1-y^2}$ หรือ $x^2+y^2 = 1$ เมื่อ $x \geq 0$ แสดงได้ดังรูป



จากรูปโดเมน D ในระบบพิกัดเชิงขั้วคือ

$$D = \left\{(r,\theta) : 0 \leq r \leq 1 \text{ และ } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right\}$$

ให้ $x = r\text{cos}\theta$ และ $y = r\text{sin}\theta$ จะได้ว่า $x^2+y^2 = r^2$ ดังนั้น

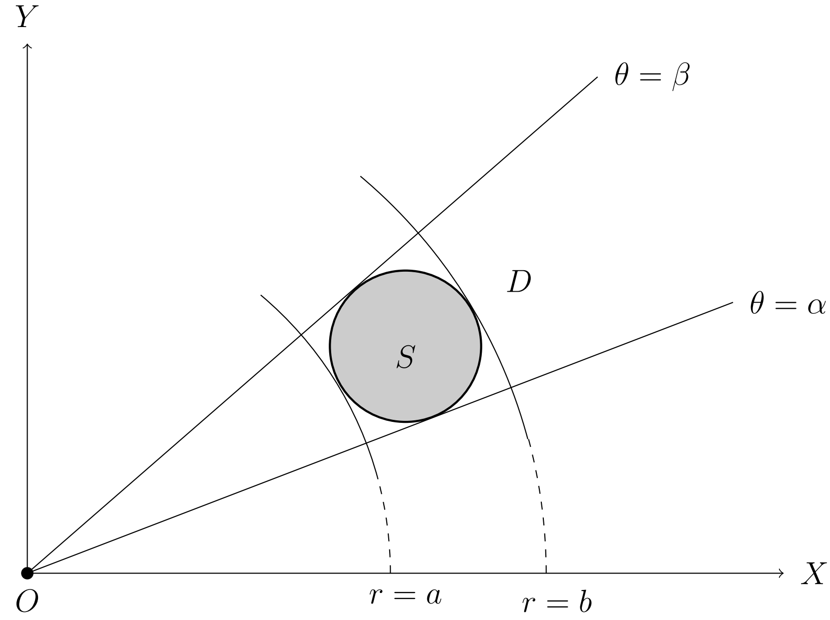
$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} e^{x^2+y^2}\,dxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 e^{r^2}\cdot r\,drd\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2}e^{r^2}\right]_{r=0}^{r=1} d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2}e - \frac{1}{2}\right] d\theta \\
&= \frac{e-1}{2}\cdot[\theta]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi(e-1)}{4}
\end{aligned}$$

การปริพันธ์บนโดเมนทั่วไป S เมื่อ $f : S \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้ เมื่อ $x = r\cos\theta$ และ $y = r\sin\theta$ เราจะหาค่าของ $\iint\limits_S f$ โดยการสร้างรูป

$$D = \{(r, \theta) \,:\, a \leq r \leq b,\, \alpha \leq \theta \leq \beta\}$$

ล้อมรอบ S แสดงดังรูปต่อไปนี้

รูปที่ 6.9: การสร้างรูป D ล้อมรอบโดเมนทั่วไป S ในระบบพิกัดเชิงขั้ว



และกำหนดฟังก์ชัน $\tilde{f} : D \to \mathbb{R}$ นิยามโดย

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{เมื่อ } x \in S \\ 0 & \text{เมื่อ } x \notin S \end{cases}$$

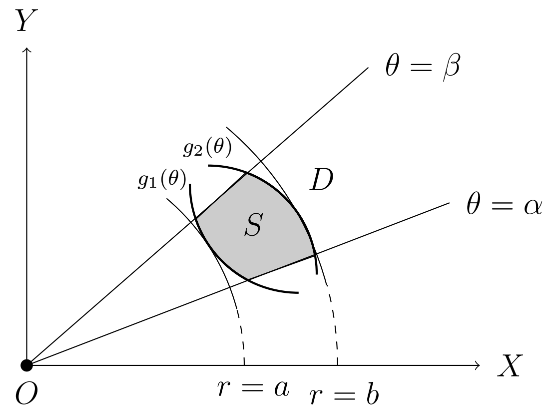
ถ้า $\tilde{f}$ เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บน D เราจะกล่าวได้ว่า f เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บน S โดยนิยามค่าของปริพันธ์เป็น

$$\iint\limits_S f(x, y)\, dA = \iint\limits_D \tilde{f}(x, y)\, dA$$

การหาปริพันธ์สองชั้นในระบบพิกัดเชิงขั้วโดยพิจารณาโดเมนได้ 2 ชนิด ตามลำดับการหาปริพันธ์

ชนิดที่ 1 $drd\theta$ (Type I) $S = \{(r,\theta)\ :\ \alpha \leq \theta \leq \beta$ และ $g_1(\theta) \leq r \leq g_2(\theta)\}$

รูปที่ 6.10: โดเมนทั่วไปของฟังก์ชันสองตัวแปรชนิดที่ 1 $drd\theta$

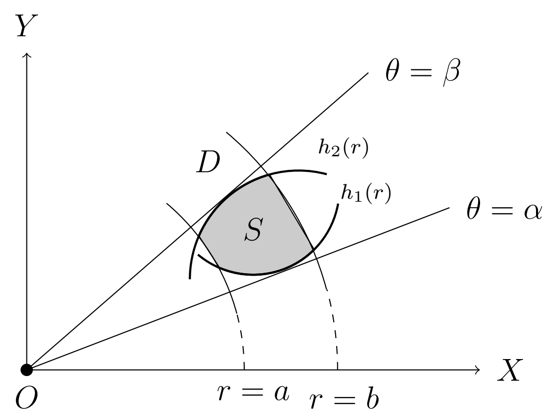


$$\tilde{f}(x,y) = \tilde{f}(r\cos\theta, r\sin\theta) = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } a \leq r < g_1(\theta) \\ f(r\cos\theta, r\sin\theta) & \text{เมื่อ } g_1(\theta) \leq r \leq g_2(\theta) \\ 0 & \text{เมื่อ } g_2(\theta) < r \leq b \end{cases}$$

$$\iint\limits_S f(x,y)\,dA = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,drd\theta$$

ชนิดที่ 2 $d\theta dr$ (Type II) $S = \{(r,\theta)\ :\ a \leq r \leq b$ และ $h_1(r) \leq \theta \leq h_2(r)\}$

รูปที่ 6.11: โดเมนทั่วไปของฟังก์ชันสองตัวแปรชนิดที่ 2 $d\theta dr$



$$\tilde{f}(x,y) = \tilde{f}(r\cos\theta, r\sin\theta) = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } \alpha \leq \theta < h_1(r) \\ f(r\cos\theta, r\sin\theta) & \text{เมื่อ } h_1(r) \leq \theta \leq h_2(r) \\ 0 & \text{เมื่อ } h_2(\theta) < \theta \leq \beta \end{cases}$$

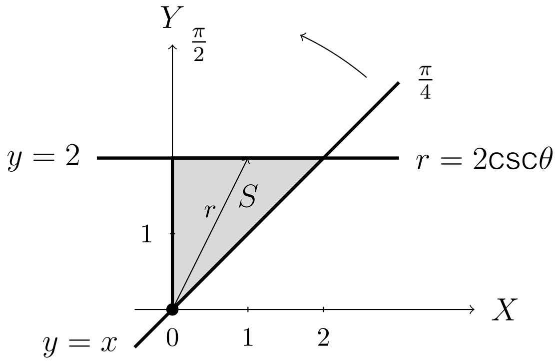
$$\iint\limits_S f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{h_1(r)}^{h_2(r)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,d\theta dr$$

ตัวอย่าง 6.3.5 จงเขียนปริพันธ์ $\displaystyle\int_0^2 \int_x^2 f(x,y)\,dydx$ ให้อยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

แนวคำตอบ จากปริพันธ์สองชั้นจะได้เมนในระบบพิกัดฉากคือ

$$S = \{(x,y) : 0 \le x \le 2 \text{ และ } x \le y \le 2\}$$

ให้ $x = r\cos\theta$ และ $y = r\sin\theta$ จากเส้นตรง $y = x$ จะได้ว่า $r\sin\theta = r\cos\theta$ นั่นคือ $\theta = \frac{\pi}{4}$
เขียนกราฟแสดงได้ดังนี้



พิจารณาเส้นตรง $y = 2$ ในระบบพิกัดฉาก $r\sin\theta = 2$ ฉะนั้น $r = 2\csc\theta$
จะได้เมนในระบบพิกัดเชิงขั้วคือ

$$S = \left\{(r,\theta) : \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \text{ และ } 0 \le r \le 2\csc\theta\right\}$$

ดังนั้น

$$\int_0^2 \int_x^2 f(x,y)\,dydx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\csc\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,rdrd\theta$$

ตัวอย่าง 6.3.6 จงเขียนปริพันธ์ $\displaystyle\int_{-2}^2 \int_{2-\sqrt{4-y^2}}^{2+\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dxdy$ ให้อยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

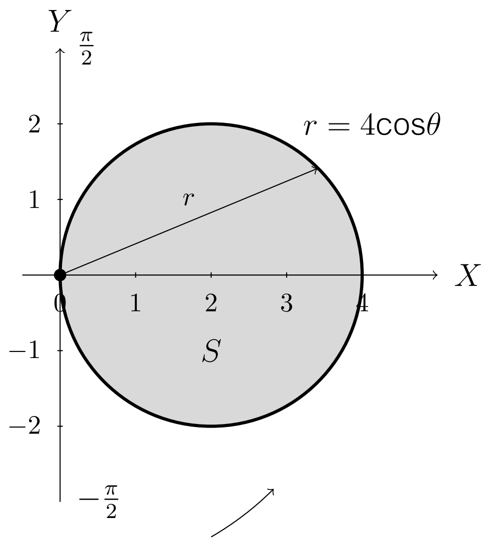
แนวคำตอบ จากปริพันธ์สองชั้นจะได้เมนในระบบพิกัดฉากคือ

$$S = \left\{(x,y) : -2 \le y \le 2 \text{ และ } 2 - \sqrt{4-y^2} \le x \le 2 + \sqrt{4-y^2}\right\}$$

พิจารณากราฟของ $x = 2 - \sqrt{4-y^2}$ หรือ $(x-2)^2 + y^2 = 4$ เมื่อ $-2 \le y \le 2$
ให้ $x = r\cos\theta$ และ $y = r\sin\theta$ กราฟวงกลมนี้ $(x-2)^2 + y^2 = 4$ เปลี่ยนเป็นระบบเชิงขั้วได้ดังนี้

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 4 + y^2 + y^2 &= 4 \\ (x^2 + y^2) &= 4x \\ r^2 &= 4r\cos\theta \\ r &= 4\cos\theta \end{aligned}$$

เขียนกราฟแสดงได้ดังนี้



จากรูปได้เมนในระบบพิกัดเชิงขั้วคือ

$$S = \{(r,\theta) : -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ และ } 0 \leq r \leq 4\csc\theta\}$$

ดังนั้น

$$\int_{-2}^{2}\int_{2-\sqrt{4-y^2}}^{2+\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dxdy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{4\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,rdrd\theta$$

ตัวอย่าง 6.3.7 จงหาค่าของ $\displaystyle\int_{1}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dydx$

