เฉลย Assignment 2
MAC1304 ความน่าเป็นและสถิติ

หัวข้อ การวัดการกระจายของข้อมูล **สัปดาห์ที่** 2 **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. ข้อมูลชุดหนึ่งถ้าเรียงจากน้อยไปมากแล้วได้เป็นลำดับเลขคณิตต่อไปนี้

$$3, \quad 7, \quad 11, \ldots, a_n$$

ถ้าควอไทล์ที่ 3 เท่ากับ 299 จงหาเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 69 ของข้อมูลนี้

แนวคำตอบ เนื่องจาก $a_1 = 3$ และ $d = 4$ จะได้ว่า $a_n = 4n - 1$ และ

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n$$

เนื่องจากข้อมูลมี n ตัว จะได้ว่า

$$\begin{aligned} Q_3 = a_{\frac{3(n+1)}{4}} = 4\left(\frac{3(n+1)}{4}\right) - 1 &= 299 \\ 3n + 2 &= 299 \\ n &= 99 \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$P_{69} = a_{\frac{69(99+1)}{100}} = a_{69} = 4(69) - 1 = 275$$

สรุปได้ว่าเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 69 ของข้อมูลนี้เท่ากับ 275 #

2. ในการสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนห้องหนึ่งมีจำนวน 30 คน ปรากฏว่ามีนักเรียน 17 คน สอบได้คะแนนในช่วง $10 - 39$ คะแนน มีนักเรียน 10 คน สอบได้คะแนนในช่วง $40 - 49$ คะแนน และมีนักเรียน 3 คน สอบได้คะแนนในช่วง $50 - 59$ คะแนน ถ้าแบ่งคะแนนออกเป็นเกรด 3 ระดับ คือเกรด A เกรด B และ เกรด C โดยที่ 10% ของนักเรียนได้เกรด A และ 20% ของนักเรียนได้เกรด B คะแนนสูงสุดของเกรด C เท่ากับกี่คะแนน

แนวคำตอบ จากข้อมูลเขียนตารางได้ดังนี้

ช่วงคะแนน	จำนวนคน	จำนวนคนสะสม
$10 - 39$	17	17
$40 - 49$	10	27
$50 - 59$	3	30

เนื่องจาก 10% ของนักเรียนได้เกรด A และ 20% ของนักเรียนได้เกรด B ดังนั้นจำนวนนักเรียนที่ได้เกรด C เท่ากับ 70% ซึ่งหมายถึง 70% แรกของจำนวนนักเรียนทั้งหมด นั่นคือ P_{70}

ตำแหน่งของ P_{70} คือ $70 \cdot \frac{30}{100} = 21$ อยู่ในชั้นที่ 2 โดยมี $L = 39.5$, $I = 10$, $\sum f_L = 17$ และ $f_{P_{70}} = 10$ ดังนั้น

$$P_{70} = 39.5 + \frac{10}{10}(21 - 17) = 43.5$$

ดังนั้นคะแนนสูงสุดของเกรด C เท่ากับ 43.5 คะแนน #

3. จากตารางแจกแจงความถี่ต่อไปนี้ ถ้า P_{30} เท่ากับ 15 จงหาค่าของ x และ y

อันตรภาคชั้น	ความถี่
$5-11$	10
$12-18$	x
$19-25$	6
$26-32$	11
$33-39$	y
$40-46$	7
รวม	50

แนวคำตอบ ตำแหน่งของ P_{30} คือ $30 \cdot \dfrac{50}{100} = 15$ อยู่ในชั้นที่ 2 โดยมี $L = 11.5, I = 7, \sum f_L = 10$ และ $f_{P_{30}} = x$

อันตรภาคชั้น	ความถี่	ความถี่สะสม
$5-11$	10	10
$12-18$	x	$10+x$
$19-25$	6	$16+x$
$26-32$	11	$27+x$
$33-39$	y	$27+x+y$
$40-46$	7	$34+x+y$
รวม	50	

$$
\begin{aligned}
P_{30} &= 11.5 + \frac{7}{x}(15-10) \\
15 &= 11.5 + \frac{35}{x} \\
3.5 &= \frac{35}{x} \\
x &= \frac{35}{3.5} = 10
\end{aligned}
$$

