คณิตศาสตร์

เฉลย Assignment 5
MAC1304 ความน่าเป็นและสถิติ

หัวข้อ การแจกแจงความน่าจะเป็นต่อเนื่อง การแจกแจงความน่าจะเป็นร่วมกัน และค่าคาดคะเน **สัปดาห์ที่** 5 **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. ถ้าเวลา (ชั่วโมง) ที่คอมพิวเตอร์เครื่องหนึ่งทำงานก่อนจะเสียเป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่องที่มี p.d.f คือ

$$f(x) = \begin{cases} re^{-\frac{x}{100}} & \text{เมื่อ } x \geq 0 \\ 0 & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases}$$

จงหาความน่าจะเป็นที่เครื่องคอมพิวเตอร์เครื่องหนึ่งจะทำงานได้ระหว่าง 50 ถึง 150 ชั่วโมงก่อนจะเสีย

แนวคำตอบ หา r จากเงื่อนไขที่ว่า

$$\begin{aligned} 1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx &= \lim_{t\to\infty} \int_0^t re^{-\frac{x}{100}}\,dx \\ &= \lim_{t\to\infty} \left[-100re^{-\frac{x}{100}}\right]_0^t \\ &= \lim_{t\to\infty} \left[-100re^{-\frac{t}{100}} + 100r\right] \\ &= 100r \end{aligned}$$

ดังนั้น $r = \dfrac{1}{100}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} P(50 < X < 150) &= \int_{50}^{150} f(x)\,dx \\ &= \int_{50}^{150} \frac{1}{100} e^{-\frac{x}{100}}\,dx \\ &= \left[-e^{-\frac{x}{100}}\right]_{50}^{150} \\ &= e^{-1.5} + e^{-0.5} \\ &= \frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{1}{e\sqrt{e}} = \frac{e-1}{e\sqrt{e}} = 0.3834 \end{aligned}$$

ดังนั้นความน่าจะเป็นที่เครื่องคอมพิวเตอร์เครื่องหนึ่งจะทำงานได้ระหว่าง 50 ถึง 150 ชั่วโมงก่อนจะเสียเท่ากับ 0.3834 #

2. ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง ซึ่งมี p.d.f คือ $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - ax & \text{เมื่อ } 0 < x < 4 \\ 0 & \text{เมื่อ } x \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$ จงหา $P(X > 2)$

แนวคำตอบ หา a จากเงื่อนไขที่ว่า

$$\begin{aligned} 1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx &= \int_0^4 \frac{1}{2} - ax\,dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}ax^2\right]_0^4 \\ &= \left[\frac{1}{2}(4) - \frac{1}{2}a(16)\right] - 0 \\ &= 2 - 8a \end{aligned}$$

ดังนั้น $a = \dfrac{1}{8}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} P(X > 2) &= \int_2^\infty f(x)\,dx = \int_2^4 \frac{1}{2} - \frac{1}{8}x\,dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{16}x^2\right]_2^4 \\ &= \left[\frac{1}{2}(4) - \frac{1}{16}(16)\right] - \left[\frac{1}{2}(2) - \frac{1}{16}(4)\right] \\ &= 2 - 1 - 1 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \quad \# \end{aligned}$$

3. กล่องใบหนึ่งมีลูกบอลสีดำ 3 ลูก สีแดง 2 ลูก และสีเขียว 3 ลูก หยิบลูกบอลอย่างสุ่ม 2 ลูก โดยหยิบคราวละลูกโดยไม่ใส่กลับคืน ให้ X เป็นจำนวนลูกบอลสีดำ และ Y เป็นจำนวนลูกบอลสีแดงที่หยิบได้ จงสร้างตารางของฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วมกันของ X และ Y

แนวคำตอบ จะได้ว่า $X = 0, 1, 2$ และ $Y = 0, 1, 2$

จะเห็นว่าลูกบอลสีดำ 3 ลูก สีแดง 2 ลูก และสีเขียว 3 ลูก
ให้ B แทนลูกบอลสีดำ R แทนลูกบอลสีแดง และ G แทนลูกบอลสีเขียว แสดงรูปแบบดังตาราง

	0	1	2
0	GG	BG, GB	BB
1	GR, RG	BR, RB	-
2	RR	-	-

ดังนั้นตารางของฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วมกันของ X และ Y คือ