แนวคำตอบ จะเห็นว่าการหาปริพันธ์สองชั้นดังกล่าวทำได้ยากในระบบพิกัดฉาก ดังนั้นเราจะเปลี่ยนให้เป็นปริพันธ์สองชั้นในระบบพิกัดเชิงขั้ว โดยพิจารณาจากอาณาบริเวณ S ซึ่ง

$$S = \{(x,y) : 1 \leq x \leq 2 \text{ และ } -\sqrt{4-y^2} \leq y \leq \sqrt{4-y^2}\}$$

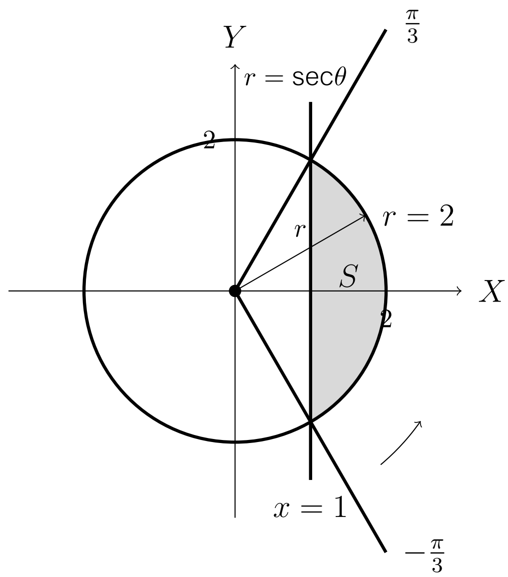
พิจารณากราฟ $x = \sqrt{4-y^2}$ หรือ $x^2+y^2=4$ เมื่อ $-1 \leq x \leq 1$ ให้ $x = r\cos\theta$ และ $y = r\sin\theta$ จะได้กราฟวงกลมนี้ $x^2+y^2=4$, $x=1$ และ $x=2$ เปลี่ยนเป็นระบบเชิงขั้วได้ดังนี้

$$\begin{aligned} x^2+y^2 = 4 &\quad\longrightarrow\quad r = 2 \\ x = 1 &\quad\longrightarrow\quad r\cos\theta = 1 \text{ หรือ } r = \sec\theta \end{aligned}$$

จุดตัดของ $x^2+y^2=4$ และ $x=1$ หาได้จาก

$$1^2+y^2 = 4 \quad\longrightarrow\quad y = \pm\sqrt{3}$$

ฉะนั้น $\tan\theta = \frac{y}{x} = \pm\sqrt{3}$ นั่นคือ $\theta = -\frac{\pi}{3}$ และ $\theta = \frac{\pi}{3}$ เขียนกราฟแสดงได้ดังนี้



จากรูปได้เมนในระบบพิกัดเชิงขั้วคือ

$$S = \left\{(r,\theta) : -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \text{ และ } \sec\theta \leq r \leq 2\right\}$$

ดังนั้น

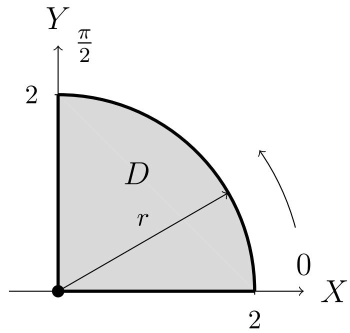
$$\begin{aligned}
\int_1^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dydx &= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \int_{\sec\theta}^{2} \frac{1}{\sqrt{r^2}} \cdot rdrd\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left[\int_{\sec\theta}^{2} 1dr\right] d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} [r]_{r=\sec\theta}^{r=2}\, d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} [2 - \sec\theta]\, d\theta \\
&= [2\theta - \ell\text{n}|\sec\theta + \tan\theta|]_{\theta=-\frac{\pi}{3}}^{\theta=\frac{\pi}{3}} \\
&= \left[\frac{2\pi}{3} - \ell\text{n}(2+\sqrt{3})\right] - \left[-\frac{2\pi}{3} - \ell\text{n}(2-\sqrt{3})\right] \\
&= \frac{4\pi}{3} + \ell\text{n}\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right) \\
&= \frac{4\pi}{3} + \ell\text{n}(7 - 2\sqrt{3})
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.3.8 จงหาปริมาตรทรงตันในอัฐภาคที่หนึ่งซึ่งอยู่เหนือระนาบ XY และปิดล้อมด้วยพื้นผิว $x^2 + y^2 = 4$ และระนาบ $y + z = 3$ โดยใช้การหาปริพันธ์สองชั้นในระบบพิกัดเชิงขั้ว

แนวคำตอบ จากตัวอย่าง 6.2.9 จะมีพื้นผิวคือ $f(x, y) = z = 3 - y$ โดยมีโดเมน

$$S = \{(x, y) : 0 \le x \le 2 \text{ และ } 0 \le y \le \sqrt{4 - x^2}\}$$

แสดงได้ดังรูป



จากรูปจะเห็นได้ว่าพื้นผิวคือ $f(x, y) = z = 3 - y$ โดยมีโดเมนในระบบพิกัดเชิงขั้วคือ

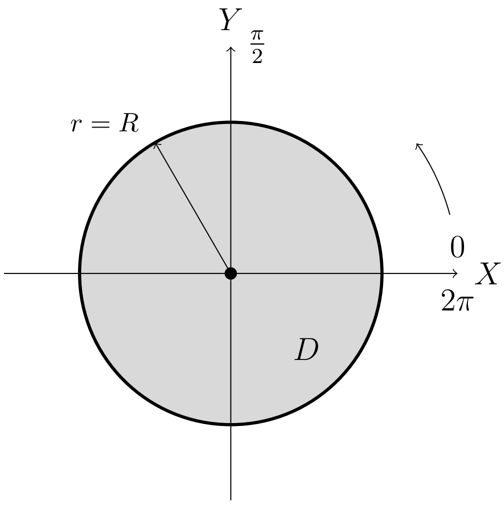
$$S = \{(x, y) : 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \text{ และ } 0 \le r \le 2\}$$

ให้ $x = r\cos\theta$ และ $y = r\sin\theta$ ดังนั้นปริมาตรของรูปทรงตันซึ่งอยู่ภายใต้พื้นผิว $z = f(x, y) = 3 - y$ บน S เท่ากับ

$$\begin{aligned}
\iint\limits_S f\,dA &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 (3 - r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 3r - r^2\sin\theta\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{3r^2}{2} - \frac{r^3}{3}\sin\theta\right]_{r=0}^{r=2} d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\left(6 - \frac{8}{3}\sin\theta\right) - 0\right] d\theta \\
&= \left[6\theta + \frac{8}{3}\cos\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \\
&= [3\pi + 0] - \left[0 + \frac{8}{3}\right] \\
&= 3\pi - \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.3.9 จงใช้ปริพันธ์สองชั้นในระบบพิกัดเชิงขั้ว แสดงว่าพื้นที่วงกลมรัศมี R เท่ากับ πR^2

แนวคำตอบ พิจารณากราฟวงกลม $x^2 + y^2 = R^2$ แสดงองค์ประกอบได้ดังนี้



จากรูปได้เมนในระบบพิกัดเชิงขั้วคือ

$$S = \{(r, \theta) : 0 \le \theta \le 2\pi \text{ และ } 0 \le r \le R\}$$

ดังนั้นพื้นที่วงกลมรัศมี R เท่ากับ

$$\begin{aligned}
\iint\limits_S dA &= \int_0^{2\pi} \int_0^R 1 \cdot r dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=R} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{2} d\theta \\
&= \left[\frac{R^2}{2}\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \\
&= \pi R^2
\end{aligned}$$

แบบฝึกหัด 6.3

1. จงเขียนปริพันธ์ต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปพิกัดเชิงขั้วพร้อมเขียนรูปแสดงอาณาบริเวณ

   1.1 $\int_0^3 \int_0^x f(x,y)\,dydx$

   1.2 $\int_0^1 \int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dxdy$

   1.3 $\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dydx$

   1.4 $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{|y|}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dxdy$

   1.5 $\int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 f(x,y)\,dydx$

2. จงเขียนปริพันธ์ต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปพิกัดฉากพร้อมเขียนรูปแสดงอาณาบริเวณ

   2.1 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos\theta} r^2\,drd\theta$

   2.2 $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\csc\theta}^{2\csc\theta} r\cos\theta\,drd\theta$

   2.3 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\sec\theta} r^2\sin 2\theta\,drd\theta$

3. จงหาค่าปริพันธ์สองชั้น $\iint\limits_S f(x,y)\,dA$ ต่อไปนี้บนอาณาบริเวณที่กำหนดให้

   3.1 $f(x,y) = \sqrt{1+4x^2+4y^2}$ S คืออาณาบริเวณในจตุภาคที่หนึ่งที่ปิดล้อมด้วย $x^2+y^2=4$

   3.2 $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ S คืออาณาบริเวณที่อยู่ภายในวงกลม $x^2+y^2=4x$ และอยู่ภายนอกวงกลม $x^2+y^2=4$

   3.3 $f(x,y) = x+y$ S คืออาณาบริเวณในจตุภาคที่หนึ่งที่ปิดล้อมด้วย $x^2+y^2=4$, $y=\sqrt{3}x$ และ $y=0$

   3.4 $f(x,y) = y\sqrt{x^2+y^2}$ S คืออาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยครึ่งวงกลม $y=\sqrt{2x-x^2}$ และแกน X

4. จงหาพื้นที่ของบริเวณซึ่งปิดล้อมด้วยวงกลม $x^2+y^2=1$ และเส้นตรง $x=3$, $y=x$ และ $y=0$

5. จงหาพื้นที่ของบริเวณที่อยู่ภายในวงกลม $x^2+y^2=4$ เมื่อ $y \geq 3$

6. จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณในจตุภาคที่หนึ่งซึ่งอยู่ภายในวงกลม $x^2+y^2=1$ และวงกลม $x^2+y^2=2y$

สรุป

ในบทนี้ศึกษาการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันหลายตัวแปร โดยเริ่มต้นจากโดเมนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า แล้วใช้ผลบวกรีมันน์ จากนั้นหาปริพันธ์สองชั้นเทียบที่ละตัวแปร ศึกษาปริพันธ์สองชั้นบนโดเมนทั่วไปโดยอาศัยการเปลี่ยนเป็นฟังก์ชันบนโดเมนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ล้อมรอบโดเมนทั่วไปซึ่งแบ่งเป็น 2 ชนิดคือ 1 $dydx$ และ ชนิดที่ 2 $dxdy$ ถ้าการหาปริพันธ์ในระบบพิกัดฉากทำได้โดยยาก เราอาจเปลี่ยนเป็นโดเมนในระบบพิกัดเชิงขั้ว โดยเปลี่ยน $f(x,y)dA$ เป็น $f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta$ หรือ $f(r\cos\theta, r\sin\theta)rd\theta dr$

