



เฉลย Assignment 10 MAC1304 ความน่าจะเป็นและสถิติ

หัวข้อ การแจกแจงค่าสถิติอื่น ๆ **สัปดาห์ที่** 11 **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนชัยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

1. ในการสอบ ONET วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้น ม.3 ปีการศึกษาหนึ่งเป็นการแจกแจงปกติ ถ้าสุ่มตัวอย่างนักเรียนมา 40 คน คำนวณส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานได้ 13 คะแนน จงหาโอกาสที่คะแนนเฉลี่ยของตัวอย่างจะต่างจากคะแนนเฉลี่ยประชากรมากกว่า 3 คะแนน

แนวคำตอบ ประชากรมีการแจกแจงปกติไม่ทราบค่า σ^2 และตัวอย่างมีขนาดใหญ่คือ $n = 40$ จึงประมาณตัวอย่างด้วยการแจกแจงปกติที่ประมาณค่า σ ด้วย $s = 13$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} P(|\bar{X} - \mu| > 3) &= P\left(\left|\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\right| > \frac{3}{\frac{13}{\sqrt{40}}}\right) = P(|Z| > 1.46) \\ &= 1 - P(|Z| < 1.46) = 1 - P(-1.46 < Z < 1.46) \\ &= 1 - P(Z < 1.46) + P(Z < -1.46) \\ &= 1 - 0.9279 + 0.0721 \qquad \qquad \qquad (\text{อ่านค่าจากตาราง}) \\ &= 0.1442 \end{aligned}$$

ดังนั้นโอกาสที่คะแนนเฉลี่ยของตัวอย่างจะต่างจากคะแนนเฉลี่ยประชากรมากกว่า 3 คะแนน เท่ากับ 0.1442 #

2. คะแนนสอบกลางภาควิชาความน่าจะเป็นและสถิติเป็นการแจกแจงปกติ ถ้าสุ่มตัวอย่างนักศึกษามา 15 คน คำนวณส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานได้ 10 คะแนน จงหาโอกาสที่คะแนนเฉลี่ยของตัวอย่างจะต่างจากคะแนนเฉลี่ยประชากรน้อยกว่า 10 คะแนน

แนวคำตอบ ประชากรมีการแจกแจงปกติไม่ทราบค่า σ^2 และตัวอย่างมีขนาดเล็กคือ $n = 15$ จึงประมาณตัวอย่างด้วยการแจกแจงที ซึ่งมีความเสรี $\nu = 15 - 1 = 14$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} P(|\bar{X} - \mu| < 10) &= P\left(\left|\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\right| < \frac{10}{\frac{10}{\sqrt{15}}}\right) = P(|t| < 3.87) \\ &= P(t > -3.87) - P(t > 3.87) \qquad \qquad \qquad (\text{อ่านค่าจากแอฟฟลิเคชั่น}) \\ &= 0.99915 - 0.00085 \\ &= 0.99830 \end{aligned}$$

ดังนั้นโอกาสที่คะแนนเฉลี่ยของตัวอย่างจะต่างจากคะแนนเฉลี่ยประชากรน้อยกว่า 10 คะแนน เท่ากับ 0.99830 #

3. น้ำหนักเด็กแรกเกิดเพศชายและเพศหญิงมีการแจกแจงปกติ โดยมีน้ำหนักเฉลี่ย 2950 กรัม และ 2855 กรัม ตามลำดับ ถ้าสุ่มตัวอย่างเด็กแรกเกิดเพศชายจำนวน 10 คน และเพศหญิงจำนวน 15 คน โดยอิสระต่อกัน คำนวณส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานได้เท่ากับ 100 กรัม และ 120 กรัม ตามลำดับ จงหาความน่าจะเป็นที่ค่าเฉลี่ยของตัวอย่างเด็กแรกเกิดเพศชายสูงกว่าหญิง 100 กรัม

แนวคำตอบ น้ำหนักเด็กแรกเกิดเพศชาย (1) และเพศหญิง (2) มีการแจกแจงปกติ โดยไม่ทราบความแปรปรวน โดยที่ $\mu_1 = 2950$, $\mu_2 = 2855$ $n_1 = 10$, $n_2 = 15$, $S_1 = 100$ และ $S_2 = 120$

- 3.1 กรณีความแปรปรวนของประชากรของน้ำหนักของเด็กแรกเกิดเพศชายและเพศหญิงเท่ากัน เนื่องจาก $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ จะได้ว่า

$$S_p^2 = \frac{(10 - 1)100^2 + (15 - 1)120^2}{10 + 15 - 2} = 12678.26$$

และองศาเสรีคือ $\nu = 10 + 15 - 2 = 23$ ฉะนั้น

$$\begin{aligned} P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 > 100) &= P\left(\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{S_p^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} > \frac{100 - (2950 - 2855)}{\sqrt{12678.26 \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{15}\right)}}\right) \\ &= P(t > 0.1088) = 0.4571 \qquad \qquad \qquad (\text{อ่านค่าจากแอฟฟลิเคชั่น}) \end{aligned}$$