$f(x,y)$	0	1	2
0	$\dfrac{3\cdot 2}{8\cdot 7} = \dfrac{6}{56}$	$\dfrac{2(3\cdot 3)}{8\cdot 7} = \dfrac{18}{56}$	$\dfrac{3\cdot 2}{8\cdot 7} = \dfrac{6}{56}$
1	$\dfrac{2(2\cdot 3)}{8\cdot 7} = \dfrac{12}{56}$	$\dfrac{2(3\cdot 2)}{8\cdot 7} = \dfrac{12}{56}$	เป็นไปไม่ได้
2	$\dfrac{2\cdot 1}{8\cdot 7} = \dfrac{2}{56}$	เป็นไปไม่ได้	เป็นไปไม่ได้

4. ตัวแปรสุ่ม X และ Y มีฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วมกันคือ

$$f(x,y) = \begin{cases} a(x+y)^2 & \text{เมื่อ } 0 < x < 1 \text{ และ } 0 < y < 2 \\ 0 & \text{เมื่อ } x, y \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

จงหา $P(X < 0.5, Y > 1)$

แนวคำตอบ หา a จากเงื่อนไขที่ว่า

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2\int_0^1 a(x+y)^2\,dx\,dy \\ &= \int_0^2 \left[\frac{a(x+y)^3}{3}\right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^2 a\left[\frac{(1+y)^3}{3} - \frac{y^3}{3}\right] dy \\ &= a\left[\frac{(1+y)^4}{12} - \frac{y^4}{12}\right]_0^2 \\ &= a\left[\frac{81}{12} - \frac{16}{12} - \frac{1}{12} + 0\right] \\ &= \frac{16a}{3} \end{aligned}$$

ดังนั้น $a = \dfrac{3}{16}$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
P(X < 0.5,\, Y > 1) &= \int_0^{0.5} \int_1^2 f(x,y)\,dy\,dx \\
&= \int_0^{0.5} \int_1^2 \frac{3}{16}(x+y)^2\,dy\,dx \\
&= \int_0^{0.5} \frac{3}{16}\left[\frac{(x+y)^3}{3}\right]_{y=1}^{y=2} dx \\
&= \int_0^{0.5} \frac{3}{16}\left[\frac{(x+2)^3}{3} - \frac{(x+1)^3}{3}\right] dx \\
&= \frac{3}{16}\left[\frac{(x+2)^4}{12} - \frac{(x+1)^4}{12}\right]_0^{0.5} \\
&= \frac{3}{16}\left[\frac{2.5^4}{12} - \frac{1.5^4}{12}\right] - \frac{3}{16}\left[\frac{2^4}{12} - \frac{1}{12}\right] \\
&= \frac{3}{16}\left[\frac{34}{12}\right] - \frac{3}{16}\left[\frac{15}{12}\right] \\
&= \frac{102}{192} - \frac{45}{192} = \frac{57}{192} = \frac{19}{64} \qquad \#
\end{aligned}
$$

5. ให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่องที่มีฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วมกันคือ

$$
f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & \text{เมื่อ } x > 0 \text{ และ } y > 0 \\ 0 & \text{เมื่อ } x, y \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}
$$

จงตรวจสอบว่า X และ Y เป็นอิสระต่อกันหรือไม่

แนวคำตอบ จะได้มาร์จินัลของ X คือ

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \int_0^{\infty} e^{-(x+y)}\,dy \\
&= e^{-x}\int_0^{\infty} e^{-y}\,dy \\
&= e^{-x}\lim_{t\to\infty}\int_0^{t} e^{-y}\,dy \\
&= e^{-x}\lim_{t\to\infty}\left[-e^{-y}\right]_0^t = e^{-x}\lim_{t\to\infty}\left[-e^{-t}+1\right] = e^{-x}
\end{aligned}
$$

และมาร์จินัลของ Y คือ

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \int_0^{\infty} e^{-(x+y)}\,dx \\
&= e^{-y}\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx \\
&= e^{-y}\lim_{t\to\infty}\int_0^{t} e^{-x}\,dx \\
&= e^{-y}\lim_{t\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^t = e^{-y}\lim_{t\to\infty}\left[-e^{-t}+1\right] = e^{-y}
\end{aligned}
$$