แบบฝึกหัดบทที่ 6

1. จงหาค่าปริพันธ์สองชั้น $\displaystyle\int_0^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} y\sin^2(xy)dxdy$
2. จงหาค่าปริพันธ์สองชั้น $\displaystyle\int_{-1}^1\int_0^1 y^2e^{yx}dydx$
3. จงเปลี่ยนลำดับการหาปริพันธ์ $\displaystyle\int_{-2}^1\int_{x^2}^{2-x} f(x,y)dydx$
4. จงเปลี่ยนลำดับการหาปริพันธ์ $\displaystyle\int_0^3\int_{(y-1)^2}^{y+1} f(x,y)dxdy$
5. จงหาค่า $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_0^{x^2} \frac{1}{x}\cos\left(\frac{y}{x}\right)dydx$
6. จงหาค่า $\displaystyle\int_0^1\int_{4x}^4 e^{-y^2}dydx$
7. จงหาค่า $\displaystyle\int_1^3\int_0^x \frac{1}{x^2+y^2}dydx$
8. จงหา $\displaystyle\iint\limits_S f$ เมื่อ $f(x,y)=\dfrac{2y-1}{x+1}$ และ S คืออาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วย $y=2x-4, y=0$ และ $x=1$
9. จงเขียนปริพันธ์ต่อไปนี้ในรูปพิกัดเชิงขั้ว $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\int_{|y|}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dxdy$
10. จงเขียนปริพันธ์ต่อไปนี้ในรูปพิกัดเชิงขั้ว $\displaystyle\int_0^1\int_{\sqrt{3}x}^{\sqrt{3}} f(x,y)\,dydx$
11. จงหา $\displaystyle\iint_S f(x,y)dA$ เมื่อ $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$
    และ S คืออาณาบริเวณภายในวงกลม $x^2+y^2=4x$ และภายนอกวงกลม $x^2+y^2=4$
12. จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วย $x^2+y^2=1$, $y=x$, $y=0$ และ $x=3$ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้นในระบบพิกัดเชิงขั้ว

13. จงหาพื้นที่ของบริเวณซึ่งปิดล้อมด้วยวงกลม $x^2 + y^2 = 4x$ และเส้นโค้ง $y = \sqrt{2x}$ กับแกน X

14. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันเหนือระนาบ XY ซึ่งอยู่ภายใต้พื้นผิว $z = 1 - x^2 - y^2$ และล้อมรอบด้วยพื้นผิวด้านข้างด้วย $x^2 + y^2 = x$

15. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันเหนือระนาบ XY ซึ่งอยู่ภายใต้พื้นผิว $z = 4 + x + 2y$ และล้อมรอบด้วยพื้นผิวด้านข้างด้วย $x^2 + y^2 = 1$

16. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันในอัฐภาคที่หนึ่งซึ่งปิดล้อมด้านข้างด้วย $x^2 + y^2 = 4y$ และส่วนบนปิดด้วย $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

17. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันเหนือระนาบ XY ซึ่งล้อมรอบด้วยด้านข้างด้วยพื้นผิว $x^2 + y^2 - 2x = 0$ และส่วนบนปิดด้วยพื้นผิว $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

18. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่อยู่ภายใต้พื้นที่ผิว $z = 4x^3 + 3x^2y$ และอยู่เหนือรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า $D = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 4\}$

19. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันในอัฐภาคที่หนึ่งซึ่งปิดล้อมด้วย

$$\text{ระนาบ } x = 0, z = 0, x = 5, z - y = 0 \text{ และ } z = 6 - 2y$$

20. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่ปิดล้อมด้วย

    20.1 ระนาบ $x + y + z = 3$, $y = x$, $x + y = 2$, $x = 0$ และ $z = 0$ โดยที่ $x + y \geq 2$

    20.2 พื้นผิว $4x^2 + y^2 = 9$ ระนาบ $z = y + 3$ และอยู่เหนือระนาบ XY

    20.3 พื้นผิว $z = x^2 + y^2$ และ $x^2 + y^2 = 4$ ในอัฐภาคที่หนึ่ง

21. จงหาปริมาตรทรงตันในอัฐภาคที่หนึ่งซึ่งปิดล้อมด้วยพื้นผิว $z = 4 - x^2 - y^2$ และระนาบ $x + y = 1$ โดยที่ $x + y \leq 1$

22. จงใช้ปริพันธ์สองชั้นหาพื้นที่ของอาณาบริเวณ R ที่ปิดล้อมด้วย

    22.1 $y = 2|x|$ และ $y = x + 1$

    22.2 $y^2 = 9 - x$ และ $y^2 = 9 - 9x$

    22.3 $y = x^2 + x$ และ $y = 3 - x^2$

บทที่ 7

สมการเชิงอนุพันธ์เบื้องต้น

7.1 สมการเชิงอนุพันธ์

สมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ฟังก์ชันกับอนุพันธ์ของฟังก์ชันนั้น เรียกว่า**สมการเชิงอนุพันธ์** (differential equation) ตัวอย่างเช่น

1. สมการการเคลื่อนที่ (Equation of motion)
$$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=f(t)$$
2. สมการการเติบโตของจำนวนประชากร (Population growth equation)
$$\frac{dP}{dt}=kP$$
3. สมการคลื่นในหนึ่งมิติ (One-dimensional wave equation)
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

บทนิยาม 7.1.1 สมการเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันตัวแปรเดียวเรียกว่า **สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ** (Ordinary Differential Equation : ODE) ถ้าสมการเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันมากกว่าหนึ่งตัวแปร เรียกว่า **สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย** (Partial Differential Equation : PDE)

ตัวอย่าง 7.1.2 จงตรวจสอบว่าสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้เป็น ODE หรือ PDE

ตารางที่ 7.1: ตัวอย่างสมการ ODE และ PDE

สมการเชิงอนุพันธ์	ODE	PDE
$\frac{d^2y}{dx^2}+3x\frac{dy}{dx}=e^x$	✓	
$\frac{d^3x}{dt^3}-2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\frac{d^2x}{dt^2}$	✓	
$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\lambda\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2\sin x$		✓

บทนิยาม 7.1.3 อันดับ (order) ของสมการเชิงอนุพันธ์ คืออันดับสูงสุดของอนุพันธ์ที่ปรากฏในสมการนั้น **ดีกรี** (degree) ของสมการเชิงอนุพันธ์ คือกำลังสูงสุดของอนุพันธ์อันดับสูงสุดที่ปรากฏในสมการนั้น เมื่อจัดทุก ๆ กำลังเป็นจำนวนเต็มบวก

ตัวอย่าง 7.1.4 จงบอกอันดับและดีกรีของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

ตารางที่ 7.2: ตัวอย่างอันดับและดีกรีของสมการเชิงอนุพันธ์

สมการเชิงอนุพันธ์	อันดับ	ดีกรี
$\dfrac{dy}{dx} = x^3$	1	3
$y\dfrac{d^2y}{dx^2} + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = 0$	2	1
$xu\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)^3 = \cos t$	3	3
$xy^2 = y' + \sqrt{1+y'}$	1	2

บทนิยาม 7.1.5 เรียกสมการเชิงอนุพันธ์ว่า **สมการเชิงเส้น** (linear equation) ถ้า

1. ทุก ๆ ตัวแปรตามและอนุพันธ์ของตัวแปรตามมีเลขชี้กำลังเป็น 1
2. ไม่มีพจน์ในรูปผลคูณของตัวแปรตาม และ/หรือ อนุพันธ์ของตัวแปรตามปรากฏในสมการ
3. ไม่มีพจน์ในรูปฟังก์ชันอดิสัยของตัวแปรตามหรือ อนุพันธ์ของตัวแปรตามปรากฏในสมการ

และเรียกสมการเชิงอนุพันธ์ที่ไม่เป็นสมการเชิงเส้นว่า **สมการไม่เชิงเส้น** (nonlinear equation)

ตัวอย่าง 7.1.6 จงตรวจสอบว่าสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้เป็นสมการเชิงเส้นหรือไม่

ตารางที่ 7.3: ตัวอย่างสมการเชิงอนุพันธ์และสมการไม่เชิงเส้น

สมการเชิงอนุพันธ์	สมการเชิงเส้น	สมการไม่เชิงเส้น
$\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} + y = 3x^2$	✓	
$y\dfrac{d^3y}{dx^3} + \dfrac{dy}{dx} = \tan x$		✓
$\dfrac{\partial u}{\partial x} + \left(\dfrac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)^2 = \sin u$		✓
$xy^2 = y' + yy''$		✓
$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	✓	

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งดีกรีหนึ่งจะเขียนได้เป็น

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad \text{หรือ} \qquad M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

บทนิยาม 7.1.7 ฟังก์ชันซึ่งไม่เป็นฟังก์ชันของอนุพันธ์ และสอดคล้องสมการเชิงอนุพันธ์ เรียกว่า **ผลเฉลย** (solution) ของสมการเชิงอนุพันธ์

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อาจอยู่ในรูปของฟังก์ชันที่นิยามแบบแจ่มชัด (explicite function) หรือฟังก์ชันที่นิยามโดยปริยาย (implicite function) ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีค่าคงตัวไม่เจาะจงเรียกว่า **ผลเฉลยทั่วไป** (general solution) และผลเฉลยที่กำหนดค่าคงตัวแน่นอนเรียกว่า **ผลเฉลยเฉพาะ** (particular solution)

ตัวอย่าง 7.1.8 จงแสดงว่า $y = Ae^{-3x} + Be^{x}$ ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y'' + 2y' = 3y$

แนวคำตอบ เนื่องจาก

$$\begin{aligned} y' &= -3Ae^{-3x} + Be^{x} \\ y'' &= 9Ae^{-3x} + Be^{x} \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} y'' + 2y' &= (9Ae^{-3x} + Be^{x}) + 2(-3Ae^{-3x} + Be^{x}) \\ &= 3Ae^{-3x} + 3Be^{x} = 3(Ae^{-3x} + Be^{x}) = 3y \end{aligned}$$

ดังนั้น $y = Ae^{-3x} + Be^{x}$ ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y'' + 2y' = 3y$

ตัวอย่าง 7.1.9 จงแสดงว่า $y = \dfrac{1+ce^t}{1-ce^t}$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{2}(y^2 - 1)$

แนวคำตอบ เนื่องจาก

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{(1-ce^t)(1+ce^t)' - (1+ce^t)(1-ce^t)'}{(1-ce^t)^2} \\ &= \frac{(1-ce^t)(ce^t) - (1+ce^t)(-ce^t)}{(1-ce^t)^2} \\ &= \frac{ce^t - c^2e^{2t} + ce^t + c^2e^{2t}}{(1-ce^t)^2} = \frac{2ce^t}{(1-ce^t)^2} \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} y^2 - 1 &= \left(\frac{1+ce^t}{1-ce^t}\right)^2 - 1 \\ &= \frac{1 + 2ce^t + c^2e^{2t}}{(1-ce^t)^2} - 1 \\ &= \frac{1 + 2ce^t + c^2e^{2t}}{(1-ce^t)^2} - \frac{1 - 2ce^t + c^2e^{2t}}{(1-ce^t)^2} = \frac{4ce^t}{(1-ce^t)^2} \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2ce^t}{(1-ce^t)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{4ce^t}{(1-ce^t)^2}\right) = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$$

ดังนั้น $y = \dfrac{1+ce^t}{1-ce^t}$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{2}(y^2 - 1)$

ตัวอย่าง 7.1.10 จงแสดงว่า $y = x - \dfrac{1}{x}$ ผลเฉลยเฉพาะของสมการ $xy' + y = 2x$

แนวคำตอบ เนื่องจาก

$$y' = 1 + \frac{1}{x^2}$$

จะได้ว่า

$$xy' + y = x\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x - \frac{1}{x}\right) = 2x$$

