เฉลย Assignment 6
MAC1304 ความน่าเป็นและสถิติ

หัวข้อ ความแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม การแจกแจงยูนิฟอร์ม แบร์นูลลี และทวินาม **สัปดาห์ที่** 6 **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง ซึ่งมี p.d.f คือ

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{3} & \text{เมื่อ } -1 < x < 2 \\ 0 & \text{เมื่อ } x \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

จงหาค่า σ_{3X+1}

แนวคำตอบ ค่าเฉลี่ยของ X คือ

$$\begin{aligned} \mu = E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \int_{-1}^{2} x \cdot \frac{x^2}{3}\,dx = \int_{-1}^{2} \frac{x^3}{3}\,dx \\ &= \left[\frac{x^4}{12}\right]_{-1}^{2} = \frac{16}{12} - \frac{1}{12} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_{-1}^{2} x^2 \cdot \frac{x^2}{3}\,dx = \int_{-1}^{2} \frac{x^4}{3}\,dx \\ &= \left[\frac{x^5}{15}\right]_{-1}^{2} = \frac{32}{15} + \frac{1}{15} = \frac{33}{15} = \frac{11}{5} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\sigma_{3X+1}^2 = 3^2\sigma_X^2 = 9[E(X^2) - \mu^2] = 9\left[\frac{11}{5} - \left(\frac{5}{4}\right)^2\right] = \frac{459}{80} = 5.7375 \quad \#$$

2. การแจกแจงความน่าจะเป็นร่วมกันของ X และ Y ดังตาราง

$f(x,y)$	1	2	3
1	0.01	0.25	0.05
3	0.30	0.14	0.15
5	0.02	0.05	0.03

จงหาความแปรปรวนร่วมของ X และ Y

แนวคำตอบ พิจารณาตาราง

$f(x,y)$	1	2	3	$h(y)$
1	0.01	0.25	0.05	0.31
3	0.30	0.14	0.15	0.59
5	0.02	0.05	0.03	0.10
$g(x)$	0.33	0.44	0.23	

จะได้ว่า

$$\mu_X = E(X) = \sum_x xg(x) = 1g(1) + 2g(2) + 3g(3) = 1(0.33) + 2(0.44) + 3(0.23) = 1.90$$

$$\mu_Y = E(Y) = \sum_y yh(y) = 1h(1) + 3h(3) + 5h(5) = 1(0.31) + 3(0.59) + 5(0.10) = 2.58$$

และ

$$\begin{aligned}E(XY) &= \sum_x \sum_y xyf(x,y)\\ &= 1\cdot 1f(1,1) + 1\cdot 3f(1,3) + 1\cdot 5f(1,5) +\\ &\quad 2\cdot 1f(2,1) + 2\cdot 3f(2,3) + 2\cdot 5f(2,5) +\\ &\quad 3\cdot 1f(3,1) + 3\cdot 3f(3,3) + 3\cdot 5f(3,5)\\ &= 1(0.01) + 3(0.30) + 5(0.02) + 2(0.25) + 6(0.14) + 10(0.05) + 3(0.05) + 9(0.15) + 15(0.03)\\ &= 4.8\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\sigma_{XY} = E(XY) - E(X)E(Y) = 4.8 - (1.90)(2.58) = -0.102$$

ความแปรปรวนร่วมของ X และ Y เท่ากับ -0.102 #

3. สุ่มหยิบมะม่วง 3 ลูกพร้อมกัน จากตะกร้าที่มีมะม่วง 10 ผล ซึ่งมีมะม่วงเปรี้ยวปนอยู่ 4 ผล จงหาค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของจำนวนมะม่วงเปรี้ยวที่จะหยิบได้

แนวคำตอบ ให้ X คือจำนวนมะม่วงเปรี้ยวที่จะหยิบได้ นั่นคือ $X = 0, 1, 2, 3$
สร้างตารางแจกแจกความน่าจะเป็นได้ดังนี้

x	0	1	2	3
$f(x)$	$\dfrac{\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}} = \dfrac{1}{6}$	$\dfrac{\binom{6}{2}\binom{4}{1}}{\binom{10}{3}} = \dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\binom{6}{1}\binom{4}{2}}{\binom{10}{3}} = \dfrac{3}{10}$	$\dfrac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} = \dfrac{1}{30}$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\mu = E(X) = \sum_x xf(x) &= 0f(0) + 1f(1) + 2f(2) + 3f(3)\\ &= 0 + 1\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{3}{10} + 3\cdot\frac{1}{30} = \frac{6}{5} = 1.2\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}E(X^2) = \sum_x x^2 f(x) &= 0^2 f(0) + 1^2 f(1) + 2^2 f(2) + 3^2 f(3)\\ &= 0 + 1\cdot\frac{1}{2} + 4\cdot\frac{3}{10} + 9\cdot\frac{1}{30} = 2\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\sigma_X^2 = E(X^2) - \mu^2 = 2 - \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{14}{25} = 0.56$$

สรุปได้ว่าค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของจำนวนมะม่วงเปรี้ยวที่จะหยิบได้เท่ากับ 1.2 และ 0.56 ตามลำดับ #

