เฉลย Assignment 11
MAC1304 ความน่าเป็นและสถิติ

หัวข้อ การประมาณค่า **สัปดาห์ที่** 12 **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. ส่วนสูง (เซนติเมตร) ของประชากรในหมู่บ้านแห่งหนึ่งมีการแจกแจงปกติ สุ่มตัวอย่าง 40 คนปรากฏคะแนนดังนี้

80	95	100	110	112	115	120	130	130	138
145	146	148	150	152	154	155	155	156	157
158	158	160	162	163	164	164	164	165	166
169	170	171	172	175	175	176	179	180	182

จงหาช่วงความเชื่อมั่น 90% ของค่าเฉลี่ยส่วนส่วนของประชากรในหมู่บ้านแห่งนี้

แนวคำตอบ ประชาการมีการแจกแจงปกติไม่ทราบค่า σ^2 จากข้อมูลตัวอย่างมีขนาดใหญ่คือ $n = 40$
คำนวณค่า $\bar{X} = 150.525$ และ $S = 25.17$ (โดยเครื่องคิดเลข)
ประมาณ σ ด้วย S ช่วงความเชื่อมั่น 90% นั่นคือ $\alpha = 0.1$ เพราะฉะนั้น $\frac{\alpha}{2} = 0.05$ และ $z_{0.05} = 1.65$ (ใช้แอฟปลิเคชั่น)
จะได้ว่า

$$\bar{X} \pm z_{0.05} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 150.525 \pm 1.65 \cdot \frac{25.17}{\sqrt{40}} = 150.525 \pm 6.566$$

ดังนั้นช่วงความเชื่อมั่นของ μ คือ

$$\begin{aligned} 150.525 - 6.566 \quad < \quad \mu \quad < \quad 150.525 + 6.566 \\ 143.959 \quad < \quad \mu \quad < \quad 157.091 \quad \# \end{aligned}$$

2. น้ำหนักของทุเรียนต่อลูก (หน่วยเป็นกิโลกรัม) จากสวนแห่งหนึ่งจำนวน 9 ลูก ดังนี้

3.0	3.5	4.0	4.6	5.0	5.2	5.8	6.0	6.5

จงหาช่วงความเชื่อมั่น 95% ของค่าน้ำหนักเฉลี่ยของทุเรียนในสวนแห่งนี้ สมมติว่ามีการแจกแจงปกติ

แนวคำตอบ ประชาการมีการแจกแจงปกติไม่ทราบค่า σ^2 และขนาดตัวอย่างเล็กคือ $n = 9$
จึงประมาณด้วยการแจกแจงทีซึ่งมีองศาเสรี $\nu = 9 - 1 = 8$ คำนวณค่า $\bar{X} = 4.84$ และ $S = 1.18$
ช่วงความเชื่อมั่น 95% นั่นคือ $\alpha = 0.05$ เพราะฉะนั้น $\frac{\alpha}{2} = 0.025$ และ $t_{0.025} = 2.306$ (เปิดตาราง)
จะได้ว่า

$$\bar{X} \pm t_{0.025} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 4.84 \pm 2.306 \cdot \frac{1.18}{\sqrt{9}} = 4.84 \pm 0.91$$

ดังนั้นช่วงความเชื่อมั่นของ μ คือ

$$\begin{aligned} 4.84 - 0.91 \quad < \quad \mu \quad < \quad 4.84 + 0.91 \\ 3.93 \quad < \quad \mu \quad < \quad 5.75 \quad \# \end{aligned}$$

3. น้ำหนักของแก้วมังกรต่อลูก (หน่วยเป็นกรัม) จากสวนแห่งหนึ่งจำนวน 10 ลูก ดังนี้

$$250 \quad 300 \quad 330 \quad 350 \quad 400 \quad 500 \quad 480 \quad 370 \quad 260 \quad a$$