ดังนั้น $y = x - \dfrac{1}{x}$ ผลเฉลยเฉพาะของสมการ $xy' + y = 2x$

ตัวอย่าง 7.1.11 จงแสดงว่า $y = \sin x\cos x - \cos x$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$y' + (\tan x)y = \cos^2 x$$

แนวคำตอบ เนื่องจาก

$$y' = -\sin^2 x + \cos^2 x + \sin x$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} y' + (\tan x)y &= \left(-\sin^2 x + \cos^2 x + \sin x\right) + (\tan x)\left(\sin x\cos x - \cos x\right) \\ &= -\sin^2 x + \cos^2 x + \sin x + \sin^2 x - \sin x \\ &= \cos^2 x \end{aligned}$$

ดังนั้น $y = \sin x\cos x - \cos x$ ผลเฉลยเฉพาะของสมการ $y' + (\tan x)y = \cos^2 x$

ตัวอย่าง 7.1.12 จงแสดงว่า $x^2y - xy^2 = c$ สอดคล้องสมการ $(x^2 - 2xy)y' = y^2 - 2xy$

แนวคำตอบ พิจารณาการหาอนุพันธ์โดยปริยาย

$$\begin{aligned} (x^2y - xy^2)' &= c' \\ x^2y' + 2xy - y^2 - 2xyy' &= 0 \\ (x^2 - 2xy)y' &= y^2 - 2xy \end{aligned}$$

ดังนั้น $x^2y - xy^2 = c$ สอดคล้องสมการ $(x^2 - 2xy)y' = y^2 - 2xy$

แบบฝึกหัด 7.1

1. จงบอกอันดับ ดีกรี รวมทั้งระบุว่าสมการใดเป็นสมการเชิงเส้น หรือเป็นสมการไม่เชิงเส้น

   1.1 $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 4x$

   1.2 $y''' + 2y'' + 3y' + 4y = \cos x$

   1.3 $e^x \dfrac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 + y'}$

   1.4 $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^5 + x\dfrac{d^2y}{dx^2} = \ln x$

   1.5 $(x^2 - 1)y' + xy^2 + 1 = 0$

   1.6 $u\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\dfrac{\partial u}{\partial x}$

2. จงแสดงว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

   2.1 $y = cx + \sqrt{1 - c^2}$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของ $xy' + \sqrt{1 - (y')^2} = y$

   2.2 $(x - c)^2 + y^2 = a^2$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของ $y^2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = a^2$

   2.3 $y^2 - x = 0$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของ $y = 2x\dfrac{dy}{dx}$

   2.4 $y = 4 + \dfrac{4}{x}$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของ $x\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} = 0$

7.2 สมการแยกตัวแปรได้

บทนิยาม 7.2.1 สมการเชิงอนุพันธ์ที่สามารถเขียนในรูป

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(x) \qquad \text{หรือ} \qquad M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0$$

เรียกว่าเป็น **สมการแบบแยกตัวแปรได้** (variable separable equation)

วิธีหาผลเฉลย สมการแบบแยกตัวแปรได้ คือสมการที่สามารถเขียนได้ในรูป

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy = 0$$

การหาผลเฉลยของสมการแบบแยกตัวแปรได้คือการอินทิเกรตแต่ละส่วน

$$\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)}\,dx + \int \frac{N_2(y)}{M_2(y)}\,dy = c$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจง

ตัวอย่าง 7.2.2 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

1. $3(1-y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0$

   แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}
3(1-y^2)\,dx &= 2xy\,dy \\
\frac{3}{x}\,dx &= \frac{2y}{1-y^2}\,dy \\
\int \frac{3}{x}\,dx &= \int \frac{2y}{1-y^2}\,dy = -\int \frac{1}{1-y^2}\,d(-y^2) \\
3\ell\text{n}|x| + C &= -\ell\text{n}|1-y^2|
\end{aligned}$$

   ดังนั้น $3\ell\text{n}|x| + C = -\ell\text{n}|1-y^2|$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ $3(1-y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0$

2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y-xy}{x^2+1}$

   แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{y(1-x)}{x^2+1} \\
\frac{1}{y}\,dy &= \frac{1-x}{x^2+1}\,dx = \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{x}{x^2}\right)dy \\
\int \frac{1}{y}\,dy &= \int \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{x}{x^2+1}\right)\,dx \\
\ell\text{n}|y| + C &= \text{arctan}x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,d(x^2) = \text{arctan}x - \frac{1}{2}\ell\text{n}|x^2+1|
\end{aligned}$$

   ดังนั้น $\ell\text{n}|y| + C = \text{arctan}x - \frac{1}{2}\ell\text{n}|x^2+1|$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y-xy}{x^2+1}$

ตัวอย่าง 7.2.3 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

1. $(\ell\text{n}\, y)^2 y' = x^2 y$ เมื่อ $y(3) = 1$

   แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}
(\ell\text{n}y)^2 \frac{dy}{dx} &= x^2 y \\
(\ell\text{n}y)^2 \cdot \frac{1}{y}\, dy &= x^2\, dx \\
\int (\ell\text{n}y)^2 \cdot \frac{1}{y}\, dy &= \int x^2\, dx \\
\int (\ell\text{n}y)^2 d(\ell\text{n}y) &= \frac{x^3}{3} + C \\
\frac{(\ell\text{n}y)^3}{3} &= \frac{x^3}{3} + C \\
(\ell\text{n}y)^3 &= x^3 + 3C
\end{aligned}$$

   แทน $x = 3$ และ $y = 1$ จะได้ว่า $0 = 27 + 3C$ ฉะนั้น $C = -9$

   ดังนั้น $(\ell\text{n}y)^3 = x^3 - 27$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการ $(\ell\text{n}\, y)^2 y' = x^2 y$

2. $4\sin^2 x\, dy + \sec^2 y\, dx = 0$ เมื่อ $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

   แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}
4\sin^2 x\, dy &= -\frac{1}{\cos^2 y}\, dx \\
4\cos^2 y\, dy &= -\frac{1}{\sin^2 x}\, dx \\
4\left(\frac{1 + \cos 2y}{2}\right)\, dy &= -\csc^2 x\, dx \\
(2 + 2\cos 2y)\, dy &= -\csc^2 x\, dx \\
\int 2 + 2\cos 2y\, dy &= -\int \csc^2 x\, dx \\
2y + \sin 2y &= \cot x + C
\end{aligned}$$

   แทน $x = \frac{\pi}{4}$ และ $y = \pi$ จะได้ว่า $2 = 1 + C$ ฉะนั้น $C = 1$

   ดังนั้น $2y + \sin 2y = \cot x + 1$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการ $4\sin^2 x\, dy + \sec^2 y\, dx = 0$

แบบฝึกหัด 7.2

1. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

   1.1 $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 4x$

   1.2 $(y^4 + y)y' = \sin x - \cos x$

   1.3 $x^3\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 - x^2y^2}$ เมื่อ $x > 0$

   1.4 $3(4y^2 + 1)\,dx = y(x - 1)\,dy$

   1.5 $\dfrac{1 + e^x}{1 - e^{-y}}dy + e^{x+y}\,dx = 0$

   1.6 $(x^2y + x^2)\,dx = (xy^2 - y^2)\,dy$

   1.7 $(x^2 + 1)y' + y^2 + 1 = 0$

   1.8 $(x^2y^2\sec x\tan x + xy^2\sec x)\,dx + xy^3\,dy = 0$

2. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

   2.1 $\cos^2 x\dfrac{dy}{dx} = \sin^2 y$ เมื่อ $y(0) = \dfrac{\pi}{2}$

   2.2 $\sqrt{x^2 + 1}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y}$ เมื่อ $y(\sqrt{3}) = 2$

   2.3 $dy = \dfrac{9e^x}{ey^2 + y^2e^2}\,dx$ เมื่อ $y(1) = 3$

   2.4 $x\,dy = \dfrac{y}{x - x^3}\,dx$ เมื่อ $y(2) = -2$

7.3 สมการเอกพันธุ์

บทนิยาม 7.3.1 เรียกฟังก์ชัน $F(x,y)$ ว่า**ฟังก์ชันเอกพันธุ์ดีกรี n** (homogeneous function of degree $\boldsymbol{n}$) ถ้ามีจำนวนเต็ม n ที่ทำให้

$$F(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n F(x,y) \qquad \text{สำหรับทุก ๆ จำนวนจริงบวก } \lambda$$

ตัวอย่าง 7.3.2 จงพิจารณาฟังก์ชันต่อไปนี้ว่าเป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์หรือไม่ ถ้าเป็นดีกรีเท่าใด

1. $f(x,y)=x^3+2xy^2$

   แนวคำตอบ ให้ λ เป็นจำนวนจริงบวก จะได้ว่า

   $$\begin{aligned} f(\lambda x,\lambda y) &= (\lambda x)^3+2(\lambda x)(\lambda y)^2=\lambda^3x^3+2\lambda^3xy^2 \\ &= \lambda^3(x^3+2xy^2)=\lambda^3 f(x,y) \end{aligned}$$

   ดังนั้น $f(x,y)=x^3+2xy^2$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ดีกรี 3

2. $f(x,y)=\dfrac{x^2-2y^2}{xy}$

   แนวคำตอบ ให้ λ เป็นจำนวนจริงบวก จะได้ว่า

   $$f(\lambda x,\lambda y)=\frac{(\lambda x)^2-2(\lambda y)^2}{(\lambda x)(\lambda y)}=\frac{\lambda^2(x^2-2y^2)}{\lambda^2 xy}=\lambda^0\cdot\frac{x^2-2y^2}{xy}=\lambda^0 f(x,y)$$

   ดังนั้น $f(x,y)=\dfrac{x^2-2y^2}{xy}$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ดีกรี 0

3. $f(x,y)=\dfrac{1}{y}\cos\left(\dfrac{x}{y}\right)$

   แนวคำตอบ ให้ λ เป็นจำนวนจริงบวก จะได้ว่า

   $$f(\lambda x,\lambda y)=\frac{1}{\lambda y}\cos\left(\frac{\lambda x}{\lambda y}\right)=\lambda^{-1}\cdot\frac{1}{y}\cos\left(\frac{x}{y}\right)=\lambda^{-1}f(x,y)$$

   ดังนั้น $f(x,y)=\dfrac{1}{y}\cos\left(\dfrac{x}{y}\right)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ดีกรี -1

4. $f(x,y)=x^2\sin(xy)$

   แนวคำตอบ สมมติว่า f เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์
   จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม n ซึ่ง $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n f(x,y)$ ทุก ๆ จำนวนจริงบวก λ นั่นคือ

   $$f(\lambda x,\lambda y)=(\lambda x)^2\sin(\lambda x\cdot\lambda y)=\lambda^2x^2\sin(\lambda^2xy)=\lambda^n f(x,y)=\lambda^n\cdot x^2\sin(xy)$$

   เนื่องจาก $\sin(\lambda^2xy)\neq\sin(xy)$ ดังนั้น $f(x,y)=x^2\sin(xy)$ ไม่เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์

บทนิยาม 7.3.3 สมการเชิงอนุพันธ์ $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ เป็น**สมการเชิงอนุพันธ์เอกพันธุ์** (homogeneous differential equation) ถ้า $M(x,y)$ และ $N(x,y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ที่มีดีกรีเท่ากัน หรือพิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} = F(x,y)$$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เอกพันธุ์ก็ต่อเมื่อ $F(x,y)$ เป็นสมการเอกพันธุ์ดีกรี 0