จาก $34 + x + y = 50$ และ $x = 10$ ดังนั้น $y = 6$ #

4. พิจารณาข้อมูลชุดหนึ่งซึ่งเรียงลำดับจากน้อยไปมากดังต่อไปนี้ $8, a, 12, 17, 22, b, 26$ ถ้าค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 17 และควอไทลที่ 1 เท่ากับ 10 แล้วสัมประสิทธิ์ของส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ยและสัมประสิทธิ์ของส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์ เท่ากับเท่าใด

แนวคำตอบ ตำแหน่งของ Q_1 คือ $\dfrac{7+1}{4} = 2$ ดังนั้น $10 = Q_1 = a$

เนื่องจาก $\mu = 17$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
17 &= \frac{8+a+12+17+22+b+26}{7} = \frac{a+b+85}{7} \\
34 &= a+b \\
34 &= 10+b \\
24 &= b
\end{aligned}
$$

ตำแหน่งของ Q_3 คือ $3 \cdot \dfrac{7+1}{4} = 6$ ดังนั้น $Q_3 = b = 24$ ดังนั้น

$$
C.Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{24-10}{24+10} = \frac{7}{17} = 0.4118 \quad \#
$$

และ

$$
\begin{aligned}
C.M.D. &= \frac{M.D.}{\mu} = \frac{\sum |x_i - 17|}{17(7)} \\
&= \frac{|8-17| + |10-17| + |12-17| + |17-17| + |22-17| + |24-17| + |26-17|}{119} \\
&= \frac{9+7+5+0+5+7+9}{119} \\
&= \frac{42}{119} = \frac{6}{17} = 0.3529 \quad \#
\end{aligned}
$$

5. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบของนักเรียนกลุ่มหนึ่งเท่ากับ 72 คะแนน ความแปรปรวน (ประชากร) เท่ากับ 600 ถ้ามีนักเรียนมาเพิ่มอีก 1 คน ซึ่งสอบได้ 60 คะแนน ทำให้ค่าเฉลี่ยเปลี่ยนไปเป็น 70 คะแนน ความแปรปรวนของข้อมูลชุดใหม่เท่ากับเท่าใด

แนวคำตอบ ให้ประชากรขนาด n ประกอบด้วย $x_1, x_2, ..., x_n$ ซึ่งมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 72 ความแปรปรวนเท่ากับ 600 นั่นคือ

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 72n$$

และ

$$600 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - 72^2$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = (600 + 72^2)n = 5784n$$

พิจารณาข้อมูลชุดใหม่คือ $x_1, x_2, ..., x_n, 60$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 70 &= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i + 60}{n+1} = \frac{72n+60}{n+1} \\ 70(n+1) &= 72n + 60 \\ 70n + 70 &= 72n + 60 \\ n &= 5 \end{aligned}$$

และ

$$\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 5784(5) = 28920$$

ดังนั้นความแปรปรวนชุดใหม่เท่ากับ

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i^2 + 60^2}{6} - 70^2 = \frac{28920 + 3600}{6} - 4900 = 520 \quad \#$$

6. ข้อมูลชุดที่ 1 มีจำนวน N_1 มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ μ_1 มีความแปรปรวนเท่ากับ σ_1^2
ข้อมูลชุดที่ 2 มีจำนวน N_2 มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ μ_2 มีความแปรปรวนเท่ากับ σ_2^2
ความแปรปรวนรวมของข้อมูลทั้งสองชุด เขียนแทนด้วย σ_{com}^2 ถ้า $\mu_1 \neq \mu_2$ จงพิสูจน์ว่า

$$\sigma_{com}^2 = \frac{N_1\sigma_1^2 + N_2\sigma_2^2}{N_1 + N_2} + N_1N_2\left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{N_1 + N_2}\right)^2$$

