เฉลย Assignment 12
MAC1304 ความน่าเป็นและสถิติ

หัวข้อ ความผิดพลาดและการทดสอบสมติฐานเกี่ยวกับค่าเฉลี่ยประชากร **สัปดาห์ที่** 13 **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. ในการทดสอบประสิทธิภาพของวัคซีนป้องกันโควิด-19 ชนิดหนึ่ง สุ่มตัวอย่าง 1000 คน เพื่อให้วัคซีนดังกล่าว ถ้ามีจำนวน 660 ถึง 720 คน เกิดภูมิต้านทานป้องกันโรคโควิด-19 สรุปว่าวัคซีนใช้ได้ผล 70%

แนวคำตอบ กำหนดให้ X คือจำนวนผู้ป่วย และตั้งสมติฐานดังนี้

$H_0 \;:\; p = 0.70$

$H_1 \;:\; p \neq 0.70$ นั่นคือ $p = 0.75$

ตั้งเกณฑ์ว่าวัคซีนป้องกันโควิด-19 ชนิดนี้ใช้ได้ผล 70% นั่นคือ ยอมรับ $p = 0.7$ เมื่อ $660 \leq X \leq 720$

1.1 จงหาความน่าจะเป็นของความผิดพลาดประเภทที่ 1

สุ่มตัวอย่าง 1000 คน วัคซีนใช้ได้ผล 70% นั่นคือ $p = 0.7$ ให้ X เป็นจำนวนคนเกิดภูมิต้านทานป้องกันโรคโควิด-19 จะได้ว่า $X \sim \text{Bin}(n = 1000, p = 0.7)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\alpha &= P(\text{ ปฏิเสธ } H_0 \mid H_0 \text{ เป็นจริง })\\
&= P(X < 660 \text{ หรือ } X > 720 \mid p = 0.7)\\
&= 1 - P(660 \leq X \leq 720 \mid p = 0.7)\\
&= 1 - \sum_{x=660}^{720} b(x; 1000, 0.7)\\
&= 1 - \left(\sum_{x=0}^{720} b(x; 1000, 0.7) - \sum_{x=0}^{659} b(x; 1000, 0.7)\right)\\
&= 1 - (0.9221 - 0.0028)\\
&= 0.0807
\end{aligned}$$

ดังนั้นความน่าจะเป็นของความผิดพลาดประเภทที่ 1 เท่ากับ 0.0807 #

1.2 อำนาจของการทดสอบ เมื่อประสิทธิภาพของการรักษาโรคเป็น 75%

สุ่มตัวอย่าง 1000 คน วัคซีนใช้ได้ผลจริง ๆ 75% นั่นคือ $p = 0.75$ ให้ X เป็นจำนวนคนเกิดภูมิต้านทานป้องกันโรคโควิด-19 จะได้ว่า $X \sim \text{Bin}(n = 1000, p = 0.75)$ จะได้ว่า จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\beta &= P(\text{ ยอมรับ } H_0 \mid H_0 \text{ ไม่เป็นจริง })\\
&= P(660 \leq X \leq 720 \mid p = 0.75)\\
&= \sum_{x=660}^{720} b(x; 1000, 0.75)\\
&= \sum_{x=0}^{720} b(x; 1000, 0.75) - \sum_{x=0}^{659} b(x; 1000, 0.75)\\
&= 0.0164 - 0.0000\\
&= 0.0164
\end{aligned}$$

ดังนั้นอำนาจของการทดสอบ เมื่อประสิทธิภาพของการรักษาโรคเป็น 75% เท่ากับ $1 - \beta = 1 - 0.0164 = 0.9836$ #

2. คะแนนสอบปรับพื้นฐานวิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ของโรงเรียนแห่งหนึ่งมีการแจกแจงปกติ ซึ่งมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 16 คะแนน ผู้ทำการทดสอบอ้างว่าในการสอบครั้งนี้มีคะแนนเฉลี่ย 30 คะแนน เพื่อทดสอบคำกล่าวอ้างของผู้ทำการทดสอบ จึงสุ่มเลือกตัวอย่าง 20 คนปรากฏคะแนนดังนี้

15	16	20	40	50	60	80	90	55	37
72	61	52	49	33	25	32	10	8	30

จงทดสอบสมมติฐานว่าค่าเฉลี่ยของคะแนนสอบครั้งนี้เป็น 30 คะแนน จริงหรือไม่ กำหนดระดับนัยสำคัญ 0.05