วิธีหาผลเฉลย เนื่องจาก $F(x,y)$ เป็นสมการเอกพันธุ์ดีกรี 0 ดังนั้น $F(x,y) = F(\lambda x, \lambda y)$ ให้ $\lambda = \frac{1}{x}$ เมื่อ $x > 0$ และ $\lambda = -\frac{1}{x}$ เมื่อ $x < 0$ จะได้ว่า

$$F(x,y) = F(\lambda x, \lambda y) = F\left(1, \frac{y}{x}\right) = G\left(\frac{y}{x}\right)$$

ดังนั้นสมการเชิงอนุพันธ์เอกพันธุ์จะอยู่ในรูป

$$\frac{dy}{dx} = G\left(\frac{y}{x}\right)$$

ให้ $v = \frac{y}{x}$ แล้ว $y = vx$ ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ ทำให้ได้ว่า

$$v + x\frac{dv}{dx} = G(v)$$

เห็นได้ชัดว่าเป็นสมการแบบแยกตัวแปรได้ในพจน์ของ x และ v

ตัวอย่าง 7.3.4 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์

$$(y^2 - x^2)\,dx + xy\,dy = 0$$

แนวคำตอบ ให้ $M(x,y) = y^2 - x^2$ และ $N(x,y) = xy$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} M(\lambda x, \lambda y) &= (\lambda y)^2 - (\lambda x)^2 = \lambda^2(y^2 - x^2) = \lambda^2 M(x,y) \\ N(\lambda x, \lambda y) &= (\lambda x)(\lambda y) = \lambda^2 xy = \lambda^2 N(x,y) \end{aligned}$$

ดังนั้น $(y^2 - x^2)\,dx + xy\,dy = 0$ เป็นสมการเอกพันธุ์ ให้ $y = vx$ จะได้ว่า $dy = vdx + xdv$ ฉะนั้น

$$\begin{aligned} ((vx)^2 - x^2)\,dx + x(vx)(vdx + xdv) &= 0 \\ (v^2x^2 - x^2)\,dx + x^2v^2dx + x^3vdv &= 0 \\ x^2(2v^2 - 1)\,dx &= -x^3vdv \\ \frac{x^2}{x^3}dx &= -\frac{v}{2v^2 - 1}dv \\ \int \frac{1}{x}dx &= -\int \frac{v}{2v^2 - 1}dv = -\frac{1}{4}\int \frac{1}{2v^2 - 1}d(2v^2) \\ \ell\text{n}|x| &= -\frac{1}{4}\ell\text{n}|2v^2 - 1| + C \\ \ell\text{n}|x| &= -\frac{1}{2}\ell\text{n}\left|2\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1\right| + C \end{aligned}$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการนี้คือ

$$\ell\text{n}|x| = -\frac{1}{2}\ell\text{n}\left|2\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1\right| + C$$

ตัวอย่าง 7.3.5 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์

$$x\frac{dy}{dx} - y = x\cos\left(\frac{y}{x}\right)$$

แนวคำตอบ จัดสมการใหม่ได้เป็น

$$\left(x\cos\left(\frac{y}{x}\right) + y\right)dx - xdy = 0$$

ให้ $M(x,y) = x\cos\left(\frac{y}{x}\right) + y$ และ $N(x,y) = -x$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} M(\lambda x, \lambda y) &= \lambda x\cos\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right) + \lambda y = \lambda\left(x\cos\left(\frac{y}{x}\right) + y\right) = \lambda M(x,y) \\ N(\lambda x, \lambda y) &= -(\lambda x) = \lambda(-x) = \lambda N(x,y) \end{aligned}$$

ดังนั้น $\left(x\cos\left(\frac{y}{x}\right) + y\right)dx - xdy = 0$ เป็นสมการเอกพันธุ์
ให้ $y = vx$ จะได้ว่า $dy = vdx + xdv$ ฉะนั้น

$$\begin{aligned} \left(x\cos\left(\frac{vx}{x}\right) + vx\right)dx - x(vdx + xdv) &= 0 \\ (x\cos v + vx)\,dx - xvdx - x^2dv &= 0 \\ x\cos v\,dx &= x^2dv \\ \frac{x}{x^2}dx &= \frac{1}{\cos v}dv \\ \int \frac{1}{x}dx &= \int \sec v\,dv \\ \ell\text{n}|x| &= \ell\text{n}|\sec v + \tan v| + C \\ \ell\text{n}|x| &= \ell\text{n}\left|\sec\left(\frac{y}{x}\right) + \tan\left(\frac{y}{x}\right)\right| + C \end{aligned}$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการนี้คือ

$$\ell\text{n}|x| = \ell\text{n}\left|\sec\left(\frac{y}{x}\right) + \tan\left(\frac{y}{x}\right)\right| + C$$

ตัวอย่าง 7.3.6 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์

$$xyy' = x^2e^{-\frac{y}{x}} + y^2 \qquad \text{เมื่อ} \quad y(1) = 0$$

แนวคำตอบ จัดสมการใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned} xy\frac{dy}{dx} &= x^2e^{-\frac{y}{x}} + y^2 \\ \left(x^2e^{-\frac{y}{x}} + y^2\right)dx - xydy &= 0 \end{aligned}$$

ให้ $M(x,y) = x^2e^{-\frac{y}{x}} + y^2$ และ $N(x,y) = -xy$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} M(\lambda x, \lambda y) &= (\lambda x)^2e^{-\frac{\lambda y}{\lambda x}} + (\lambda y)^2 = \lambda^2\left(x^2e^{-\frac{y}{x}} + y^2\right) = \lambda^2M(x,y) \\ N(\lambda x, \lambda y) &= -(\lambda x)(\lambda y) = \lambda^2(-xy) = \lambda^2N(x,y) \end{aligned}$$

ดังนั้น $\left(x^2e^{-\frac{y}{x}} + y^2\right)dx - xydy = 0$ เป็นสมการเอกพันธุ์
ให้ $y = vx$ จะได้ว่า $dy = vdx + xdv$ ฉะนั้น

$$\begin{aligned} \left(x^2e^{-\frac{vx}{x}} + (vx)^2\right)dx - x(vx)(vdx + xdv) &= 0 \\ \left(x^2e^{-v} + v^2x^2\right)dx - x^2v^2dx - x^3vdv &= 0 \\ x^2e^{-v}dx &= x^3vdv \\ \frac{x}{x^3}dx &= \frac{v}{e^{-v}}dv \\ \int\frac{1}{x}dx &= \int ve^v\,dv \\ \ell\mathrm{n}|x| &= ve^v - e^v + C \\ \ell\mathrm{n}|x| &= \frac{y}{x}e^{\frac{y}{x}} - e^{-\frac{y}{x}} + C \end{aligned}$$

แทน $x = 1$ และ $y = 0$ จะได้ว่า $0 = 0 - 1 + C$ นั่นคือ $C = 1$
ดังนั้นผลเฉลยเฉพาะของสมการนี้คือ

$$\ell\mathrm{n}|x| = \frac{y}{x}e^{\frac{y}{x}} - e^{-\frac{y}{x}} + 1$$

แบบฝึกหัด 7.3

1. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

   1.1 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2 + 2xy}{x^2}$

   1.2 $x\,dy - \left(x\tan\left(\dfrac{y}{x}\right) + y\right)\,dx = 0$

   1.3 $(x^2y + y^3)\,dx + x^3\,dy = 0$

   1.4 $2xy\,dx + (x^2 + y^2)\,dy = 0$

   1.5 $xy' = x + y$

   1.6 $x\left(1 + \ln\left(\dfrac{y}{x}\right)\right)y' = y$

   1.7 $2x\,dy - 2y\,dx = \sqrt{x^2 + 4y^2}\,dx$ เมื่อ $x > 0$

   1.8 $2ye^{\frac{x}{y}}\,dx = (2xe^{\frac{x}{y}} - y)\,dy$

2. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

   2.1 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y}{x-y}$ เมื่อ $y(-1) = 0$

   2.2 $x^2y\,dx - (x^3 - y^3)\,dy = 0$ เมื่อ $y(1) = 1$

   2.3 $14xyy' = 6x^2 - 7y^2$ เมื่อ $y(-2) = 1$

   2.4 $x^2y' = 3x^2 - 2xy + y^2$ เมื่อ $y(1) = \dfrac{3}{2}$

7.4 สมการแม่นตรง

บทนิยาม 7.4.1 สมการเชิงอนุพันธ์ $M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$ เป็น**สมการเชิงอนุพันธ์แม่นตรง** (exact differential equation) ก็ต่อเมื่อมีฟังก์ชัน $F(x,y)$ ที่ทำให้

$$\frac{\partial F}{\partial x}=M(x,y) \qquad \text{และ} \qquad \frac{\partial F}{\partial y}=N(x,y)$$

ทุก ๆ (x,y) ในอาณาบริเวณ R

วิธีหาผลเฉลย เนื่องจาก $M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$ ดังนั้น $dF(x,y)=0$ นั้นคือ

ผลเฉลยทั่วไปของสมการแม่นตรงคือ $\quad F(x,y)=c$

จากสมบัติค่าเชิงอนุพันธ์จะได้ว่า

$$\begin{aligned} dF(x,y) &= M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy \\ \frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy &= M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\frac{\partial F}{\partial x}=M(x,y) \qquad \text{และ} \qquad \frac{\partial F}{\partial y}=N(x,y)$$

จะได้ว่า $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial M}{\partial y}$ และ $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$ ถ้า $M, N, \dfrac{\partial M}{\partial y}$ และ $\dfrac{\partial N}{\partial x}$ ต่อเนื่องในอาณาบริเวณ R จะได้ว่า

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

ดังนั้น

$$F(x,y)=\int M(x,y)\,dx+C(y)$$

หา $C(y)$ ได้จาก $\dfrac{\partial F}{\partial y}=N(x,y)$
ในทำนองเดียวกัน

$$F(x,y)=\int N(x,y)\,dy+C(x)$$

หา $C(x)$ ได้จาก $\dfrac{\partial F}{\partial x}=M(x,y)$

ตัวอย่าง 7.4.2 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์

$$(2xy^3 - ye^{-x})\,dx + (3x^2y^2 + e^{-x} - 4)\,dy = 0$$

แนวคำตอบ ให้ $M(x,y) = 2xy^3 - ye^{-x}$ และ $N(x,y) = 3x^2y^2 + e^{-x} - 4$ จะได้ว่า

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6xy^2 - e^{-x} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

ดังนั้นสมการนี้เป็นสมการแม่นตรง จะได้ว่า $F(x,y) = C$ เป็นผลเฉลยของสมการนี้ พิจารณา

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int M(x,y)\,dx + C(y) \\ &= \int 2xy^3 - ye^{-x}\,dx + C(y) \\ &= x^2y^3 + ye^{-x} + C(y) \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y} &= N(x,y) \\ 3x^2y^2 + e^{-x} + C'(y) &= 3x^2y^2 + e^{-x} - 4 \\ C'(y) &= -4 \\ C(y) &= -4y + c \end{aligned}$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการนี้คือ

$$x^2y^3 + ye^{-x} - 4y = C$$

ตัวอย่าง 7.4.3 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{x+y^2}{xy^2}dy - \frac{y-4}{x^2}dx = 0 \qquad \text{เมื่อ} \quad y(-1) = 1$$