ดังนั้นความน่าจะเป็นที่ค่าเฉลี่ยของตัวอย่างเด็กแรกเกิดเพศชายสูงกว่าหญิง 100 กรัม เท่ากับ 0.4571 #

- 3.2 กรณีความแปรปรวนของประชากรของน้ำหนักของเด็กแรกเกิดเพศชายและเพศหญิงไม่เท่ากัน เนื่องจาก $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ มีองศาเสรีคือ

$$\nu = \frac{\left(\frac{100^2}{10} + \frac{120^2}{15}\right)^2}{\left(\frac{100^2}{10}\right)^2 \cdot \frac{1}{10-1} + \left(\frac{120^2}{15}\right)^2 \cdot \frac{1}{15-1}} = 21.71 \approx 22$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 > 100) &= P\left(\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} > \frac{100 - (2950 - 2855)}{\sqrt{\frac{100^2}{10} + \frac{120^2}{15}}}\right) \\ &= P(t > 0.1129) = 0.4556 \end{aligned} \quad (\text{อ่านค่าจากแอปพลิเคชัน})$$

ดังนั้นความน่าจะเป็นที่ค่าเฉลี่ยของตัวอย่างเด็กแรกเกิดเพศชายสูงกว่าหญิง 100 กรัม เท่ากับ 0.4556 #

4. ในการเรียนของนักศึกษาศาสาวิชาคณิตศาสตร์ คะแนนสอบวิชาแคลคูลัส 1 และแคลคูลัส 2 มีการแจกแจงปกติโดยค่าเฉลี่ยของผลต่างคะแนนของ 2 วิชาไม่ต่างกัน เมื่อสุ่มนักศึกษาจำนวน 10 คน เพื่อสอบถามคะแนนสอบทั้ง 2 วิชา พบว่าความแปรปรวนของผลต่างคะแนนของ 2 วิชา เท่ากับ 9 คะแนน² จงหาความน่าจะเป็นที่ผลต่างคะแนนของ 2 วิชาของตัวอย่างจะมากกว่า 1 คะแนน
- แนวคำตอบ ข้อมูลเป็นคู่ ๆ โดยที่ $n = 10$ และ $s_d^2 = 9$ ประมาณด้วยการแจกแจงที่ซึ่งมีองศาเสรี $\nu = 10 - 1 = 9$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} P(|\bar{d}| > 1) &= P\left(\left|\frac{\bar{d} - \mu_D}{\frac{S_d}{\sqrt{n}}}\right| > \frac{1 - 0}{\frac{3}{\sqrt{10}}}\right) = P(|t| > 1.054) \\ &= 1 - P(-1.054 < t < 1.054) \\ &= 1 - P(t > -1.054) + P(t > 1.054) \\ &= 1 - 0.84032 + 0.15967 \\ &= 0.31935 \end{aligned} \quad (\text{อ่านค่าจากแอปพลิเคชัน})$$

ดังนั้นความน่าจะเป็นที่ผลต่างคะแนนของ 2 วิชาของตัวอย่างจะมากกว่า 1 คะแนน เท่ากับ 0.31935 #

5. อายุของประชากรในกรุงเทพมหานครมีการแจกแจงปกติ โดยมีความแปรปรวน 100 ปี² ถ้าสุ่มตัวอย่างขนาด 36 จงหาความน่าจะเป็นที่ความแปรปรวนของตัวอย่าง

แนวคำตอบ อายุของประชากรในกรุงเทพมหานครมีการแจกแจงปกติโดยที่ $\sigma^2 = 100$ และ $n = 36$

5.1 มากกว่า 150

ประมาณการแจกแจงความแปรปรวนด้วยไคสแควร์ซึ่งมี $\nu = 36 - 1 = 35$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} P(S^2 > 150) &= P\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} > \frac{(36-1)150}{100}\right) \\ &= P(\chi^2 > 52.5) \\ &= 0.02899 \end{aligned} \quad (\text{อ่านค่าจากแอปพลิเคชัน})$$

ดังนั้นความน่าจะเป็นที่ความแปรปรวนของตัวอย่างมากกว่า 150 เท่ากับ 0.02899 #

5.2 ระหว่าง 80 และ 120

ประมาณการแจกแจงความแปรปรวนด้วยไคสแควร์ซึ่งมี $\nu = 36 - 1 = 35$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} P(80 < S^2 < 150) &= P\left(\frac{(36-1)80}{100} < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \frac{(36-1)120}{100}\right) \\ &= P(28 < \chi^2 < 42) \\ &= P(\chi^2 > 28) - P(\chi^2 > 42) \\ &= 0.79355 - 0.19348 = 0.60007 \end{aligned} \quad (\text{อ่านค่าจากแอปพลิเคชัน})$$

ดังนั้นความน่าจะเป็นที่ความแปรปรวนของตัวอย่างระหว่าง 80 และ 120 เท่ากับ 0.60007 #

6. ในการเรียนของนักศึกษาสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะสอนสอบวิชาแคลคูลัส 1 และแคลคูลัส 2 มีการแจกแจงปกติ โดยมีความแปรปรวนเท่ากับ 25 และ 30 ตามลำดับ ถ้าสุ่มนักศึกษาที่สอบวิชาแคลคูลัส 1 มาจำนวน 23 คน และสุ่มนักศึกษาที่สอบวิชาแคลคูลัส 2 มาจำนวน 25 คน จงหาความน่าจะเป็นที่

แนวคำตอบ คณะสอนสอบวิชาแคลคูลัส 1 และแคลคูลัส 2 มีการแจกแจงปกติ โดยที่ $\sigma_1^2 = 25$, $\sigma_2^2 = 30$ และ $n_1 = 23$, $n_2 = 25$

- 6.1 ความแปรปรวนของตัวอย่างคณะสอนวิชาแคลคูลัส 1 มากกว่าสองเท่าของความแปรปรวนของตัวอย่างคณะสอนวิชาแคลคูลัส 2

ประมาณอัตราส่วนความแปรปรวนของสองประชากรด้วยการแจกแจงเอฟ โดยที่ $\nu_1 = 23 - 1 = 22$ และ $\nu_2 = 25 - 1 = 24$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} P(S_1^2 > 2S_2^2) &= P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} > 2\right) \\ &= P\left(\frac{\sigma_2^2 S_1^2}{\sigma_1^2 S_2^2} > 2 \cdot \frac{30}{25}\right) \\ &= P(F > 2.4) \\ &= 0.01961 \end{aligned} \quad (\text{อ่านค่าจากแอปพลิเคชัน})$$

ดังนั้นความน่าจะเป็นที่ความแปรปรวนของตัวอย่างคณะสอนวิชาแคลคูลัส 1 มากกว่าสองเท่าของความแปรปรวนของตัวอย่างคณะสอนวิชาแคลคูลัส 2 เท่ากับ 0.01961 #

- 6.2 ความแปรปรวนของตัวอย่างคณะสอนวิชาแคลคูลัส 1 น้อยกว่าสามเท่าของความแปรปรวนของตัวอย่างคณะสอนวิชาแคลคูลัส 2

ประมาณอัตราส่วนความแปรปรวนของสองประชากรด้วยการแจกแจงเอฟ โดยที่ $\nu_1 = 23 - 1 = 22$ และ $\nu_2 = 25 - 1 = 24$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} P(S_1^2 < 3S_2^2) &= P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} < 3\right) \\ &= P\left(\frac{\sigma_2^2 S_1^2}{\sigma_1^2 S_2^2} < 3 \cdot \frac{30}{25}\right) \\ &= P(F < 3.6) \\ &= 0.99852 \end{aligned} \quad (\text{อ่านค่าจากแอปพลิเคชัน})$$

ดังนั้นความน่าจะเป็นที่ความแปรปรวนของตัวอย่างคณะสอนวิชาแคลคูลัส 1 น้อยกว่าสามเท่าของความแปรปรวนของตัวอย่างคณะสอนวิชาแคลคูลัส 2 เท่ากับ 0.99852 #

7. ในการเรียนของนักศึกษาสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะสอนสอบกลางภาควิชาแคลคูลัส ๒ และวิชาความน่าจะเป็นและสถิติ มีการแจกแจงปกติ โดยมีความแปรปรวนเท่ากับ 270 และ 243 ตามลำดับ ถ้าสุ่มนักศึกษาที่สอบวิชาแคลคูลัส ๒ จำนวน 15 คน และสุ่มนักศึกษาที่สอบวิชาความน่าจะเป็นและสถิติ จำนวน 19 คน โดยอิสระต่อกัน จงหาความน่าจะเป็นที่ความแปรปรวนของตัวอย่างคณะสอนวิชาแคลคูลัส ๒ มากกว่าสามเท่าของความแปรปรวนของตัวอย่างคณะสอนวิชาความน่าจะเป็นและสถิติ

แนวคำตอบ คณะสอนสอบวิชาแคลคูลัส ๒ โดยที่ $\sigma_1^2 = 270$ และ $n_1 = 15$

คณะสอนสอบวิชาความน่าจะเป็นและสถิติ โดยที่ $\sigma_2^2 = 243$ และ $n_2 = 19$

ประมาณอัตราส่วนความแปรปรวนของสองประชากรด้วยการแจกแจงเอฟ โดยที่

$$\nu_1 = 15 - 1 = 14 \text{ และ } \nu_2 = 19 - 1 = 18$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} P(S_1^2 > 3S_2^2) &= P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} > 3\right) \\ &= P\left(\frac{\sigma_2^2 S_1^2}{\sigma_1^2 S_2^2} > 3 \cdot \frac{243}{270}\right) \\ &= P(F > 2.70) \\ &= 0.025 \end{aligned} \quad \text{ค่าจากตาราง F}$$

ดังนั้นความน่าจะเป็นที่ความแปรปรวนของตัวอย่างคณะสอนวิชาแคลคูลัส ๒ มากกว่าสามเท่าของความแปรปรวนของตัวอย่างคณะสอนวิชาความน่าจะเป็นและสถิติ เท่ากับ 0.025 #