แนวคำตอบ กำหนดสมมติฐาน

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = 30 \\ H_1 &: \mu \neq 30 \end{aligned}$$

ทดสอบที่ระดับนัยสำคัญ $\alpha = 0.05$
สุ่มตัวอย่างขนาด $n = 20$ จากประชากรปกติที่มี $\sigma = 16$ โดยมี $\bar{X} = 41.75$ (เครื่องคิดเลข)
เนื่องจากประชากรปกติและทราบค่าความแปรปรวน เลือกสถิติ Z นั่นคือ

$$Z_{\text{คำนวณ}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{41.75 - 30}{\frac{16}{\sqrt{20}}} = 3.28$$

วิธีที่ 1 เนื่องจาก $Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.025} = 1.96$ บริเวณวิกฤตคือ $Z < -1.96$ หรือ $Z > 1.96$
จะเห็นว่า $Z_{\text{คำนวณ}} = 3.28 > 1.96$ อยู่ในบริเวณวิกฤต ดังนั้นปฏิเสธ H_0

วิธีที่ 2 จะเห็นว่า

$$\text{P-value } = P(Z > 3.28) = 1 - P(Z < 3.28) = 1 - 0.9995 = 0.0005 < 0.025 = \frac{\alpha}{2}$$

ดังนั้นปฏิเสธ H_0

สรุปได้ว่าค่าเฉลี่ยของคะแนนสอบครั้งนี้ไม่เท่ากับ 30 คะแนน ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 #

3. คะแนนสอบวิชาทฤษฎีจำนวนมีการแจกแจงปกติ อาจารย์ผู้สอนกล่าวอ้างว่าคะแนนเฉลี่ยในการสอบครั้งนี้เท่ากับ 65 คะแนน เพื่อทดสอบคำกล่าวอ้างดังกล่าว จึงสุ่มเลือกตัวอย่าง 36 คนปรากฏคะแนนดังนี้

30	45	50	45	60	70	75	80	59	55
49	60	65	57	55	90	35	90	78	46
58	62	63	75	73	75	79	56	50	82
60	63	39	45	15	50				

จงทดสอบสมมติฐานว่าค่าเฉลี่ยของคะแนนสอบครั้งนี้เป็น 65 คะแนน จริงหรือไม่ กำหนดระดับนัยสำคัญ 0.05

แนวคำตอบ กำหนดสมมติฐาน

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = 65 \\ H_1 &: \mu \neq 65 \end{aligned}$$

ทดสอบที่ระดับนัยสำคัญ $\alpha = 0.05$
ประชาการมีการแจกแจงปกติไม่ทราบค่า σ^2 และตัวอย่างมีขนาดใหญ่คือ $n = 36$ จึงประมาณตัวอย่างด้วยการแจกแจงปกติที่ประมาณค่า σ ด้วย $S = 16.66$ และ $\bar{X} = 59.42$ (เครื่องคำนวณ)
เลือกสถิติ Z นั่นคือ

$$Z_{\text{คำนวณ}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{59.42 - 65}{\frac{16.66}{\sqrt{36}}} = -2.01$$

จะเห็นว่า

$$\text{P-value } = P(Z > 2.01) = 1 - P(Z < 2.01) = 1 - 0.9778 = 0.0222 < 0.025 = \frac{\alpha}{2}$$

ดังนั้นปฏิเสธ H_0

สรุปได้ว่าคะแนนเฉลี่ยในการสอบครั้งนี้ไม่เท่ากับ 65 คะแนน ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 #

4. คะแนนเฉลี่ย (GPAX) ของนักเรียนของโรงเรียนแห่งหนึ่งมีการแจกแจงปกติ มีผู้กล่าวอ้างว่าคะแนนเฉลี่ย GPAX ของนักเรียนในโรงเรียนสูงกว่า 2.50 เพื่อทดสอบคำกล่าวอ้างดังกล่าว สุ่มตัวอย่างมา 100 คน คำนวณคะแนนเฉลี่ย GPAX ได้เป็น 2.48 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 0.36 จงทดสอบสมมติฐานว่าคะแนนเฉลี่ย GPAX สูงกว่า 2.50 จริงหรือไม่ กำหนดระดับนัยสำคัญ 0.03 (ใช้ P-value)

แนวคำตอบ กำหนดสมมติฐาน

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = 2.50 \\ H_1 &: \mu > 2.50 \end{aligned}$$