ค่าเฉลี่ยของน้ำหนักทั้ง 10 ลูกเท่ากับ 359 กรัม จงหา a และช่วงความเชื่อมั่น 90% ของค่าน้ำหนักเฉลี่ยของแก้วมังกรในสวนแห่งนี้ สมมติว่ามีการแจกแจงปกติ

แนวคำตอบ ประชาการมีการแจกแจงปกติไม่ทราบค่า σ^2 และขนาดตัวอย่างเล็กคือ $n = 10$
จึงประมาณด้วยการแจกแจงทีซึ่งมีองศาเสรี $\nu = 10 - 1 = 9$ เนื่องจาก $\bar{X} = 359$ นั่นคือ

$$\begin{aligned} \sum X_i &= 10(359) \\ 3240 + a &= 3590 \\ a &= 350 \end{aligned}$$

ทำให้ได้ว่า $S = 83.33$ (โดยเครื่องคำนวณ)
ช่วงความเชื่อมั่น 90% นั่ นคือ $\alpha = 0.10$ เพราะฉะนั้น $\frac{\alpha}{2} = 0.05$ และ $t_{0.05} = 1.833$ (อ่านค่าจากตารางที)
จะได้ว่า

$$\bar{X} \pm t_{0.025} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 359 \pm 1.833 \cdot \frac{83.33}{\sqrt{10}} = 359 \pm 48.30$$

ดังนั้นช่วงความเชื่อมั่นของ μ คือ

$$359 - 48.30 \quad < \quad \mu \quad < \quad 359 + 48.30$$

$$310.70 \quad < \quad \mu \quad < \quad 407.30 \quad \#$$

4. เมื่อสอบถามคะแนนวิชาแคลคูลัส 1 ปรากฏว่ามีนักเรียนชาย 75 คน คำนวนค่าเฉลี่ยได้ 82 คะแนน และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 8 คะแนน มีนักเรียนหญิงจำนวน 50 คน คำนวนค่าเฉลี่ยได้ 76 คะแนน และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 6 คะแนน จงหาค่าช่วงความเชื่อมั่น 94% สำหรับผลต่างค่าเฉลี่ยคะแนนของประชากรนักเรียนชายและนักเรียนหญิง สมมติว่าประชากรปกติซึ่งเป็นอิสระต่อกัน 2 ชุด

แนวคำตอบ ประชากรปกติซึ่งเป็นอิสระต่อกัน 2 ชุดและตัวอย่างมีขนาดใหญ่คือ $n_1 = 75, n_2 = 50$
โดยที่ $\bar{X}_1 = 82, \bar{X}_2 = 76$ และ $S_1 = 8, S_2 = 6$
ช่วงความเชื่อมั่น 94% นั่นคือ $\alpha = 0.06$ เพราะฉะนั้น $\frac{\alpha}{2} = 0.03$ และ $z_{0.03} = 1.88$ (ใช้แอฟปลิเคชั่น)
จะได้ว่า

$$\begin{aligned} (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm z_{0.03} \cdot \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} &= (82 - 76) \pm 1.88 \cdot \sqrt{\frac{8^2}{75} + \frac{6^2}{50}} \\ &= 6 \pm 2.36 \end{aligned}$$

ดังนั้นช่วงความเชื่อมั่นของ $\mu_1 - \mu_2$ คือ

$$6 - 2.36 \quad < \quad \mu_1 - \mu_2 \quad < \quad 6 + 2.36$$

$$3.64 \quad < \quad \mu_1 - \mu_2 \quad < \quad 8.36 \quad \#$$

5. จากการบันทึก 15 ปี ที่ผ่านมาได้แสดงว่าปริมาณน้ำฝนในเดือนพฤษภาคม ณ ตำบลที่หนึ่งได้ข้อมูลดังนี้ (หน่วยเป็นนิ้ว)