สำหรับ $x > 0$ และ $y > 0$ จะได้ว่า

$$
f(x,y) = e^{-(x+y)} = e^{-x}\cdot e^{-y} = f_X(x)f_Y(y)
$$

ดังนั้น X และ Y เป็นอิสระต่อกัน $\qquad \#$

6. กล่องใบหนึ่งบรรจุลูกบอลสีแดง 3 ลูก สีน้ำเงิน 5 ลูก และสีเขียว 2 ลูก หยิบลูกบอลครั้งละ 1 ลูกอย่างสุ่ม 3 ครั้ง โดยหยิบแล้วใส่กล่องกลับคืนก่อนจะหยิบครั้งต่อไป จงหาค่าคาดคะเนของจำนวนของลูกบอลสีแดงที่หยิบได้

แนวคำตอบ ให้ X แทนจำนวนครั้งที่หยิบได้ลูกบอลสีแดง เมื่อหยิบลูกบอลครั้งละ 1 ลูกอย่างสุ่ม 3 ครั้ง โดยหยิบแล้วใส่กล่องกลับคืนก่อนจะหยิบครั้งต่อไป นั่นคือ $X = 0, 1, 2, 3$
ให้ R แทนสีแดง (3 ลูก) และ O แทนสีที่ไม่ใช่สีแดง (7 ลูก)

- กรณี $X = 0$ หมายถึงไม่ได้สีแดง คือ OOO จะได้ว่า

$$P(X = 0) = \frac{7 \cdot 7 \cdot 7}{10 \cdot 10 \cdot 10} = \frac{343}{1000}$$

- กรณี $X = 1$ หมายถึงสีแดง 1 ลูก ได้ทั้งหมด 3 แบบ คือ ROO ORO และ OOR จะได้ว่า

$$P(X = 1) = \frac{3(3 \cdot 7 \cdot 7)}{10 \cdot 10 \cdot 10} = \frac{441}{1000}$$

- กรณี $X = 2$ หมายถึงสีแดง 2 ลูก ได้ทั้งหมด 3 แบบ คือ RRO ORR และ ROR จะได้ว่า

$$P(X = 1) = \frac{3(3 \cdot 3 \cdot 7)}{10 \cdot 10 \cdot 10} = \frac{189}{1000}$$

- กรณี $X = 3$ หมายถึงได้สีแดง 3 ลูก คือ RRR จะได้ว่า

$$P(X = 3) = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{10 \cdot 10 \cdot 10} = \frac{27}{1000}$$

การแจกแจงความจะเป็นดังตารางต่อไปนี้

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	$\frac{343}{1000}$	$\frac{441}{1000}$	$\frac{189}{1000}$	$\frac{27}{1000}$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} E(x) &= \sum xf(x) \\ &= 0 \cdot \frac{343}{1000} + 1 \cdot \frac{441}{1000} + 2 \cdot \frac{189}{1000} + 3 \cdot \frac{27}{1000} \\ &= \frac{900}{1000} = 0.9 \end{aligned}$$

ค่าคาดคะเนของจำนวนของลูกบอลสีแดงที่หยิบได้คือ 0.9 ลูก $\#$

7. ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง ซึ่งมี p.d.f คือ

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{3} & \text{เมื่อ } -1 < x < 2 \\ 0 & \text{เมื่อ } x \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

จงหาค่าคาดคะเน $E((X-1)^2)$
แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} E((X-1)^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-1)^2 f(x)\,dx = \int_{-1}^{2} (x^2 - 2x + 1)\frac{x^2}{3}\,dx \\ &= \frac{1}{3}\int_{-1}^{2} x^4 - 2x^3 + x^2\,dx = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{2} \\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{5}(32) - \frac{1}{2}(16) + \frac{1}{3}(8)\right] - \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right] \\ &= \frac{16}{45} + \frac{31}{90} = \frac{7}{10} \quad \# \end{aligned}$$

8. การแจกแจงความน่าจะเป็นร่วมกันของ X และ Y ดังตาราง

$f(x,y)$	1	2	3
1	0.01	0.25	0.05
3	0.30	0.14	0.15
5	0.02	0.05	0.03

จงหา $E(X+Y)$

แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
E(X+Y) &= \sum_x \sum_y (x+y)f(x,y) \\
&= (1+1)f(1,1)+(1+2)f(1,2)+(1+3)f(1,3)+ \\
&\quad (3+1)f(3,1)+(3+2)f(3,2)+(3+3)f(3,3)+ \\
&\quad (5+1)f(5,1)+(5+2)f(5,2)+(5+3)f(3,3) \\
&= 2(0.01)+3(0.25)+4(0.05)+ \\
&\quad 4(0.30)+5(0.14)+6(0.15)+ \\
&\quad 6(0.02)+7(0.05)+8(0.03) \\
&= 4.48 \quad \#
\end{aligned}
$$