บทพิสูจน์. ให้ข้อมูลชุดที่ 1 มีจำนวน N_1 ประกอบด้วย $x_1, x_2, ..., x_{N_1}$
ให้ข้อมูลชุดที่ 2 มีจำนวน N_2 ประกอบด้วย $y_1, y_2, ..., y_{N_2}$
ให้ μ แทนค่าเฉลี่ยรวมของทั้งสองประชากร จะได้ว่า

$$\mu = \frac{N_1\mu_1 + N_2\mu_2}{N_1 + N_2}$$

และ

$$\sigma_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N_1} x_i^2}{N_1} - \mu_1^2 \quad \longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{N_1} x_i^2 = (\sigma_1^2 + \mu_1^2)N_1$$

$$\sigma_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N_2} y_i^2}{N_2} - \mu_2^2 \quad \longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{N_2} y_i^2 = (\sigma_2^2 + \mu_2^2)N_2$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\sigma_{com}^2 &= \frac{\sum_{i=1}^{N_1} x_i^2 + \sum_{i=1}^{N_2} y_i^2}{N_1 + N_2} - \mu^2 \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{N_1} x_i^2 + \sum_{i=1}^{N_2} y_i^2}{N_1 + N_2} - \left(\frac{N_1\mu_1 + N_2\mu_2}{N_1 + N_2}\right)^2 \\
&= \frac{(\sigma_1^2 + \mu_1^2)N_1 + (\sigma_2^2 + \mu_2^2)N_2}{N_1 + N_2} - \left(\frac{N_1\mu_1 + N_2\mu_2}{N_1 + N_2}\right)^2 \\
&= \frac{(N_1\sigma_1^2 + N_2\sigma_2^2) + (N_1\mu_1^2 + N_2\mu_2^2)}{N_1 + N_2} - \left(\frac{N_1\mu_1 + N_2\mu_2}{N_1 + N_2}\right)^2 \\
&= \frac{N_1\sigma_1^2 + N_2\sigma_2^2}{N_1 + N_2} + \frac{N_1\mu_1^2 + N_2\mu_2^2}{N_1 + N_2} - \left(\frac{N_1\mu_1 + N_2\mu_2}{N_1 + N_2}\right)^2 \\
&= \frac{N_1\sigma_1^2 + N_2\sigma_2^2}{N_1 + N_2} + \frac{(N_1\mu_1^2 + N_2\mu_2^2)(N_1 + N_2)}{(N_1 + N_2)^2} - \left(\frac{N_1\mu_1 + N_2\mu_2}{N_1 + N_2}\right)^2 \\
&= \frac{N_1\sigma_1^2 + N_2\sigma_2^2}{N_1 + N_2} + \frac{N_1^2\mu_1^2 + N_1N_2\mu_2^2 + N_1N_2\mu_1^2 + N_2^2\mu_2^2}{(N_1 + N_2)^2} - \frac{N_1^2\mu_1 + 2N_1N_2\mu_1\mu_2 + N_2^2\mu_2}{(N_1 + N_2)^2} \\
&= \frac{N_1\sigma_1^2 + N_2\sigma_2^2}{N_1 + N_2} + \frac{N_1N_2\mu_2^2 + N_1N_2\mu_1^2 - 2N_1N_2\mu_1\mu_2}{(N_1 + N_2)^2} \\
&= \frac{N_1\sigma_1^2 + N_2\sigma_2^2}{N_1 + N_2} + \frac{N_1N_2(\mu_2^2 - 2\mu_1\mu_2 + \mu_2^2)}{(N_1 + N_2)^2} \\
&= \frac{N_1\sigma_1^2 + N_2\sigma_2^2}{N_1 + N_2} + N_1N_2\left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{N_1 + N_2}\right)^2
\end{aligned}$$

□

7. ให้ข้อมูลที่กล่าวต่อไปนี้เป็นประชากร กำหนดให้

$$x_1, x_2, x_3, ..., x_n$$

เป็นข้อมูลชุดที่หนึ่ง ซึ่งมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 6 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 2

$$y_1, y_2, y_3, ..., y_n$$

เป็นข้อมูลชุดที่สอง โดยที่ $y_i = ax_i + b$ เมื่อ $i = 1, 2, 3, ..., n$ และ $a, b \in \mathbb{R}$ และ $a > 0$

ถ้านำข้อมูลทั้งสองชุดมารวมกัน

$$x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n$$

พบว่าค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 7 และความแปรปรวนเท่ากับ 21 จงหา**ค่า $\boldsymbol{a}$ และ $\boldsymbol{b}$**

แนวคำตอบ ข้อมูลชุดที่หนึ่งมี $\mu_X = 6$ และ $\sigma_X = 2$
ข้อมูลชุดที่สองมี

$$\mu_Y = a\mu_X + b = 6a + b \qquad \text{และ} \qquad \sigma_Y = |a|\sigma_X = 2a \qquad \text{เนื่องจาก } a > 0$$