2.40	2.42	1.87	2.50	2.29
1.68	2.57	1.60	1.65	1.41
1.66	1.32	2.43	1.83	1.41

ข้อมูลตำบลที่สองบันทึก 10 ปี ได้ข้อมูลดังนี้ (หน่วยเป็นนิ้ว)

0.79	1.25	0.72	0.84	1.32
1.35	1.29	0.72	0.96	1.13

จงหาค่าช่วงความเชื่อมั่น 95% สำหรับความแตกต่างของค่าเฉลี่ยที่แท้จริงของปริมาณน้ำฝน สมมติว่าข้อมูลเหล่านี้มาจากประชากรที่ค่าความแปรปรวนแตกต่างกัน

แนวคำตอบ ประชากรปกติซึ่งเป็นอิสระต่อกัน 2 ชุด ไม่ทราบความแปรปรวนของทั้ง 2 ชุด แต่ทราบว่าค่าความแปรปรวนแตกต่างกัน และตัวอย่างมีขนาดเล็กคือ $n_1 = 15, n_2 = 10$
โดยคำนวณค่า $\bar{X}_1 = 1.94, \bar{X}_2 = 1.04$ และ $S_1 = 0.45, S_2 = 0.26$ (โดยเครื่องคิดเลข) จะได้องศาเสรีคือ

$$\nu = \frac{\left(\frac{0.4491^2}{15} + \frac{0.2588^2}{10}\right)^2}{\left(\frac{0.4491^2}{15}\right)^2 \frac{1}{15-1} + \left(\frac{0.2588^2}{10}\right)^2 \frac{1}{10-1}} = 22.6708 \approx 23$$

ช่วงความเชื่อมั่น 95% นั่นคือ $\alpha = 0.05$ เพราะฉะนั้น $\frac{\alpha}{2} = 0.025$ และ $t_{0.025} = 2.069$ (เปิดตาราง)
จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm t_{0.025} \cdot \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} &= (1.94 - 1.04) - 2.069 \cdot \sqrt{\frac{0.45^2}{15} + \frac{0.26^2}{10}} \\ &= 0.9 \pm 0.29\end{aligned}$$

ดังนั้นช่วงความเชื่อมั่นของ $\mu_1 - \mu_2$ คือ

$$0.9 - 0.29 \quad < \quad \mu_1 - \mu_2 \quad < \quad 0.9 + 0.29$$

$$0.61 \quad < \quad \mu_1 - \mu_2 \quad < \quad 1.19 \quad \#$$

6. สุ่มตัวอย่างนักศึกษา 500 คน พบว่า 150 คนชอบเรียนแบบ Online

แนวคำตอบ เป็นการแจกแจงทวินามที่มี $n = 500, x = 150$ นั่นคือ $\hat{p} = 150/500 = 0.3$ ประมาณด้วยการแจกแจงปกติ
ช่วงความเชื่อมั่น 95% นั่นคือ $\alpha = 0.05$ เพราะฉะนั้น $\frac{\alpha}{2} = 0.025$ และ $z_{0.025} = 1.96$ (ใช้แอฟปลิเคชั่น)

6.1 จงหาค่าช่วงความเชื่อมั่น 95% ของอัตราส่วนของผู้ชอบเรียนแบบ Online
จะได้ว่า

$$\hat{p} \pm z_{0.025} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 0.3 \pm 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.3(0.7)}{500}} = 0.3 \pm 0.0401$$

ดังนั้นช่วงความเชื่อมั่นของ p คือ

$$0.3 - 0.0401 \quad < \quad p \quad < \quad 0.3 + 0.0401$$

$$0.2599 \quad < \quad p \quad < \quad 0.3401 \quad \#$$

6.2 หาค่าความผิดพลาดของการสุ่มในครั้งนี้ ที่ระดับความเชื่อมั่น 95%
ถ้าประมาณ $\hat{p} = 0.3$ จะได้ว่า

$$\text{ความคลาดเคลื่อนจะน้อยกว่า} \qquad z_{0.025} \cdot \sqrt{\frac{0.3(0.7)}{500}} = 0.0402$$

6.3 จงหาขนาดตัวอย่าง ถ้าค่าความผิดพลาดไม่เกิน 0.02 ที่ระดับความเชื่อมั่น 95%
ถ้าความผิดพลาดไม่เกิน $\varepsilon = 0.02$

$$\text{เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ} \quad \left(\frac{z_{0.025} \cdot \sqrt{0.3(0.7)}}{0.02}\right)^2 = 2016.84$$

ดังนั้นต้องใช้ขนาดตัวอย่าง 2017 คน ความผิดพลาดจะไม่เกิน 0.02

7. สุ่มตัวอย่างคะแนนสอบย่อยครั้งหนึ่งของวิชาแคลคูลัส ๒ (แจกแจงปกติ) ของนักศึกษามาจำนวน 10 คน แสดงได้ดังนี้

10 8 4 6 5 5 6 3 1 2

จงหาช่วงความเชื่อมั่น 95% สำหรับความแปรปรวนที่แท้จริงของคะแนนสอบย่อยวิชาสถิติในครั้งนี้

แนวคำตอบ ประชากรมีการแจกแจงปกติ โดยที่ $n = 10$ และ $S^2 = 7.33$ (โดยเครื่องคิดเลข) และองศาเสรีคือ $\nu = 10 - 1 = 9$
ช่วงความเชื่อมั่น 95% นั่นคือ $\alpha = 0.05$ เพราะฉะนั้น $\frac{\alpha}{2} = 0.025$ จะได้ว่า

$$\chi^2_{0.025} = 19.023 \text{ และ } \chi^2_{0.975} = 2.7 \text{ (เปิดตาราง)}$$

ช่วงความเชื่อมั่นของ σ^2 คือ

$$\begin{aligned} \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.025}} &< \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.975}} \\ \frac{(10-1)7.33}{19.023} &< \sigma^2 < \frac{(10-1)7.33}{2.7} \\ 3.47 &< \sigma^2 < 24.44 \quad \# \end{aligned}$$

8. ในการสุ่มตัวอย่างคะแนนสอบ ONET ของระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 วิชาคณิตศาสตร์จำนวน 12 คน และภาษาไทยจำนวน 16 คน คำนวนความแปรปรวนได้เป็น 125 และ 110 ตามลำดับ จงหาช่วงความเชื่อมั่น 95% สำหรับอัตราส่วนของความแปรปรวนที่แท้จริงของประชากรทั้งสองชุด สมมติว่าประชากรปกติซึ่งเป็นอิสระต่อกัน 2 ชุด

แนวคำตอบ จะเห็นว่าประชากรปกติซึ่งเป็นอิสระต่อกัน 2 ชุด โดยที่ $n_1 = 12, n_2 = 16$ และ $S_1^2 = 125, S_2^2 = 110$
จะได้ว่า $\nu_1 = 12 - 1 = 11, \nu_2 = 16 - 1 = 15$

ช่วงความเชื่อมั่น 95% นั่นคือ $\alpha = 0.05$ เพราะฉะนั้น $\frac{\alpha}{2} = 0.025$ จะได้ว่า

$$f_{0.025,(11,15)} = 3.01 \quad \text{และ} \quad f_{0.975,(11,15)} = \frac{1}{f_{0.025,(15,11)}} = \frac{1}{3.33} = 0.3 \qquad \text{(เปิดตาราง)}$$

ช่วงความเชื่อมั่นของ $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ คือ

$$\begin{aligned} \frac{1}{f_{0.025}} \cdot \frac{S_1^2}{S_2^2} &< \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{1}{f_{0.975}} \cdot \frac{S_1^2}{S_2^2} \\ \frac{1}{3.01} \cdot \frac{125}{110} &< \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{1}{0.3} \cdot \frac{125}{110} \\ 0.38 &< \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 3.79 \quad \# \end{aligned}$$