แนวคำตอบ ให้

$$\begin{aligned} M(x,y) &= -\frac{y-4}{x^2} = -\frac{y}{x^2} + \frac{4}{x^2} \\ N(x,y) &= \frac{x+y^2}{xy^2} = \frac{1}{y^2} + \frac{1}{x} \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{1}{x^2} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

ดังนั้นสมการนี้เป็นสมการแม่นตรง จะได้ว่า $F(x,y) = C$ เป็นผลเฉลยของสมการนี้ พิจารณา

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int N(x,y)\,dx + C(x) \\ &= \int \frac{1}{y^2} + \frac{1}{x}\,dy + C(x) \\ &= -\frac{1}{y} + \frac{1}{x} \cdot y + C(x) \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= M(x,y) \\ -\frac{y}{x^2} + C'(x) &= -\frac{y}{x^2} + \frac{4}{x^2} \\ C'(x) &= \frac{4}{x^2} \\ C(x) &= \int \frac{4}{x^2}dx = -\frac{4}{x} + c \end{aligned}$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการนี้คือ

$$-\frac{1}{y} + \frac{y}{x} - \frac{4}{x} = C$$

แทน $x = -1$ และ $y = 1$ จะได้ว่า $-1 - 1 + 4 = C$ นั่นคือ $C = 2$
ดังนั้นผลเฉลยเฉพาะของสมการนี้คือ

$$-\frac{1}{y} + \frac{y}{x} - \frac{4}{x} = 2$$

แบบฝึกหัด 7.4

1. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

   1.1 $2x - y^3 - 3xy^2y' = 0$

   1.2 $(2x - 5y)\,dy = (6x - 2y)\,dx$

   1.3 $x(x\cos(x^2y) - 2y)y' + 2xy\cos(x^2y) = y^2$

   1.4 $(\sin xy + xy + \cos xy)\dfrac{dy}{dx} + y^2\cos xy = 0$

   1.5 $\dfrac{3xy+1}{y}dx + \dfrac{2y-x}{y^2}dy = 0$

   1.6 $\pi y + (\pi x + \arcsin y)\dfrac{dy}{dx} = \sin x$

   1.7 $\dfrac{\ln y}{x}\,dx + (\dfrac{\ln x}{y} + \sin y)\,dy = 0$

   1.8 $(2xye^{x^2} + \sin y)\,dx + (x^2e^{x^2y} + x\cos y - y)\,dy = 0$

2. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

   2.1 $(3x^2y + 2xy)\,dx + (x^3 + x^2 + 2y)\,dy = 0$ เมื่อ $y(1) = 2$

   2.2 $(e^y + ye^x)\,dx - (e^x + xe^y)\,dy = 0$ เมื่อ $y(1) = 0$

   2.3 $(\sin^2 x - 2y\cos x)y' - 2y\sin x\cos x + y^2\sin x = 0$ เมื่อ $y(0) = -2$

   2.4 $\ln(1 + y^2) = \left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{2xy}{1+y^2}\right)\dfrac{dy}{dx}$ เมื่อ $y(2) = \sqrt{e-1}$

7.5 ตัวประกอบปริพันธ์

ในกรณีที่ $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ เป็นไม่เป็นสมการแม่นตรงแต่มี $\mu(x,y)$ ที่ทำให้

$$\mu(x,y)(M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy) = 0$$

เป็นสมการแม่นตรง เราจะเรียกฟังก์ชัน $\mu(x,y)$ นี้ว่า**ตัวประกอบปริพันธ์** (integrating factor) ของสมการเชิงอนุพันธ์นี้ แล้ว

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

$$\mu\frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial \mu}{\partial x}$$

ดังนั้น

$$\frac{1}{\mu}\left(N\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \mu}{\partial y}\right) = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$$

กรณีที่ 1. μ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x เพียงอย่างเดียว

$$\frac{1}{\mu}N\frac{d\mu}{dx} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$N\frac{d}{dx}\ell\mathsf{n}|\mu| = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\frac{d}{dx}\ell\mathsf{n}|\mu| = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = f(x)$$

ดังนั้น $\mu = e^{\int f(x)\,dx}$

กรณีที่ 2. μ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร y เพียงอย่างเดียว

$$\frac{d}{dy}\ell\mathsf{n}|\mu| = \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = g(y)$$

ดังนั้น $\mu = e^{\int g(y)\,dy}$ สรุปได้ว่า

1. สำหรับ $f(x) = \dfrac{1}{N}\left(\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}\right)$ มีตัวประกอบปริพันธ์เป็น $\mu = e^{\int f(x)\,dx}$
2. สำหรับ $g(y) = \dfrac{1}{M}\left(\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}\right)$ มีตัวประกอบปริพันธ์เป็น $\mu = e^{\int g(y)\,dy}$

ตัวอย่าง 7.5.1 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

1. $(3x+2y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$

   แนวคำตอบ ให้ $M(x,y) = 3x+2y^2$ และ $N(x,y) = 2xy$ จะได้ว่า

   $$\frac{\partial M}{\partial y} = 4y \qquad \text{และ} \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 2y$$

   พิจารณา

   $$f(x) = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{1}{2xy}[4y-2y] = \frac{1}{x}$$

   มีตัวประกอบปริพันธ์คือ $\mu = e^{\int f(x)dx} = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ell\text{n}x} = x$ พิจารณา

   $$\begin{aligned} x(3x+2y^2)\,dx + x\cdot 2xy\,dy &= 0\\ (3x^2+2xy^2)\,dx + 2x^2y\,dy &= 0\\ 2xy^2\,dx + 2x^2y\,dy &= -3x^2dx\\ d(x^2y^2) &= -3x^2dx\\ \int d(x^2y^2) &= \int -3x^2dx\\ x^2y^2 &= -x^3+C \end{aligned}$$

   ดังนั้นผลเฉลยของสมการคือ $x^2y^2 = -x^3+C$

2. $(x^2+y^2+1)\,dx + x(x-2y)\,dy = 0$

   แนวคำตอบ ให้ $M(x,y) = x^2+y^2+1$ และ $N(x,y) = x^2-2xy$ จะได้ว่า

   $$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y \qquad \text{และ} \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x-2y$$

   พิจารณา

   $$f(x) = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{1}{x^2-2xy}[2y-(2x-2y)] = -\frac{2}{x}$$

   มีตัวประกอบปริพันธ์คือ $\mu = e^{\int f(x)dx} = e^{\int -\frac{2}{x}dx} = e^{-2\ell\text{n}x} = x^{-2}$ พิจารณา

   $$\begin{aligned} x^{-2}(x^2+y^2+1)\,dx + x^{-2}\cdot x(x-2y)\,dy &= 0\\ (1+x^{-2}y^2+x^{-2})\,dx + (1-2x^{-1}y)\,dy &= 0\\ (1+x^{-2})dx + \left(x^{-2}y^2dx - 2x^{-1}y\,dy\right) &= -1dy\\ (1+x^{-2})dx + d(-x^{-1}y^2) &= -1dy\\ \int(1+x^{-2})dx + \int d(-x^{-1}y^2) &= \int -1dy\\ x - x^{-1} - x^{-1}y^2 &= -y+C \end{aligned}$$

   ดังนั้นผลเฉลยของสมการคือ $x - x^{-1} - x^{-1}y^2 = -y+C$

ตัวอย่าง 7.5.2 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์

$$y(1+x^2y)dx - xdy = 0 \qquad \text{เมื่อ} \quad y(0) = -1$$

แนวคำตอบ ให้ $M(x,y) = y + x^2y^2$ และ $N(x,y) = -x$ จะได้ว่า

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 + 2x^2y \text{ และ } \frac{\partial N}{\partial x} = -1$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} g(y) &= \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = \frac{1}{y(1+x^2y)}(-1-(1+2x^2y)) \\ &= \frac{1}{y(1+x^2y)} \cdot (-2)(1+x^2y) = -\frac{2}{y} \end{aligned}$$

มีตัวประกอบปริพันธ์คือ

$$\mu = e^{\int g(y)dy} = e^{\int -\frac{2}{y}dy} = e^{-2\ln y} = y^{-2}$$

พิจารณา

$$\begin{aligned} y^{-2}y(1+x^2y)dx - y^{-2}xdy &= 0 \\ y^{-1}dx + x^2dx - y^{-2}xdy &= 0 \\ (y^{-1}dx - y^{-2}xdy) + x^2dx &= 0 \\ d(y^{-1}x) + x^2dx &= 0 \\ y^{-1}x + \frac{x^3}{3} &= C \\ \frac{x}{y} + \frac{x^3}{3} &= C \end{aligned}$$

แทน $x = 0$ และ $y = 1$ จะได้ว่า $0 + 0 = C$ นั่นคือ $C = 0$
ดังนั้นผลเฉลยเฉพาะของสมการนี้คือ

$$\frac{x}{y} + \frac{x^3}{3} = 0$$

แบบฝึกหัด 7.5

1. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

   1.1 $2xy\,dx + (x^3 + 2xy)\,dy = 0$

   1.2 $(4xy - 3x - 3x^2)\,dy - (2xy - y^2 + y)\,dx = 0$

   1.3 $(xy + y - 1)\,dx + x^3\,x\,dy = 0$

   1.4 $y(x + y^3)\,dx + x(y^3 - x)\,dy = 0$

   1.5 $(xy - x^2)y' - xy + 1 = 0$

   1.6 $(1 + x\text{sin}y)y' + \text{cos}y = 0$

2. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

   2.1 $2y(x^2 - y + x)\,dx + (x^2 - 2y)\,dy = 0$ เมื่อ $y(0) = -1$

   2.2 $(x^2 + y)\,dx + (x^2\text{cos}y - x)\,dy = 0$ เมื่อ $y(2) = 0$

   2.3 $1 + (x\text{tan}y - 2\text{sec}y)y' = 0$ เมื่อ $y(-1) = \pi$

7.6 สมการเชิงเส้นอันดับหนึ่ง

บทนิยาม 7.6.1 สมการเชิงเส้นอันดับหนึ่ง คือสมการเชิงอนุพันธ์ที่อยู่ในรูป

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

วิธีหาผลเฉลย สามารถจัดรูปได้เป็น $[P(x)y - Q(x)]\,dx + dy = 0$
ดังนั้น $M(x,y) = P(x)y - Q(x)$ และ $N(x,y) = 1$ จะได้ว่า

$$P(x) = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

ดังนั้น $\mu = e^{\int P(x)\,dx}$

$$\begin{aligned}
\mu\frac{dy}{dx} + \mu P(x)y &= \mu Q(x)\\
\frac{d}{dx}(\mu y) &= \mu Q(x)\\
\mu y &= \int \mu Q(x)\,dx + C
\end{aligned}$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y = \frac{1}{\mu}\left(\int \mu Q(x)\,dx + C\right)$$

ตัวอย่าง 7.6.2 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $\quad \dfrac{dy}{dx} - 2xy = x$