พิจารณาค่าเฉลี่ยรวม $\mu_{com} = 7$ นั่นคือ

$$\begin{aligned}
\mu_{com} &= \frac{n\mu_X + n\mu_Y}{n+n} \\
7 &= \frac{6 + (6a+b)}{2} \\
\mu_Y = 6a + b &= 8
\end{aligned}$$

พิจารณาความแปรปรวนรวม $\sigma^2_{com} = 21$ ในกรณี $\mu_X \neq \mu_Y$

$$\begin{aligned}
\sigma^2_{com} &= \frac{n\sigma^2_X + n\sigma^2_Y}{n+n} + n \cdot n \left(\frac{\mu_Y - \mu_X}{n+n}\right)^2 \\
21 &= \frac{2^2 + (2a)^2}{2} + n^2 \cdot \frac{(8-6)^2}{4n^2} \\
21 &= 2 + 2a^2 + 1 \\
9 &= a^2 \\
3 &= a \qquad \text{และ} \qquad b = 8 - 6a = 8 - 6(3) = -10 \quad \#
\end{aligned}$$

8. ข้อมูลประชากร**เรียงจากน้อยไปมาก**ดังนี้

$$1, 2, 2, 3, 5, a, 9, 12, 13, 15$$

เมื่อ a เป็นจำนวนจริง ถ้า**ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย**เท่ากับ 4.4 จงหา**ค่าสัมประสิทธิ์ความแปรผัน**ของประชากรชุดนี้

แนวคำตอบ เนื่องจากข้อมูลเรียงจากน้อยไปมากจะได้ว่า $5 \le a \le 9$ และ

$$\mu = \frac{1+2+2+3+5+a+9+12+13+15}{10} = \frac{62+a}{10} = 6.2 + \frac{a}{10}$$

จาก $5 \le a \le 9$ ฉะนั้น

$$\begin{array}{rcccl} 0.5 & \le & \dfrac{a}{10} & \le & 0.9 \\ 6.2+0.5 & \le & 6.2+\dfrac{a}{10} & \le & 6.2+0.9 \\ 6.7 & \le & \mu & \le & 7.1 \end{array}$$

จาก $M.D. = 4.4$ และ $6.7 \le \mu \le 7.1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} M.D. &= \frac{\sum |x_i - \mu|}{10} \\ 4.4(10) &= |1-\mu| + |2-\mu| + |2-\mu| + |3-\mu| + |5-\mu| + |a-\mu| \\ &\quad + |9-\mu| + |12-\mu| + |13-\mu| + |15-\mu| \\ 44 &= (\mu-1) + (\mu-2) + (\mu-2) + (\mu-3) + (\mu-5) + |a-\mu| \\ &\quad + (9-\mu) + (12-\mu) + (13-\mu) + (15-\mu) \\ 44 &= |a-\mu| + \mu + 36 \\ 8 &= |a-\mu| + \mu \end{aligned}$$

กรณี $\mu \ge a$ จะได้ว่า

$$8 = -(a-\mu) + \mu = -a + 2\mu = -a + 2\left(6.2 + \frac{a}{10}\right) = 12.4 - 0.8a$$

$$\begin{aligned} 0.8a &= 12.4 - 8 = 4.4 \\ a &= \frac{44}{8} = 5.5 \qquad \text{แล้ว } \mu = 6.75 \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{\sum (x_i - 6.75)^2}{10} = 23.6625 \\ \sigma &= 4.8644 \end{aligned}$$

ฉะนั้น

$$C.V. = \frac{4.8644}{6.75} = 0.7206$$

ค่าสัมประสิทธิ์ความแปรผันของประชากรชุดนี้เท่ากับ 0.7206 #

กรณี $\mu > a$ จะได้ว่า

$$8 = (a-\mu) + \mu = a$$

ดังนั้น $a = 8$ และ $\mu = 6.2 + \frac{8}{10} = 7$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{\sum (x_i - 7)^2}{10} = \frac{6^2+5^2+5^2+4^2+2^2+1^2+2^2+5^2+6^2+8^2}{10} = 23.6 \\ \sigma &= 4.85798 \end{aligned}$$

ฉะนั้น

$$C.V. = \frac{4.85798}{7} = 0.6940$$

ค่าสัมประสิทธิ์ความแปรผันของประชากรชุดนี้เท่ากับ 0.6940 #