ทดสอบที่ระดับนัยสำคัญ $\alpha = 0.03$
สุ่มตัวอย่างขนาด $n = 100$ จากประชากรปกติที่มี $\sigma = 16$ โดยมี $\bar{X} = 2.48$ และ $S = 0.36$
เนื่องจากประชากรปกติ ไม่ทราบค่าความแปรปรวน และตัวอย่างมีขนาดใหญ่ เลือกสถิติ Z นั่นคือ

$$Z_{\text{คำนวณ}} = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{2.48-2.50}{\frac{0.36}{\sqrt{100}}} = -0.56$$

จะเห็นว่า

$$\text{P-value} = P(Z > 0.56) = 1 - P(Z < 0.56) = 1 - 0.7123 = 0.2877 > 0.03 = \alpha$$

ดังนั้นยอมรับ H_0

สรุปได้ว่าคะแนนเฉลี่ย GPAX ของนักเรียนในโรงเรียนไม่สูงกว่า 2.50 ที่ระดับนัยสำคัญ 0.03 #

5. การศึกษาผลสัมฤทธิ์ของวิชาคณิตศาสตร์เรื่องการบวกลบเศษส่วน โดยใช้สื่อประสมร่วมกับการจัดการเรียนรู้แบบ STAD ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ของโรงเรียนแห่งหนึ่ง โดยเลือกสุ่มตัวอย่างแบบแบ่งกลุ่ม (cluster random sampling) จำนวน 25 คน ตั้งสมมติฐานว่านักเรียนมีผลสัมฤทธิ์สูงกว่าเกณฑ์ เมื่อเทียบกับเกณฑ์ร้อยละ 60 มีผลคะแนนทดสอบหลังทำการวิจัย (คะแนนเต็ม 20) ดังนี้

11	12	13	15	16	20	13	10	16	18
14	9	17	15	12	16	18	12	11	15
10	19	12	15	12					

จงทดสอบสมมติฐานของการวิจัยดังกล่าวว่าเป็นจริงหรือไม่ (One-sample t-test) ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 สมมติประชากรมีการแจกแจงปกติ

แนวคำตอบ เนื่องจากคะแนนเต็ม 20 เกณฑ์ร้อยละ 60 เท่ากับ $0.6(20) = 12$ คะแนน กำหนดสมมติฐาน

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = 12 \\ H_1 &: \mu > 12 \end{aligned}$$

ทดสอบที่ระดับนัยสำคัญ $\alpha = 0.05$
สุ่มตัวอย่างขนาด $n = 15$ จากประชากรปกติ โดยมี $\bar{X} = 14.04$ และ $S = 2.99$
เนื่องจากประชากรปกติ ไม่ทราบค่าความแปรปรวน และตัวอย่างมีขนาดเล็ก เลือกสถิติ t โดยมี $\nu = 25 - 1 = 24$ นั่นคือ

$$t_{\text{คำนวณ}} = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{14.04-12}{\frac{2.99}{\sqrt{25}}} = 3.41$$

วิธีที่ 1 เนื่องจาก $t_{\frac{\alpha}{2},\nu} = t_{0.025,24} = 2.06$ บริเวณวิกฤตคือ $t < -2.06$ หรือ $t > 2.06$
จะเห็นว่า $t_{\text{คำนวณ}} = 3.41 > 2.06$ อยู่ในบริเวณวิกฤต ดังนั้นปฏิเสธ H_0

วิธีที่ 2 จะเห็นว่า

$$\text{P-value} = P(t > 3.41) = 0.0011 < 0.05 = \alpha$$

ดังนั้นปฏิเสธ H_0

สรุปได้ว่านักเรียนมีผลสัมฤทธิ์สูงกว่าเกณฑ์ เมื่อเทียบกับเกณฑ์ร้อยละ 60 ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 #

6. จากการบันทึก 15 ปี ที่ผ่านมาได้แสดงว่าปริมาณน้ำฝนในเดือนพฤษภาคม ณ ตำบลที่หนึ่งได้ข้อมูลดังนี้ (หน่วยเป็นนิ้ว)

2.40	2.42	1.87	2.50	2.29
1.68	2.57	1.60	1.65	1.41
1.66	1.32	2.43	1.83	1.41

ข้อมูลตำบลที่สองบันทึก 10 ปี ได้ข้อมูลดังนี้ (หน่วยเป็นนิ้ว)

0.79	1.25	0.72	0.84	1.32
1.35	1.29	0.72	0.96	1.13

จงทดสอบว่าปริมาณน้ำฝนเฉลี่ยของตำบลที่หนึ่งสูงกว่าตำบลที่สองหรือไม่ ที่ระดับนัยสำคัญ 0.02