แนวคำตอบ จะเห็นว่า $\dfrac{dy}{dx} - 2xy = x$ เป็นสมการเชิงเส้นอันดับหนึ่งที่มี

$$P(x) = -2x \qquad \text{และ} \qquad Q(x) = x$$

จะได้ว่า $\quad \mu = e^{\int P(x)dx} = e^{\int -2xdx} = e^{-x^2}$ ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ

$$\begin{aligned}
y &= \frac{1}{\mu}\left(\int \mu Q(x)\,dx + C\right)\\
&= \frac{1}{e^{-x^2}}\left(\int e^{-x^2}\cdot x\,dx + C\right)\\
&= e^{x^2}\left(-\frac{1}{2}\int e^{-x^2}\,d(-x^2) + C\right)\\
&= e^{x^2}\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2} + C\right)\\
&= -\frac{1}{2} + Ce^{x^2}
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 7.6.3 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $(y\text{cot}x - \text{sec}^2x)\,dx + dy = 0$

แนวคำตอบ จัดรูปสมการจะได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} + \text{cot}x \cdot y = \text{sec}^2x$$

เป็นสมการเชิงเส้นอันดับหนึ่งที่มี $P(x) = \text{cot}x$ และ $Q(x) = \text{sec}^2x$
จะได้ว่า $\mu = e^{\int P(x)dx} = e^{\int \text{cot}x dx} = e^{\ell\text{n}\,\text{sin}x} = \text{sin}x$ ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ

$$\begin{aligned}
y &= \frac{1}{\mu}\left(\int \mu Q(x)\,dx + C\right)\\
&= \frac{1}{\text{sin}x}\left(\int \text{sin}x \cdot \text{sec}^2x\,dx + C\right)\\
&= \text{csc}x\left(\int \text{sec}x\text{tan}x\,dx + C\right)\\
&= \text{csc}x\,(\text{sec}x + C)\\
&= \text{csc}x\text{sec}x + C\text{csc}x
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 7.6.4 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์

$$(xy + x + x^3)\,dx + (1 + x^2)\,dy = 0 \qquad \text{เมื่อ} \quad y(0) = 1$$

แนวคำตอบ จัดรูปสมการจะได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} + \frac{x}{1+x^2} \cdot y = -\frac{x + x^3}{1+x^2} = -x$$

เป็นสมการเชิงเส้นอันดับหนึ่งที่มี

$$P(x) = \frac{x}{1+x^2} \qquad \text{และ} \qquad Q(x) = -x$$

จะได้ว่า $\mu = e^{\int P(x)dx} = e^{\int \frac{x}{1+x^2}dx} = e^{\frac{1}{2}\ell\text{n}(x^2+1)} = \sqrt{x^2+1}$ ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ

$$\begin{aligned}
y &= \frac{1}{\mu}\left(\int \mu Q(x)\,dx + C\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\left(\int \sqrt{x^2+1} \cdot -x\,dx + C\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\left(-\frac{1}{2}\int (x^2+1)^{\frac{1}{2}}\,d(x^2) + C\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\left(-\frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + C\right)\\
&= -\frac{1}{3}(x^2+1) + \frac{C}{\sqrt{x^2+1}}
\end{aligned}$$

แทน $x = 0$ และ $y = 1$ จะได้ว่า $1 = -\frac{1}{3} + C$ นั่นคือ $C = \frac{4}{3}$
ดังนั้นผลเฉลยเฉพาะของสมการนี้คือ

$$y = -\frac{1}{3}(x^2+1) + \frac{4}{3\sqrt{x^2+1}}$$

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งดีกรีหนึ่งบางสมการไม่เป็นสมการเชิงเส้น เราอาจทำให้เป็นสมการเชิงเส้นโดยอาศัยการเปลี่ยนตัวแปรที่เหมาะสม เช่นสมการต่อไปนี้จะเรียกว่า **สมการแบร์นูลลี** (Bernoulli's equation)

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

เมื่อ n เป็นค่าคงตัว เปลี่ยนตัวแปรโดยให้ $z = y^{1-n}$ จะสมการแบร์นูลลีจะเปลี่ยนเป็นสมการเชิงเส้นอันดับหนึ่ง

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$$

จะได้ $\mu = e^{\int (1-n)P(x)\,dx}$ ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ $z = \dfrac{1}{\mu}\left(\displaystyle\int \mu(1-n)Q(x)\,dx + C\right)$ หรือ

$$y^{1-n} = \frac{1}{\mu}\left(\int \mu(1-n)Q(x)\,dx + C\right)$$

ตัวอย่าง 7.6.5 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $(1+x^2)\dfrac{dy}{dx} + xy = xy^3$

แนวคำตอบ จัดรูปสมการจะได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} + \frac{x}{1+x^2}\cdot y = \frac{x}{1+x^2}\cdot y^3$$

เป็นสมการแบร์นูลลีที่มี $n = 3$ ให้ $z = y^{1-n} = y^{-2}$ โดยที่

$$P(x) = \frac{x}{1+x^2} \qquad \text{และ} \qquad Q(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

จะได้ว่า $\mu = e^{\int (1-n)P(x)dx} = e^{\int \frac{-2x}{1+x^2}\,dx} = e^{-\ell\text{n}(x^2+1)} = \dfrac{1}{x^2+1}$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการนี้คือ

$$\begin{aligned}
z &= \frac{1}{\mu}\left(\int (1-n)\mu Q(x)\,dx + C\right) \\
y^{-2} &= (x^2+1)\left(\int (-2)\frac{1}{x^2+1}\cdot\frac{x}{1+x^2}dx + c\right) \\
&= (x^2+1)\left(-\int \frac{1}{(x^2+1)^2}d(x^2) + C\right) \\
&= (x^2+1)\left(\frac{1}{x^2+1} + C\right) \\
&= x^2 + 1 + C(x^2+1)
\end{aligned}$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการนี้คือ

$$y^{-2} = x^2 + 1 + C(x^2+1)$$

ตัวอย่าง 7.6.6 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{2x} = \frac{x}{y^3} \qquad \text{เมื่อ} \quad y(1) = 2$$

แนวคำตอบ จัดรูปสมการจะได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2x} \cdot y = x \cdot y^{-3}$$

เป็นสมการแบร์นูลลีที่มี $n = -3$ ให้ $z = y^{1-n} = y^4$ โดยที่

$$P(x) = \frac{1}{2x} \qquad \text{และ} \qquad Q(x) = x$$

จะได้ว่า $\mu = e^{\int (1-n)P(x)dx} = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ell\text{n}x} = x^2$
ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการนี้คือ

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{\mu}\left(\int (1-n)\mu Q(x)\,dx + C\right) \\ y^4 &= \frac{1}{x^2}\left(\int 4x^2 \cdot xdx + C\right) \\ &= \frac{1}{x^2}\left(\int 4x^3dx + c\right) \\ &= \frac{1}{x^2}\left(x^4 + C\right) \\ &= x^2 + \frac{C}{x^2} \end{aligned}$$

แทน $x = 1$ และ $y = 2$ จะได้ว่า $16 = 1 + C$ นั่นคือ $C = 15$
ดังนั้นผลเฉลยเฉพาะของสมการนี้คือ

$$y^4 = x^2 + \frac{15}{x^2}$$

แบบฝึกหัด 7.6

1. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

   1.1 $\dfrac{dy}{dx} + y\text{cot}x = 5e^{\text{cos}x}$

   1.2 $x^2y' + 3xy + 2x^5 = 0$

   1.3 $(2y-4)\,dx + dy = 0$

   1.4 $x\dfrac{dy}{dx} + 3y = \dfrac{\text{sin}x}{x^2}$

   1.5 $y' - y = \dfrac{1}{1-e^{-x}}$

   1.6 $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x\ell\text{n}x} = x^2$

   1.7 $(3xy - 4y - 3x)\,dx + (x^2 - 3x + 2)\,dy = 0$

   1.8 $2(y - 3\text{sin}x)\text{cos}x\,dx + \text{sin}x\,dy = 0$

   1.9 $(x^2+y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0$

   1.10 $(y + xy^2)\,dx - \,dy = 0$

2. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

   2.1 $(x-1)^3\dfrac{dy}{dx} + 4(x-1)^2y = x+1$ เมื่อ $y(3) = \dfrac{1}{2}$

   2.2 $(y - e^x\text{sin}x)\,dx + dy = 0$ เมื่อ $y(0) = -1$

   2.3 $(\text{cos}x)y' + y = 1$ เมื่อ $y(\frac{\pi}{4}) = 2$

   2.4 $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{x^3y}{x^4+1} = x^7$ เมื่อ $y(0) = 1$

   2.5 $xy' + y = y^2x^2e^x$ เมื่อ $y(1) = e$

   2.6 $x\dfrac{dy}{dx} + y + 3 = x^3(y+3)^3$ เมื่อ $y\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -1$

สรุป

ในบทนี้ศึกษาสมการเชิงอนุพันธ์เบื้องต้น โดยสนใจการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งดีกรีหนึ่งในรูป $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ หรือ $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ ถ้า $f(x,y) = g(x)h(y)$ เราจะใช้วิธีที่เรียกว่าการแยกตัวแปรได้แต่ถ้าไม่สามารถแยกตัวแปรได้ เราอาจตรวจสอบว่ามีจำนวนเต็ม n ซึ่ง $M(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n M(x,y)$ และ $N(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n N(x,y)$ เรียกสมการนี้สมการเอกพันธุ์ และเปลี่ยนตัวแปรโดยใช้ $y = vx$ สมการนี้จะหาผลเฉลยโดยใช้วิธีการแยกตัวแปรได้ ถ้าทั้ง 2 วิธีข้างต้นยังไม่สามารถหาผลเฉลยได้ เราอาจตรวจสอบว่า $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ เรียกว่าสมการเชิงอนุพันธ์แม่นตรง วิธีสุดท้ายกรณีที่ไม่ใช่สมการแม่นตรงเราจะใช้ตัวประกอบปริพันธ์ μ เมื่อนำตัวประกอบปริพันธ์นี้คูณทั้งสมการนี้สามารถใช้วิธีการแยกตัวแปรได้ และกล่าวถึงสมการเชิงเส้นอันดับหนึ่ง $y' + P(X)y = Q(x)$ ซึ่งเป็นกรณีเฉพาะของการใช้ตัวประกอบปริพันธ์

แบบฝึกหัดบทที่ 7

---

1. จงแสดงว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

   1.1 $y = cx + \sqrt{1-c^2}$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของ $xy' + \sqrt{1-(y')^2} = y$

   1.2 $(x-c)^2 + y^2 = a^2$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของ $y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = a^2$

   1.3 $y^2 - x = 0$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของ $y = 2x\frac{dy}{dx}$

   1.4 $y = 4 + \frac{4}{x}$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของ $x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = 0$

2. จงแสดงว่า $y = \frac{1+ce^t}{1-ce^t}$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจง เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}(y^2-1)$

3. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $3(4y^2+1)dx = y(x-1)dy$

4. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{1+e^x}{1-e^{-y}}dy + e^{x+y}dx = 0$

5. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\sqrt{x^2+1}\,\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \qquad \text{เมื่อ} \quad y(\sqrt{3}) = 2$$

6. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์

   6.1 $xy' = x - y$

   6.2 $(x^3+y^3)dx + 2y^2xdy = 0$

   6.3 $(\sin^2 x - 2y\cos x)y' + 2y\sin x\cos x + y^2\sin x = 0$

6.4 $\frac{\ell\text{n}y}{x}dx + \left(\frac{\ell\text{n}x}{y} + \text{sin}y\right) dy = 0$