4. ให้ X เป็นตัวแปรสุ่ม ถ้าค่าเฉลี่ยเท่ากับ 2 และความแปรปรวนเท่ากับ 16 จงหา $E((X+2)^2)$

แนวคำตอบ จะเห็นว่า $E(X) = \mu = 2$ และ $\sigma_X^2 = 16$

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 &= E(X^2) - \mu^2\\ 16 &= E(X^2) - 2^2\\ E(X^2) &= 20\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}E((X+2)^2) &= E(X^2 + 4X + 4)\\ &= E(X^2) + 4E(X) + 4\\ &= 20 + 4(2) + 4\\ &= 32 \quad \#\end{aligned}$$

5. ถ้า X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มโดยที่ a, b เป็นค่าคงตัว จงแสดงว่า $\text{cov}(aX, bY) = ab \cdot \text{cov}(X, Y)$

   บทพิสูจน์. ให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มโดยที่ a, b เป็นค่าคงตัว จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\text{cov}(aX, bY) &= E[(aX)(bY)] - E(aX)E(aY) \\
&= E[ab(XY)] - aE(X)bE(Y) \\
&= abE[XY] - abE(X)E(Y) \\
&= ab(E[XY] - E(X)E(Y)) \\
&= ab \cdot \text{cov}(X, Y)
\end{aligned}$$

□

6. การแจกแจงแบร์นูลลีที่มีความแปรปรวนเท่ากับ $\dfrac{2}{9}$ จงหาความน่าจะเป็นที่เกิดความสำเร็จ

   แนวคำตอบ จะเห็นว่า $\sigma^2 = \dfrac{2}{9}$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= pq = p(1-p) \\
\frac{2}{9} &= p - p^2 \\
2 &= 9p - 9p^2 \\
9p^2 - 9p + 2 &= 0 \\
(3p-2)(3p-1) &= 0 \\
p &= \frac{1}{3}, \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

   ดังนั้นความน่าจะเป็นที่เกิดความสำเร็จเท่ากับ $\dfrac{1}{3}$ หรือ $\dfrac{2}{3}$ #

7. มหาวิทยาลัยแห่งหนึ่งกล่าวอ้างว่ามีนักศึกษาสอบผ่านเกณฑ์ภาษาอังกฤษจำนวน 70% ถ้าสุ่มเลือกนักศึกษามา 30 คน เพื่อสอบถามผลการสอบว่าผ่านเกณฑ์หรือไม่ จงหา

   แนวคำตอบ การตรวจสอบดังกล่าวมีการแจกแจงทวินามซึ่ง $n = 30$ และ $p = 0.7$ เมื่อ $x = 0, 1, ..., 30$

   7.1 ความน่าจะเป็นที่สอบผ่านเกณฑ์จำนวน 20 คน
   จะได้ว่า

$$P(X = 20) = b(20; 30, 0.7) = 0.14156$$

   ดังนั้นความน่าจะเป็นที่สอบผ่านเกณฑ์จำนวน 20 คน เท่ากับ 0.14156 #

   7.2 ความน่าจะเป็นที่สอบผ่านเกณฑ์ไม่เกิน 15 คน
   จะได้ว่า

$$P(X \le 15) = \sum_{x=0}^{15} b(x; 30, 0.7) = 0.01694$$

   ดังนั้นความน่าจะเป็นที่สอบผ่านเกณฑ์ไม่เกิน 15 คน เท่ากับ 0.01964 #

   7.3 ความน่าจะเป็นที่สอบผ่านเกณฑ์อย่างน้อย 15 คนแต่ไม่เกิน 20 คน
   จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
P(15 \le X \le 20) &= \sum_{x=15}^{20} b(x; 30, 0.7) \\
&= \sum_{x=0}^{20} b(x; 30, 0.7) - \sum_{x=0}^{14} b(x; 30, 0.7) \\
&= 0.41119 - 0.00637 \\
&= 0.40482
\end{aligned}$$

   ดังนั้นความน่าจะเป็นที่สอบผ่านเกณฑ์อย่างน้อย 15 คนแต่ไม่เกิน 20 คนเท่ากับ 0.40482 #

8. ถ้าข้อมูลจากกรมประกันชีวิต 0.92% ของคนที่มีอายุ 60-64 ปี จะเสียชีวิต ถ้าสุ่มตัวอย่างคนที่มีอายุ 60-64 ปี มา 500 คน จงหาความน่าจะเป็นที่อย่างน้อย 10 คนเสียชีวิต

แนวคำตอบ การตรวจสอบดังกล่าวมีการแจกแจงทวินามซึ่ง $n = 500$ และ $p = 0.0092$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} P(X \geq 10) &= 1 - P(X \leq 9) \\ &= 1 - \sum_{x=0}^{9} b(x; 500, 0.0092) \\ &= 1 - 0.9810 \\ &= 0.0190 \end{aligned}$$

ดังนั้นความน่าจะเป็นที่คนที่มีอายุ 60-64 ปีอย่างน้อย 10 คนเสียชีวิต เท่ากับ 0.0190 $\#$