6.1 เมื่อความแปรปรวนของประชากรทั้งสองเท่ากัน

แนวคำตอบ กำหนดสมมติฐาน

$$H_0 \quad : \quad \mu_1 - \mu_2 = 0$$
$$H_1 \quad : \quad \mu_1 - \mu_2 > 0$$

ทดสอบที่ระดับนัยสำคัญ $\alpha = 0.02$

ประชากรปกติซึ่งเป็นอิสระต่อกัน 2 ชุด ไม่ทราบความแปรปรวนของทั้ง 2 ชุด แต่ทราบว่าค่าความแปรปรวนเท่ากัน และตัวอย่างมีขนาดเล็กคือ $n_1 = 15, n_2 = 10$ เลือกสถิติ t โดยมีศาเสรีคือ $\nu = 15 + 10 - 2 = 23$ โดยคำนวณค่า $\bar{X}_1 = 1.94, \bar{X}_2 = 1.04$ และ $S_1 = 0.45, S_2 = 0.26$ (โดยเครื่องคิดเลข) และ

$$S_p^2 = \frac{(15-1)0.45^2 + (10-1)0.26^2}{15+10-2} = 0.15$$

จะได้ว่า

$$t_{\text{คำนวณ}} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{(1.94 - 1.04) - 0}{\sqrt{0.15\left(\frac{1}{15} + \frac{1}{10}\right)}} = 5.69$$

วิธีที่ 1 เนื่องจาก $t_{\alpha,\nu} = t_{0.02,23} = 2.18$ บริเวณวิกฤตคือ $t > 2.18$

จะเห็นว่า $t_{\text{คำนวณ}} = 5.69 > 2.18$ อยู่ในบริเวณวิกฤต ดังนั้นปฏิเสธ H_0

วิธีที่ 2 จะเห็นว่า

$$\text{P-value} = P(t > 5.96) = 0.000004 < 0.02 = \alpha$$

ดังนั้นปฏิเสธ H_0

สรุปได้ว่าปริมาณน้ำฝนเฉลี่ยของตำบลที่หนึ่งสูงกว่าตำบล ที่ระดับนัยสำคัญ 0.02 #

6.2 เมื่อความแปรปรวนของประชากรทั้งสองแตกต่างกัน

แนวคำตอบ กำหนดสมมติฐาน

$H_0 \quad : \quad \mu_1 - \mu_2 = 0$

$H_1 \quad : \quad \mu_1 - \mu_2 > 0$

ทดสอบที่ระดับนัยสำคัญ $\alpha = 0.02$

ประชากรปกติซึ่งเป็นอิสระต่อกัน 2 ชุด ไม่ทราบความแปรปรวนของทั้ง 2 ชุด แต่ทราบว่าค่าความแปรปรวนแตกต่างกัน และตัวอย่างมีขนาดเล็กคือ $n_1 = 15, n_2 = 10$ เลือกสถิติ t

โดยคำนวณค่า $\bar{X}_1 = 1.94, \bar{X}_2 = 1.04$ และ $S_1 = 0.45, S_2 = 0.26$ (โดยเครื่องคิดเลข) จะได้องศาเสรีคือ

$$\nu = \frac{\left(\frac{0.45^2}{15} + \frac{0.26^2}{10}\right)^2}{\left(\frac{0.45^2}{15}\right)^2 \frac{1}{15-1} + \left(\frac{0.26^2}{10}\right)^2 \frac{1}{10-1}} = 22.68 \approx 23$$

จะได้ว่า

$$t_{\text{คำนวณ}} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} = \frac{(1.94 - 1.04) - 0}{\sqrt{\frac{0.45^2}{15} + \frac{0.26^2}{10}}} = 6.32$$

วิธีที่ 1 เนื่องจาก $t_{\alpha,\nu} = t_{0.02,23} = 2.18$ บริเวณวิกฤตคือ $t > 2.18$

จะเห็นว่า $t_{\text{คำนวณ}} = 6.32 > 2.18$ อยู่ในบริเวณวิกฤต ดังนั้นปฏิเสธ H_0

วิธีที่ 2 จะเห็นว่า

$$\text{P-value} = P(t > 6.32) = 0.000001 < 0.02 = \alpha$$

ดังนั้นปฏิเสธ H_0

สรุปได้ว่าปริมาณน้ำฝนเฉลี่ยของตำบลที่หนึ่งสูงกว่าตำบล ที่ระดับนัยสำคัญ 0.02 #