6.5 $(xy - x^2)y' - xy + 1 = 0$

6.6 $x\frac{dy}{dx} + 3y = \frac{\text{sin}x}{x^2}$

6.7 $\frac{dy}{dx} + y\text{cot}x = 3e^{2\text{cos}x}$

6.8 $x^2y' + 3xy + 2x^5 = 0$

6.9 $(2y - 4)\,dx + dy = 0$

6.10 $y(1 + x^2y)dx - xdy = 0$

6.11 $(y - \text{sin}x)\text{cos}x dx + \text{sin}x dy = 0$

6.12 $\frac{1 + e^x}{1 - e^{-y}}dy + e^{x+y}\,dx = 0$

6.13 $(x^2y + x^2)\,dx = (xy^2 - y^2)\,dy$

6.14 $(x^2 + 1)y' + y^2 + 1 = 0$

6.15 $(x^2y^2\text{sec}x\text{tan}x + xy^2\text{sec}x)\,dx + xy^3\,dy = 0$

6.16 $\frac{3xy + 1}{y}dx + \frac{2y - x}{y^2}dy = 0$

6.17 $\pi y + (\pi x + \text{arcsin}y)\frac{dy}{dx} = \text{sin}x$

6.18 $\frac{\ell\text{n}y}{x}\,dx + (\frac{\ell\text{n}x}{y} + \text{sin}y)\,dy = 0$

6.19 $(2xye^{x^2} + \text{sin}y)\,dx + (x^2e^{x^2y} + x\text{cos}y - y)\,dy = 0$

7. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์

7.1 $(e^y + ye^x)dx + (e^x + xe^y)dy = 0$ เมื่อ $y(1) = 0$

7.2 $\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x - y}$ เมื่อ $y(-1) = 0$

7.3 $(y - e^x\text{sin}x)dx + xdy = 0$ เมื่อ $y(0) = 0$

7.4 $x^2y' = 2x^2 - 2xy + y^2$ เมื่อ $y(1) = 3$

7.5 $(y - e^x\text{sin}x)dx + dy = 0$ เมื่อ $y(0) = -1$

7.6 $\text{cos}x\frac{dy}{dx} + y\text{sin}x = 1$ เมื่อ $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$

7.7 $\text{sin}x\frac{dy}{dx} + y\text{cos}x = \text{sec}^2x$ เมื่อ $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$

7.8 $x^2\frac{dy}{dx} - 2xy = 3y^4$ เมื่อ $y(1) = 1$

7.9 $\ell\text{n}(1 + y^2) = \left(\frac{1}{y} - \frac{2xy}{1 + y^2}\right)\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $y(2) = \sqrt{e - 1}$

7.10 $y(1 + x^2y)\,dx - x\,dy = 0$ เมื่อ $y(1) = -1$

7.11 $(x^2 + y)\,dx + (x^2\cos y - x)\,dy = 0$ เมื่อ $y(2) = 0$

7.12 $1 + (x\tan y - 2\sec y)y' = 0$ เมื่อ $y(-1) = \pi$

7.13 $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{x^3y}{x^4+1} = x^7$ เมื่อ $y(0) = 1$

7.14 $xy' + y = y^2x^2e^x$ เมื่อ $y(1) = e$

7.15 $x\dfrac{dy}{dx} + y + 3 = x^3(y+3)^3$ เมื่อ $y\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -1$

8. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x+y}{x+2y}$$

9. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$(x^2-1)\frac{dy}{dx} + 2y = (x+1)^2(x-1) \qquad \text{เมื่อ} \quad y(0) = 1$$

10. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$(\sin^2 x - 2y\cos x)y' - 2y\sin x\cos x + y^2\sin x = 0$$

เมื่อ $y(0) = -2$

บรรณานุกรม

ดำรง ทิพย์โยธา, ณัฏฐนาถ ไตรภพ และสรุชัย สมบัติบริบูรณ์. (2559). **แคลคูลัส ๒**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ธนัชยศ จำปาหวาย. (2565). **เอกสารคำสอนวิชาแคลคูลัส ๑**. กรุงเทพฯ: มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

James Stewart. (2012). **Calculus Early Transcendentals.** Canada. Nelson Education, Ltd.

ดัชนี

สรุปสูตรเกี่ยวกับแคลคูลัส

เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ

1. $\sin x \csc x = 1$
2. $\cos x \sec x = 1$
3. $\cot x \tan x = 1$
4. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
5. $\sec^2 x - \tan^2 x = 1$
6. $\csc^2 x - \cot^2 x = 1$
7. $\sin(-x) = -\sin x$
8. $\cos(-x) = \cos x$
9. $\tan(-x) = -\tan x$
10. $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$
11. $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$
12. $\tan(x \pm y) = \dfrac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$
13. $\sin(2x) = 2\sin x \cos x = \dfrac{2\tan x}{1 + \tan^2 x}$
14. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

    $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$

    $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$
15. $\tan(2x) = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$
16. $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$
17. $\sin^2 x = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)$
18. $\tan^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$
19. $\tan x = \dfrac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = \dfrac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}$
20. $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$
21. $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$
22. $\sin^3 x = \dfrac{1}{4}[3\sin x - \sin 3x]$
23. $\cos^3 x = \dfrac{1}{4}[3\cos x + \cos 3x]$
24. $\tan 3x = \dfrac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$
25. $\sin x + \sin y = 2\sin\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$
26. $\sin x - \sin y = 2\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\sin\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$
27. $\cos x + \cos y = 2\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$
28. $\cos x - \cos y = -2\sin\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\sin\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$
29. $\sin x \cos y = \dfrac{1}{2}\left[\sin(x+y) + \sin(x-y)\right]$
30. $\cos x \sin y = \dfrac{1}{2}\left[\sin(x+y) - \sin(x-y)\right]$
31. $\cos x \cos y = \dfrac{1}{2}\left[\cos(x+y) + \cos(x-y)\right]$
32. $\sin x \sin y = -\dfrac{1}{2}\left[\cos(x+y) - \cos(x-y)\right]$

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

1. $\frac{d}{dx}C = 0$
2. $\frac{d}{dx}x = 1$
3. $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$
4. $(af)'(x) = af'(x)$
5. $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$
6. $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$
7. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$
8. $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$
9. $\frac{d}{dx}e^x = e^x$
10. $\frac{d}{dx}a^x = a^x \ell\text{n}a$
11. $\frac{d}{dx}\ell\text{n}|x| = \frac{1}{x}$
12. $\frac{d}{dx}\log_a|x| = \frac{1}{x\ell\text{n}a}$
13. $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$
14. $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$
15. $\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$
16. $\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$
17. $\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$
18. $\frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x$
19. $\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
20. $\frac{d}{dx}\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
21. $\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$
22. $\frac{d}{dx}\text{arccot}\, x = -\frac{1}{1+x^2}$
23. $\frac{d}{dx}\text{arcsec}\, x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$
24. $\frac{d}{dx}\text{arccsc}\, x = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

ค่าเชิงอนุพันธ์

1. $dC = 0$
2. $d(u+v) = du + dv$
3. $d(ku) = kdu$
4. $u'dx = du$
5. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$
6. $d(uv) = vdu + udv$
7. $df(x,y) = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy$

ปริพันธ์ของฟังก์ชัน

1. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$
2. $\int f(x)+g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
3. $\int kdx = kx + C$
4. $\int vdu = uv - \int vdu$
5. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$
6. $\int \frac{1}{x}dx = \ell\text{n}|x| + C$
7. $\int e^x dx = e^x + C$
8. $\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$
9. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ell\text{n}a} + C$
10. $\int \text{sin}x dx = -\text{cos}x + c$
11. $\int \text{cos}x dx = \text{sin}x + C$
12. $\int \text{sec}^2 x dx = \text{tan}x + C$
13. $\int \text{sec}x\text{tan}x dx = \text{sec}x + C$
14. $\int \text{csc}^2 x dx = -\text{cot}x + C$
15. $\int \text{csc}x\text{cot}x dx = -\text{csc}x + C$
16. $\int \text{tan}x dx = \ell\text{n}|\text{sec}x| + C$
17. $\int \text{sec}x dx = \ell\text{n}|\text{sec}x + \text{tan}x| + C$
18. $\int \text{cot}x dx = \ell\text{n}|\text{sin}x| + C$
19. $\int \text{csc}x dx = \ell\text{n}|\text{csc}x - \text{cot}x| + C$

20. $\int e^{ax}\sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C$

21. $\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + C$

22. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C$

23. $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C$

24. $\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}dx = \mathrm{arcsec} x + C$

25. $\int \ell\mathrm{n} x dx = x\ell\mathrm{n} x - x + C$

26. $\int \cos ax dx = \frac{1}{a}\sin ax + C$

27. $\int \sin ax dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C$

28. $\int \arcsin x dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$

29. $\int \arccos x dx = x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$

30. $\int \arctan x dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\ell\mathrm{n}(1+x^2) + C$

31. $\int \mathrm{arccot} x dx = x\,\mathrm{arccot} x + \frac{1}{2}\ell\mathrm{n}(1+x^2) + C$

32. $\int \mathrm{arcsec} x dx = x\,\mathrm{arcsec} x - \ell\mathrm{n}|x + \sqrt{x^2-1}| + C$

33. $\int \mathrm{arccsc} x dx = x\,\mathrm{arccsc} x + \ell\mathrm{n}|x + \sqrt{x^2-1}| + C$

บรรณานุกรม

ดำรง ทิพย์โยธา, ณัฏฐนาถ ไตรภพ และสรุชัย สมบัติบริบูรณ์. (2559). **แคลคูลัส ๒**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ธนัชยศ จำปาหวาย. (2565). **เอกสารคำสอนวิชาแคลคูลัส ๑**. กรุงเทพฯ: มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

James Stewart. (2012). **Calculus Early Transcendentals.** Canada. Nelson Education, Ltd.

ประวัติผู้เขียน

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย

- ปัจจุบันดำรงตำแหน่งผู้ช่วยศาสตราจารย์ประจำสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
- ปริญญาเอก วิทยาศาสตร์ดุษฎีบัณฑิต (คณิตศาสาตร์), จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2557
  Ph.D. (Mathematics), Chulalongkorn University, 2014
- ปริญญาโท วิทยาศาสตร์มหาบัณฑิต (คณิตศาสาตร์), จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2552
  M.Sc. (Mathematics), Chulalongkorn University, 2009
- ปริญญาตรี วิทยาศาสตร์บัณฑิต (คณิตศาสาตร์, เกียติรนิยมอันดับสอง),
  จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2549
  B.Sc. (Mathematics, 2nd class honours),Chulalongkorn University, 2006

Email: thanatyod.ja@ssru.ac.th
Office: 1145
Facebook: www.facebook.com/Jampawai
Block: www.eledu.ssru.ac.th/thanatyod_ja

ผลงานทางวิชาการ

1. เอกสารคำสอนรายวิชาแคลคูลัส ๑. (2565).สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
2. E-book: ความน่าจะเป็นและสถิติ. (2565). www.mebmarket.com
3. E-book: หลักการคณิตศาสตร์สำหรับครู. (2565). www.mebmarket.com
4. E-book: ทฤษฎีจำนวน. (2565). www.mebmarket.com
5. E-book: พีชคณิตนามธรรม. (2565). www.mebmarket.com
6. หนังสือ: ความจริงที่ต้องพิสูจน์. (2560). ศูนย์หนังสือมหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา